République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année universitaire: 2015

Stabilité des équations différentielles stochastiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Probabilités et applications

par

Bachir cherif Khalida [1]

Encadreur : Dr T. Guendouzi

Soutenu le 15 Juin 2015 devant le jury composé de

Mr Madani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mme Ait Nadia	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mme Benzaetout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail :khalida.bc@hotmail.fr

Remerciements

A l'echeance de ce projet de fin d'étude. Je doit en premier lieu l'enorme remerciement à notre dieu mesicorde, aussi qu'a nos très chers parents pour leurs patience et le grand sacrifice pour l'aboutissement de nos études.

*A*ussi nos remerciement les plus sincères à notre encadreur Mr *T.Guendouzi* qui a été toujours fidèle , qui nous a aidé du debut à la fin pour finir ce travail.

*A*ussi au jury à leur tète le president et les examinateurs pour avoir honorer de leurs presences notre soutenance.

*S*ans oublier tous les professeurs et très spécialement Mrs *B.Ouakkas* et *A.Kandouci*, Mme *F.Mokhtari* et Mlle *F.Benziadi*, aussi que toutes les personnes qui ont contribués de près ou de loin pour mener à bien notre travail.

Table des matières

Introduction

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Une équation différentielle stochastique (EDS)[10] est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les domaines d'application des EDS sont vastes :

- La modélisation de phénomènes de diffusion en physique (mécanique des fluides, géophysique, ...) : c'est à l'origine de la motivation de l'étude du mouvement brownien.
- Les mathématiques financières : modélisation des cours de bourse
- Les systèmes dynamiques aléatoires.
- Les modèles d'écoulements de polymères multi-échelles

En mathématiques et en automatique, la notion de stabilité de Lyapunov (ou,

plus correctement, de stabilité au sens de Lyapunov [10]) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques. De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire, etc..
Un exemple typique de système stable au sens de Lyapunov [10]est celui constitué d'une bille roulant sans frottement au fond d'une coupelle ayant la forme d'une demi-sphère creuse : après avoir été écartée de sa position d'équilibre , la bille oscille autour de cette position, sans s'éloigner davantage : la composante tangentielle de la force de gravité ramène constamment la bille vers sa position d'équilibre. En présence d'une frottement visqueux, les oscillations de la bille sont amorties et celle-ci revient à sa position d'équilibre au bout d'un certain temps (théoriquement infiniment long) : cet amortissement est dû à la dissipation d'énergie sous forme de chaleur. Le système est alors asymptotiquement stable. Si maintenant on retourne la coupelle, le sommet de celle-ci est encore une position d'équilibre pour la bille. Mais à présent, si l'on écarte la bille d'une quantité infinitésimale en absence de frottement, cette bille se met à rouler sur la paroi de la coupelle en tombant ; elle s'écarte sans retour de sa position d'équilibre, car la composante tangentielle de la force de gravité éloigne constamment la bille de sa position d'équilibre. Un tel système est dit instable.
Dans le cas de systèmes linéaires aux paramètres incertains, la recherche d'une fonction de Lyapounov peut se formaliser en un problème d'optimisation et, lorsque celui-ci est convexe, il existe des algorithmes de résolution efficaces. Il existe également des méthodes permettant de réaliser un bouclage de manière qu'une fonction de Lyapunov, choisie à l'avance, garantisse la stabilité.

Le mémoire est partagé comme suit, d'abord nous donnons des points nécessaires concernant le Mouvement Brownien et l'intégrale stochastique dans le 1er chapitre.
Dans le 2ème chapitre on présente : Équations différentielles stochastiques [5], nous allons étudier l'existence et l'unicité des solutions [12], l'estimation dans $\mathbf{L}^p$ [5], et l'estimation asymptotique pesque sûre [5], aussi, nous allons étudier l'approximation des solutions au sens de Carathéodory [10] et Maruyama [10].

Le 3ème chapitre est consacré aux équations différentielles stochastiques linéaires [3], dans ce chapitre, nous donnons quelques formules (la formule de Liouville [3], la formule de variation de constante [3]), puis, nous donnons des exemples sur les équations différentielles stochastiques linéaires.
Enfin, le 4ème chapitre se rapporte à la stabilité des EDS [6](la stabilité exponentielle), nous donnons les différentes sorte de stabilité : la stabilité en probabilité [6], la stabilité exponentielle presque sûre [1], la stabilité exponentielle des moments [8], et la stabilisation stochastique et la distabilisation [9], et nous terminons ce travail par un exemple de modèle à la stabilité exponentielle .

Chapitre 1

Mouvement Brownien et Intégrales Stochastiques

1.1 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien est le nom donné au mouvement irrégulier de grains de pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste écossais **Robert Brown** en 1828. Le mouvement a été expliqué plus tard par les collisions aléatoires avec les molécules d'eau. Pour décrire le mouvement mathématiquement , il est naturel d'utiliser le concept d'un processus stochastique $B_t(\omega)$ interprété comme une position du grain de pollen ω à l'instant t, maintenant, donnons la définition mathématique du mouvement brownien.

Définition 1.1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité avec une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*, un mouvement brownien standard uni dimensionel* $\{B_t\}_{t\geq 0}$ *est un processus continu* $\{\mathcal{F}_t\}$ *adapté, vérifie les propreités suivantes :*

1. $B_0 = 0 \quad p.s.$ *;*
2. *Les incruments* $B_t - B_s$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0, t-s)$*, pour* $0 \leq s > t < \infty$ *;*
3. $B_t - B_s$ *et* B_s *sont indépendantes.*

Définition 1.1.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité complet, sous les conditions* *précédantes d'un mouvement brownien , nous conclusons les propreités suivantes :*

(a) $\{-B_t\}$ *est un mouvement brownien par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *;*

(b) *Soit* $c > 0$

$$X_t = \frac{B_t}{\sqrt{c}} \quad pour \quad t \geq 0$$

alors, $\{X_t\}$ *est un mouvement par rapport à* $\{\mathcal{F}_{ct}\}$ *;*

(c) $\{B_t\}$ *est une martingale continue de carré intégrable et de variation quadratique* $\langle B, B\rangle_t = t$ *; pour* $t \geq 0$ *;*

(d) *La loi forte des grands nombres indique que*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad p.s.$$

Théorème 1.1.1. ***La loi du logarithme itéré, A.Hincin (1933)**[10]*
Pour tous $\omega \in \Omega$*, nous avons*

1. $\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1,$
2. $\liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = -1,$
3. $\limsup_{t \longrightarrow \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1,$
4. $\liminf_{t \longrightarrow \infty} \frac{B_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1$

Ce théorème montre que pour tout $\epsilon > 0$*, il existe une variable aléatoire positive* ρ_ϵ *telle que pour tous* $\omega \in \Omega$*, la trajectoire d'un échantillon brownien est dans l'intervalle* $\pm(1+\epsilon)\sqrt{2t \log\log t}$ *chaque fois que* $t \geq \rho_\epsilon(\omega)$ *c'est*

$$-(1+\epsilon)\sqrt{2t \log\log t} \leq B_t(\omega) \leq (1+\epsilon)\sqrt{2t \log\log t}$$

Définition 1.1.3. *Un processus d dimensionnel* $\{B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)\}_{t \geq 0}$ *est appelé un mouvement brownien d dimensionnel si chaque* B_t^i *est un mouvement brownien uni*

dimensionnel, et $\{B_t^1, ..., B_t^d\}$ *sont indépendants.*
Pour un mouvement brownien d dimensionnel, nous avons encore

$$\lim \sup_{t \longrightarrow \infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad p.s.$$

Cela est assez surprenant, car il signifie que les composantes individuelles indépendantes de B_t *ne sont pas simultanément de l'ordre* $\sqrt{2t \log \log t}$, *autrement* $\sqrt{d}$ *au lieu de* 1 *aurait paru dans le côté droit de l'égalité ci-dessus.*
Il est facile de voir qu'un mouvement brownien d dimensionnel est une martingale continue avec les variations quadratiques conjointes

$$\langle B^i, B^j \rangle_t = \delta_{ij} t \, pour 1 \leq i, j \leq d,$$

Où δ_{ij} *est la fonction de Dirac*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \quad pour \quad i = j \\ \\ 0 \quad pour \quad i \neq j \end{cases}$$

Théorème 1.1.2. ***(P.Lévy (1948))****[7]*
Soit $M_t = (M_t^1, ..., M_t^d)$ *est une martingale locale continue d-dimensionnelle par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}$, *et* $M_0 = 0 \quad p.s.$ *si*

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \delta_{ij} t$$

alors, $\{M_t\}$ *est un mouvement brownien d-dimensionnel par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}$.

1.2 Intégrales stochastiques

dans cette section nous définissons l'intégrale stochastique

$$\int_0^t f(s) dB_s.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, le trajet d'echantillon Nrownien $B.(\omega)$ n'est pas différentiable, l'intégrale ne peut pas être défini de la manière ordinaire. Cependant, nous pouvons définir l'intégrale pour une grande classe de processus stochastiques en faisant usage de la nature stochastique du mouvement brownien.
Cette intégrale a été défini par *K.Itô* en 1949 et est connu "l'intégrale stochastique d'*Itô*". Nous allons définir maintenant l'intégrale stochastique étape par étape.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ satisfait la condition usuelle. Soit $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ être un Mouvment brownien uni-dimensionel défini dans l'espace de probabilité adapté à la filtration.
Soit $0 \leq a < b < \infty$. Notons $\mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ l'espace des processus $f = \{f_t\}_{a\leq t\leq b}$ $\mathcal{F}_t$-mesurables tel que

$$\|f\|_{a,b}^2 = \mathbb{E}\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \tag{1.1}$$

Nous identifions f et $\overline{f}$ dans $\mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ si $\|f - \overline{f}\|_{a,b}^2$. dans ce cas nous disons que f et $\overline{f}$ sont équivalentes et écrire $f = \overline{f}$.

