République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année: 2015

Etude de Quelques Théorèmes du point fixe et leurs Applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

Fatima **A**bbas [1]

Sous la direction de

Encadreur : Mme Fatima-Zohra. Mostefai

Soutenue le 14 Juin 2015 devant le jury composé de

K. Djerfi	MAA	Univ- Saïda	Président
F.Zohra. Mostefai	MCB	Univ- Saïda	Encadreur
S. Abbas	MCA	Unive- Saïda	Examinateur
D. Djebbouri	MAA	Univ- Saïda	Examinateur

1. fatima.abbas75@yahoo.com

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mon père, qui trouvera ici le résultat de longues années de sacrifices, merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de lui.

A ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, et ses précieux conseils.

A mes frères Abdelhak, Oussama et Mohamed Yacine et soeurs Fakhet et Razika qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance,

A mon grand père Cheikh, mes grand mères Bakhta et Amina et toute la famille ABBAS.

A mon encadreur Mme Mostefai Fatima-Zohra qui m'a guidé durant toute ma recherche.

A mes chères amies : Fatima, Salima, Fariha, Hanan, Aicha et Fatna.

Pour leur sincère amitié et confiance,

A toutes mes amies que j'aime tant : Fatima.B, Fatima.M, Farida, Fadila.BS, Nabila,Zineb,

Nadia, Samia, Nasira, Kheira, Mokhtaria, Oumameur, Zohra, Khadra, Sihem, Fadila.BH,

Fouzia, Fatima.BT, Nora, Fatima, Hadjer

Aux filles à la chapelle avec mes voeux de réussite.

A mes collègues de département Mathématique d'université Saida, qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

FATIMA ABBAS

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à :

D'abord, je tiens à remercier Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je voudrais adresser toute ma gratitude à la directrice de ce mémoire, Mme Mestefai Fatima-Zohra, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribués à alimenter ma réflexion.

Je tiens également à remercier les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance et d'examiner notre travail.

Je remercie mes très chers parents, Mekki et Khadidja, qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie mes frères Abdelhak, Oussama, mohamed et mes soeurs Fakhet et Razika pour leur encouragements.

J'adresse mes sincères remerciements aux professeurs, intervenants et toute personne qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont illuminé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

FATIMA ABBAS

Table des matières

Introduction **6**

1 préliminaire **8**

1.1 Espace vectoriel normé. 8
1.2 Espaces métriques 9
1.3 Espaces de Banach 10
1.4 Continuité dans les espaces normés 10
1.5 Compacité 10
1.6 Convexité 11
1.7 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ 12
1.8 Espace de Hilbert 12
1.9 Espace de Sobolev 12

2 Contraction **14**

2.1 Définitions 14
2.2 Théorèmes du point fixe de contraction 15
2.3 Application du principe de contraction de Banach 22
2.3.1 Problème a condition initiale 22
2.3.2 Equations intégrales 25

3 Application non expansive **28**

3.1 Théorème de point fixe pour application non expansive 28

4 Méthode de continuation pour applications contractante et non expansive **36**

4.1 Applications contractantes homotopes 36

4.2 Alternatives nonlinéaire pour application contractante 38

4.2.1 Application 39

4.3 Alternatives nonlinèaires pour application non expensive 41

4.3.1 Application 43

5 Théorème du point fixe de type Brouwer-Schauder et Krasnoselskii **45**

5.1 Théorème du point fixe du type Brouwer 45

5.2 Théorème du point fixe du type Schauder 48

5.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii 49

Conclusion **52**

Bibliographie **54**

Introduction

Dans ce mémoire, on étudiera quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer, Schauder et Krasnoselskii et quelques-unes de leurs applications. Etant donné un ensemble M et une application $T : M \to M$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et M pour que T ait un point fixe. Ces résultats théoriques nous permettent de résoudre certains problèmes comme par exemple trouver les zéros d'un polynômes, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solutions sans les déterminer explicitement.

Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction et contractante peut entraîne de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espaces étudiés restreignent le nombre de cas aux quels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algèbrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermée borné dans lui-même. Et de façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire tablir des stimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le théorème de Banach (par exemple, l'identité).

En 1955, et pour la première fois, Kranoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très éfficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Chapitre 1

préliminaire

Dans ce chapitre nous rappellons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espace vectoriel normé.

Définition 1.1.1. *On appelle norme sur E une application $\|.\|$*

$$\begin{array}{cccc} \|.\| : & E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

vérifient les axiomes suivants :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ *(séparation).*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$ *(homogenété).*
3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$ *(inégalité triangulaire).*

Pour $u \in E$ donné , le nombre réel positif $\|u\|$ est appellé norme de u .

Définition 1.1.2. *un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple* $(E, \|\cdot\|)$ *où* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *où* $\mathcal{C}$ *et* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* E.

Exemple 1.1.1.

Soient $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On définit les normes suivantes :

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ est dite norme de la moyenne .
2. $\|f\|_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ est dite norme quadratique .
3. $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ est dite norme uniforme .

1.2 Espaces métriques

Définition 1.2.1. *Une distance (métrique) sur un ensemble* $E \neq \emptyset$ *est une application* $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad \forall x, y \in E$
2. $d(x,y) = d(y,x), \qquad \forall x, y \in E$
3. $d(x,y,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \qquad \forall x, y, z \in E$

Définition 1.2.2. *Un espace métrique est un couple* (E, d) *où* E *est un ensemble et* d *est une distance.*

Exemple 1.2.1.

L'application

$$\begin{array}{rcccl} d & : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (x,y) & \mapsto & d(x,y) = |x-y| \end{array}$$

définie une distance, appellée distance usuelle.

Exemple 1.2.2.

Soit E un ensemble et $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une application définie par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance discrète, le couple (E, d) est appellé espace métrique discrèt.

1.3 Espaces de Banach

Définition 1.3.1. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *converge vers* $l \in E$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \|u_n - l\| < \epsilon$$

Définition 1.3.2. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite suite de Cauchy dans* E *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \forall m > n_0, \|u_n - u_m\| < \epsilon$$

Définition 1.3.3. *Un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de* E *converge dans* E.

Définition 1.3.4. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet*

1.4 Continuité dans les espaces normés

Soient $(E, \|.\|) et (E', \|.\|')$ deux espaces normé, et $f : E \to E'$ une application.
f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

C-à-d :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Elle est dit continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Définition 1.4.1. *On dit que* f *est uniformément continue sur* E *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

1.5 Compacité

Définition 1.5.1. *Soient* E *un ensemble quelconque et* A *une partie de* E.
Une recouvrement de A *est une famille* $(B_i)_{i\in I}$ *des parties de* E *vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$$

Définition 1.5.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé.*
On dit que E est relativement compact si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dans le diamêtre est inférieure à ϵ.

Corollaire 1.5.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n sur $\mathbb{R}$ où $\mathcal{C}$ de dimension fini. Les parties relativements compactes de E sont les parties bornées.*

Définition 1.5.3.
1. *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit compact s'il est relativement compact et complet.*
2. *Une partie A d'un espace normé$(E, \|.\|)$ est dite compacte si le sous-espace normé $(A, \|.\|_A)$ est compact.*

Théorème 1.5.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n sur E où $\mathcal{C}$ de dimension fini. Alors les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.*

Proposition 1.5.1. *L'image réciproque d'un ensemble compact par une application continue n'est pas nécessairement compact.*

Définition 1.5.4. *Une famille ϕ de définition ϕ définies sur un intervalle $[a, b]$, est dite uniformément bornée s'il existe une constante k telle que :*

$$\|\phi(x)\| < k, \forall x \in [a, b].$$

1.6 Convexité

Définition 1.6.1. *On dit que $C \subset E$ est un ensemble convexe si :*

$$\forall t \in [0, 1], \forall (a, b) \in C^2, \quad ta + (1 - t)b \in C$$

1.7 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.7.1. *Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \textit{mesurable et} \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{p}}$$

