République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Saïda

Faculté des Sciences

Mémoire de Master

Spécialité

Mathématiques

Option

Equations Différentielles

Sujet

Le problème de Darboux pour quelques classes d'équations différentielles partielles

Présenté par

Benmansour Tayeb

Soutenu le : ../06/2015

Jury :

Président : D. Djebbouri, Université de Saïda, Algérie

Encadreur : S. Abbas, Université de Saïda, Algérie

Examinateur : F.Z. Mostefai, Université de Saïda, Algérie

Examinateur : K. Djerfi, Université de Saïda, Algérie

Dédicaces

Mon cher papa, Monsieur Mhaidi, qui a toujours cru en moi et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.

Ma chère mère, Hania, que je ne cesse de remercier pour tout ce qu'elle m'a donné. Elle m'a supporté 9 mois dans son ventre et a fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui. Que Dieu la récompense pour tous ces bienfaits.
À tous mes proches de la famille Benmansour, et plus particulièrement, mes soeurs et mes frères tout à son nom et sans oublier la familles Benouis.
À mes oncles Lhadj Tayeb, Lhadj Mokhtar, Lhadj Mhamad, Mohamed, Lhadj, Ali, Abdelkader, Tayeb et Ahmad.
À mes amis proches : Ndjadi, Abdelkader, Bachir, Hamid, Tayeb, Mourad, Mohamed, Mokhtar, Omar.
Tout qui mon donne de l'aide et des courages surtout : Mohamed, Fatima et Zohra.
Toutes mes amies qui ont toujours été présentes pour moi.
Tous les étudiants du département de mathématique surtout mes amis de la promotion.

Tayeb

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

J'adresse le grand remerciement à notre encadreur Dr. Saïd Abbas qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils du début à la fin de ce travail.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fais en acceptant de siéger à mon soutenance.

Finalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et à tout ce qui ont participé à réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

1 Préliminaires **9**

1.1 Notations et Définitions 9

1.2 Lemmes Préliminaires 10

2 Le Problème de Darboux pour les Equations Différentielles fonctionnelles **15**

2.1 Introduction 15

2.2 Existence des Solutions 16

2.3 Exemple 26

3 Equations Différentielles partielles Perturbées **28**

3.1 Introduction 28

3.2 Existence des Solutions 29

3.3 Exemple 38

4 Equations Différentilles de type Neutre **40**

4.1 Introduction 40

4.2 Existence des Solutions 40

4.3 Exemple 43

Introduction

Le calcul différentiel est une branche très importante des mathématiques, qui s'est surtout développé par Archimède, Leibniz et Newton au 17ème siècle à partir de l'algèbre et de la géométrie. Il implique deux idées majeures complémentaires :
1. La notion de différentielle, qui établit une relation entre les variations de plusieurs fonctions, ainsi que la notion de dérivées. La vitesse, l'accélération, et les pentes des courbes des fonctions mathématiques en un point donné peuvent toutes être décrites sur une base symbolique commune.
2. Le calcul intégral, qui développe l'idée d'intégration, fait intervenir le concept d'aire sous-tendue par le graphe d'une fonction et inclut des notions connexes comme le volume.

Cependant, lorsque le calcul infinitésimal a été initialement développé, une controverse fut soulevée sur qui en avait la paternité ; Leibniz et Newton étant les principaux candidats. La vérité ne sera probablement jamais connue et de toute façon elle importe peu de nos jours. La contribution majeure de Leibniz fut sans conteste son système de notation.
On pense que Newton a découvert plusieurs concepts bien avant Leibniz, mais que ce dernier fut le premier à les publier. Actuellement, on considère que Leib-

niz et Newton ont développé le calcul infinitésimal indépendamment. Barrow, Descartes, Fermat, Huygens et Wallis contribuèrent également dans une moindre mesure au développement du calcul infinitésimal. Kowa Seki, un mathématicien japonais contemporain de Leibniz et Newton, a aussi énoncé quelques principes fondamentaux du calcul intégral.

En mathématiques, et plus précisément en analyse, le théorème dit de Cauchy-Lipschitz, (ou de Picard Lindelöf chez les anglophones) concerne les équations différentielles. Sous des conditions de régularité d'une fonction définissant une équation, il garantit l'unicité d'une solution répondant à une condition initiale dite de Cauchy et l'existence d'une solution maximale. Ce théorème s'exprime de manière plus ou moins forte. Sous une forme plus élaborée, ce théorème assure que la solution varie continûment si la condition initiale est modifiée, et il en est de même si la fonction définissant l'équation dépend continûment d'un paramètre. Si l'équation est définie par une fonction de classe C^p, la solution est de classe C^{p+1}. Ce théorème peut encore être généralisé au cas où l'équation différentielle n'est plus à valeurs dans un espace vectoriel, mais dans une variété différentielle.

Une première version est démontrée par Augustin-Louis Cauchy durant la première moitié du 19 ème siècle, à l'aide d'une technique d'approximation découverte par Leonhard Euler au siècle précédent. Rudolf Lipschitz généralise l'énoncé en élargissant un peu la classe des équations qui s'y rapportent. Le théorème n'en reste pas moins uniquement un résultat d'existence locale. C'est à la fin de ce siècle que les techniques de démonstration, ainsi que l'énoncé du théorème, sont profondément modifiés. À la suite des travaux de Lazarus Fuchs, les mathématiciens Émile Picard, Paul Painlevé et Henri Poincaré développent une version moderne de l'analyse des équations différentielles. Cette vision permet d'apporter des éléments de réponse sur les solutions maximales, l'unicité et la régularité de la solution. Une version relativement moderne est publiée en 1894 par Ernst Lindelöf. Le théorème se démontre maintenant généralement à l'aide d'un théorème du point fixe et d'une approche topologique, classique en analyse fonctionnelle.

Il y a eu un développement significatif dans les techniques du calcul différentielle et intégral dans l'étude des équations différentielles fonctionnelles, quelques contributions récentes peuvent être vues dans les ouvrages de Abbas *et al.* [2, 3] et les articles de Abbas *et al.* [1, 4], Byszewski [6, 7].
Ce mémoire consiste à étudier l'existence et l'unicité des solutions de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelles. Nos résultats sont interprétés comme éclairage des résultats précédents de Kamont [12] obtenus pour les équations hyperboliques "classiques". Les résultats obtenus sont basés sur quelques théorèmes de point fixe (Le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder et le théorème de Burton-Kirk).

Ce mémoire est composé d'une introduction et de quatre chapitres.

Dans le premier Chapitre, nous présentons des notations, des définitions et certaines notions préliminaires. Dans la *section 1.1*, on va donner des notations concernant la théorie des espaces de Banach. La *section 1.2* est consacrée à la théorie de point fixe, ici on va présenter les théorèmes principaux qui seront employés dans les autres chapitres. Nous présentons encore une généralisation de lemme de Gronwall pour deux variables indépendantes.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelle. Nous présentons deux résultats, le premier est basé sur le principe de contraction de Banach, et l'autre résultat sur l'alternative non-linéaire de type Leray-Schauder. Nous présentons deux résultats similaires pour le problème non local. Le Chapitre 3 est intéressé à étudier un problème perturbés. Nous présentons un résultat basé sur un théorème de point fixe de Burton et Kirk pour la somme de deux opérateurs, un opérateur contractif et un autre complètement continu. Nous présentons deux résultats pour le problème non local et enfin nous présentons un exemple illustratif. Le dernier Chapitre est consacré à l'étude d'un problème de type neutre. Nous présentons un résultat basé sur l'alternative non-linéaire de type Leray-Schauder. Aussi, on achève cet chapitre par un exemple illustratif.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, des définitions et les faits préliminaires qui seront utilisées dans ce mémoire.