$\|.\|_{a,b}$ définit une distance sur $\mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ et l'espace est complet sous cette métrique. Rappelons que pour chaque $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, il est prévisible que $\overline{f} \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ de telle sorte que $f = \overline{f}$. f présente une modefication $\widehat{f}$ progressivement mesurable dans $\mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ puis nous pouvons prendre

$$\overline{f}(t) = \overline{\lim}_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{t-h}^t \widehat{f}(s)ds.$$

Pour processus stochastique f, nous allons montré comment définir l'intégrale d'*Itô* $\int_a^b f(t)dB_t$. D'abord définir l'intégrale $\int_a^b g(t)dB_t$ pour une classe de processus simple g. Ensuite, nous montrons que $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ peut être approché par un processus simple g et nous définissons la limite de $\int_a^b g(t)dB_t$ comme l'intégrale $\int_a^b f(t)dB_t$.

Définition 1.2.1. *Un processus stochastique $g = \{g(t)\}_{a\leq t\leq b}$ à valeur réelle est appelé* *un processus simple ou pas s'il existe une partition* $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ *de* $[a, b]$, *et une variable aléatoire limitée* $\xi_i, 0 \le i \le k-1$ *de telle sorte que* ξ_i *est* $\mathcal{F}_{t_i}$*-mesurable et*

$$g(t) = \xi_0 \mathbb{I}_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i \mathbb{I}_{[t_i,t_{i+1}]}(t) \tag{1.2}$$

Notons $\mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R})$ *la famille de tous ces processus.*
avec $\mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$.

Définition 1.2.2. (1ère partie de la définition d'intégrale d'Itô)
pour un processus simple g *avec la formule de l'équation (1.2), nous définissons*

$$\int_a^b g(t) dB_t = \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \tag{1.3}$$

et appellons l'intégrale stochastique de g *par rapport à Mouvement Brownien* B_t *ou l'intégrale d'*Itô.
Cette intégrale $\int_a^b g(t)dB_t$ *est* $\mathcal{F}_b$*-mesurable, Nous allons montrer qu'elle appartient à* $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R})$.

Lemme 1.2.1. *Si* $g \in \mathcal{M}_0([a, b]; \mathbb{R})$, *alors*

$$\mathbb{E} \int_a^b g(t) dB_t = 0 \tag{1.4}$$

$$\mathbb{E} |\int_a^b g(t) dB_t|^2 = \mathbb{E} \int_a^b |g(t)|^2 dt \tag{1.5}$$

Preuve 1.2.1. *Depuis que* ξ_i *est* $\mathcal{F}_{t_i}$*-mesurable, alors* $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_{t_i}$.

$$\mathbb{E} \int_a^b g(t) dB_t = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E}[\xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0.$$

De plus, notons que $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ *est indépendante de* $\xi_i\xi_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ *si* $i < j$*, ainsi*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\textstyle\int_a^b g(t)dB_t|^2 &= \textstyle\sum_{0\le i,j\le k-1} \mathbb{E}[\xi_i\xi_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\xi_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\xi_i^2 \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\xi_i^2(t_{i+1} - t_i) = \mathbb{E}\int_a^b |g(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Définition 1.2.3. (2ème partie de la définition d'intégrale d'Itô)
Soit $f \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$*. L'intégrale d'*Itô *de* f *par rapport à* $\{B_t\}$ *est définie par*

$$\int_a^b f(t)dB_t = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b g_n(t)dB_t \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}), \tag{1.6}$$

où, $\{g_n\}$ *est une suite de processus simples telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E} \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt = 0. \tag{1.7}$$

La définition ci-dessus est indépendante de la suite g_n*. En effet, si* $\{h_n\}$ *est une autre suite de processus simples convergente vers* f *telle que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E} \int_a^b |f(t) - h_n(t)|^2 dt = 0$$

Alors, la suite φ_n*, où* $\varphi_{2n-1} = g_n$ *et* $\varphi_{2n} = h_n$*, est également convergente vers* f *dans le même sens. Ainsi, la suite* $\{\int_a^b \varphi_n(t)dB_t\}$ *est convergente dans* $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R})$*. Aussi, les limites dans* $\mathbf{L}^2$ *de* $\int_a^b g_n(t)dB_t$ *et* $\int_a^b h_n(t)dB_t$ *sont égales presque sûrement.*

Théorème 1.2.1. *Soit* $f, g \in \mathcal{M}^2([a, b]; \mathbb{R})$*, et soit* α, β *deux nombres réels. Alors*

(i) $\int_a^b f(t)dB_t$ *est* $\mathcal{F}_b$*-mesurable ;*

(ii) $\mathbb{E}\int_a^b f(t)dB_t = 0$ *;*

(iii) $\mathbb{E}|\int_a^b f(t)dB_t|^2 = \mathbb{E}\int_a^b |f(t)|^2 dt$ *;*

(vi) $\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dB_t = \alpha\int_a^b f(t)dB_t + \beta\int_a^b g(t)dB_t$.

Pour montre les deux assertions (ii) et (iii), nous avons besoin du théorème suivant

Théorème 1.2.2. *Soit $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, alors*

$$\mathbb{E}(\int_a^b f(t)dB(t)/\mathcal{F}_a) = 0 \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|\textstyle\int_a^b f(t)dB(t)/|^2\mathcal{F}_a) &= \mathbb{E}(\textstyle\int_a^b |f(t)|^2 dt/\mathcal{F}_a)\\ &= \textstyle\int_a^b \mathbb{E}(|f(t)|^2/\mathcal{F}_a)dt\end{aligned} \tag{1.9}$$

Lemme 1.2.2. *Si $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ et ξ est une variable aléatoire finie à valeur réelle $\mathcal{F}_a$-mesurable, alors $\xi f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$ et*

$$\int_a^b \xi f(t)dB_t = \xi\int_a^b f(t)dB_t \tag{1.10}$$

Indication

Si f est un processus simple, alors (1.10)suit de la définition d'intégrale stochastique. Plus général, $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, soit $\{g_n\}$ une suite de processus simple satisfaite (1.7). Appliquant 5.10 *pour chaque g_n et prend $n \longrightarrow \infty$.*

Preuve du théorème (1.2.2)

Par la définition de l'espérance conditionnelle, (1.8) détient si et seulement si

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A\int_a^b f(t)dB(t)) = 0$$

Pour tout ensemble $A \in \mathcal{F}_a$

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A\int_a^b f(t)dB(t)) = \mathbb{E}\int_a^b \mathbb{I}_A f(t)dB(t) = 0$$

Définition 1.2.4. *Soit $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, définissons*

$$\mathbf{I}(t) = \int_0^t f(s)dB_s \qquad pour 0 \le t \le T$$

où, $\mathbf{I}(0) = 0$. $\{\mathbf{I}(t)\}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-adapté. Nous montrons maintenant une propreité importante des matingales de l'intégrale d'*Itô

Théorème 1.2.3. *Si $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, alors la définition de l'intégrale $\{\mathbf{I}(t)\}_{0\le t\le T}$ est une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$. En particulier,*

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t f(s)dB_s|^2] \le 4\mathbb{E}\int_0^T |f(s)|^2 ds \tag{1.11}$$

Théorème 1.2.4. *Soit $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$, alors l'intégrale $\mathbf{I} = \{\mathbf{I}_t\}_{t\in[0,T]}$ est une martingale continue de carré intégrable et à variation quadratique donnée par*

$$\langle \mathbf{I}, \mathbf{I}\rangle = \int_0^t |f(s)|^2 ds, \quad 0 \le t \le T \tag{1.12}$$

Preuve 1.2.2. *Évidemment, nous avons besoin de montrer (1.12), Par la définition de variation quadratique, il faut donc prouver que $\{\mathbf{I}^2 - \langle \mathbf{I}, \mathbf{I}\rangle\}$ est une martingale continue démarrant à l'origine.*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{I}^2(t) - \langle \mathbf{I}, \mathbf{I}\rangle) = \;& \mathbf{I}^2(r) - \langle \mathbf{I}, \mathbf{I}\rangle_r + 2\mathbf{I}(r)\mathbb{E}(\textstyle\int_r^t f(s)dB_s/\mathcal{F}_r) + \mathbb{E}(|\int_r^t f(s)dB_s|^2/\mathcal{F}_r)\\ & -\mathbb{E}(\textstyle\int_r^t |f(s)|^2 ds/\mathcal{F}_r)\\ & = \mathbf{I}^2(r) - \langle \mathbf{I}, \mathbf{I}\rangle_r\end{aligned}$$

Passons maintenant à définir les intégrales stochastiques avec le temps d'arrêt. nous observons que si τ est un $\{\mathcal{F}\}_t$ temps d'arrêt, alors $\{\mathbf{I}_{[[0,\tau]]}(t)\}_{t\ge 0}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-mesurable, borné, continu à droite,de plus, pour tout $t \ge 0$.

$$\{\omega : \mathbf{I}_{[[0,\tau]]}(t,\omega) \le r\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_t & si \quad r < 0, \\ \{\omega : \tau(\omega) < t\} & si \quad 0 \le r < 1, \quad \mathbf{I}_{[[0,\tau]]}(t) \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}, \\ \Omega \in \mathcal{F}_t & si \quad r \ge 1 \end{cases}$$

donc, $\{\mathbf{I}_{[[0,\tau]]}\}_{t\geq 0}$ *est prévisible.*

Définition 1.2.5. *Soit* $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, et soit* τ *est un temps d'arrêt dans* $\mathcal{F}_t$ *pour tout* $0 \leq \tau \leq T$*, alors,* $\{\mathbf{I}_{[[0,\tau]]}(t)f(t)\}_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$ *et nous définissons*

$$\int_0^\tau f(s)dB_s = \int_0^T \mathbf{I}_{[[0,\tau]]}(s)f(s)dB_s$$

De plus, si ρ *un autre temps d'arrêt avec* $0 \leq \rho \leq \tau$*, on definit*

$$\int_\rho^\tau f(s)dB_s = \int_0^\tau f(s)dB_s - \int_0^\rho f(s)dB_s$$

ou tout simplement

$$\int_\rho^\tau f(s)dB_s = \int_0^T \mathbf{I}_{[[\rho,\tau]]}(s)f(s)dB_s \tag{1.13}$$

Théorème 1.2.5. *Soit* $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$ *et soit* ρ *et* τ *deux temps d'arrêt, pour tout* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$*,*

$$\mathbb{E}(\int_\rho^\tau f(s)dB_s/\mathcal{F}_\rho) = 0 \tag{1.14}$$

$$\mathbb{E}(|\int_\rho^\tau f(s)dB_s/|^2\mathcal{F}_\rho) = \mathbb{E}(\int_\rho^\tau |f(s)|^2 ds \tag{1.15}$$

Lemme 1.2.3. *Soit* $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*,* τ *un temps d'arrêt, alors, pour tout* $0 \leq \tau \leq T$

$$\int_0^\tau f(s)dB_s = \mathbf{I}(\tau)$$

Corollaire 1.2.1. *Soit* $f, g \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$*, et soit* ρ *et* τ *deux temps d'arrêt.Alors*

$$\mathbb{E}(\int_\rho^\tau f(s)dB_s \int_\rho^\tau g(s)dB_s/\mathcal{F}_\rho) = \mathbb{E}(\int_\rho^\tau f(s)g(s)ds/\mathcal{F}_\rho)$$

pour tout $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$.