1.8 Espace de Hilbert

Définition 1.8.1. *On appelle* ***produit scalaire*** *sur E toute forme bilinèaire, symétrique non dégénérie, définie positive autrement dit, toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

1. $\forall x \in E, \varphi_x : y \to \varphi(x, y)$ *est linéaire ;*

2. $\forall x \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x);$

3. $\forall x \in E \backslash \{0\}, \varphi(x, x) > 0.$

Définition 1.8.2. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$.*

1.9 Espace de Sobolev

Définition 1.9.1. *Soit $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{p,k}(\Omega)$ par*

$$W^{p,k}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \textit{ existe et } D^\alpha f \in L^p(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

On munit les espaces de Sobolev par une structure d'espaces normés dont les normes sont définit par

$$\|f\|_{W^{p,k}}(\Omega) := \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_{W^{p,\infty}}(\Omega) := \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|, \qquad p = +\infty.$$

Chapitre 2

Contraction

2.1 Définitions

Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe. Comme il est basé sur un processus itératif, alors il peut être rendu éffectif sur un ordinateur pour trouver le point fixe d'une application contractante ; il peut ainsi realiser l'exactitude désirée tout en jouant sur le nombre d'itérations dont on a besoin.
Ce théorème est dû a S. Banach en 1922, il s'agit d'une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduite par Liouville en 1837 et développée systèmatiquement pour la première fois par Picard en 1890.

Définition 2.1.1. *Soit (E, d) un espace métrique, une application $f : E \to E$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \text{ pour tout } x, y \in E.$$

k est dite constante de lipschitz.

Remarque 2.1.1. *Une application Lipschizienne est nécessairement continue.*

Définition 2.1.2. *L'application lipschitzienne f est appelée*

1. *non expansive si $k \leq 1$.*
2. *contraction si $k < 1$.*

Définition 2.1.3. *Soit (E, d) un espace métrique, et $f : E \to E$ une application, on dit qu'un point $x \in E$ et un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$.*

2.2 Théorèmes du point fixe de contraction

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révélent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.
Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

Théorème 2.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une contraction avec k sa constante de Lipschitz. Alors f admet une unique point fixe $u \in X$. En outre, pour tout $x \in X$,*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = u$$

avec

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$$

Preuve :

(a) Unicité : Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tel que $x = f(x)$ et $y = f(y)$. Alors

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Par conséquent, $d(x, y) = 0$ ce qui entraine $x = y$.

(b) Existence : Soit $x \in X$. Nous allons établir que $\{f^n(x)\}$ est une suite de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq kd(f^{n-1}(x), f^n(x)) \leq \cdots \leq k^n d(x, f(x))$$

Ainsi, pour $m > n$, où $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) \\ &\quad + \cdots + d(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\ &\leq k^n d(x, f(x)) + \cdots + k^{m-1} d(x, f(x)) \\ &\leq k^n d(x, f(x))[1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}] \\ &= \tfrac{k^n - k^m}{1-k} d(x, f(x)) \end{aligned}$$

Ainsi pour $m > n, n \geq 0$,

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)). \tag{2.1}$$

Ceci montre que $\{f^n(x)\}$ est une suite de Cauchy et comme X est espace complet, alors il existe $u \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = u$. De plus, la continuité de f entraine que

$$v = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = f(v).$$

par conséquent, u est un point fixe de f. Ainsi si $m \to \infty$ dans (2.1) alors

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

□

donne un résultat dans ce sens

Contre exemple 2.2.1.

Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. *X n'est pas stable par f* : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, 1]$.
   Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x\in X} |f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ est contractante. Mais f n'a pas de point fixe car $f([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$, i.e. X n'est pas stable par f.

2. <u>*f n'est pas contractante*</u> : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, \infty[$.
   Or $f : X \to X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet. Mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. <u>*X n'est pas complet*</u> : $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \frac{\pi}{4}]$.
   Or $f(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$; donc, f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

Théorème 2.2.2. *Soit (X,d) un espace métrique compact avec $f : X \to X$ satisfaisant*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \textit{pour } x, y \in X \textit{ et } x \neq y.$$

Alors f admet un point fixe unique dans X.

Preuve :

L'unicité est facile a prouver. Pour l'existence, il suffit de remarquer que l'application $K : x \mapsto d(x, f(x))$ atteint son minimum en un point que nous notons $x_0 \in X$. Nous avons $f(x_0) = x_0$ car autrement

$$K(f(x_0)) = d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0) = K(x_0)$$

Contradiction. □

Nous allons présenter maintenant une version locale du principe de contraction de Banach.

Théorème 2.2.3. *Soit (X,d)un espace métrique complet et soit*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, \ \textit{où } x_0 \in X \textit{ et } r > 0.$$

Supposons que $f : B(x_0, r) \to X$ est une contraction (i.e, $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ pour tout $x, y \in B(x_0, r)$ avec $0 \leq k < 1$) vérifiant

$$d(f(x_0), x_0) < (1-k)r.$$

Alors f admet unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Preuve :

Comme $d(f(x_0), x_0) < (1-k)r$, alors il existe r_0 tel que $0 \leq r_0 < r$ avec

$$d(f(x_0), x_0) \leq (1-k)r_0.$$

Nous allons montrer que $f : \overline{B(x_0, r_0)} \to \overline{B(x_0, r_0)}$. Pour voir ceci notons que si $x \in \overline{B(x_0, r)}$, alors

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \leq r_0. \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons appliquer le Théorème 2.2.1 pour déduire que f a un unique point fixe dans $\overline{B(x_0, r_0)} \subset B(x_0, r)$. Là encore, il est facile de voir que f admet un et un seul point fixe dans $B(x_0, r)$. □

Nous allons examiner brièvement le comportement d'une application de contraction définie de $\overline{B}_r = \overline{B}(0, r)$ (la boule fermée de rayon r et de centre 0) à valeurs dans un espace de Banach E.

Théorème 2.2.4. *Soit $\overline{B}_r \subset E$ la boule fermée de rayon $r > 0$ et de centre 0,et E un espace de Banach. $f : \overline{B}_r \to E$ une contraction tel que $f(\partial \bar{B}_r) \subseteq \overline{B}_r$.*
Alors f a un unique point fixe dans $\overline{B}_r$.

Preuve :

Considérons l'application

$$g(x) = \frac{x + f(x)}{2}.$$

Nous montrons d'abord que $g : \overline{B}_r \to \overline{B}_r$. Soit

$$x^* = r\frac{x}{\|x\|} \quad \text{où} \quad x \in \overline{B}_r \quad \text{et} \quad x \neq 0.$$

si $x \in \overline{B}_r$ et $x \neq 0$ alors

$$\|f(x) - f(x^*)\| \leq k\|x - x^*\| = k(r - \|x\|)$$

et comme $x - x^* = \frac{x}{\|x\|}(\|x\| - r)$, alors

$$\begin{aligned}\|f(x)\| &\leq \|f(x^*)\| + \|f(x) - f(x^*)\| \\ &\leq r + k(r - \|x\|) \\ &\leq 2r - \|x\|.\end{aligned}$$

Par suite, pour $x \in \overline{B}_r$ et $x \neq 0$ on a

$$\|g(x)\| = \left\|\frac{x + f(x)}{2}\right\| \leq \frac{\|x\| + \|f(x)\|}{2} \leq r.$$

De plus, par continuité nous avons aussi

$$\|g(0)\| \leq r,$$

et par conséquant $g : \overline{B}_r \to \overline{B}_r$. En outre $g : \overline{B}_r \to \overline{B}_r$ est une contraction car

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{\|x - y\| + k\|x - y\|}{2} = \frac{[1 + k]}{2}\|x - y\|.$$

L'application du Théorème 2.2.1 à g entraine que g admet un unique point fixe $u \in \overline{B}_r$. i.e $u = g(u)$ par suite $u = f(u)$. □

Plusieurs auteurs ont donné des généralisations du principe de contraction de Banach où le caractère contractif de l'application est affaibli. Dans ce paragraphe nous allons citer quelques versions dans ce sens dont la démonstrastion repose sur le résultat technique suivant.