1.1 Notations et Définitions

Définition 1.1.1. *On appelle espace de Banach $(E, \|.\|_E)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

Soient $J := [0, a] \times [0, b]$; $a, b > 0$ et $(E, \|.\|_E)$ un espase de Banach. On note $C(J, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues de J dans E avec la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{(t,x)\in J} \|u(t, x)\|_E.$$

Définition 1.1.2. *Une fonction continue $f : J \times E \to E$ définie sur un ouvert $J \times U$ de $\mathbb{R} \times E$ est dite Lipschitizienne si, pour tout $u_1, u_2 \in U$, et $t, x > 0$, il* *existe* $c > 0$ *telle que*

$$\|f(t,x,u_1) - f(t,x,u_2)\|_E \le c\|u_1 - u_2\|_E.$$

De plus, si $0 < c \le 1$, f *est dite Contractante.*

Exemple : $f(t,x,u) = txu(t,x),\ t,x \in [0,a];\ a > 0$ est de type Lipschitz.

$En\ effet,\ Pour\ tout\ u_1,u_2 \in U,\ et\ t,x > 0 : |f(t,x,u_1)-f(t,x,u_2)| \le a^2|u_1-u_2|.$

Corollaire : Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert borné $J \times U$ de $\mathbb{R} \times E$ (la fonction f et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial u}$ par rapport à u sont continues dans un borné $\Rightarrow$ bornées), alors f est Lipschitizienne.

Définition 1.1.3. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $f : E \to F$ *une fonction.*

- f *est dite compacte si l'image* $f(E)$ *est relativement compacte dans* F.
- f *est dite compelètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de* E *est relativement compacte dans* F.

1.2 Lemmes Préliminaires

Posons $(D^2_{tx}w)(t,x) := \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}w(t,x);\ (t,x) \in J.$

Lemme 1.2.1. *Soit* $f \in C(J,E)$. *Une fonction* $w \in C(J,E)$ *telle que sa dérivée*

$(D^2_{tx}w)(t,x)$ *existe et est intégrable sur* J *est une solution du problème*

$$\begin{cases} (D^2_{tx}w)(t,x) = f(t,x);\ (t,x) \in J, \\ u(t,0) = \varphi(t);\ t \in [0,a], \\ u(0,x) = \psi(x);\ x \in [0,b], \\ \varphi(0) = \psi(0), \end{cases} \tag{1.1}$$

si et seulement si $w(t,x)$ *vérifie*

$$w(t,x) = \lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi)d\xi ds. \tag{1.2}$$

où

$$\lambda(t,x) = \varphi(t) + \psi(x) - \varphi(0).$$

Preuve : *Soit* $w(t,x)$ *une solution du problème* (1.1). *Alors,*

$$(D^2_{tx}w)(t,x) = f(t,x),$$

d'où nous obtenons

$$\int_0^t \int_0^x (D^2_{s\xi}w)(s,\xi)d\xi ds = \int_0^t \int_0^x f(s,\xi)d\xi ds.$$

Depuis

$$\int_0^t \int_0^x (D^2_{s\xi}w)(s,\xi)d\xi ds = w(t,x) - w(t,0) - w(0,x) + w(0,0),$$

il s'ensuit

$$w(t,x) = \lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi)d\xi ds.$$

Maintenant si $w(t,x)$ *vérifie* (1.2). *il est claire que* $w(t,x)$ *vérifie* (1.1).

Lemme 1.2.2. *Soient* $f, g \in C(J,E)$. *Une fonction* $u \in C(J,E)$ *telle que la dérivée* $D^2_{tx}(u-g)$ *existe et intégrable sur* J *est une solution du problème*

$$\begin{cases} D^2_{tx}[u(t,x) - g(t,x)] = f(t,x);\ (t,x) \in J, \\ u(t,0) = \varphi(t),\ u(0,x) = \psi(x);\ t,x \in J, \\ \varphi(0) = \psi(0), \end{cases} \tag{1.3}$$

si et seulement si $u(t,x)$ *vérifie*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \lambda(t,x) + g(t,x) - g(t,0) - g(0,x) + g(0,0) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi)d\xi ds;\ (t,x) \in J, \end{aligned} \tag{1.4}$$

Preuve : *Soit* $u(t,x)$ *une solution du problème* (1.3). *Alors,*

$$D^2_{tx}(u-g)(t,x) = f(t,x).$$

Donc, on obtient

$$\int_0^t \int_0^x D^2_{s\xi}(u-g)(s,\xi)d\xi ds = \int_0^t \int_0^x f(s,\xi)d\xi ds.$$

Depuis

$$\int_0^t \int_0^x D^2_{s\xi}(u-g)(s,\xi)d\xi ds = u(t,x) - u(t,0) - u(0,x) + u(0,0)$$

$$-g(t,x) + g(t,0) + g(0,x) - g(0,0),$$

nous obtenons

$$u(t,x) = \lambda(t,x) + g(t,x) - g(t,0) - g(0,x) + g(0,0) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi)d\xi ds.$$

Soit $u(t,x)$ *satisfait* (1.4). *Alors* $u(t,x)$ *vérifie*

$$D^2_{tx}[u(t,x) - g(t,x)] = f(t,x), \text{ on } J.$$

Théorème 1.2.1. *(Théorème de point fixe de Banach) [8]*
Soient (F,d) *un espace métrique complet et* $f : F \to F$ *une application strictement contractante i.e., il existe* $0 < c < 1$ *telle que, pour tout* $u, v \in F$, $d(f(u), f(v)) < cd(u,v)$. *Alors il existe un unique point fixe* u_0 *i.e.,* $f(u_0) = u_0$.

Théorème 1.2.2. *(Alternative non linéaire de type Leray-Schauder) [8]*
Soient X *un espace de Banach,* U *un ouvert d'une partie convexe* D *de* X *et* $0 \in U$. *Supposons que* $N : \overline{U} \to D$ *est un opérateur continu et compact.*

Alors une seule des propositions suivantes est satisfaite,

$(S1)$ N *admet un point fixe dans* $\overline{U}$, *ou*

$(S2)$ *Il existe* $\nu \in (0,1)$ *et* $u \in \partial U$ *avec* $u = \nu\ N(u)$.

Théorème 1.2.3. *(Théorème de Burton-Kirk) [5]*
Soientt X *un espace de Banach et* $A, B : X \to X$ *deux fonctions vérifient :*

(i) A est une contraction, et

(ii) B est complètement continue.

Alors une seule des propositions suivantes est satisfaite,

(S1) l'operateur équation $u = A(u) + B(u)$ a une solution, ou

(S2) l'ensemble $\mathcal{E} = \{u \in X : u = \nu A(\frac{u}{\nu}) + \nu B(u),\ \nu \in (0,1)\}$ n'est pas borné.

Lemme 1.2.3. *(Lemme d'Ascoli-Arzelà) [9]*

Soit $A \subset C(J, E)$. A est relativement compact (i.e $\bar{A}$ est compact) si et seulement si :

1. *A est uniformément borné.*
2. *A est équicontinu.*

Dans la suite nous ferons usage du lemme suivant :

Lemme 1.2.4. *(Lemme de Gronwall) [10]*

Soit la fonction $\upsilon : J \to [0, \infty)$ et $\omega(t, x)$ une fonction non négative et localement intégrable sur J. S'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\upsilon(t, x) \leq \omega(t, x) + c \int_0^t \int_0^x \upsilon(s, \xi) d\xi ds,$$

alors, il existe une constante δ telle que

$$\upsilon(t, x) \leq \omega(t, x) + \delta c \int_0^t \int_0^x \omega(s, \xi) d\xi ds,$$

pour tous $(t, x) \in J$.