Preuve

$$\begin{array}{rcl} 4\mathbb{E}(\int_\rho^\tau f(s)dB_s \int_\rho^\tau g(s)dB_s/\mathcal{F}_\rho) & = & \mathbb{E}(|\int_\rho^\tau (f(s)+g(s))dB_s|^2/\mathcal{F}_\rho) - \mathbb{E}(|\int_\rho^\tau (f(s)-g(s))dB_s|^2/\mathcal{F}_\rho) \\ & = & \mathbb{E}(\int_\rho^\tau (f(s)+g(s))^2 ds/\mathcal{F}_\rho) - \mathbb{E}(\int_\rho^\tau (f(s)-g(s))^2 ds/\mathcal{F}_\rho) \\ & = & 4\mathbb{E}(\int_\rho^\tau f(s)g(s)ds/\mathcal{F}_\rho) \end{array}$$

Ce qui fallait démontré.

*Nous nous étendons maintenant d'intégrale stochastique d'*Itô*au cas multidimensionnl. Soit* $\{B_t = (B_t^1, ..., B_t^m)^T\}t \geq 0$ *être un mouvement brownien m dimensionnel défini sur l'espace de probabilité complet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$. *Notons* $\mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$ *la famille de tous matrices* $d \times m$ *à valeur mesurable* $\{\mathcal{F}_t\}$ *adaptée, le processus* $f = \{(f_{ij}(t))_{d\times m}\}$ *tels que*

$$\mathbb{E}\int_0^T |f(s)|^2 dt < \infty$$

Définition 1.2.6. *Soit* $f \in \mathcal{M}^2([0,T]; \mathbb{R}^{d\times m})$. *Utilisant la notation matricielle, nous définissons l'intégrale d'*Itô *multi-dimentionnelle.*

$$\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^t \begin{pmatrix} f_{11}(s) & ... & f_{1m}(s) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ f_{m1}(s) & & f_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_s^1 \\ . \\ . \\ . \\ dB_s^m \end{pmatrix}$$

être le processus d'une valeur de vecteur colonne de dimension d, dont, la ième composante est la somme d'intégrale d'Itô en dimension 1

$$\sum_{j=1}^m \int_0^t f_{ij}(s) dB_s^j.$$

*L'intégrale d'*Itô *est une martingale continue à valeur dans* $\mathbb{R}^d$ *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$. *Par ailleurs, cette intégrale a des propreités importantes.*

Lemme 1.2.4. *Soient* $\{B_t^1\}_{t\geq 0}$ *et* $\{B_t^2\}_{t\geq 0}$ *deux mouvements browniens indéendants uni-dimensionnel. Soit* $f, g \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$, *et* ρ, τ *deux temps d'arrêt tel que* $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$. *Alors*

$$\mathbb{E}(\int_\rho^\tau f(s)dB_s^1 \int_\rho^\tau g(s)dB_s^2/\mathcal{F}_\rho) = 0$$

(1.16)

Preuve

Nous montrons d'abord que si $\varphi, \phi \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R})$.*Alors*

$$\mathbb{E}(\int_a^b \varphi(s)dB_s^1 \int_a^b \phi(s)dB_s^2) = 0 \tag{1.17}$$

En effet, soit φ, ϕ *être un processus simple avec la forme*

$$\varphi(t) = \xi_0 \mathbf{I}_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{k-i} \xi_i \mathbf{I}(t_i, t_{i+1}]$$

et

$$\phi(t) = \zeta_0 \mathbf{I}_{\overline{t_0},\overline{t_1}}(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \zeta_i \mathbf{I}_{\overline{t_j},\overline{t_{j+1}}}(t)$$

Alors

$$\mathbb{E}(\int_a^b \varphi(s)dB_s^1 \int_a^b \phi(s)dB_s^2) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}[\xi_i\zeta_j(B_{t_{i+1}}^1 - B_{t_i}^1)(B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2)]$$

Si $t_i \leq \overline{t_j}$, *alors* $(B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2)$ *est indépendante de* $\xi_i\zeta_j(B_{t_{i+1}}^1 - B_{t_i}^1)$ *et donc*

$$\mathbb{E}(\xi_i\zeta_j(B_{t_{j+1}}^2 - B_{t_j}^2)(B_{t_{i+1}}^1 - B_{t_i}^1)) = 0$$

De même, si $t_i > \overline{t_j}$*, nous avons montrés que* 1.17 *détient pour des processus simple* φ*,* ϕ*, mais mais le cas général suivie par la procédure de rapprochement.*
pour tout $0 \leq r \leq t \leq T$

$$\mathbb{E}(\int_r^t f(s)dB_s^1 \int_r^t g(s)dB_s^2/\mathcal{F}_r) = 0 \tag{1.18}$$

donc

$$\mathbb{E}(\int_0^t f(s)dB_s^1 \int_0^t g(s)dB_s^2/\mathcal{F}_r) = \int_0^r f(s)dB_s^1 \int_0^r g(s)dB_s^2$$

C'est à dire, $\{\int_0^t f(s)dB_s^1 \int_0^t g(s)dB_s^2\}$ *est une martingale par rapport à* $\mathcal{F}_t$*. Par conséquent, d'aprés le théorème de Doob [10] des martingales arrêtés*

$$\mathbb{E}(\int_0^r f(s)dB_s^1 \int_0^r g(s)dB_s^2/\mathcal{F}_\rho) = \int_0^\rho f(s)dB_s^1 \int_0^\rho g(s)dB_s^2$$

(1.19)

Soit $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$ *la famille de tous les processus* $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$ *tels que*

$$\mathbb{E}\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \qquad pour \quad tout \quad T > 0$$

. Si $f \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$ *alors* $\{f(t)\}_t \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m}$ *pour tout* $T > 0$*. Par conséquent, l'intégrale indéfinie* $\int_0^t f(s)dB_s$ *est bien défini, et il est une martingale continue de carré intégrable à valeur dans* $\mathbb{R}$*.Cependant, nous éfforçons à définir l'intégrale de tous processus dans* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$*.*
Soit $f \in \mathcal{L}^2$*, pour tout entier* $n \geq 1$*, définir le temps d'arrêt*

$$\tau_n = n \wedge inf\{t \geq 0 : \int_0^t |f(s)|^2 ds \geq n\}.$$

$\tau_n \uparrow \infty$ P.S, de plus, $\{f(t)\mathbf{I}_{[[0,\tau_n]]}(t)\}_t \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{d\times m}$ ainsi, l'intégrale

$$\mathbf{I}_n(t) = \int_0^t f(s)\mathbf{I}_{[[0,\tau_n]]}(s)dB_s, \qquad t \geq 0$$

est bien défini, notons pour $1 \leq n \leq m$ et $t \geq 0$

$$\mathbf{I}_m(t\wedge\tau_n) = \int_0^{t\wedge\tau_n} f(s)\mathbf{I}_{[[0,\tau_m]]}(s)dB_s = \int_0^t f(s)\mathbf{I}_{[[0,\tau_m]]}(s)\mathbf{I}_{[[0,\tau_n]]}(s)dB_s$$

donc, nous

$$= f(s)\mathbf{I}_{[[0,\tau_n]]}(s)dB_s \qquad = \mathbf{I}_n(t)$$

pouvons définir l'intégrale stochastique indéfinie $\{\mathbf{I}(t)\}_t$ comme

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}_n(t) \quad \textit{quand} \quad 0 \leq t \leq \tau_n \tag{1.20}$$

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques

2.1 Introduction

Maintenant, nous introduisons comme un exemple, le modèle de croissance de la population simple stochastique

$$N(t) = N_0 + \int_0^t r(s)N(s)ds + \int_0^t \sigma N(s)dB(s)$$

Où, pour la forme différentielle

$$dN(t) = r(t)N(t)dt + \sigma(t)N(t)dB(t), \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

Avec la valeur initiale $N(0) = N_0$. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la solution de l'équation. En général, nous allons étudier la solution de l'équation différentielle stochastique non lineaire.

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t), \quad t \in [0, T] \tag{2.2}$$

avec la valeur initiale $x(t_0 = x_0)$, où $0 \leq t_0 \leq T \leq \infty$. Les questions sont :

– C'est quoi une solution ?

– Est ce qu'il y'a des théorèmes d'existence et d'unicité pour telle solution ?
– Quelles sont les propreités de la solution ?
– Comment peut on obtenir la solution en pratique ?

Nous devons répondre à plusieurs questions une par une.De plus, comme une application importnate des équations différentielles stochastiques, nous devons établir la formule de *Feyman Kac* qui donne une représentation stochastique pour la solution de l'équation différentielle partielle parabolique linéaire dans les termes de la solution de l'EDS correspondante.