Théorème 2.2.5. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application (pas nécessairement continue). Supposons que la condition suivante est vérifiée*

$$\begin{cases} \text{pour tout } \epsilon > 0, \quad \text{il existe} \quad \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{tel que si} \\ d(x, f(x)) < \delta(\epsilon), \ \text{Alors } f(B(x,\epsilon)) \subseteq B(x,\epsilon); \\ \text{où }, B(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si pour $u \in X$ on a

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(u), f^{n+1}(u)) = 0,$$

alors la suite $\{f^n(u)\}$ converge vers le point fixe de f.

Preuve :

Soit $u \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} d(f^n(u), f^{n+1}(u)) = 0$ et soit $u_n = f^n(u)$. Montrons que $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy.
Soit $\epsilon > 0$ et $\delta(\epsilon) > 0$ tel que $d(x, f(y)) < \delta(\epsilon), \quad y \in B(x, \epsilon)$. Nous pouvons choisir N suffisamment grand tel que

$$d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\epsilon) \quad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Or, puisque $d(u_N, f(u_N)) < \delta(\epsilon)$, alors (2.2) garantit que

$$f(B(u_N, \epsilon)) \subseteq B(u_N, \epsilon),$$

et ainsi $f(u_N) = u_{N+1} \in B(u_N, \epsilon)$. Par induction, on trouve

$$f^k(u_N) = u_{N+k} \in B(u_N, \epsilon) \text{ pour tout } k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Ainsi

$$d(u_k, u_l) \leq d(u_k, u_N) + d(u_N, u_l) < 2\epsilon \text{ pour tout } k, l \geq N,$$

et donc (u_n) est une suite de Cauchy. De plus, il existe $y \in X$ avec $\lim_{n\to\infty} u_n = y$. Nous montrons maintenant que y est un point fixe de f. Supposons qu'il ne l'est pas alors

$$d(y, f(y)) = \gamma > 0$$

Nous pouvons choisir $u_n \in B(y, \gamma/3)$ fixe tel que

$$d(u_n, u_{n+1}) < \delta(\gamma/3).$$

(2.2) entraine que

$$f(B(u_n, \gamma/3)) \subseteq B(u_n, \gamma/3),$$

et par conséquant $f(y) \in B(u_n, \gamma/3)$. Contradiction puisque

$$d(f(y), u_n) \geq d(f(y), y) - d(u_n, y) > \gamma - \frac{\gamma}{3} = \frac{2\gamma}{3}.$$

Ainsi $d(y, f(y)) = 0 \Rightarrow f(y) = y$. $\square$

Théorème 2.2.6. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit*

$$d(f(x), f(y)) < \phi(d(x, y)) \text{ pour tout } x, y \in X;$$

où $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *est une fonction monotone,(pas nécessairement continue) avec* $\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0$ *pour tout* $t > 0$*. Alors* f *admet un unique point fixe* $u \in X$ *avec*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = u \text{ pour chaque } x \in X.$$

Preuve :

Supposons que $t \leq \phi(t)$, pour tout $t > 0$. Alors $\phi(t) \leq \phi(\phi(t))$ et donc $t \leq \phi^2(t)$.
Par induction, $t \leq \phi^n(t)$ pour $n \in \{1, 2, 3...\}$.
Il se agit d'une contradiction. Ainsi $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$.
En outre,

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \phi^n(d(x, f(x))) \text{ pour } x \in X,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) = 0 \text{ pour chaque } x \in X.$$

Soit $\epsilon > 0$, on choisit $\delta(\epsilon) = \epsilon - \phi(\epsilon)$. Si $d(x, f(x)) < \delta(\epsilon)$, alors pour tout $z \in B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ nous avons

$$\begin{aligned} d(f(z), x) &\leq d(f(z), f(x)) + d(f(x), x) \leq \phi(d(z, x)) + d(f(x), x) \\ &< \phi(d(z, x)) + \delta(\epsilon) \leq \phi(\epsilon) + (\epsilon - \phi(\epsilon)) = \epsilon, \end{aligned}$$

et donc $f(z) \in B(x, \epsilon)$. Le Théorème 2.2.5 entraine que f admet un point fixe u avec $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = u$ pour chaque $x \in X$.
En fin, il est facile à voir que f possède un unique point fixe dans X. $\square$

Remarque 2.2.1. *Notons que le Théorème 2.2.1 est un cas particulier du Théorème 2.2.6 si nous choisisons* $\phi(t) = kt$ *avec* $0 \leq k < 1$.

2.3 Application du principe de contraction de Banach

2.3.1 Problème a condition initiale

Il est naturel de commencer notre application du théorème de point fixe de Banach avec l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions de certains problèmes a conditions initiales du premier ordre. En particulier, nous considerons le problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)) \\ y(0) & = y_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $I = [0, b]$. On remarque que (2.3) est un système d'équations différentielles du premier ordre parce que l'application f prend ses valeures dans $\mathbb{R}^n$. Considérons l'espace $C(I)$ muni de la norme $|u|_0 = \sup_{t\in I} |u(t)|$ et $C^1(I)$ l'espace de Banach des fonctions u dont la première derivée est continue sur I muni de la norme $|u|_1 = \max\{\sup_{t\in I} |u(t)|, \sup_{t\in I} |u'(t)|\}$.
Nous commençons notre analyse de l'équation (2.3) par supposer que $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue. Par suite, $y \in \mathcal{C}^1(I)$ est solution de l'équation (2.3) si et seulement si $y \in \mathcal{C}(I)$ et résout

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds. \tag{2.4}$$

On définit alors un opérateur intégral $\mathrm{T} : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ par

$$\mathrm{T}_y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds.$$

D'où y est solution de (2.3) si et seulement si $y = \mathrm{T}(y)$ ou $\mathrm{T} : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$. Autrement dit,les solutions de (2.3)sont des points fixe de l'opérateur intégrale T.
Nous présentons maintenant un résultat connu que sous le nom du théorème de Picard-Lindelöf.

Théorème 2.3.1. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ application continue et satisfait la condition de Lipchitz en y; autremant dit, il existe $\alpha \geq 0$ tel que*

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq \alpha |y - z| \text{ pour tout } y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Alors il existe un unique $y \in \mathcal{C}^1(I)$ solution du problème (2.3).

Preuve :

Nous allons appliquer le Théorème 2.2.1 pour montrer que T admet un unique point fixe. A première vue, il semble naturel d'utiliser la norme maximale sur $\mathcal{C}(I)$ mais ce choix nous ménerait vers une solution locale définie sur une sous-intervalle de I. On utilisera alors la norme maximale pondérée suivante

$$\|y\|_\alpha = |\exp(-\alpha t) y(t)|_0$$

sur $\mathcal{C}(I)$. On remarque que $\mathcal{C}(I)$ muni cette norme est un espace de Banach, car elle est équivalente à la norme maximale, puisque

$$\exp(-\alpha b)|y|_0 \leq \|y\|_\alpha \leq |y|_0.$$

Montrons maintenant que T est une contraction de $(\mathcal{C}(I), \|.\|_\alpha)$. Soient $y, z \in \mathcal{C}(I)$ alors

$$\mathrm{T}_y(t) - \mathrm{T}_z(t) = \int_0^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds \text{ pour } t \in I.$$

Ainsi, pour $t \in I$, on obtient

$$\begin{aligned}
\exp(-\alpha t)|(\mathrm{T}_y - \mathrm{T}_z)(t)| &\leq \exp(-\alpha t) \int_0^t \alpha \exp(\alpha s) \exp(-\alpha s)|y(s) - z(s)| ds \\
&\leq \exp(-\alpha t) \left(\int_0^t \alpha \exp(\alpha s) ds \right) \|y - z\|_\alpha \\
&\leq \exp(-\alpha t)(\exp(\alpha t) - 1)\|y - z\|_\alpha \\
&\leq (1 - \exp(-\alpha b))\|y - z\|_\alpha,
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|\mathrm{T}_y - \mathrm{T}_z\|_\alpha \leq (1 - \exp(-\alpha b))\|y - z\|_\alpha.$$

Comme $1 - \exp(-\alpha b) < 1$, le principe de contraction de Banach implique qu'il existe un unique point fixe $y \in \mathcal{C}(I)$ tel que $y = \mathrm{T}y$; c'est-à-dire (2.3) admet une solution unique $y \in \mathcal{C}^1(I)$. $\square$

Maintenant nous allons omettre l'hypothèse de la continuité sur f et essayons d'étendre la notion d'une solution de (2.3) en conséquence. Nous voulons le faire de manière a préserver l'équivalence naturelle entre (2.3) et l'équation $y = \mathrm{T}y$, qui à été obtenu par intégration.