Chapitre 2

Le Problème de Darboux pour les Equations Différentielles fonctionnelles

2.1 Introduction

Cette chapitre est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du système

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = f(t,x,u(t,x));\ \text{si}\ (t,x) \in J := [0,a] \times [0,b], \tag{2.1}$$

$$u(t,0) = \varphi(t),\ u(0,x) = \psi(x);\ t,x \in J, \tag{2.2}$$

où $f : J \times E \to E$ une fonction donnée, $\varphi \in C([0,a],E)$ et $\psi \in C([0,b],E)$.
En suite on va considérer le problème non local suivant

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)); \text{ si } (t,x) \in J, \tag{2.3}$$

$$u(t,0) + Q(u) = \varphi(t),\ u(0,x) + K(u) = \psi(x);\ t,x \in J, \tag{2.4}$$

où f, φ, ψ sont comme dans le problème (2.1)-(2.2) et $Q, K : C(J,E) \to E$ sont des fonctions continues.

2.2 Existence des Solutions

Définition 2.2.1. *Une fonction $u \in C := C(J,E)$ où sa dérivée D^2_{tx} existe et intégrable est dite solution du problème (2.1)-(2.2) si u vérifie l'équation (2.1) et les conditions (2.2) sur J.*

Maintenant, nous présentons les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.2.1. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H_1) *$f : J \times E \to E$ est continue ;*

(H_2) *Pour tout $u,\ v \in C$ et $(t,x) \in J$, il existe $k > 0$ telle que*

$$\|f(t,x,u) - f(t,x,v)\|_E \le k\|u - v\|_\infty.$$

Si

$$abk < 1, \tag{2.5}$$

alors, le problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution sur J

Démonstration : Pour transformer notre problème en un problème de point fixe, considérons l'opérateur $N : C \to C$ défini par,

$$(Nu)(t,x) = \lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds; \ (t,x) \in J. \tag{2.6}$$

Soient $v, w \in C$. Alors, pour $(t,x) \in J$, on a

$$\|(Nv)(t,x) - (Nw)(t,x)\|_E \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,v(s,\xi)) - f(s,\xi,w(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\leq \int_0^t \int_0^x k\|v - w\|_\infty d\xi ds \\
&\leq k\|v - w\|_\infty \int_0^a \int_0^b d\xi ds \\
&= abk\|v - w\|_\infty.
\end{aligned}$$

par conséquence

$$\|N(v) - N(w)\|_\infty \leq abk\|v - w\|_\infty.$$

d'après (2.5) nous concluons que N est une contraction, d'où N admet un point fixe unique d'après le principe de contraction de Banach.

Théorème 2.2.2. *Supposons que (H_1) et l'hypothèse suivante est vérifiée :*

(H_3) *Il existe $q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\|f(t,x,u)\|_E \leq q(t,x)\|u\|_\infty,$$

pour $(t,x) \in J$ *et* $u \in C$. *Alors le problème (2.1)-(2.2)admet au moins une solution sur* J.

Démonstration : Considérons l'opérateur N défini dans (2.6). Nous allons montrer que l'opérateur N est continue et complètement continue.

Etape 1 : N est continu.

Soit la suite $\{u_n\}$ telle que $u_n \to u$ dans C. Soit $\eta > 0$ telle que $\|u_n\| \leq \eta$.

Alors

$$\begin{aligned}
\|(Nu_n)(t,x) - (Nu)(t,x)\|_E &\leq \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,u_n(s,\xi)) - f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\leq \int_0^a \int_0^b \sup_{(s,\xi)\in J} \|f(s,\xi,u_n(s,\xi)) - f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\leq \sup_{(s,\xi)\in J} \|f(s,\xi,u_n(s,\xi)) - f(s,\xi,u(s,\xi))\| \int_0^a \int_0^b d\xi ds \\
&\leq ab\|f(.,.,u_n(.,.)) - f(.,.,u(.,.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'après la continuité de la fonction f, on obtient

$$\|N(u_n) - N(u)\|_\infty \leq ab\|f(.,.,u_n(.,.)) - f(.,.,u(.,.))\|_\infty \to 0 \text{ Quand } n \to \infty.$$

Etape 2 : N transforme les parties bornées dans des parties bornées dans C.

En effet, pour $\eta^* > 0$, il existe une constante $\widetilde{\ell}$ telle que pour $u \in B_{\eta^*} = \{u \in C :$

$\|u\|_\infty \leq \eta^*\}$, on obtient $\|N(u)\|_\infty \leq \widetilde{\ell}$. Par (H_3) on a pour $(t,x) \in J$,

$$\begin{aligned} \|(Nu)(t,x)\|_E &\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\ &\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \int_0^t \int_0^x q(s,\xi)\|u\|_\infty d\xi ds \\ &\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \|q\|_\infty \eta^* \int_0^a \int_0^b d\xi ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|N(u)\|_\infty \leq \|\lambda\|_\infty + ab\|q\|_\infty \eta^* := \widetilde{\ell}.$$

Etape 3 : <u>N transforme les bornées dans des parties equicontinues dans C.</u>

Soient $(t_1,x_1),(t_2,x_2) \in (0,a] \times (0,b]$, $t_1 < t_2$, $x_1 < x_2$, B_{η^*} une partie bornée de C Comme dans l'étape 2, et soit $u \in B_{\eta^*}$. Alors

$$\|(Nu)(t_2,x_2)-(Nu)(t_1,x_1)\|_E = \|\lambda(t_1,x_1)-\lambda(t_2,x_2)\|_E + \left\| \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(s,\xi,u(s,\xi)) d\xi ds \right\|_E$$

$$+ \left\| \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} f(s,\xi,u(s,\xi)) d\xi ds \right\|_E + \left\| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{x_1} f(s,\xi,u(s,\xi)) d\xi ds \right\|_E$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\lambda(t_1,x_1) - \lambda(t_2,x_2)\|_E \\ &\quad + \|q\|_\infty \eta^* \Big[\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} d\xi ds + \int_0^{t_1} \int_{x_1}^{x_2} d\xi ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{x_1} d\xi ds \Big] \end{aligned}$$

$$\leq \|\lambda(t_1,x_1) - \lambda(t_2,x_2)\|_E + \|q\|_\infty \eta^* (t_2 x_2 - t_1 x_1).$$

Quand $t_1 \to t_2$, $x_1 \to x_2$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. En conséquence des étapes 1 à 3, d'après le théorème Arzela-Ascoli, on peut conclure que N est continu et complètement continu.

Etape 4 : L'estimation apriori.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un ouvert $U \subseteq C$ avec $u \neq \nu N(u)$, pour $\nu \in (0,1)$ et $u \in \partial U$.

Soit $u \in C$ et $u = \nu N(u)$ pour certains $0 < \nu < 1$. Ainsi, pour chaque $(t,x) \in J$,

$$u(t,x) = \nu\lambda(t,x) + \nu \int_0^t \int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds.$$

Cela implique par (H_3) que, pour $(t,x) \in J$, on obtient

$$\|u(t,x)\|_E \leq \|\lambda(t,x)\|_E + \int_0^t \int_0^x q(s,\xi)\|u(s,\xi)\|_E d\xi ds.$$

D'après le Lemme 1.2.4, il existe une constante δ telle que

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_E &\leq \|\lambda\|_\infty + \delta\|q\|_\infty\|\lambda\|_\infty \int_0^a \int_0^b d\xi ds \\ &\leq \|\lambda\|_\infty[1 + ab\delta\|q\|_\infty] := M. \end{aligned}$$

Par conséquence

$$\|u\|_\infty \leq M.$$

Posons

$$U = \{u \in C : \|u\|_\infty < M + 1\}.$$

Par nos choix de U, il n'ya pas de $u \in \partial U$ tel que $u = \nu N(u)$, pour $\nu \in (0,1)$. Comme une conséquence de l'alternative non linéaires de type Leray-Schauder

[8], on en déduire que N admet un point fixe u dans $\overline{U}$ qui est une solution du problème (2.1)-(2.2).