2.2 Équations différentielles stochastiques

Considirons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ qui satisfait les conditions usuelles. Soit $B(t) = (B_1(t), ..., B_m(t))^T$ un mouvement brownien de dimension m déini sur cet espace, soit x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_0}$ mesurable tel que $\mathbb{E}|x_0|^2 < \infty$, $f : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times m}$ deux mesures de Borel.
consisidrons l'EDS de dimension d de type *Itô*

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t), \quad t_0 \leq t \leq T \tag{2.3}$$

Par la définition de la différentielle stochastique, cette équation est équivalente à l'équation d'intégrale stochastique suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)dB(s) \tag{2.4}$$

Définition 2.2.1. *Un processus stochastique $\{x(t)\}_{t_0\leq t\leq T}$ dans $\mathbb{R}^d$ est appelé une solution de l'équation 2.3 si elle a les propreités suivantes :*

(i) $\{x(t)\}$ *est continu et $\mathcal{F}_t$ adapté ;*

(ii) $\{f(x(t),t)\} \in \mathcal{L}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ *et* $\{g(x(t),t)\} \in \mathcal{L}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ *;*

(iii) *l'équation 2.4 se tient pour chaque* $t \in [0,T]$ *avec une probabilité* 1.

Une solution $\{x(t)\}$ *est dit unique si n'importe quelle autre solution* $\{\overline{x}(t)\}$ *n'est pas possible à distinguer de* $\{x(t)\}$*, c'est à dire :*

$$\mathbb{P}\{x(t) = \overline{x}(t) \quad pourtout\, t_0 \leq t \leq T\} = 1$$

Preuve Voir [4].

Remarque 2.2.1. **(a)** *Désigner la solution de l'équation (2.3) par* $x(t;t_0,x_0)$*. On note d'aprés l'équation 2.4 que pour n'importe* $s \in [t_0,T]$*,*

$$x(t) = x(s) + \int_s^t f(x(r),r)dr + \int_s^t g(x(r),r)dB(r), \quad s \leq t \leq T \tag{2.5}$$

Mais, c'est une équation différentielle stochastique sur $[s,T]$ *avec valeuer initiale* $x(s) = x(s;t_0,x_0)$*, dont la solution est désignée par* $x(t;s,x(s;t_0,x_0))$*, donc, nous voyons que la solution de l'équation 2.3 satisfait la propreité flux ou semi groupe suivante*

$$x(s;t_0,x_0) = x(t;s,x(s;t_0,x_0)), \qquad t_0 \leq t \leq T$$

(b) *Les coéfficients* f *et* g *peuvent être dépenre sur* ω *dans une manière générale, et ils sont adaptés.*

exemple 2.2.1. *Soit* $B(t), t \geq 0$ *un mouvement brownien uni-dimensionel, déterminer le processus stochastique de deux dimension*

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = (\cos(B(t)), \sin(B(t)))^T, \quad t \geq 0 \tag{2.6}$$

Le processus $x(t)$ *est appelé le mouvement brownien sur une cercle unitaire, nous montrons que* $x(t)$ *satisfait une équation différentielle stochastique lineaire par la* *formule d'*Itô

$$\begin{cases} dx_1(t) = & -\sin(B(t))dB(t) - \frac{1}{2}\cos(B(t))dt & = & -\frac{1}{2}x_1(t)dt - x_2(t)dB(t) \\ \\ dx_2(t) = & \cos(B(t))dB(t) - \frac{1}{2}\sin(B(t))dt & = & -\frac{1}{2}x_2(t)dt - x_1(t)dB(t) \end{cases}$$

C'est à dire, sous forme matricielle

$$dx(t) = -\frac{1}{2}x(t)dt + Kx(t)dB(t), \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

2.3 Existence et unicité des solutions

Il faut trouver les conditions qui garantissent l'existance et l'unicité de l'équation (2.3).

Théorème 2.3.1. *Supposons qu'il existe deux constantes positives* $\overline{K}$ *et* K *tel que*

(i) *(la condition de Liptchiz) pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *et* $t \in [t_0, T]$

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \bigvee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq \overline{K}|x-y|^2; \tag{2.8}$$

(ii) *(la condition de croissance lineaire) pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$

$$|f(x,t)|^2 \bigvee |g(x,t)|^2 \leq K(1 + |x|^2) \tag{2.9}$$

Alors, il existe une solution unique $x(t)$ *de l'équation (2.2) et cette solution appartient à* $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$*.*

Lemme 2.3.1. *Supposons que la condition (2.9) détient, si* $x(t)$ *est une solution de l'équation (2.2) , alors*

$$\mathbb{E}(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)|^2) \leq (1 + 3\mathbb{E}|x_0|^2)e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)} \tag{2.10}$$

En particulier, $x(t)$ *appartient à* $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.3.2. *[4] Supposons que la condition de croissance lineaire se tient, mais la condition de Lipschitz est remplacée par la condition de Liptchiz locale suivante : pour chaque entier* $n \geq 1$, *il existe une constante positive* K_n *tel que, pour tout* $t \in [t_0,T]$ *et tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *avec* $|x| \vee |y| \leq n$,

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \bigvee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq K_n|x-y|^2 \tag{2.11}$$

Théorème 2.3.3. *Supposons que la condition de Liptchiz se tient, mais la condition de croissance lineaire est remplacée par la condition monotone suivante :*
il existe une constante $K \geq 0$ *telle que pour tout* $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0,T]$

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq K(1+|x|^2) \tag{2.12}$$

Alors il existe une solution unique $x(t)$ *de l'équation (2.3) dans* $\mathcal{M}([t_0,T];\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.3.4. *Supposons que pour chaque nombre réel* $T > t_0$ *et nombre entier* $n \geq 0$, *il existe une constante positive* $K_{T,n}$ *tel que pour tout* $t \in [t_0,T]$ *et tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$, *avec* $|x| \vee |y| \leq n$,

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \bigvee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq K_{T,n}|x-y|^2.$$

Supposons aussi que pour chaque $T > t_0$, *il existe une constante positive* K_T *tel que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times [t_0,T]$,

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq K_T(1+|x|^2).$$

Alors, il existe une solution globale unique $x(t)$ *de l'équation (2.2) avec* $t \in [t_0,\infty)$, *cette solution appartient à* $\mathcal{M}([t_0,\infty);\mathbb{R}^d)$.

2.4 Estimation dans $\mathbf{L}^p$

Nous supposons que $x(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ est une solution unique de l'équation (2.2) avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$, et nous allons enquêter sur le moment d'ordre p de la solution.

Théorème 2.4.1. *Soit $p \geq 2$ et $x_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$, supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$,*

$$x^T f(x,t) + \frac{p-1}{2}|g(x,t)|^2 \leq \alpha(1 + |x|^2) \tag{2.13}$$

Alors,

$$\mathbb{E}|x(t)|^p \leq 2^{\frac{p-2}{2}}(1 + \mathbb{E}|x_0|^p e^{p\alpha(t-t_0)}) \tag{2.14}$$

pour $t \in [t_0, T]$.

Avons de démontrer ce théorème, il faut passer par l'inégalité de Granwall.
L'inégalité de Gronwall
Soit $T > 0$ et $c \geq 0$, soit $u(.)$ est une fonction bornée, positive et Borel mesurable sur $[0, T]$, et soit $v(.)$ est une fonction positive et intégrable sur $[0, T]$. Si

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds$$

Alors

$$u(t) \leq c\exp(\int_0^t v(s)ds)$$

pour tout $0 \leq t \leq T$

Preuve 2.4.1. *Par la formule d'Itô et la condition (2.13), nous pouvons tirer que pour $t \in [t_0, T]$,*

$$\begin{aligned}[1+|x(t)|^2]^{\frac{p}{2}} &\leq 2^{\frac{p-2}{2}}(1+|x_0|^p)+p\alpha\int_{t_0}^t[1+|x(s)|^2]^{\frac{p}{2}}ds \\ &+ p\int_{t_0}^t[1+|x(s)|^2]^{\frac{p-2}{2}}x^T(s)g(x(s),s)dB(s).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour chaque entier $n \geq 1$, définir le temps d'arrêt

$$\tau_n = T\wedge \inf\{t\in[t_0,T] : |x(t)|\geq n\}.$$

$\tau_n \uparrow T$ p.s. De plus, il résulte de (2.15) et la propreité d'intégrales d'Itô que

$$\mathbb{E}([1+|x(t\wedge\tau_n)|^2]^{\frac{p}{2}})$$

$$\leq 2^{\frac{p-2}{2}}(1+\mathbb{E}|x_0|^p)+p\alpha\mathbb{E}\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}[1+|x(s)|^2]^{\frac{p}{2}}ds$$

$$\leq 2^{\frac{p-2}{2}}(1+\mathbb{E}|x_0|^p)+p\alpha\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}([1+|x(s\wedge\tau_n)|^2]^{\frac{p}{2}})ds$$

Les rendements d'inégalités de Gronwall

$$\mathbb{E}([1+|x(t\wedge\tau_n)|^2]^{\frac{p}{2}}) \leq 2^{\frac{p-2}{2}}(1+\mathbb{E}|x_0|^p)e^{p\alpha(t-t_0)}$$

Si $n \longrightarrow \infty$

$$\mathbb{E}([1+|x(t)|^2]^{\frac{p}{2}}) \leq 2^{\frac{p-2}{2}}(1+\mathbb{E}|x_0|^p)e^{p\alpha(t-t_0)} \tag{2.16}$$

Nous vérifions maintenant que si la condition de la croissance linéaire (2.9) est remplie, alors (2.13) est satisfait avec $\alpha=\sqrt{K}+K(p-1)/2$. En fait, en utilisant (2.9) et l'inégalité élémentaire $2ab\leq a^2+b^2$, on peut déduire que pour tout $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}2x^Tf(x,t)\leq 2|x||f(x,t)| &= 2(\sqrt{\epsilon}|x|)(f(x,t)/\sqrt{\epsilon}) \\ &\leq \epsilon|x|^2+\tfrac{1}{\epsilon}|f(x,t)|^2 \qquad \textit{On prend } \epsilon=\sqrt{K} \\ &\leq \epsilon|x|^2+\tfrac{K}{\epsilon}(1+|x|^2).\end{aligned}$$

$$x^Tf(x,t)\leq\sqrt{K}(1+|x|^2).$$

Donc

$$x^Tf(x,t)+\frac{p-1}{2}|g(x,t)|^2 \leq [\sqrt{K}+\frac{K(p-1)}{2}](1+|x|^2).$$

Théorème 2.4.2. *Soit $p \geq 2$ et $x_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Supposons que la condition de croissance linéaire (2.9) se tient, alors*

$$\mathbb{E}|x(t)-x(s)|^p \leq C(t-s)^{\frac{p}{2}} \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t_0 \leq s < t \leq T, \tag{2.17}$$

où

$$C = 2^{p-2}(1+\mathbb{E}|x_0|^p)e^{p\alpha(T-t_0)}([2(T-t_0)]^{\frac{p}{2}} + [p(p-1)])^{\frac{p}{2}}.$$

Et $\alpha = \sqrt{K} + K(p-1)/2$. En particulier, le moment d'ordre p de la solution est continu sur $[t_0, T]$.