Théorème 2.3.2. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction L^p carathéodory et L^p-Lipschitz en y; autrement dit, il existe $\alpha \in L^p(I)$ tel que*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq \alpha(t)|y - z| \text{ pour tout } y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Alors il existe un unique $y \in \mathbf{W}^{1,p}(I)$ solution de (2.3).

Preuve :

La preuve est similaire à celle du Théorème 2.3.1 et on ne donnera alors qu'une esquise.
Soit

$$A(t) = \int_0^t \alpha(s)ds.$$

Alors $A'(t) = \alpha(t)$ pour tout t. on définie la norme suivante

$$\|y\|_A = |exp(-A(t))y(t)|_0,$$

qui est equivalente à la norme maximale car

$$\exp(-\|\alpha\|_1)|y|_0 \leq \|y\|_A \leq |y|_0, \text{ où } \|\alpha\|_1 = \int_0^b |\alpha(t)|dt.$$

Ainsi $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_A)$ est un espace de Banach et l'application du principe de contraction de Banach, essentiellement comme dans la preuve du Théorème 2.3.1, implique qu'il existe un unique $y \in \mathcal{C}(I)$ avec $y = \mathrm{T}y$. Par suite, l'équation (2.3) admet une unique solution L^P carathéodoy sur I.

2.3.2 Equations intégrales

Nous établissons le théorème suivant comme une application du principe de contraction de Banach aux équations intégrales.

Théorème 2.3.3. *Soit la fonction $K(x,y)$ définie et mesurable dans le carré $A = \{(x,y)/\ a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b\}$. Si*

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < \infty$$

et $g(x) \in L^2(a,b)$, alors l'équation intégrale

$$f(x) = g(x) + \mu \int_a^b K(x,y) f(y) dy,$$

possède une unique solution $f(x) \in L^2(a,b)$ pour toutes les valeurs de paramètre μ.

Preuve :

Pour pouvoir appliquer le théorème 2.2.1, soit $X = L^2$, considérons l'application T

$$\begin{aligned} T : L^2(a,b) &\to L^2(a,b) \\ f &\mapsto T(f) = h \end{aligned}$$

où

$$h(x) = g(x) + \mu \int_a^b K(x,y) f(y) dy.$$

Comme $g \in L^2(a,b)$ et μ est un scalaire, il suffit de montrer que

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy \in L^2(a,b).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b K(x,y) f(x) dy \right| &\leq \int_a^b |K(x,y) f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^2 &= \left(\left| \int_a^b k(x,y) f(y) dy \right| \right)^2 \\ &\leq \left(\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \right) \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \right) dx \int_a^b \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right) dx,$$

par hypothèse

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy < \infty,$$

et

$$\int_a^b \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right) dx < \infty.$$

Donc

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy \in L^2(a,b).$$

Nous savons que $L^2(a,b)$ est un espace métrique complet muni de la distance

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons montrer que T est une application contractante. Nous avons

$$d(Tf, Tf_1) = d(h, h_1)$$

où

$$h_1(x) = g(x) + \mu \int_a^b K(x,y) f_1(y) dy.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} d(h,h_1) &= |\mu| \left(\int_a^b \left| \int_a^b K(x,y)[f(y)-f_1(y)]dy \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\mu| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(y)-f_1(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$d(Tf,Tf_1) = \left(\int_a^b \int_a^b |K^2(x,y)| dxdy \right)^{\frac{1}{2}} d(f,f_1),$$

donc nous avons

$$d(f,f_1) = \left(\int_a^b |f(y)-f_1(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si

$$|\mu| < \frac{1}{\left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}}},$$

alors

$$d(Tf,Tf_1) \leq kd(f,f_1),$$

où

$$0 \leq k = |\mu| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Donc T est une contraction, alors le théorème de contraction de Banach assure que T admet un point fixe unique $f^* \in L^2(a,b)$ tel que $Tf^* = f^*$, ce point fixe est l'unique solution de l'équation intégrale. □

Chapitre 3

Application non expansive

3.1 Théorème de point fixe pour application non expansive

En mathématiques, une application non expansive entre espaces normés est une application k-lipschitzienne de module $k \leq 1$. Il s'agit donc du cas limite des applications contractantes, pour lesquelles $k < 1$. Contrairement aux applications contractantes, les applications non expansives n'ont pas nécessairement de point fixe (par exemple, si a est un élément non nul, l'application $x \to x + a$ est non expansive et n'admet pas de point fixe). Par ailleurs, même si une application non expansive T a un point fixe, la suite des approximations successives $\{\mathrm{T}^k x_0\}$ ne converge pas nécessairement vers un tel point (c'est le cas pour l'application $-I$, l'opposé de l'identité) ; on peut toute fois obtenir des résultats de convergence vers un point fixe d'au moins deux manières : soit en imposant des conditions plus réstrictives sur l'application (sans toute fois aller jusqu'à la contraction), soit en modifiant la suite des itérés.

Définition 3.1.1. *Soient E un espace normé, dont la norme est notée $\| \cdot \|$, et P une partie fermée de E. On dit qu'une application $\mathrm{T} : P \to E$ est non expansive si*

$$\forall (x, y) \in P \times P : \|\mathrm{T}x - \mathrm{T}y\| \leq \|x - y\|$$

exemple d'une application non expansive libre de point fixes.

Nous commençons ce chapitre en présentant un résultat connu sous le nom du théorème de Schauder pour application non expansive. C'est un cas particulier du théorème de Schauder de point fixe qui sera présenté.

Théorème 3.1.1. *Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble non vide, fermé, convexe d'un espace vectoriel normé E et soit $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ une application non expansive tel que $f(\mathcal{C})$ est un sous-ensemble d'un ensemble compact de $\mathcal{C}$. Alors f admet un point fixe.*

Preuve :

Soit $x_0 \in \mathcal{C}$, pour $n = 2, 3, \cdots$, on pose

$$f_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) f + \frac{1}{n} x_0.$$

Comme $\mathcal{C}$ est convex et $x_0 \in \mathcal{C}$, alors on a bien $f_n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et il est clair que $f_n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une contraction. Par conséquant le théorème 2.2.1 entraine que chaque f_n admet une unique point fixe $x_n \in \mathcal{C}$, i.e

$$x_n = f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x_n) + \frac{1}{n} x_0.$$

En outre,étant donné que $f(\mathcal{C})$ est inclus dans un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}$, alors il existe une sous-suite S de nombres entièrs et un $u \in \mathcal{C}$ tel que

$$f(x_n) \to u \text{ lorsque } n \to \infty \text{ dans } S.$$

Ainsi

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x_n) + \frac{1}{n} x_0 \to u \text{ lorsque } n \to \infty, \text{ dans } S.$$

Par continuité on obtient alors

$$f(x_n) \to f(u) \text{ lorsque } n \to \infty \text{ dans } S.$$

et par conséquent

$$u = f(u).$$

$\square$

Le théorème suivant est un résultat le plus important dans ce paragraphe (établi indépendamment par Browder, Göhde et Kirk en 1965.)