Maintenant, nous présentons deux des résultats pour le problème non-local (2.3)-(2.4).

Définition 2.2.2. *Une fonction $u \in C$ est dite solution du (2.3)-(2.4) si u satisfait l'équations (2.3) et les conditions (2.4) dans J.*

Théorème 2.2.3. *Supposons que $(H_1), (H_2)$ et les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H_2') Il existe $\tilde{k} > 0$ telle que

$$\|Q(u) - Q(v)\|_E \leq \tilde{k}\|u - v\|_\infty, \text{ pour } u, v \in C(J, E),$$

(H_2'') Il existe $k^* > 0$ telle que

$$\|K(u) - K(v)\|_E \leq k^*\|u - v\|_\infty, \text{ pour } u, v \in C(J, E).$$

Si

$$abk + \tilde{k} + k^* < 1, \tag{2.7}$$

alors, il existe une unique solution du problème (2.3)-(2.4) sur $[0, a] \times [0, b]$.

Démonstration : Pour transformer notre problème en un problème de point fixe, considérons l'opérateur $N : C \to C$ défini par,

$$N(u)(t, x) = \tilde{\lambda}(t, x) + \int_0^t \int_0^x f(s, \xi, u(s, \xi))d\xi ds; \ (t, x) \in J, \tag{2.8}$$

où

$$\tilde{\lambda}(t,x) = \lambda(t,x) - Q(u) - K(u)$$

Soient $v, w \in C$, alors, pour $(t,x) \in J$,

$$\|(Nv)(t,x) - (Nw)(t,x)\|_E \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|Q(v) - Q(w)\|_E + \|K(v) - K(w)\|_E + \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,v(s,\xi)) - f(s,\xi,w(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\leq \|Q(v) - Q(w)\|_E + \|K(v) - K(w)\|_E + \int_0^t \int_0^x k\|v-w\|_\infty d\xi ds \\
&\leq \|Q(v) - Q(w)\|_E + \|K(v) - K(w)\|_E + k\|v-w\|_\infty \int_0^a \int_0^b d\xi ds \\
&\leq \tilde{k}\|v-w\|_\infty + k^*\|v-w\|_\infty + k\|v-w\|_\infty \int_0^a \int_0^b d\xi ds \\
&= (abk + \tilde{k} + k^*)\|v-w\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquence

$$\|N(v) - N(w)\|_\infty \leq (abk + \tilde{k} + k^*)\|v-w\|_\infty.$$

d'après (2.7) nous concluons que N est une contraction, d'où N à un point fixe unique d'après le principe de contraction de Banach.

Théorème 2.2.4. *Supposons que $(H_1), (H_3)$ et les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H_3') *Il existe $\tilde{d} > 0$ telle que*

$$\|Q(u)\|_E \leq \tilde{d}(1 + \|u\|_\infty), \;\; \textit{pour } u \in C(J,E),$$

(H_3'') *Il existe* $d^* > 0$ *telle que*

$$\|K(u)\|_E \leq d^*(1 + \|u\|_\infty), \ \textit{pour } u \in C(J, E).$$

Alors, le problème (2.3)-(2.4) admet au moins une solution sur J.

Démonstration : Considérons l'opérateur N défini dans (2.8). Nous allons montrer que l'opérateur N est continue et complètement continue.

Etape 1 : N est continu.

Soit la suite$\{u_n\}$ telle que $u_n \to u$ dans C. Soit $\eta > 0$ telle que $\|u_n\|_\infty \leq \eta$. Alors

$$\|(Nu_n)(t,x) - (Nu)(t,x)\|_E \leq$$

$$\leq \|Q(u_n) - Q(u)\|_E + \|K(u_n) - K(u)\|_E + \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,u_n(s,\xi)) - f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds$$

$$\leq \|Q(u_n) - Q(u)\|_E + \|K(u_n) - K(u)\|_E + \int_0^a \int_0^b \sup_{(s,\xi)\in J} \|f(s,\xi,u_n(s,\xi)) - f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds$$

$$\leq \|Q(u_n) - Q(u)\|_E + \|K(u_n) - K(u)\|_E + ab\|f(.,.,u_n(.,.)) - f(.,.,u(.,.))\|_\infty.$$

D'après la continuité des fonctions $f,\ Q\ et\ K$, on trouve :

$$\|N(u_n) - N(u)\|_\infty \leq$$

$$\leq \|Q(u_n) - Q(u)\| + \|K(u_n) - K(u)\| + ab\|f(t,x,u_n(t,x)) - f(t,x,u(t,x))\|_\infty \to 0 \text{ Quand } n \to \infty.$$

Etape 2 : N transforme les parties bornées dans des parties bornées dans C.

En effet, pour $\eta^* > 0$, il existe une constante $\widetilde{\ell}$ telle que pour $u \in B_{\eta^*} = \{u \in C : \|u\|_\infty \leq \eta^*\}$, on obtient $\|N(u)\|_\infty \leq \widetilde{\ell}$. Par $(H_3),\ (H_3')\ et\ (H_3'')$ on a pour

$(t,x)\in J$,

$$\begin{aligned}
\|(Nu)(t,x)\|_E &\leq \|\tilde{\lambda}(t,x)\|_E+\int_0^t\int_0^x\|f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds\\
&\leq \|\lambda(t,x)-Q(u)-K(u)\|_E+\int_0^t\int_0^x q(s,\xi)\|u\|_\infty d\xi ds\\
&\leq \|\lambda(t,x)\|_E+\|Q(u)\|_E+\|K(u)\|_E+\int_0^t\int_0^x q(s,\xi)\|u\|_\infty d\xi ds\\
&\leq \|\lambda\|_\infty+\tilde{d}(1+\|u\|_\infty)+d^*(1+\|u\|_\infty)+\|q\|_\infty\|u\|_\infty)\int_0^t\int_0^x d\xi ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|N(u)\|_\infty\leq\|\lambda\|_\infty+\tilde{d}(1+\eta^*)+d^*(1+\eta^*)+ab\|q\|_\infty\eta^*:=\widetilde{\ell}.$$

Etape 3 : N transforme les bornées dans des parties equicontinues dans C.

Soient $(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in(0,a]\times(0,b]$, $t_1<t_2$, $x_1<x_2$, B_{η^*} une partie bornée de C Comme dans l'étape 2, et soit $u\in B_{\eta^*}$. Alors

$$\|(Nu)(t_2,x_2)-(Nu)(t_1,x_1)\|_E=\|\tilde{\lambda}(t_1,x_1)-\tilde{\lambda}(t_2,x_2)\|_E+\Big\|\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E$$

$$+\Big\|\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2}f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E+\Big\|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_1}f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\lambda(t_1,x_1)-Q(u)-K(u)-\lambda(t_2,x_2)+Q(u)+K(u)\|_E\\
&\quad+\|q\|_\infty\eta^*\Big[\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}d\xi ds+\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2}d\xi ds+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_1}d\xi ds\Big]
\end{aligned}$$

$$\leq \|\lambda(t_1,x_1)-\lambda(t_2,x_2)\|_E+\|q\|_\infty\eta^*(t_2x_2-t_1x_1).$$

Quand $t_1 \to t_2$, $x_1 \to x_2$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. En conséquence des étapes 1 à 3, d'après le théorème Arzela-Ascoli, on peut conclure que N est continu et complètement continu.