Corollaire 2.4.1. *Soit $0 < p < 2$ et $x_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$, Supposons que la codition de croissance linéaire 2.9 se tient. Alors*

$$\mathbb{E}|x(t)-x(s)|^p \leq C^{\frac{p}{2}}(t-s)^{\frac{p}{2}} \qquad \textit{pour} \quad t_0 \leq s < t \leq T \tag{2.18}$$

où,

$$C = 2(1+\mathbb{E}|x_0|^2)(T-t_0+1)exp[(2\sqrt{K}+K)(T-t_0)]$$

Le moment d'ordre p de la solution est continu sur $[t_0, T]$.

2.5 Estimation asypmtotique presque sûre

Nous considérons dans cette section une équation différentielles stochastique en dimension d

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t) \qquad t \in [t_0, \infty) \tag{2.19}$$

avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$, supposons de l'équation a une suele solution globale $x(t)$ sur $[t_0, \infty)$. En outre, nous allons imposer la condition monotone : Il ya une constante positive α tel que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, \infty)$,

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq \alpha(1+|x|^2). \tag{2.20}$$

Et pour $0 < p \leq 2$, le moment d'ordre p de la solution satisfait

$$\mathbb{E}|x(t)|^p \leq (1 + \mathbb{E}|x_0|^2)^{\frac{p}{2}} e^{p\alpha(t-t_0)} \qquad pourtout t \geq t_0$$

cela signifie que le moment d'ordre p augmentera de façon exponentielle avec l'exposant $p\alpha$. Il peut être exprimé sous la forme

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \log(\mathbb{E}|x(t)|^p) \leq p\alpha \tag{2.21}$$

Le coté gauche de (2.21) est appelée le moment d'ordre p exposant se lyapunov $\{aussi \quad pour \quad p > 2\}$, et (2.21) montre que le pth moment exposant de lyapunov ne doit pas être supérieure à $p\alpha$. Dans cette section, nous allons établir l'estimation asymptotique pour la solution presque sûrement. Plus précisément, nous allons estimer

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \log |x(t)| \tag{2.22}$$

presque sûrement, qui est appelé l'échantillon exposant de Lyapunov , ou tout simplement l'exposant de Lyapunov.

Théorème 2.5.1. *Sous la condition monotone (2.20), l'échantillon exposant de Lyapunov de la solution d'équation 2.19 ne devrait pas être supérieur à α, qui est*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \log |x(t)| \leq \alpha \quad p.s. \tag{2.23}$$

Preuve [5].
nous rappelons la condition de croissance linéaire, il existe une constante $K > 0$ tel que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, \infty)$

$$|f(x,t)|^2 \bigvee |g(x,t)|^2 \leq K(1 + |x|^2) \tag{2.24}$$

l'équation 2.24 implique (2.20) avec $\alpha = \sqrt{K} + K/2$.

Corollaire 2.5.1. *Sous la condition de croissance linéaire de (2.24), la solution de l'équation (2.19) a cette propreité*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \log |x(t)| \leq \sqrt{K} + K/2 \, p.s. \tag{2.25}$$

Noter $M(t)$ une martingale locale continue définie par :

$$M(t) = 2 \int_{t_0}^{t} \frac{x^T(s) g(x(s), s)}{1 + |x(s)|^2} dB(s)$$

Sa variation quadratique

$$\begin{aligned} \langle M, M \rangle_t = & \; 4 \int_{t_0}^{t} \frac{|x^T(s) g(x(s), s)|^2}{[1 + |x(s)|^2]^2} ds \\ & \leq 4K \int_{t_0}^{t} \frac{|x^T(s)|^2}{1 + |x(s)|^2} ds \\ & \leq 4K(t - t_0) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{\langle M, M \rangle_t}{t} \leq 4K \, p.s.$$

et

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{M(t)}{t} = 0 \, p.s.$$

2.6 Approximation des solutions au sens de Carathéodory

Dans les sections précédentes, nous avons discutés les propreités de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \qquad t \in [t_0, T] \tag{2.26}$$

avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0 \in \mathbf{L}^2$.Toutefois, la condition de Lipschitz [5], ect, seule fait garantie l'unicité et l'existence de la solution. En générale, la solution n'est pas une expression explicite sauf le cas linéaire qui sera discuté dans le chapitre (04) en dessous.
Dans la pratique, nous cherchons donc souvent la solution approximative plutôt que de la solution exacte.
Nous pouvons utiliser $x_n(t)$ comme une solution approximative de l'équation (2.26). Dans cette direction, les méthodes plus éfficaces sont les procedures d'approximation de Carathéodory et de Cauchy-Maruyama, nous devons discuté le premier dans cette section, et plus tard dans la prochaine section.
Maintenant, laissons nous donner la définition des solutions approximatives de Carathéodory. pour chaque entier $n \geq 0$, on défini $x_n(t) = x_0$ pour $t_0 - 1 \leq t \leq t_0$ et

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_n(s - 1/n), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x_n(s - 1/n), s)dB(s) \tag{2.27}$$

pour $t \in [t_0, T]$, notons que pour $t_0 \leq t \leq t_0 + 1/n$, $x_n(t)$ peuvent être calculés par

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_0, s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x_0, s)dB(s);$$

Puis, pour $t_0 + 1/n \leq t \leq t_0 + 2/n$,

$$x_n(t) = x_n(t_0 + 1/n) + \int_{t_0+1/n}^{t} f(x_n(s - 1/n), s)ds + \int_{t_0+1/n}^{t} g(x_n(s - 1/n), s)dB(s)$$

Lemme 2.6.1. *Sous la condition de croissance linéaire (2.9) , pour tout $n \geq 1$,*

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}|x_n(t)|^2 \leq C_1 := (1 + 3\mathbb{E}|x_0|^2)e^{3K(T-t_0)(T-t_0+1)} \tag{2.28}$$

Lemme 2.6.2. *Sous la condition de croissance linéaire (2.9) , pour tout $n \geq 1$ et $t_0 \leq s < t \leq T$ avec $t - s \leq 1$,*

$$\mathbb{E}|x_n(t) - x_n(s)|^2 \leq C_2(t-s) \tag{2.29}$$

Théorème 2.6.1. *[5] Supposons que la condition de Lipschitz (2.8) et la condition de croissance linéaire (2.9) attente, soit $x(t)$ la solution unique de l'équation (2.26). alors, pour $n \geq 1$,*

$$\mathbb{E}(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x(t)|^2 \leq \frac{C_3}{n}) \tag{2.30}$$

Où, $C_3 = 4C_2\widetilde{K}(T-t_0)(T-t_0+4)\exp[4\widetilde{K}(T-t_0)(T-t_0+4)]$.

Théorème 2.6.2. *[5] Soit $f(x,t)$ et $g(x,t)$ sont continues, soit x_0 est une variable aléatoire bornée dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_{t_0}$ mesurable. Supposons qu'il existe une fonction concave décroissante $\kappa : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\int_{0+} \frac{d\mu}{\kappa(\mu)} = \infty \tag{2.31}$$

et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t_0 \leq t \leq T$

$$|f(x,t) - f(y,t)|^2 \bigvee |g(x,t) - g(y,t)|^2 \leq \kappa(|x-y|^2) \tag{2.32}$$

lors, l'équation (2.26) a une solution unique $x(t)$.