Théorème 3.1.2. *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble non vide, fermé, borné dans un espace de Hilbert H. Alors toute application non expansive $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ admet au moins un point fixe.*

Remarque 3.1.1. *l'unicité n'est pas réalise dans ce théorème la comme on peut le voir dans l'exemple $f(x) = x$, avec $x \in \mathcal{C} = [0.1]$.*

Remarque 3.1.2. *En fait dans le théorème 3.1.2 il suffit de supposer que H est un espace de Banach uniformément convexe.*

La preuve du Théorème 3.1.2 nécessite les deux résultats techniques suivants.

Théorème 3.1.3. *Soit H un espace de Hilbert tel que $u, v \in H$, et soient r, R deux constantes avec $0 \leq r \leq R$. S'il existe $x \in H$ vérifiant*

$$\|u - x\| \leq R, \|v - x\| \leq R \text{ et } \left\| \frac{u+v}{2} - x \right\| \geq r,$$

alors

$$\|u - v\| \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Preuve :

La loi du parallélogramme entraine que

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 &= 2\|u - x\|^2 + 2\|v - x\|^2 - \|(u - x) + (v - x)\|^2 \\
&\leq 2R^2 + 2R^2 - 4 \left\| \frac{u+v}{2} - x \right\|^2 \leq 4(R^2 - r^2).
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.1.4. *Soit H un espace de Hilbert, $\mathcal{C} \subseteq H$ un ensemble borné et $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ une application non expansive. supposons que $x, y \in \mathcal{C}$ et $a = \frac{x+y}{2} \in \mathcal{C}$. Soit $\delta(\mathcal{C})$ le diamètre de $\mathcal{C}$ et soit $\epsilon \leq \delta(\mathcal{C})$ tel que $\|x - f(x)\| \leq \epsilon$ et $\|y - f(y)\| \leq \epsilon$. Alors*

$$\|a - f(a)\| \leq 2\sqrt{\epsilon}\sqrt{2\delta(\mathcal{C})}.$$

Preuve :

Comme

$$\|x-y\| \leq \left\|x - \frac{a+f(a)}{2}\right\| + \left\|y - \frac{a+f(a)}{2}\right\|,$$

on peut supposer que

$$\left\|x - \frac{a+f(a)}{2}\right\| \geq \frac{1}{2}\|x-y\|.$$

Cependant, puisque

$$\|a-x\| = \frac{1}{2}\|x-y\|,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
\|f(a)-x\| &\leq \|f(a)-f(x)\| + \|f(x)-x\| \\
&\leq \|a-x\| + \epsilon = \frac{1}{2}\|x-y\| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Théorème 3.1.3 avec $r = \frac{1}{2}\|x-y\|, R = \frac{1}{2}\|x-y\| + \epsilon, u = a$ et $v = f(a)$ donne

$$\begin{aligned}
\|a-f(a)\| &\leq 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\|x-y\| + \epsilon\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\|x-y\|\right)^2} \\
&= 2\sqrt{\|x-y\|\epsilon + \epsilon^2} = 2\sqrt{\epsilon}\sqrt{\|x-y\| + \epsilon} \\
&\leq 2\sqrt{\epsilon}\sqrt{2\delta(\epsilon)}
\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 3.1.2 :

Supposons que $0 \in \mathcal{C}$. (sans perte de généralite nous pouvons supposer que $x_0 \in \mathcal{C}$, par conséquent pour la simplicité on pose $x_0 = 0$)
supposons également que $f(0) \neq 0$. Pour chaque $n = 2, 3, \cdots$, on remarque que

$$f_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

est une contraction. Le Théorème 2.2.1 garantit l'existence d'un unique $x_n \in \mathcal{C}$ tel que

$$x_n = f_n(x_n) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) f(x_n).$$

Ainsi

$$\|x_n - f(x_n)\| = \frac{1}{n}\|f(x_n)\| \leq \frac{1}{n}\delta(\mathcal{C}). \tag{3.1}$$

Où $\delta(\mathcal{C})$ désigne le diamêtre de $\mathcal{C}$. Pour chaque $n \in \{2, 3, \cdots\}$, soit

$$Q_n = \Big\{x \in \mathcal{C} : \|x - f(x)\| \leq \frac{1}{n}\delta(\mathcal{C})\Big\}.$$

On remarque que

$$Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \cdots \supseteq Q_n \supseteq \cdots$$

i.e c'est une suite décroissante d'ensembles non vide fermés.
Soit

$$d_n = \inf\{\|x\| : x \in Q_n\}.$$

Comme la suite des ensembles non vides fermés (Q_n) est décroissants alors

$$d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n \leq \cdots \text{ avec } d_i \leq \delta(\mathcal{C})$$

pour chaque $i \in \{2, 3, \cdots\}$. Par conséquant,$d_n \to d$ avec $d \leq \delta(\mathcal{C})$.
Soit

$$A_n = Q_{8n^2} \cap \overline{B\Big(0, d + \frac{1}{n}\Big)},$$

où

$$B\Big(0, d + \frac{1}{n}\Big) = \Big\{x \in H : \|x\| < d + \frac{1}{n}\Big\}.$$

A_n est une suite décroissante d'ensembles non vide fermés. Nous montrons maintenant que $\lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$. Soit $u, v \in A_n$. Puis

$$\|u - 0\| \leq d + \frac{1}{n} \text{ et } \|v - 0\| \leq d + \frac{1}{n}. \tag{3.2}$$

En outre, comme $u, v \in Q_{8n^2}$ on a

$$\|u - f(u)\| \leq \frac{1}{8n^2}\delta(\mathcal{C}) \text{ et } \|v - f(v)\| \leq \frac{1}{8n^2}\delta(\mathcal{C}).$$

Ainsi le Théorème 3.1.4 implique que

$$\left\|\frac{u+v}{2} - f(\frac{u+v}{2})\right\| \leq 2\sqrt{2\delta(\mathcal{C})}\sqrt{\frac{1}{8n^2}\delta(\mathcal{C})} = \frac{1}{n}\delta(\mathcal{C})$$

donc $\frac{u+v}{2} \in Q_n$ et

$$\left\|\frac{u+v}{2} - 0\right\| \geq d_n. \tag{3.3}$$

Ainsi(3.2),(3.3) et Théorème 3.1.3 entraine que

$$\|u - v\| \leq 2\sqrt{\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - d_n^2},$$

et donc

$$\delta(A_n) \leq 2\sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2} + (d^2 - d_n^2)}.$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$. Le théorème de Contor, appliqué à la suite $\{A_n\}_{n=2}^{\infty}$ garantit l'existence d'un

$$x_0 \in \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n.$$

Et comme

$$x_0 \in \bigcap_{n=2}^{\infty} Q_{8n^2}$$

nous avons

$$\|x_0 - f(x_0)\| \leq \frac{\delta(\mathcal{C})}{8n^2} \text{ pour tout } n \in \{2, 3, \cdots\}.$$

Donc

$$\|x - f(x_0)\| = 0$$

et le théorème est démontré. □

Le théorème suivant donne le comportement d'une application non expansive définie sur une boule fermée de rayon r et de centre 0 a valeurs dans un espace de Hilbert H.

Théorème 3.1.5. *Soit H un espace de Hilbert réel et $\overline{B}_r = \{x \in H : \|x\| \leq r\}$ avec $r > 0$. Alors toute application $f : \overline{B}_r \to H$ non expensive vérifie au moins l'une de deux propriétés suivantes :*

(A1) f a un point fixe dans $\overline{B}_r$

(A2) Il n'existe pas $x \in \partial\overline{B}_r$ et $\lambda \in (0,1)$ tel que $x = \lambda f(x)$.

Preuve :

On définit l'application $r : H \to \overline{B}_r$ par

$$r(x) \quad = \quad \begin{cases} x, & \|x\| \leq r, \\ r\frac{x}{\|x\|}, & \|x\| > r. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $r : H \to \overline{B}_r$ est non expensive.

En conséquence $rof : \overline{B}_r \to \overline{B}_r$ est aussi une application non expansive. Théorème 3.1.2 garantit l'existence de $x \in \overline{B}_r$ avec $r(f(x)) = x$.