Etape 4 : L'estimation apriori.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un ouvert $U \subseteq C$ avec $u \neq \nu N(u)$, pour $\nu \in (0,1)$ et $u \in \partial U$. Soit $u \in C$ et $u = \nu N(u)$ pour certains $0 < \nu < 1$. Ainsi, pour chaque $(t,x) \in J$,

$$u(t,x) = \nu \tilde{\lambda}(t,x) + \nu \int_0^t \int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds.$$

Cela implique par $(H_3),\ (H_3')\ et\ (H_3'')$ que, pour $(t,k) \in J$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t,x)\|_E &\leq \|\tilde{\lambda}(t,x)\|_E + \int_0^t \int_0^x q(s,\xi)\|u(s,\xi)\|_E d\xi ds \\
&\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \|Q(u)\|_E + \|K(u)\|_E + \int_0^t \int_0^x q(s,\xi)\|u(s,\xi)\|_E d\xi ds \\
&\leq \|\lambda\|_\infty + \tilde{d}(1+\|u\|_\infty) + d^*(1+\|u\|_\infty) + \int_0^t \int_0^x q(s,\xi)\|u(s,\xi)\|_\infty d\xi ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|u(t,x)\|_E - \tilde{d}\|u(t,x)\|_E - d^*\|u(t,x)\|_E \leq \|\lambda(t,x)\|_E + \tilde{d} + d^* + \int_0^t \int_0^x q(s,\xi)\|u(s,\xi)\|_E d\xi ds$$

$$\|u(t,x)\|_E \leq \frac{\|\lambda(t,x)\|_E + \tilde{d} + d^*}{(1-\tilde{d}-d^*)} + \frac{1}{1-\tilde{d}-d^*}\int_0^t \int_0^x q(s,\xi)\|u(s,\xi)\|_E d\xi ds.$$

D'après le Lemme 1.2.4, il existe une constante δ telle que

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_E &\leq \frac{\|\lambda\|_\infty + \tilde{d} + d^*}{1-\tilde{d}-d^*} + \delta\frac{\|\lambda(t,x)\| + \tilde{d} + d^*}{(1-\tilde{d}-d^*)^2}\|q\|_\infty \int_0^t\int_0^x d\xi ds \\ &\leq \frac{\|\lambda\|_\infty + \tilde{d} + d^*}{1-\tilde{d}-d^*}\Big[1 + \delta\frac{ab}{(1-\tilde{d}-d^*)}\|q\|_\infty\Big] := M.\end{aligned}$$

Donc

$$\|u\|_\infty \leq M.$$

Posons

$$U = \{u \in C : \|u\|_\infty < M+1\}.$$

Par nos choix de U, il n'ya pas de $u \in \partial U$ tel que $u = \nu N(u)$, pour $\nu \in (0,1)$. Comme une conséquence de l'alternative non linéaires de type Leray-Schauder [8], on en déduire que N admet un point fixe u dans $\overline{U}$ qui est une solution du problème (2.3)-(2.4).

2.3 Exemple

Comme application de nos résultats nous considérons le système d'équations différentielles fonctionnelles de la forme

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = \frac{1}{(3e^{t+x+2})(1+|u(t,x)|)}, \quad \text{si } (t,x) \in [0,1]\times[0,1], \tag{2.9}$$

$$u(t,0) = t, \;\; u(0,x) = x^2, \;\; t,x \in [0,1]\times[0,1]. \tag{2.10}$$

Posons

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{1}{(3e^{t+x+2})(1+|u(t,x)|)},\ (t,x) \in [0,1] \times [0,1].$$

Pour tous $u,\ \overline{u} \in \mathbb{R}$ et $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$ nous avons

$$|f(t,x,u(t,x)) - f(t,x,\overline{u}(t,x))| \leq \frac{1}{3e^2}\|u-\overline{u}\|_C.$$

Donc, la condition (H_2) est satisfaite avec $k = \dfrac{1}{3e^2}$. Depuis $\frac{1}{3e^2} < 1$, alors la condition (2.5) est vérifié. Par conséconce, d'après le Théorème 4.2.1 le problème (2.9)-(2.10) admet une unique solution sur $[0,1] \times [0,1]$.

Chapitre 3

Equations Différentielles partielles Perturbées

3.1 Introduction

Dans cette chapitre, nous étudions le problème perturbé suivant :

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x)),\ \text{si}\ (t,x) \in J := [0,a] \times [0,b], \tag{3.1}$$

$$u(t,0) = \varphi(t),\ u(0,x) = \psi(x);\ t,x \in J, \tag{3.2}$$

où $f, g : J \times E \to E$ des fonctions données, $\varphi, \psi \in C(J,E)$.

Ensuite, on considère le problème non-local suivant :

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x)),\quad \text{si}\quad (t,x) \in J, \tag{3.3}$$

$$u(t,0) + Q(u) = \varphi(t),\ u(0,x) + K(u) = \psi(x);\ t,x \in J, \tag{3.4}$$

où f, g, φ, ψ sont comme dans le problème (3.1)-(3.2) et $Q, K : C(J, E) \to E$ sont des fonctions continues.

3.2 Existence des Solutions

Nous présentons les hypothèses suivantes :

(H_{01}) Les fonctions $f,\ g : J \times E \to E$ sont continues,

(H_{02}) Il existe $k' > 0$ telle que pour $(t, x) \in J$

$$\|g(t, x, u) - g(t, x, v)\|_E \leq k'\|u - v\|_\infty, \quad \text{pour} \quad u,\ v \in C,$$

(H_{03}) Il existe $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ telles que

$$\|f(t, x, u)\|_E \leq p(t, x) + q(t, x)\|u\|_\infty,\ \text{pour}\ (t, x) \in J \text{ et } u \in C.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses $(H_{01}) - (H_{03})$ sont satisfaites. Si de plus*

$$abk' < 1, \tag{3.5}$$

alors le problème (3.1)-(3.2) possède au moins une solution sur $[0, a] \times [0, b]$.

Démonstration : Considérons les opérateurs $F, G : C \to C$ définis par,

$$(Fu)(t, x) = \lambda(t, x) + \int_0^t \int_0^x f(s, \xi, u(s, \xi))d\xi ds;\ (t, x) \in J,$$

et

$$(Gu)(t, x) = \int_0^t \int_0^x g(s, \xi, u(s, \xi))d\xi ds;\ (t, x) \in J.$$

Alors le problème de trouver les solutions du problème (3.1)-(3.2) est réduite à trouver les solutions de l'équation $F(u)(t,x) + G(u)(t,x) = u(t,x),\ (t,x) \in J$. Nous allons montrer que les opérateurs F et G satisfait toutes les conditions du théorème 1.2.3. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Etape 1 : F est continu.

Soit la suite $\{u_n\}$ telle que $u_n \to u$ dans C. Soit $\eta > 0$ telle que $\|u_n\|_\infty \le \eta$ et $\|u\|_\infty \le \eta$. Alors

$$\begin{aligned}
\|(Fu_n)(t,x) - (Fu)(t,x)\|_E &\le \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,u_n(s,\xi)) - f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\le \|f(t,x,u_n(t,x)) - f(t,x,u(t,x))\|_\infty \int_0^a \int_0^b d\xi ds \\
&= ab\|f(t,x,u_n(t,x)) - f(t,x,u(t,x))\|_\infty .
\end{aligned}$$

Depuis le fait que f est continue, on obtient alors

$$\|F(u_n) - F(u)\|_\infty \le ab\|f(t,x,u_n(t,x)) - f(t,x,u(t,x))\|_\infty \to 0 \text{ Quand } n \to \infty.$$

Etape 2 : F transforme les bornées dans des bornées dans C.