2.7 Approximation des solutions au sens de Maruyama

Définition 2.7.1. *Passons maintenant à discuter des solutions approximatives d'Euler-Maruyama qui sont définis comme suit, pour tout entier $n \geq 1$, définir*

$x_n(t_0) = x_0$ *et pour* $t_0 + (k-1)/n < t \leq (t_0 + k/n) \wedge T, \quad k = 1, 2, ...,$

$$x_n(t) = x_n(t_0+(k-1)/n)+\int_{t_0+(k-1)/n}^{t} f(x_n(t_0+(k-1)/n), s)ds+\int_{t_0+(k-1)/n}^{t} g(x_n(t_0+(k-1)/n), s)dB(s \tag{2.33}$$

Notons que si on définie

$$\widehat{x}_n(t) = x_0 \mathbb{I}_{\{t_0\}}(t) + \sum_{k\geq 1} x_n(t_0 + (k-1)/n)\mathbb{I}_{(t_0+(k-1)/n, t_0+k/n]}(t) \tag{2.34}$$

pour $t \in [t_0, T]$*, puis il découle de (2.33) que*

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\widehat{x}_n(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(\widehat{x}_n(s), s)dB(s) \tag{2.35}$$

Lemme 2.7.1. *Sous la condition de croissance linéaire , les solution approximatives d'Euler-Maruyama* $x_n(t)$ *ont la propreité*

$$\sup_{t_0\leq t\leq T} \mathbb{E}|x_n(t)|^2 \leq C_1 := (1 + 3\mathbb{E}|x_0|^2)e^{3K(T-t_0)(T-t_0+1)}$$

Et pour $t_0 \leq s < t \leq T$ *avec* $t - s \leq 1$*,*
les solutions approximatives Euler-Maruyama $x_n(t)$ *ont cette propreité*

$$\mathbb{E}|x_n(t) - x_n(s)|^2 \leq C_2(t - s)$$

où, $C_2 = 4k(1 + C_1)$*.*

Théorème 2.7.1. *[5] On suppose que la condition de Lipschitz et la condition de croissance linéaire se tient , laissons* $x(t)$ *être la solution unique de l'équation (2.26), et* $x_n(t)$ *être la solution approximative d'Euler-Maruyama. Alors*

$$\mathbb{E}(\sup_{t_0\leq t\leq T} |x_n(t) - x(t)|^2) \leq \frac{C_3}{n}$$

Où, $C_3 = 4C_2\widetilde{k}(T - t_0)(T - t_0 + 4)\exp[4\widetilde{k}(T - t_0)(T - t_0 + 4)]$

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques lineaires

Dans le chapitre précédent, nous avons discutés sur les équation différentielles stochastiques. En général, les équations différentielles stochastiques n'ont pas des solutions explicites, en pratique, nous pouvons utiliser les solutions approximatives.Cependant, il est possible de trouver les solutions explicites aux équations linéaires. Par exemple, rappeler la modèle de croissance de la population simple stochastique

$$dN(t) = r(t)N(t)dt + \sigma(t)N(t)dB(t)\, t \geq 0 \tag{3.1}$$

Avec la valeur initiale $N(0) = N_0 > 0$. Par la formule d'Itô,

$$\log N(t) = \log N_0 + \int_0^t (r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2})ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)$$

Cela implique la solution explicite de l'équation (3.1)

$$N(t) = N_0 \exp[\int_0^t (r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2})ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)] \tag{3.2}$$

Dans ce chapitre, nous souhaitons, d'obtenir la solution explicite à l'équation différentielle stochastique linéaire générale de dimension d

$$dx(t) = (F(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^{m}(G_k(t)x(t) + g_k(t))dB_k(t) \tag{3.3}$$

sur $[t_0, T]$, où $F(.)$, $G_k(.)$ sont des fonctions évaluées des matrices $d \times d$, $f(.)$, $g_k(.)$ sont des fonctions dans $\mathbb{R}^d$, $B(t) = (B_1(t), ..., B_m(t))^T$ est un mouvement brownien m dimensionnel. L'équation linéaire est dite homogène si $f(t) = g_1(t) = ... = g_m(t) \equiv 0$, elle est dite d'être linéaire au sens étroit si $G_1(t) = ... = G_m(t) \equiv 0$, et elle est dite d'être autonome si les coéfficients F, f, G_k, g_k sont indépendant de t.
Tout au long de ce chapitre, nous allons supposer que F, f, G_k, g_k sont Borel mesurables et bornées sur $[t_0, T]$. Donc, par le théorème 2.3.1, l'équation linéaire (3.3) a une solution unique continue dans $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ pour chaque valeur initiale $x(t_0) = x_0$, qui est $\mathcal{F}_{t_0}$ mesurable et appartient à $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Le but de ce chapitre est d'obtenir, si possible, une expression explicite de cette solution.

3.1 La formule de Liouville

Considérons l'équation différentielle stochastique linéaire

$$dx(t) = F(t)x(t)dt + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)x(t)dB_k(t) \tag{3.4}$$

avec $F(t) = (F_{ij}(t))_{d\times d}$ et $G_k(t) = (G_{ij}^k(t))_{d\times d}$ sont bornées et Borel mesurables.
Soit $\Phi_j(t) = (\Phi_{1j}(t), ..., \Phi_{dj}(t))$ être la solution de l'équation (3.4) avec la valeur initiale $x(t_0) = e_j$, $\quad e_j = (\underbrace{0, ..., 1}, 0, ..., 0)^T$.Définir la matrice $d \times d$

$$\Phi(t) = (\Phi_{ij}(t))_{d\times d}$$

$\Phi(t)$ la matrice fondamentale de l'équation (3.4) et

$$d\Phi(t) = F(t)\Phi(t)dt + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)\Phi(t)dB_k(t) \tag{3.5}$$

Remarque 3.1.1. *Par la valeur initiale donnée $x(t_0) = x_0$, la solution unique de (3.4) est*

$$x(t) = \Phi(t)x_0$$

De plus, par (3.5)

$$dx(t) = d\Phi(t)x_0 = \quad F(t)\Phi(t)x_0dt + \textstyle\sum_{k=1}^m G_k(t)\Phi(t)x_0dB_k(t)$$

$$F(t)x(t)dt + \textstyle\sum_{k=1}^m G_k(t)x(t)dB_k(t)$$

Théorème 3.1.1. *[3] Soit $a(.)$, $b_k(.)$ être des fonctions à valeur réelle bornées Borel-mesurables sur $[t_0, T]$.Alors*

$$y(t) = y_0exp[\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m b_k(s))ds + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t b_k(s)dB_k(s)] \tag{3.6}$$

est la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire scalaire

$$dy(t) = a(t)y(t)dt + \sum_{k=1}^m b_k(t)y(t)dB_k(t) \tag{3.7}$$

avec la valeur initiale $y(t_0) = y_0$.

3.2 La formule de variation de constante

Passons maintenants à l'équation différentielle stochastique d-dimensionnelle

dx(t)=(F(t)x(t)+f(t))dt+$\sum_{k=1}^m (G_k(t)x(t) + g_k(t))dB_k(t)$(3.8)

Théorème 3.2.1. *[3] La solution unique de l'équation (3.2) peut être exprimée comme*

$$x(t) = \Phi(t)(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[f(s) - \sum_{k=1}^{m} G_k(s)g_k(s)]ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g_k(s)dB_k(s)). \tag{3.9}$$

Où, $\Phi(t)$ est la matrice fondamentale de l'équation homogène correspondante (2.3).

3.3 Les cas d'études

(i) Équation linéaire scalaire

Considérons l'équation différentielle stochastique linéaire générale

$$dx(t) = (a(t)x(t) + \bar{a}(t))dt + \sum_{k=1}^{m}(b_k(t)x(t) + \bar{b}_k)dB_k(t) \tag{3.10}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$, ici $x_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R})$ est $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable, et $a(t), \bar{a}(t), b_k(t), \bar{b}_k(t)$ sont des fonctions bornées Borel- mesurable, l'équation homogène correspondante est

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)x(t)dB_k(t) \tag{3.11}$$

et la solution fondamentale de l'équation (3.11) est donnée par

$$\Phi(t) = \exp[\int_{t_0}^{t}(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(s))ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)dB_k(s)]$$

Appliquer le théorème 3.2.1, on obtient alors la solution explicite de l'équation (3.10)

$$x(t) = \Phi(t)(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)[\bar{a}(s) - \sum_{k=1}^{m} b_k(s)\bar{b}_k(s)]ds + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\bar{b}_k(s)dB_k(s)) \tag{3.12}$$

(ii) Équation linéaire au sens strict

Nous considerons ensuite l'équation différentiele stochastique linéaire d dimensionel au sens étroit

$$dx(t) = (F(t)x(t) + f(t))dt + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)dB_k(t) \tag{3.13}$$

sur $[t_0, T]$, avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$.L'équation linéaire homogène correspondante est maintenant l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) \tag{3.14}$$

Encore une fois, laissez $\Phi(t)$ la matrice fondamentale de l'équation (3.14).Ensuite, la solution de l'équation (3.13) a la forme

$$x(t) = \Phi(t)(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g_k(s)dB_k(s)) \tag{3.15}$$

En particulier, lorsque $F(t)$ est indépendante de t, $i.e.$ $F(t) = F$ est une matrice constante, la matrice fondamentale $\Phi(t)$ a une forme simple $\Phi(t) = e^{F(t-t_0)}$ et sa matrice inverse $\Phi^{-1}(t) = e^{-F(t-t_0)}$.

Par conséquent, dans le cas où $F(t) = F$, l'équation (3.13) a la solution explicite

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{F(t-t_0)}(x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} e^{-F(t-t_0)} f(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} e^{-F(t-t_0)} g_k(s)dB_k(s)) \\ &= e^{F(t-t_0)}x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} e^{-F(t-t_0)} f(s)ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} e^{-F(t-t_0)} g_k(s)dB_k(s) \end{aligned} \tag{3.16}$$

(iii) Équation linéaire autonome Nous considerons l'équation différentielle stochastique linéaire autonome en dimension d

$$dx(t) = (Fx(t) + f)dt + \sum_{k=1}^{m}(G_k x(t) + g_k)dB_k(t) \tag{3.17}$$

Où, $F, G_k \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $f, g_k \in \mathbb{R}^d$.
L'équation homogène correspendante est

$$dx(t) = Fx(t)dt + \sum_{k=1}^{m}(G_k x(t)dB_k(t) \tag{3.18}$$

En général, la matrice $\Phi(t)$ ne peut être donnée explicitement. Toutefois, si les matrices $F, G_1, ...G_m$ commutent, *i.e.*

$$FG_k = G_k F, \qquad G_k G_j = G_j G_k \qquad pour \quad 1 \leq k, j \leq m, \tag{3.19}$$

Alors, la matrice fondamentale de l'équation (3.18) a une forme explicite

$$\Phi(t) = \exp[(F - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} G_k^2)(t - t_0) + \sum_{k=1}^{m} G_k(B_k(t) - B_k(t_0))] \tag{3.20}$$

Pour montrer ça, posons

$$Y(t) = (F - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} G_k^2)(t - t_0) + \sum_{k=1}^{m} G_k(B_k(t) - B_k(t_0))$$