Si $f(x) \in \overline{B}_r$, alors

$$x = r(f(x)) = f(x),$$

et f admet un point fixe, c'est-à-dire le résultat (A_1) se réalise.

Si $f(x) \notin \overline{B_r}$ alors

$$x = r(f(x)) = r\frac{f(x)}{\|f(x)\|} = \lambda f(x) \text{ avec } \lambda = \frac{r}{\|f(x)\|} < 1,$$

c'est-à-dire c'est (A_2) qui se réalise etant donné que $x \in \partial\overline{B}_r$. □

Théorème 3.1.6. *Soit H un espace de Hilbert réel, $\overline{B}_r = \{x \in H : \|x\| \leq r\}$ avec $r > 0$, et soit $f : \overline{B}_r \to H$ une application non expansive. Supposons que pour tout $x \in \partial\overline{B}_r$ une des quatres conditions suivantes soit remplie :*

1. $\|f(x)\| \leq \|x\|$,
2. $\|f(x)\| \leq \|x - f(x)\|$,
3. $\|f(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|x - f(x)\|^2$,
4. $\langle x, f(x) \rangle \leq \|x\|^2$.

Alors f a un point fixe dans $\overline{B}_r$.

Preuve :

Supposons que la condition (2) soit remplie. Alors, si f n'a pas de point fixe, d'aprés le théorème 3.1.5, il existe $z \in \partial\overline{B}_r$ et $\lambda \in (0.1)$ tel que $z = \lambda f(z)$.
En particulier $f(z) \neq 0$ et

$$\|f(z)\| = \|f(\lambda f(z))\| \leq \|\lambda f(z) - f(\lambda f(z))\|,$$

C'est-à-dire

$$\|f(z)\| \leq (1 - \lambda)\|f(z)\|$$

donc $1 \leq 1 - \lambda$ C'est une contradiction. $\square$

Chapitre 4

Méthode de continuation pour applications contractante et non expansive

Commençons par définir l'homotopie pour les contractions. Soit (X, d) un espace métrique complet et U un ouvert de X.

4.1 Applications contractantes homotopes

Définition 4.1.1. *Soit $f : \overline{U} \to X$ et $g : \overline{U} \to X$ deux contractions ou $\overline{U}$ désigne la fermeture de U dans X. On dit que f et g sont homotopes s'il existe $H : \overline{U} \times [0, 1] \to X$ ayant les propriétés suivantes :*

1. *$H(\cdot, 0) = g$ et $H(\cdot, 1) = f$;*
2. *$x \neq H(x, t)$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \in [0, 1]$(ici désigne la ∂U frontière de U dans X) ;*
3. *il existe $0 \leq \alpha < 1$, tel que $d(H(x, t), H(y, t)) \leq \alpha d(x, y)$ pour tout $x, y \in \overline{U}$ et $t \in [0, 1]$;*
4. *il existe $M \geq 0$, tel que $d(H(x, t), H(x, s)) \leq M|t - s|$ pour tout $x \in \overline{U}$ et $t, s \in [0, 1]$.*

Le résultat suivant montre que la propriété d'avoir un point fixe est invariante par homotopie pour les contractions.

Théorème 4.1.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et U un ouvert sous-ensemble de X. Supposons que $f : \overline{U} \to X$ et $g : \overline{U} \to X$ sont deux applications contractantes homotopes tel que g admet un point fixe dans U. Alors f a un point fixe dans U.*

Preuve :

Considérons l'ensemble

$$A = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x,\lambda) \text{ pour certain } x \in U\}$$

où H est une homotopie entre f et g. Notons que A est non vide puisque g admet un point fixe,et $0 \in A$. Nous allons montrer que A est à la fois ouvert et fermé dans $[0,1]$ et ainsi $A = [0.1]$. En conséquence,f a un point fixe en U.
On montre d'abord que A est fermé dans $[0,1]$. Pour voir ceci, soit

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \text{ avec } \lambda_n \to \lambda \in [0,1] \text{ quant } n \to \infty.$$

Nous devons montrer que $\lambda \in A$. Comme $\lambda_n \in A$ pour $n = 1, 2, \cdots$, il existe $x_n \in U$ avec $x_n = H(x_n, \lambda_n)$. Aussi pour $n, m \in \{1, 2, \cdots, \}$ nous avons

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(H(x_n,\lambda_n), H(x_m,\lambda_m)) \\ &\leq d(H(x_n,\lambda_n), H(x_n,\lambda_m)) + d(H(x_n,\lambda_m), H(x_m,\lambda_m)) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m), \end{aligned}$$

c'est,

$$d(x_n, x_m) \leq \Big(\frac{M}{1-\alpha}\Big)|\lambda_n - \lambda_m|.$$

De plus comme $\{\lambda_n\}$ est une suite de Cauchy alors $\{x_n\}$ est aussi une suite de Cauchy,et comme X est complet il existe $x \in \overline{U}$ avec $lim_{n\to\infty} x_n = x$. En outre,

$x = H(x, \lambda)$ étant donné que

$$\begin{aligned} d(x_n, H(x,\lambda)) &= d(H(x_n, \lambda_n), H(x,\lambda)) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda| + \alpha d(x_n, x). \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda \in A$ et A est fermé dans $[0,1]$.
Montrons maintenant que A est un ouvert dans $[0,1]$. Soit $\lambda_0 \in A$. Alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$. Soit $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M} \text{ où } r < dist(x_0, \partial U),$$

où $dist(x_0, \partial U) = \inf\{d(x_0, x) : x \in \partial U\}$. Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$. Alore, pour $x \in \overline{B(x_0, r)} = \{x : d(x, x_0) \leq r\}$,

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x,\lambda)) &\leq d(H(x_0, \lambda_0), H(x, \lambda_0)) + d(H(x, \lambda_0), H(x,\lambda)) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda - \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha) r = r. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$,

$$H(\cdot, \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(x_0, r)}.$$

En appliquant le Théorème 2.2.1 on déduit que $H(\cdot, \lambda)$ admet un point fixe dans U. Ainsi $\lambda \in A$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$, et donc A est un ouvert dans$[0,1]$. □

Dans la suite, nous supposons que X est un espace de Banach. Nous présentons maintenant une alternative non linéaire du type leray-Schauder pour les applications contractantes.

4.2 Alternatives nonlinéaire pour application contractante

Théorème 4.2.1. *Supposons que U est un ouvert d'un espace de Banach X, $0 \in U$ et $f : \overline{U} \to X$ une contraction tel que $f(\overline{U})$ soit bornée. Alors, une des deux assertions suivantes est vérifiée*

(A_1) *f a un point fixe dans $\overline{U}$,où*

(A_2) *il existe $\lambda \in (0,1)$ et $u \in \partial U$ tel que $u = \lambda f(u)$.*

peut maintenant appliquer le Théorème 4.1.1 et en déduire qu'il existe $x \in U$ avec $x = f(x)$, c'est-à-dire (A_1) se réalise. □

4.2.1 Application

Pour illustrer l'application du Théorème 4.2.1 en pratique, étudions le problème de Dirichlet du second ordre suivant :

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \text{ pour } t \in [a, b], \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue. De même on peut considerer une famille de problèmes associée à (4.1)

$$\begin{cases} y'' = \lambda f(t, y, y') \text{ pour } t \in [a, b], \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

pour $\lambda \in [0, 1]$. On définit alors l'opérateur $f : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$ par

$$T_y(t) := \int_a^b g(t, s) f(s, y(s), y'(s)) ds,$$

où $g(t, s)$ est la fonction de Green donnée par

$$g(t, s) = \begin{cases} -\frac{(t-a)(b-s)}{b-a} & a \leq t \leq s \leq b, \\ -\frac{(s-a)(b-t)}{b-a} & a \leq s \leq t \leq b. \end{cases}$$