En effet, pour $\eta^* > 0$, il existe $\tilde{\ell} > 0$ telle que, pour $u \in B_{\eta^*} = \{u \in C : \|u\|_\infty \le \eta^*\}$, nous avons $\|F(u)\|_\infty \le \tilde{\ell}$. D'après (H_{03}) on a pour $(t,x) \in J$,

$$\begin{aligned}
\|F(u)(t,x)\|_E &\le \|\lambda(t,x)\|_E + \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\le \|\lambda\|_\infty + (\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*) \int_0^a \int_0^b d\xi ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(u)\|_\infty \le \|\lambda\|_\infty + ab(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*) := \tilde{\ell}.$$

Etape 3 : F transforme les bornées dans les équicontinues dans C.

Soient $(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in(0,a]\times(0,b]$, $t_1<t_2$, $x_1<x_2$, B_{η^*} une partie bornée de C comme dans l'étape 2, et soit $u\in B_{\eta^*}$. Alors

$$\begin{aligned}
&\|(Fu)(t_2,x_2)-(Fu)(t_1,x_1)\|_E\leq\|\lambda(t_2,x_2)-\lambda(t_1,x_1)\|_E\\
&+\Big\|\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E\\
&+\Big\|\int_{0}^{t_1}\int_{x_1}^{x_2}f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E+\Big\|\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{x_1}f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E\\
\leq\ &\|\lambda(t_2,x_2)-\lambda(t_1,x_1)\|_E+(\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta^*)(t_2x_2-t_1x_1).
\end{aligned}$$

Quand $t_1\to t_2$, $x_1\to x_2$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. En conséquence des étapes 1 à 3, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que $F:C\to C$ est continue et complètement continue.

Etape 4 : G est une contraction.

Soient $u,v\in C$. Alors, pour $(t,x)\in J$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|(Gu)(t,x)-(Gv)(t,x)\|_E &\leq \int_0^t\int_0^x\|g(s,\xi,u(s,\xi))-g(s,\xi,v(s,\xi))\|_E d\xi ds\\
&\leq k'\|u-v\|_\infty\int_0^a\int_0^b d\xi ds.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|G(u)-G(v)\|_\infty\leq abk'\|u-v\|_\infty,$$

D'après (3.5), G est une contraction.

Etape 5 : Maintenant il reste à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E}=\{u\in C(J,E):u=\nu F(u)+\nu G\Big(\frac{u}{\nu}\Big),\ \ \text{pour }0<\nu<1\}$$

est borné.

Soit $u \in \mathcal{E}$, alors

$$u = \nu F(u) + \nu G\Big(\frac{u}{\nu}\Big)$$

pour $0 < \nu < 1$. Donc, pour $(t,x) \in J$ nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \nu\lambda(t,x) + \nu\int_0^t\int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds \\ &\quad + \nu\int_0^t\int_0^x g\Big(s,\xi,\frac{u(s,\xi)}{\nu}\Big)d\xi ds. \end{aligned}$$

d'après (H_{02}) et (H_{03}) on a pour $(t,x) \in J$,

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_E &\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \|p\|_\infty\int_0^t\int_0^x d\xi ds \\ &\quad + \|q\|_\infty\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds \\ &\quad + \nu\int_0^t\int_0^x \|g(s,\xi,\frac{u(s,\xi)}{\nu}) - g(s,\xi,0)\|_E d\xi ds \\ &\quad + \nu\int_0^t\int_0^x \|g(s,\xi,0)\|_E d\xi ds \\ &\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \|p\|_\infty\int_0^t\int_0^x d\xi ds + \|q\|_\infty\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds \\ &\quad + k'\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds + abg^*, \end{aligned}$$

où $g^* = \sup\limits_{(t,x)\in J}\|g(t,x,0)\|$.

D'après le Lemme 1.2.4, il existe une constante $\widetilde{k}$ telle que

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_E &\leq [\|\lambda\|_\infty + ab\|p\|_\infty + abg^*][1 + \widetilde{k}(k' + \|q\|_\infty)\int_0^t\int_0^x d\xi ds] \\ &\leq [\|\lambda\|_\infty + ab\|p\|_\infty + abg^*][1 + ab\widetilde{k}(k' + \|q\|_\infty)] := \widetilde{R}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|u\|_\infty \leq \widetilde{R}.$$

D'où ; l'ensemble $\mathcal{E}$ est bornée. D'après le Théorème 1.2.3, $F+G$ admet un point fixe u qui représente la solution du problème (3.1)-(3.2).

Maintenant, nous présentons un résultat d'existence pour le broblème non-local (3.3)-(3.4).

Théorème 3.2.2. *Supposons* $(H_{01})-(H_{03})$ *et les conditions suivantes*

(H'_{03}) *Il existe* $\tilde{d}>0$ *telle que*

$$\|Q(u)\|_E \leq \tilde{d}(1+\|u\|_\infty), \text{ pour } u \in C(J,E),$$

(H''_{03}) *Il existe* $d^*>0$ *telle que*

$$\|K(u)\|_E \leq d^*(1+\|u\|_\infty), \text{ pour } u \in C(J,E).$$

Si de plus la condition (3.5) est satisfaite, alors, il existe une solution du problème (3.3)-(3.4) sur $[0,a]\times[0,b]$.

Démonstration : Considérons les opérateurs $F,G : C \to C$ définis par,

$$(Fu)(t,x) = \tilde{\lambda}(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds;\ (t,x)\in J,$$

et

$$(Gu)(t,x) = \int_0^t \int_0^x g(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds;\ (t,x)\in J.$$

Alors le problème de trouver les solutions du problème (3.3)-(3.4) est réduite à trouver les solutions de l'équation $F(u)(t,x) + G(u)(t,x) = u(t,x),\ (t,x) \in J$. Nous allons montrer que les opérateurs F et G satisfait toutes les conditions du théorème 1.2.3. La preuve sera donnée en plusieurs étapes.

Etape 1 : F est continu.

Soit la suite $\{u_n\}$ telle que $u_n \to u$ dans C. Soit $\eta > 0$ telle que $\|u_n\|_\infty \leq \eta$ et $\|u\|_\infty \leq \eta$. Alors

$$\begin{aligned}
\|(Fu_n)(t,x) - (Fu)(t,x)\|_E &\leq \|Q(u_n) - Q(u)\|_E + \|K(u_n) - K(u)\|_E \\
&+ \int_0^t \int_0^x \|f(s,\xi,u_n(s,\xi)) - f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\leq \|Q(u_n) - Q(u)\|_E + \|K(u_n) - K(u)\|_E \\
&+ \|f(.,.,u_n(.,.)) - f(.,.,u(.,.))\|_\infty \int_0^a \int_0^b d\xi ds \\
&= \|Q(u_n) - Q(u)\|_E + \|K(u_n) - K(u)\|_E \\
&+ ab\|f(.,.,u_n(.,.)) - f(.,.,u(.,.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'après la continuité des fonctions $f,\ Q\ et\ K$ on obtient :

$$\|F(u_n) - F(u)\|_\infty \to 0 \ \ Quand \ \ n \to \infty.$$

Etape 2 : F transforme les bornées dans des bornées dans C.

En effet, pour $\eta^* > 0$, il existe $\tilde{\ell} > 0$ telle que, pour $u \in B_{\eta^*} = \{u \in C : \|u\|_\infty \leq$

$\eta^*\}$, nous avons $\|F(u)\|_\infty \leq \tilde{\ell}$. D'après $(H_{03}),\ (H'_{03}) et\ (H''_{03})$ on a pour $(t,x)\in J$,

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t,x)\|_E &\leq \|\tilde{\lambda}(t,x)\|_E + \int_0^t\int_0^x \|f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \|Q(u)\|_E + \|K(u)\|_E \\
&+ \int_0^t\int_0^x \|f(s,\xi,u(s,\xi))\|_E d\xi ds \\
&\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \tilde{d}(1+\|u\|_\infty) + d^*(1+\|u\|_\infty) \\
&+ (\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\|u\|_\infty)\int_0^a\int_0^b d\xi ds \\
&\leq \|\lambda\|_\infty + \tilde{d}(1+\eta^*) + d^*(1+\eta^*) + (\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta^*)\int_0^a\int_0^b d\xi ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(u)\|_\infty \leq \|\lambda\|_\infty + \tilde{d}(1+\eta^*) + d^*(1+\eta^*) + ab(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\eta^*) := \tilde{\ell}.$$

Etape 3 : <u>F transforme les bornées dans les équicontinues dans</u> C.