Nous pouvons alors ecrire

$$\Phi(t) = \exp[Y(t)]$$

Par la condition (3.19), nous calculons la différentielle stochastique

$$
\begin{aligned}
d\Phi(t) &= \exp(Y(t))dY(t) + \tfrac{1}{2}\exp(Y(t))(dY(t))^2 \\
&= \Phi(t)dY(t) + \tfrac{1}{2}\Phi(t)(\textstyle\sum_{k=1}^{m} G_k^2)dt \\
&= F\Phi(t)dt + \textstyle\sum_{k=1}^{m} G_k\Phi(t)dB_k(t).
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire, $\Phi(t)$ satisfait l'équation homogène et donc est une matrice fondamentale. Enfin, nous appliquons le théorème 4.2.1 de conclure que sous la condition (3.19), la solution explicite de l'équation linéaire autonome (3.17) est

$$x(t) = \Phi(t)[x_0 + (\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)ds)(f - \sum_{k=1}^{m} G_k g_k) + \sum_{k=1}^{m}(\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)dB_k(s))g_k] \quad (3.21)$$

exemple 3.3.1. ***Le pont brownien***

Soit a et b deux constantes. Considérer l'équation linéaire de uni-dimensionnel

$$dx(t) = \frac{b - x(t)}{1 - t}dt + dB(t) \; sur \; t \in [0, 1) \quad (3.22)$$

Avec la valeur initiale $x(0) = a$. La solution fondamentale correspondante est

$$\Phi(t) = \exp[-\int_0^t \frac{ds}{1 - s}] = \exp[\log(1 - t)] = 1 - t$$

D'où, par 3.12, la solution de l'équation (3.22) est

$$
\begin{aligned}
x(t) = \quad & (1 - t)(a + b\textstyle\int_0^t \frac{ds}{(1-s)^2} + \int_0^t \frac{dB(s)}{1-s}) \\
&= (1 - t)a + bt + (1 - t)\textstyle\int_0^t \frac{dB(s)}{1-s}
\end{aligned}
\quad (3.23)
$$

Cette solution est appelée le pont brownien de a à b, il est un processus gaussien avec la moyenne

$$\mathbb{E}x(t) = (1 - t)a + bt$$

et la variance

$$Var(x(t)) = t(1-t)$$

Chapitre 4

Stabilité des équations différentielles stochastiques

4.1 préliminaire

En 1892,*A.M.Lyapunov* [10]introduit le concept de la stabilité d'un système dynamique.
Grosso modo, la stabilité signifie insensibilité de l'état du système à de petits changements dans l'état initial ou les paramètres du système .
Pour un système stable, les trajectoires qui hache "proche" de l'autre à un instant spécifique devrait par conséquent rester proches les uns des autres à tous les instants suivants. Pour rendre la théorie de la stabilité stochastique plus compréhensible, rappelons quelques faits de base sur la théorie de la stabilité des systèmes déterministes décrites par des équations différentielles ordinaires.
Considérons une équation différentielle ordinaire de dimension d

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad t \geq t_0 \tag{4.1}$$

Supposons pour toute valeur initiale $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution unique globale qui est désigné par $x(t; t_0, x_0)$, supposons que

$$f(0, t) = 0, \quad pour \quad tout \quad t \geq t_0$$

Donc, l'équation (4.1) a la solution $x(t) \equiv 0$ correspondant à la valeur initiale $x(t_0) = 0$. cette solution est appelée une solution triviale ou position équilibre.
La solution est dite stable, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ telle que

$$|x(t; t_0, x_0)| < \epsilon \quad pour t \geq t_0$$

pour chaque $|x_0| < \delta$, dans le cas contraire, il est dit instable. La solution triviale est dite asymptotiquement stable si elle est stable, et il existe une $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ telle que

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t; t_0, x_0) = 0, \quad |x_0| < \delta_0$$

si l'équation (4.1) peut être résolue explicitement, la condition est déterminée par la stabilité des solution triviales, mais, l'équation précédante ne peut être résolue explicitement dans certains cas particuliers, Lyapunov a dévloppé une méthode pour déterminer la stabilité sans résoudre l'équation, cette dernière est connue comme une méthode de Lyapunov u seconde méthode, pour l'expliquer, nous introduisons quelques notations nécessaires :
$\mathbf{K}$ est la famille de toutes fonctions continues croissantes $\mu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $\mu(0) = 0$ et $\mu(r) > 0$ si $r > 0$.
Pour $h > 0$, soit $\mathbf{S}_h = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < h\}$, une fonction continue $V(x,t)$ définie sur $\mathbf{S}_h \times [t_0, \infty)$ est dite définie positive (dans le sens de Lyapunov) si $V(0,t) \equiv 0$ et pour certains $\mu \in \mathbf{K}$,

$$V(x,t) \geq \mu(|x|), \quad pour \quad (x,t) \in \mathbf{S}_h \times [t_0, \infty)$$

La fonction V est dite définie négative si $-V$ est définie positive, une fonction continue positive $V(x,t)$ doit être decrescent (i.e. il y'a un petit arbitrairement de borne supérieure)

$$V(x,t) \leq \mu(|x|)$$

Définition 4.1.1. *Soit $V(x,t) \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{S}_h \times [t_0, \infty); \mathbb{R}_+)$ et soit x la solution de l'équation (4.1), alors $v(t) = V(x(t), t)$ représente la fonction de t avec le dérivé*

$$
\begin{aligned}
\dot{v}(t) = & \quad V_t(x(t),t) + V_x(x(t),t)f(x(t),t) \\
= & \quad \tfrac{\partial V}{\partial t}(x(t),t) + \textstyle\sum_{i=1}^{d} \tfrac{\partial V}{\partial x_i}(x(t),t)f_i(x(t),t)
\end{aligned}
$$

Théorème 4.1.1. **(i)** *S'il existe une fonction définie positive $V(x,t)$ telle que*

$$\dot{V}(x,t) := V_t(x(t),t) + V_x(x(t),t)f(x(t),t) \leq 0$$

pour $(x,t) \in \mathbf{S}_h \times [t_0,\infty)$, la solution de l'équation (4.1) est stable.

(ii) *S'il existe une fonction défini positive décroissante $V(x,t)$, telle que $\dot{V}(x,t)$ est définie négative, alors la solution de l'équation (4.1) est asymptotiquement stable.*

Une fonction $V(x,t)$ qui satisfaite les conditions de stabilité de ce théorème est appelée la fonction de Lyapunov cerrespondante à l'équation différentielle ordinaire. Quand nous essayons de reporter sur les principes de la théorie de stabilité de Lyapunov pour les systèmes déterministes à ceux stochastiques, nous sommes confrontés aux problèmes suivants :

- *Quelle est la définition de la stabilité stochastique ?*
- *Quelle sont les conditions d'une fonction de Lyapunov stochastique devrait satisfaire ?*
- *Avec ce que l'inégalité $\dot{V}(x,t) < 0$ doit être remplacé afin d'obtenir l'affirmations de stabilité ?*

Dans ce chapitre, nous allons enquêter sur divers types de stabilité pour l'équation différentielle stochastique de dimension d

$$dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dB(t), \quad t \geq t_0 \tag{4.2}$$

cette équation a la solution $x(t) \equiv 0$ correspondante à la valeur initiale $x(t_0) = 0$, elle est appelée la solution triviale ou la position d'équilibre.
Soit $0 < h \leq \infty$, notons $\mathcal{C}^{2,1}(\mathbf{S}_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ la famille de toutes fonctions positives $V(x,t)$, définir l'opérateur différentiel $\mathbf{L}$ associé à l'équation 4.2

$$\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} f_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}[g(x,t)g^T(x,t)]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

$$\mathbf{L}V(x,t) = V_t(x,t) + V_x(x,t)f(x,t) + \frac{1}{2}trace[g^T(x,t)V_{xx}(x,t)g(x,t)].$$

*par la formule d'*Itô*, si $x(t) \in \mathbf{S}_h$ alors*

$$dV(x(t),t) = \mathbf{L}V(x(t),t)dt + V_x(x(t),t)g(x(t),t)dB(t)$$

Nous verrosns que l'inégalité de $\dot{V}(x,t)$ sera remplacée par $\mathbf{L}V(x,t) \leq 0$ pour affirmer la stabilité stochastique.

4.2 Stabilité en probabilité

Définition 4.2.1. (i) *La solution triviale de l'équation (4.2) est dite stochastiquement stable ou stable en probabilité, si pour $\epsilon \in (0,1)$ et $r > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon, r, t_0)$ tel que*

$$\mathbb{P}\{|x(t;t_0,x_0)| < r \quad t \geq t_0\} \geq 1 - \epsilon.$$

$|x_0| < \delta$

(ii) *La solution triviale est dite asymptotiquement stable, si elle est stochastiquement stable. De plus, pour chaque ϵ , il existe $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, t_0) > 0$:*

$$\mathbb{P}\{\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t;t_0,x_0 = 0)\} \geq 1 - \epsilon.$$

où, $|x_0| < \delta$.

(iii) *La solution triviale est dite asymptotiquement stable en infini si elle est asymptotiquement stable, par ailleurs, pour* $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}\{\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t; t_0, x_0 = 0)\} = 1$$

Théorème 4.2.1. *1. S'il existe une fonction définie positive* $V(x,t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbf{S}_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ *:*

$$\mathbf{L}V(x,t) \leq 0$$

Alors, pour $(x,t) \in \mathbf{S}_h \times [t_0, \infty)$*, la solution triviale de l'équation (4.2) est stochastiquement stable.*

2. S'il existe un fonction définie positive décroissante $V(x,t)$ *tel que* $\mathbf{L}V(x,t)$ *est défini négatif, alors la solution de l'équation (4.2) est asypmtotiquement stable.*

3. S'il existe une fonction définie positive décroissante $V(x,t)$ *avec* $\mathbf{L}V(x,t)$ *est définie négative, alors, la solution de l'équation (4.2) est asymptotiquement stable dans le large.*

4.3 Stabilité exponnetielle presque sûre

Nous donnons d'abord la définition formelle de la stabilité exponentielle presque sûre.