Il est clair que les points fixes de T sont les solutions classiques de (4.1). Sous une condition de Lipschitz locale appropriée sur f, nous allons utiliser l'alternative non linèaire pour une application contractante pour établir que la restriction de T sur un domaine bien défini $U \subseteq \mathcal{C}^1[a, b]$ est une contraction et admet un point fixe (en fait un unique point fixe) dans $\overline{U}$. Ainsi (4.1) a une solution unique dans $\overline{U}$. Pour cela, supposons que f satisfait la condition de Lipschitz locale suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{il y a un sous-ensemble } D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ et constantes, } K_0 \text{ et } K_1 \\ \text{tel que la restriction de } f \text{ a } [a,b] \times D \text{ satisfait} \\ |f(t,y,y') - f(t,z,z')| \leq K_0|y-z| + K_1|y'-z'|. \end{array}\right. \tag{4.3}$$

On définit une norme maximale sur $\mathcal{C}^1[a,b]$ par
$\|y\| = K_0|y|_0 + K_1|y'|_0$ où $|y|_0 = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)|$ et $|y'|_0 = \sup_{t\in[a,b]} |y'(t)|$.
Si y et z sont deux fonctions définies sur le domaine ou f est localement lipschitzienne, alors comme

$$\begin{aligned} |(T_y - T_z)(t)| &= \left|\int_a^b g(t,s)[f(s,y(s),y'(s)) - f(s,z(s),z'(s))]ds\right| \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{8}\|y-z\|, \end{aligned}$$

depuis

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |g(t,s)|ds = \max_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)(t-a)}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Ainsi

$$|T_y - T_z|_0 \leq \frac{(b-a)^2}{8}\|y-z\|.$$

alors

$$|(T_y - T_z)'|_0 \leq \frac{b-a}{2}\|y-z\|.$$

depuis

$$\max_{t\in[a,b]} \int_a^b |g(t,s)|ds = \max_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)^2 + (t-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2},$$

Par conséquant

$$\|T_y - T_z\| \leq \left[K_0\frac{(b-a)^2}{8} + K_1\frac{b-a}{2}\right]\|y-z\|, \tag{4.4}$$

Cette inégalité et le Théorème 4.2.1 nous permettent d établir un théorème d'existence et d'unicité de solutions pour le problème (4.1).

Théorème 4.2.2. *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et satisfaisant (4.3) dans un ensemble D avec des constantes K_0 et K_1 de tels que*

$$K_0 \frac{(b-a)^2}{8} + K_1 \frac{b-a}{2} < 1 \tag{4.5}$$

est vrai. Supposons qu'il existe $U \subseteq \mathcal{C}^1[a,b]$ un ensemble ouvert borné de fonctions tel que

$$u \in \overline{U} \text{ implique } (u(t), u'(t)) \in D \text{ pour tout } t \in [a,b] \tag{4.6}$$

et

$$y \text{ solution de } (4.2) \text{ pour tout } \lambda \in (0.1) \text{ implique } y \text{ n'appartient pas à } \partial U. \tag{4.7}$$

est vrai. Alors (4.1) admet une solution unique dans $\overline{U}$.

Preuve :

Les équations (4.4) et (4.5) entrainent que $T : \overline{U} \to \mathcal{C}^1[a,b]$ est une contraction. Et en appliquant le Théorème 4.2.1 et en notant que (A_2) ne peut pas se produire en raison de (4.4) alors le résultat est prouvé.

4.3 Alternatives nonlinèaires pour application non expensive

Théorème 4.3.1. *Soit U sous-ensemble ouvert, borné et convex d'un espace de Banach uniformement convexe X, tel que $0 \in U$ et $f : \overline{U} \to X$ une application non expansive. Alors, soit*

(A_1) *f a un point fixe dans $\overline{U}$,où*

(A_2) *il existe $\lambda \in (0,1)$ et $u \in \partial U$ avec $u = \lambda f(u)$*

est vrai.

Enoncons un résultat qui va être utilisé dans la démonstration du théorème

Proposition 4.3.1. *Soit E un espace de Banach uniformément convexe et K un sous-ensemble fermé et convexe de E, avec $f : K \to K$ une application non expansive. Supposons que (u_n) une suite dans K faiblement convergente vers u_0.*
Si $(I - f)(u_n)$ est fortement convergente vers un élément w_0 dans K, alors $(I - f)(u_0) = w_0$.

Preuve du Théorème 4.3.1 :

Supposons (A_2), ne se réalise pas. Considérons pour tout $n \in \{2, 3, \cdots\}$, l'application

$$f_n := \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) f : \overline{U} \to X.$$

Notons que f_n est une contraction de constante $1-\frac{1}{n}$. En appliquant théorème 4.2.1 à f_n, on en déduit que soit f_n a un point fixe dans U, soit il existe $\lambda \in (0, 1)$ et $u \in \partial U$ avec $u = \lambda f_n(u)$. Supposons que cette dernière est vraie, c'est-à-dire, il existe

$$\lambda \in (0, 1) \text{ et } u \in \partial U \text{ avec } u = \lambda f_n(u).$$

Alors,

$$u = \lambda\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) f(u) = \eta f(u) \text{ où } 0 < \eta = \lambda(1 - \frac{1}{n}) < 1$$

Contradiction puisque la propriété (A_2), ne se produit pas. Par conséquent pour tout $n \in \{2, 3, \cdots\}$ que nous avons f_n admet un point fixe $u_n \in U$. Le résultat standard (si E est un espace de Banach réflexif, toute suite bornée en norme dans E admet une sous-suite faiblement convergente)implique (puisque $\overline{U}$ est fermée, bornée et convexe, donc faiblement fermée) qu'il existe une sous-suite de nombres entièrs et un $u \in \overline{U}$ tel que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ lorsque } n \to \infty$$

ici$\rightharpoonup$ désigne la convergence faible. En outre, comme $u_n = (1-\frac{1}{n})f(u_n)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|(I-f)(u_n)\| &= \frac{1}{n}\|f(u_n)\| \\
&\leq \frac{1}{n}(\|f(u_n)-f(0)\| + \|f(0)\|) \\
&\leq \frac{1}{n}(\|u_n\| + \|f(0)\|).
\end{aligned}$$

Ainsi $(I-f)(u_n)$ converge fortement vers 0. D'après la Proposition 4.3.1,$u = f(u)$, et alors le résultat (A_1) se réalise. $\square$

4.3.1 Application

Exemple 4.3.1.

Soit le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} y''(t) = -\exp(y(t)), \quad t \in [0.1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

a une solution unique à de norme maximale au plus égale à 1. Pour montrer ceci, nous appliquons le théorème 4.2.2 avec $f = f(t,y) = -\exp(y)$. Par le théorème de la valeure moyenne, nous avons

$$|y| \leq 1 \text{ et } |z| \leq 1 \text{ implique } |\exp(y) - \exp(z)| \leq \exp(\max\{y,z\})|y-z| \leq \exp|y-z|.$$

On prend

$$D = [-1,1] \text{ et } U = \{y \in \mathcal{C}[0.1] : |y|_0 = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)| < 1\}$$

dans le théorème 4.2.2. Alors

$$\frac{K_0}{8} = \frac{\exp}{8} < 1.$$

Supposons que y résout

$$\begin{cases} y''(t) = -\lambda\exp(y(t)), t \in [0.1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

pour certain $\lambda \in (0.1)$. Donc

$$y(t) = -\lambda \int_0^1 g(t,s)\exp(y(s))ds$$

et par suite

$$|y(t)| \leq \frac{1}{8}\exp(|y|_0) \text{ pour } t \in [0.1].$$

Par conséquent $|y|_0 \leq \frac{1}{8}\exp(|y|_0)$ et cela implique que $|y|_0 \neq 1$ et donc y n'est pas un élément de ∂U. Ainsi, Théorème 4.2.2 implique que (4.8) admet une solution unique de norme au plus égale à 1.

Chapitre 5

Théorème du point fixe de type Brouwer-Schauder et Krasnoselskii

Dans ce chapitre, nous allons actuellement présenter les théorèmes du point fixe pour une application continue dans les espaces de Banach en dimension finie et infinie. En particulier, nous présentons les théorèmes de Brouwer,Schauder et Krasnoselskii.