Soient $(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in(0,a]\times(0,b]$, $t_1<t_2,\quad x_1<x_2$, B_{η^*} une partie bornée de C comme dans l'étape 2, et soit $u\in B_{\eta^*}$. Alors

$$\begin{aligned}
&\|(Fu)(t_2,x_2)-(Fu)(t_1,x_1)\|_E \leq \|\tilde{\lambda}(t_2,x_2)-\tilde{\lambda}(t_1,x_1)\|_E \\
&+\Big\|\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E \\
&+\Big\|\int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2} f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E + \Big\|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_1} f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds\Big\|_E \\
\leq\ & \|\lambda(t_2,x_2)-Q(u)-K(u)-\lambda(t_1,x_1)+Q(u)+K(u)\|_E \\
&+(\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta^*)(t_2x_2-t_1x_1) \\
\leq\ & \|\lambda(t_2,x_2)-\lambda(t_1,x_1)\|_E + (\|p\|_\infty+\|q\|_\infty\eta^*)(t_2x_2-t_1x_1).
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, $x_1 \to x_2$ le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. En conséquence des étapes 1 à 3, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que $F : C \to C$ est continue et complètement continue.

Etape 4 : G est une contraction.

Soient $u, v \in C$. Alors, pour $(t, x) \in J$ on obtient

$$\begin{aligned} \|(Gu)(t,x) - (Gv)(t,x)\|_E &\leq \int_0^t \int_0^x \|g(s,\xi,u(s,\xi)) - g(s,\xi,v(s,\xi))\|_E d\xi ds \\ &\leq k'\|u-v\|_\infty \int_0^a \int_0^b d\xi ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|G(u) - G(v)\|_\infty \leq abk'\|u-v\|_\infty.$$

D'après (3.5), G est une contraction.

Etape 5 : Maintenant il reste à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u \in C(J,E) : u = \nu F(u) + \nu G\Big(\frac{u}{\nu}\Big), \quad \text{pour } 0 < \nu < 1\}$$

est bornée.

Soit $u \in \mathcal{E}$, alors

$$u = \nu F(u) + \nu G\Big(\frac{u}{\nu}\Big)$$

pour $0 < \nu < 1$. Donc, pour $(t,x) \in J$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \nu\tilde{\lambda}(t,x) + \nu\int_0^t\int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds \\
&\quad + \nu\int_0^t\int_0^x g\Big(s,\xi,\frac{u(s,\xi)}{\nu}\Big)d\xi ds \\
&= \nu(\lambda(t,x) - Q(u) - K(u)) + \nu\int_0^t\int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds \\
&\quad + \nu\int_0^t\int_0^x g\Big(s,\xi,\frac{u(s,\xi)}{\nu}\Big)d\xi ds.
\end{aligned}$$

d'après $(H_{02}),\ (H_{03}),\ (H'_{03})\ et\ (H''_{03})$ on a pour $(t,x) \in J$,

$$\begin{aligned}
\|u(t,x)\|_E &\leq \|\lambda(t,x)\|_E + \|Q(u)\|_E + \|K(u)\|_E + \|p\|_\infty\int_0^t\int_0^x d\xi ds \\
&\quad + \|q\|_\infty\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds \\
&\quad + \nu\int_0^t\int_0^x \|g(s,\xi,\frac{u(s,\xi)}{\nu}) - g(s,\xi,0)\|_E d\xi ds \\
&\quad + \nu\int_0^t\int_0^x \|g(s,\xi,0)\|_E d\xi ds \\
&\leq \|\lambda\|_\infty + \tilde{d}(1 + \|u(t,x)\|_E) + d^*(1 + \|u(t,x)\|_E) + \|p\|_\infty\int_0^t\int_0^x d\xi ds \\
&\quad + \|q\|_\infty\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds + k'\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds + abg^*,
\end{aligned}$$

où $g^* = \sup\limits_{(t,x)\in J}\|g(t,x,0)\|_E$. D'où

$$\begin{aligned}
\|u(t,x)\|_E - \tilde{d}\|u(t,x)\|_E - d^*\|u(t,x)\|_E &\leq \|\lambda\|_\infty + \tilde{d} + d^* + \|p\|_\infty\int_0^t\int_0^x d\xi ds \\
&\quad + \|q\|_\infty\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds \\
&\quad + k'\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds + abg^*.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_E &\leq \frac{\|\lambda\|_\infty + \tilde{d} + d^* + ab\|p\|_\infty + abg^*}{1-\tilde{d}-d^*} \\ &\quad + \frac{k' + \|q\|_\infty}{1-\tilde{d}-d^*}\int_0^t\int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds.\end{aligned}$$

Le Lemme 1.2.4 implique qu'il existe une constante $\widetilde{k}$ telle que

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_E &\leq \frac{\|\lambda\|_\infty + ab\|p\|_\infty + \tilde{d} + d^* + abg^*}{1-\tilde{d}-d^*}\left[1 + \frac{\widetilde{k}(k+\|q\|_\infty)}{1-\tilde{d}-d^*}\int_0^a\int_0^b d\xi ds\right] \\ &\leq \frac{\|\lambda\|_\infty + ab\|p\|_\infty + \tilde{d} + d^* + abg^*}{1-\tilde{d}-d^*}\left[1 + ab\frac{\widetilde{k}(k+\|q\|_\infty)}{1-\tilde{d}-d^*}\right] := \widetilde{R}.\end{aligned}$$

pour $(t,x) \in J$, on obtient

$$\|u\|_\infty \leq \widetilde{R}.$$

D'où ; l'ensemble $\mathcal{E}$ est bornée. D'après le Théorème 1.2.3, $F+G$ admet un point fixe u qui représente la solution du problème (3.3)-(3.4).

3.3 Exemple

Considérons le problème perturbé suivant

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = \frac{1 + 3e^{t+x+2}(|u(t,x)|+2)}{3e^{t+x+2}(1+|u(t,x)|)}; \quad \text{si } (t,x) \in [0,a]\times[0,b], \tag{3.6}$$

$$u(t,0) = t, \;\; u(0,x) = x^2; \;\; t,x \in [0,1]. \tag{3.7}$$

Posons

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{|u(t,x)|+2}{1+|u(t,x)|},\ (t,x) \in [0,1]\times[0,1],$$

et

$$g(t,x,u(t,x)) = \frac{1}{3e^{t+x+2}(1+|u(t,x)|)},\ (t,x) \in [0,1]\times[0,1].$$

Pour $u,\ \overline{u} \in \mathbb{R}$ et $(t,x) \in [0,1]\times[0,1]$ on obtient

$$|g(t,x,u(t,x)) - g(t,x,\overline{u}(t,x))| \leq \frac{1}{3e^2}\|u-\overline{u}\|_C.$$

Donc la condition (H_{02}) est satisfaite avec $k = \frac{1}{3e^2}$. La condition (3.5) est satisfaite. En effet $\frac{1}{3e^2} < 1$. aussi, la fonction f est continue sur $[0,1]\times[0,1]\times[0,\infty)$ et

$$|f(t,x,w)| \leq |w|+2,\ \text{for each } (t,x,w) \in [0,1]\times[0,1]\times[0,\infty).$$

Donc les conditions (H_{01}) et (H_{03}) sont satisfaites. Le Théorème 3.2.1 implique que le problème (3.6)-(3.7) possède une solution sur $[0,1]\times[0,1]$.