5.1 Théorème du point fixe du type Brouwer

le Théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 5.1.1. *Sur K une partie non vide, compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe alors $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Les parties compactes et convexes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prends donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 5.1.2. *Si $T : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve :

Si f est continue de $[a, b]$ dans lui même, la fonction $g \mapsto f(x) - x$ est continue, et prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. $\square$

De même dans le plan, Les parties compactes et convexes sont les disques fermés ou bien les boules fermées, la forme du théorème de Brouwer prend la forme suivante

Théorème 5.1.3. *Toute application T continue du disque férmé dans lui-même admet au moins un point fixe.*

Preuve :

Il est bon de donner juste un croquis de la démonstration, Si K est le domaine de définition de T d'interieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K. L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire si $h = To\phi, h(x) = x$. Autrement dit, On peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact K, l'ensemble $[-1, 1] \times [-1, 1]$, sans perte de généralité.
Si l'on définit la fonction f comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f : [-1,1] \times [-1,1] & \to & [-1,1] \times [-1,1] \\ x & \mapsto & f(x) = h(x) - x \end{array}$$

cela revient à montrer que la fonction atteint le vecteur nul sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Si f_k, pour $k = 1, 2$, sont les deux fonctions cordonnées de f, cela revient à montrer l'existence d'un point x_0, telle que f_1 et f_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0.
la fonction f_1 est une fonction de $[-1, 1] \times [-1, 1]$ dans $[-1, 1]$ sur $\{-1\} \times [-1, 1]$, elle est positive, en revanche sur $\{-1\} \times [-1, 1]$, elle est négative. ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui parte d'un point $[-1, 1] \times \{1\}$ pour finir sur

un point $[-1,1] \times \{-1\}$.
le même raisonnement appliquée f_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\} \times [-1,1]$, pour terminer sur un point de $\{1\} \times [-1,1]$.
Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $To\phi$. □

Remarque 5.1.1. - *Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le théorème de Brouwer du fait que chaque point de K est un point fixe de l'application identité.*

Il est possible de généraliser en toute dimension finie. Donc dans un espace euclidien, on retrouve

Théorème 5.1.4. *Toute application T continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.*

Il peut encore être un peu plus général, en considérant toute partie convexe compact d'un espace euclidien :

Théorème 5.1.5. *Toute application T continue d'un convex compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.*

Nous allons donner un résultat de Brouwer qu'on oura besoin dans la démonstration du théorème de Schauder.

Définition 5.1.1. *On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \to E$ possède un point fixe.*

On note par B_n la boule unité fermée de E^n, et on a le résultat suivant :

Théorème 5.1.6. *La boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Schauder a généralisé le résultat de Brouwer en dimension infinie.

5.2 Théorème du point fixe du type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique, est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.
Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.2.1. *Soit K un sous-ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Preuve :

Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact,T est uniformément continue ; donc, si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \epsilon, \tag{5.1}$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K; i.e.$K \subset \cup_{1\leq j\leq p} B(x_j, \delta)$.
Si on désigne $L := Vec(T(x_j))_{1\leq j\leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définie la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si}\|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x-x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.2}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors.
On a donc, pour tout $x \in K, \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continue positives φ_j par

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}, \tag{5.3}$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$,

Posant,pour$x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j). \tag{5.4}$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues)et prend ses valeurs dans K^*(car $g(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$).

Si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, (d'aprés théorème de Brouwer)g possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)]. \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$,et par suite$\|T(y) - T(x_j)\| < \epsilon$. On a pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)] \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon \varphi_j(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier m, en peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|f(y_m) - y_m\| \leq 2^{-m}$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, i.e y^* est un point fixe de T sur K. □

5.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 5.3.1. *Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé, borné et convexe. U, V sont deux applications de D dans X telles que :*

U est une contraction (de constante k) et V est compacte et continue.
$Ux + Vy \in D \forall x, y \in D$, alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Vx = x$.

Preuve :

Soit y fixé dans D, comme U est une contraction, l'équation $x = Ux + Vy$ admet une solution unique x dans D.
On définit l'application

$$\begin{aligned} L &: D \to D \\ Ly &= x \\ Ly &= ULy + Vy \ , \qquad (y \in D) \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Il est clair que $LD \subset D$. On va montrer que L est compact et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Ly = y$, d'où $Uy + Vy = y$.
Soit y_n un point de D, alors d'après $(*)$:

$$\begin{aligned} Ly_n &= ULy_n + VLy_n \\ Ly - Ly_n &= ULy - ULy_n + Vy - Vy_n \\ \|Ly - Ly_n\| &\leq \|ULy - ULy_n\| + \|Vy - Vy_n\| \end{aligned}$$

et puisque U est une contraction on a :

$$\begin{aligned} \|Ly - Ly_n\| &\leq k\|Ly - Ly_n\| + \|V_y - V_{y_n}\| \\ \|Ly - Ly_n\| &\leq \frac{1}{1-k}\|Vy - Vy_n\| \qquad\qquad (**) \end{aligned}$$

d'où la continuité de L. Reste à montrer que LD est relativement compacte. En effet, comme VD est relativement compacte,

$$\forall \epsilon > 0, \exists (1-k)\epsilon \quad \text{réseau} \quad Vy_1 \cdots Vy_n,$$

c'est-à-dire les boules

$$B(Vy_k, (1-k)\epsilon)(1 \leq k \leq n),$$

tel que

$$VD \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(Vy_k, (1-k)\epsilon).$$

Alors de $(**)Ly_1 \cdots Ly_n$ est un ϵ réseau de LD, ce qui achève la démonstration.

□

Notons que si $U = 0$, le théorème se résume au théorème de Banach, si $V = 0$ alors le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solution pour les équations d'opérateurs non linèaires.

De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder, en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe. Mais celui de Brouwer est particulièrement célèbre.

Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante.

Le résultat de Brouwer est l'un des théorèmes-clef caractèrisant la topologie d'un espace euclidien. Il intervient pour établir des résultats finis sur les équations différentielles ; il est présent dans la géométrie différentielle. Il apparait dans diverses branches, comme la théorie des jeux.

Ce théorème est généralisé en 1930 aux espaces de Banach. Cette généralisation est due à Schauder. Ce théorème affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, mais qui nous permet de résoudre plusieurs problèmes.

Mais en 1955, Krasnoselskii a joint les deux résultats de Banach et Schauder afin d'entirer son théorème qui affirme sous certaines conditions sur l'espace de Banach, l'application de la forme : $Ux + Cx$

Où U est contractante et C compact admet un point fixe.

De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine trés actif de la recherche.

Bibliographie

[1] J. DUGUNDJI and A. GRANAS, *Fixed point theory,* Monografie Matematyczne, Vol. **16**, Polish Scientific Publishers, 1982.

[2] M. FRIGON, On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings,*Recent advances in metric fixed point theory, Sevilla 1995* (T. Dominguez Benavides ed.), Universidad de Sevilla,1996, 19-30.

[3] K. GOEBEL and W. A. KIRK, *Topics in metric fixed point theory,* Cambridge Univ. Press, 1990.

[4] A. GRANAS, Continuation methods for contractive maps, Top.*Methods Nonlinear Anal.,* **3** (1994), 375-379.

[5] J. W. LEE and D. O'REGAN,Existence priciples for differential equations and systems of equations,*Topological methods in differential equations and inclusions* (A. Granas and M. Frigon, eds), NATO ASI Series C, Kluwer Acad. Publ., 1995, 239-289.

[6] D. O'REGAN, Fixed point theorems for nonlinear operators, J. Math. *Anal. Appl.*,**202** (1996), 413-432.

[7] D. R. SMART,*Fixed point theorems*, Cambridge Univ. Press, 1974.

[8] E. ZEIDLER,*Nonlinear functional analysis and its applications I : fixed point theorems*, Springer-Verlag, 1986.