Chapitre 4

Equations Différentilles de type Neutre

4.1 Introduction

Cette chapitre s'intéresse à l'existence des solutions du système suivant :

$$D^2_{tx}\Big[u(t,x) - g(t,x,u(t,x))\Big] = f(t,x,u(t,x)); \text{ si } (t,x) \in J := [0,a] \times [0,b], \quad (4.1)$$

$$u(t,0) = \varphi(t); \; t \in [0,a], \; u(0,x) = \psi(x); \; x \in [0,b], \quad (4.2)$$

où $f, g : J \times E \to E$ sont des fonctions données, φ, ψ sont comme dans le problème (2.1)-(2.2).

4.2 Existence des Solutions

Théorème 4.2.1. *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

$(A1)$ *Les fonctions* $f, g : J \times E \longrightarrow E$ *sont continues,*

$(A2)$ *Il existe* $p, q \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *telles que*

$$\|f(t,x,u)\|_E \leq p(t,x) + q(t,x)\|u\|_\infty \text{ pour } (t,x) \in J \text{ et } u \in C,$$

$(A3)$ *La fonction* g *est complètement continue et pour chaque ensemble borné* B *de* C, *l'ensemble* $\{(t,x) \to g(t,x,u(t,x)) : u \in B\}$ *est équicontinue dans* C, *et il existe des constantes* $0 < d_1 < \frac{1}{4}$, $d_2 > 0$ *telles que*

$$\|g(t,x,u)\|_E \leq d_1\|u\|_\infty + d_2, \ (t,x) \in J, \ u \in C.$$

Alors le problème (4.1)-(4.2) admet au moins une solution sur $[0,a] \times [0,b]$.

Preuve : Considérons l'opérateur $F_1 : C \to C$ défini par,

$$(F_1 u)(t,x) = \lambda(t,x) + g(t,x,u(t,x)) - g(t,0,u(t,0)) - g(0,x,u(0,x))$$

$$+g(0,0,u(0,0)) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds; \ (t,x) \in J. \tag{4.3}$$

Nous allons montrer que l'opérateur F_1 est continue et complètement continue. Utilisation de $(A3)$ il suffit de montrer que l'opérateur $F_2 : C \to C$ définie par,

$$(F_2 u)(t,x) = \lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds; \ (t,x) \in J,$$

est continu et complètement continu. Comme dans le théorème 2.2.2, nous pouvons montrer que F_2 est continu et complètement continu.

Maintenant, Nous allons montrer qu'il existe un ensemble ouvert $U \subseteq C$ tel que $u \neq \nu F_1(u)$, pour $\nu \in (0,1)$ et $u \in \partial U$.

Soit $u \in C$ et $u = \nu F_1(u)$ pour $0 < \nu < 1$.

Donc pour $(t,x) \in J$,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \nu[\lambda(t,x) + g(t,x,u(t,x)) - g(t,0,u(t,0)) - g(0,x,u(0,x)) \\ &\quad + g(0,0,u(0,0)) + \int_0^t \int_0^x f(s,\xi,u(s,\xi))d\xi ds]. \end{aligned}$$

D'après $(A2)$ et $(A3)$, on obtient pour $(t,x) \in J$,

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_E &\leq \|\lambda(t,x)\|_E + d_1(\|u(t,x)\|_E + \|u(t,0)\|_E + \|u(0,x)\|_E + \|u(0,0)\|_E) \\ &\quad + 4d_2 + \int_0^t \int_0^x [p(s,\xi) + q(s,\xi)\|u(s,\xi)\|_E] d\xi ds \\ &\leq \|\lambda\|_\infty + 4d_2 + 4d_1\|u(t,x)\|_E + ab\|p\|_\infty \\ &\quad + \|q\|_\infty \int_0^t \int_0^x \|u(s,\xi)\|_E d\xi ds. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.2.4, il existe une constante δ telle que

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_E &\leq \frac{1}{1-4d_1}\Big(\|\lambda\|_\infty + 4d_2 + ab\|p\|_\infty\Big)\Big(1 + ab\frac{\delta\|q\|_\infty}{1-4d_1}\Big) \\ &:= \overline{M}. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\|u\|_\infty \leq \overline{M}.$$

Posons

$$U = \{u \in C : \|u\|_\infty < \overline{M}\}.$$

L'opérateur $F_1 : \overline{U} \to C$ est continu et complètement continu. Depuis le choix de U il n'ya pas de $u \in \partial U$ avec $u = \nu F_1(u)$ pour $\nu \in (0,1)$.

D'après l'alternative non-linéaire de Leray-Schauder [8], on en déduit que F_1 admet un point fixe u dans U qui est une solution du problème $(4.1)-(4.2)$.

4.3 Exemple

Considérons le système hyperbolique de type neutre suivant

$$D^2_{tx}\left(u(t,x)-5tx^3-\frac{e^{t+x-2}}{5}u(t,x)\right)$$

$$=\frac{t^2+x^4+e^{t+x+2}|u(t,x)|}{1+|u(t,x)|};\quad \text{si } (t,x)\in[0,1]\times[0,1], \tag{4.4}$$

$$u(t,0)=t,\ \ u(0,x)=x^2;\ \ t,x\in[0,1]. \tag{4.5}$$

Posons

$$f(t,x,u(t,x))=\frac{t^2+x^4+e^{t+x+2}|u(t,x)|}{1+|u(t,x)|},\ \ (t,x)\in[0,1]\times[0,1],$$

$$g(t,x,u(t,x))=5tx^3+\frac{1}{5}e^{t+x-2}u(t,x).$$

Pour $(t,x)\in[0,1]\times[0,1]$ on obtient

$$|f(t,x,u(t,x))|\le e^{t+x+2}+(t^2+x^4)\|u\|_C,$$

et

$$|g(t,x,u(t,x))|\le 5+\frac{1}{5}\|u\|_C.$$

Supposons de plus que la fonction g est complètement continu, et pour tout borné B de C, l'ensemble $\{(t,x)\to g(t,x,u(t,x)) : u\in B\}$ est équicontinu dans C.

Donc les conditions $(A_1) - (A_3)$ sont satisfaites avec $p(t,x) = t^2 + x^4,\ q(t,x) = e^{t+x+2},\ d_1 = \frac{1}{5}$ et $d_2 = 5$. Donc, d'après le Théorème 4.2.1, le problème (4.4)-(4.5) admet une solution sur $[0,1] \times [0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considéré l'existence et unicité des solutions de quelques problèmes de Darboux d'équations différentielles fonctionnelles aux dérivées partielles. Des conditions Suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions de nos problèmes ont été données.

Bibliographie

[1] S. Abbas and M. Benchohra, Partial hyperbolic differential equations with finite delay involving the Caputo fractional derivative, *Commun. Math. Anal.* **7** (2009), 62-72.

[2] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer, New York, 2012.

[3] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, *Advanced Fractional Differential and Integral Equations*, Nova Science Publishers, New York, 2015.

[4] S. Abbas, M. Benchohra and Y. Zhou, Darboux problem for fractional order neutral functional partial hyperbolic differential equations, *Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations*, Vol. 2, Nos. 3/4, 2009, 301-312.

[5] T.A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, *Math. Nachr.* **189** (1998), 23-31.

[6] L. Byszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* **3** (1990), 163-168.

[7] L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, *Appl. Anal.*,

40 (1991), 173-180.

[8] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[9] J. K. Hale and S. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations,* Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[10] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989.

[11] A. Heris, Problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire Mémoire de Magister, Unversité de Tlemcen, Juin 2013.

[12] Z. Kamont, *Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.