Définition 4.3.1. *La solution de l'équation (4.2) est dite stable exponnetiellement presque sûre si*

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| < 0 \quad p.s. \tag{4.3}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

Lemme 4.3.1. *pour toute* $x_0 \neq 0$ *dans* $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}\{x(t; t_0, x_0) \neq 0, \quad t \geq t_0\} = 1 \tag{4.4}$$

Autrement dit, presque tous le chemin de toute solution de l'échantillon à partir d'un état non-zéro ne sera jamais atteindre l'origine.

Théorème 4.3.1. *[1] Supposons qu'il existe* $V(x, t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbf{S}_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$*, et* $p > 0$*,* $c_1 > 0$*,* $c_2 \in \mathbb{R}$*,* $c_3 \geq 0$ *t.q pour* $x \neq 0$ *et* $t \geq t_0$

(i) $c_1|x|^p \leq V(x, t)$ *;*

(ii) $LV(x, t) \leq c_2 V(x, t)$ *;*

(iii) $|V_x(x, t) g(x, t)|^2 \geq c_3 V^2(x, t)$.

Alors,

$$\lim \sup_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| \leq -\frac{c_3 - 2c_2}{2p} \quad p.s. \tag{4.5}$$

En particulier, si $c_3 > 2c_2$*, alors la solution triviale est exponnetiellement stable presque sûre.*

Corollaire 4.3.1. *Supposons qu'il existe une fonction* $V \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbf{S}_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ *et des constantes positives* p, α, λ*, tel que pour tout* $x \neq 0$*,* $t \geq t_0$*,*

$$\alpha|x|^p \leq V(x, t) \qquad et \quad \mathbf{L}V(x, t) \leq -\lambda V(x, t)$$

Alors,

$$\lim \sup_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| \leq -\frac{\lambda}{p} \quad p.s.$$

pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$*.En d'autres termes, la solution triviale de l'équation (4.2) est presque sûrement exponentiellement stable.*

Théorème 4.3.2. *Supposons qu'il existe* $V(x,t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbf{S}_h \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, *et* $p > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c_3 > 0$ *t.q pour* $x \neq 0$ *et* $t \geq t_0$

(i) $c_1|x|^p \geq V(x,t)$;

(ii) $LV(x,t) \geq c_2 V(x,t)$;

(iii) $|V_x(x,t)g(x,t)|^2 \leq c_3 V^2(x,t)$.

Alors,

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \inf \frac{1}{t} \log |x(t;t_0,x_0)| \geq -\frac{c_3 - 2c_2}{2p} \quad p.s.$$

(4.6)

En particulier, si $2c_2 > c_3$, *alors presque tous les chemins de l'échantillon* $|x(t;t_0,x_0)|$ *tendra vers l'infini, et nous disons dans ce cas que la solution triviale de l'équation* (4.2) *presque sûrement exponentiellement instable.*

exemple 4.3.1. *Considérer l'équation linéaire homogène d'Itô*

$$dx(t) = Fx(t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_k x(t) dB_i(t) \tag{4.7}$$

avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, *supposons qu'il existe des matrices* $F, G_1, ..., G_m$, *tel que*

$$FG_i = G_i F,\ G_i G_j = G_j G_i\, pout 1 \leq i,j \leq m \tag{4.8}$$

Dans la 4ième section du 3ième chapitre, nous disons que l'équation (3.13) a la solution explicite

$$x(t;t_0,x_0) = \exp[(F - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} G_i^2)(t - t_0) + \sum_{i=1}^{m} G_i(B_i(t) - B_i(t_0))]x_0 \tag{4.9}$$

Nous supposons maintenants que toutes les valeurs propres de $F - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} G_i^2$.

4.4 Stabilité exponentielle des moments

Définition 4.4.1. *La solution triviale (4.2) est dite exponnetiellement stable en moment, si* $\exists$ *une paire des constantes positives* C *et* λ *t.q*

$$\mathbb{E}|x(t;t_0,x_0)| \leq C|x_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)} \quad t \geq t_0 \tag{4.10}$$

pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
Quand $p = 2$*, il est généralement dit être exponentiellement stable en moyenne quadratique.*
La stabilité exponentielle de moment d'ordre p *signifie que ce moment d'ordre* p *de la solution tend vers* 0 *exponentiellement rapide. Il résulte également de (4.10) que*

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \log(\mathbb{E}|x(t;t_0,x_0)|^p) < 0 \tag{4.11}$$

Le côté gauche de (4.11) est appelé le moment d'ordre p *exposant de Lyapunov, donc, dans ce cas, le moment d'ordre* p *exposant de Lyapunov est négatif. De plus, si si l'on veut tenir compte de la valeur initiale de la variable aléatoire* $\mathcal{F}_{t_0}$*-mesurable* $x_0 \in \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$*, alors par 4.10*

$$\mathbb{E}|x(t;t_0,x_0)|^p = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}|x(t;t_0,y)|^p \mathbb{P}\{x_0 \in dy\}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} C|y|^p e^{-\lambda(t-t_0)} \mathbb{P}\{x_0 \in dy\} = C\mathbb{E}|x_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Par ailleurs,notant D'une manière générale, la stabilité exponentielle de moment d'ordre p *et la stabilité exponentielle presque sûre ne signifient pas les uns les autres et conditions supplémentaires sont requis pour en déduire l'une de l'autre. Le théorème suivant donne la conditions dans lesquelles la stabilité exponentielle de moment d'ordre* p *implique la stabilité exponentielle presque sûre.*

Théorème 4.4.1. *[6] Supposons que il y'a une constante positive K tel que*

$$x^T f(x,t) \vee |g(x,t)|^2 \leq K|x|^2 \qquad \textit{pour} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, \infty) \tag{4.12}$$

Alors, la stabilité exponentielle de moment d'ordre p de la solution triviale de l'équation (2.2) implique la stabilité presque sûre.

Théorème 4.4.2. *[6] Supposons qu'il existe une fonction $V(x,t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty); \mathbb{R}_+)$, et des constantes positives $c_1, -c_3$, tel que*

$$c_1|x|^p \leq V(x,t) \leq c_2|x|^p \qquad \textit{et} \qquad \mathbf{L}V(x,t) \leq -c_3 V(x,t) \tag{4.13}$$

pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty))$, alors

$$\mathbb{E}|x(t; t_0, x_0)|^p \leq \frac{c_2}{c_1}|x_0|^p e^{-c_3(t-t_0)} \quad \textit{sur} \quad t \geq t_0 \tag{4.14}$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, Et d'autre termes, la solution triviale de l'équation (2.2) est exponentillement stable de moment d'ordre p et le moment d'ordre p exposant de Lyapunov ne doit pas être supérieure à $-c_3$.

Corollaire 4.4.1. *Supposons qu'ils existent une matrice Q définie positive symmetrique, et constantes $\alpha, -\alpha$, tel que pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty))$,*

$$x^T Q f(x,t) + \frac{1}{2} trace[g^T(x,t) Q g(x,t)] \leq \alpha_1 x^T Q x \tag{4.15}$$

et

$$\alpha_2 x^T Q x \leq |x^T Q g(x,t)| \leq \alpha_3 x^T Q x \tag{4.16}$$

(i) *si $\alpha_1 < 0$, alors la solution triviale de l'équation* (2.2) *est exponentiellement stable de moment d'ordre p pour $p < 2 + 2|\alpha_1|/\alpha_3^2$.*

(ii) *Si $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2^2$, alors la solution triviale de l'équation* (2.2) *est exponentiellemnt stable de moment d'ordre p pour $p < 2 - 2\alpha_1/\alpha_2^2$.*

Preuve

on prend $V(x,t) = (x^TQx)^{\frac{p}{2}}$. Alors

$$\lambda_{\min}^{\frac{p}{2}}(Q)|x|^p \leq V(x,t) \leq \lambda_{\max}^{\frac{p}{2}}(Q)|x|^p$$

Où, $\lambda_{\min}(Q)$ et $\lambda_{\max}(Q)$ désignent la valeur propre la plus petite et la plus grande de (Q), respectivement. Il est également facile de vérifier que

$$\mathbf{L}V(x,t) = p(x^TQx)^{\frac{p}{2}-1}(x^TQf(x,t)+\frac{1}{2}trace[g^T(x,t)Qg(x,t)])+p(\frac{p}{2}-1)(x^TQx)^{\frac{p}{2}-2}|x^TQg(x,t)|^2. \tag{4.17}$$

(i) *On suppose que $\alpha_1 < 0$ et $p < 2 + 2|\alpha_1|/\alpha_3^2$. On peut laisser $p \geq 2$, en utilisant* 4.15 *et* 4.16*, nous obtenons alors de (4.17)*

$$\mathbf{L}V(x,t) \leq -p[|\alpha_1| - (\frac{p}{2} - 1)\alpha_3^2]V(x,t)$$

Une application du théorème précédent implique que la solution triviale de l'équation (2.2) *est exponentiellement stable de moment d'ordre p.*

(ii) *Supposons que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2^2$ et $p < 2 - 2\alpha_1/\alpha_2^2$, dans ce cas nous avons*

$$\mathbf{L}V(x,t) \leq -p[(\frac{p}{2} - 1)\alpha_2^2 - \alpha_1]V(x,t)$$

exemple 4.4.1. *considérer l'équation linéaire scalaire d'Itô*

$$dx(t) = ax(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i x(t) dB_i(t) \tag{4.18}$$

a et b_i sont des constantes, nous supposons que

$$0 < a < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \tag{4.19}$$

pour $f(x,t) = ax$ et $g(x,t) = (b_1 x, ..., b_m x)$, nous avons

$$xf(x,t) + \frac{1}{2} trace[g^T(x,t) g(x,t)] = (a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2) x^2.$$

et

$$|xg(x,t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2 |x|^2}.$$

Donc, par le corollaire précédent ,la solution triviale de l'équation (4.18) est exponentiellement stable de moment d'ordre p

$$p < 1 - \frac{a}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2}$$

et elle est exponentiellemnet instable de moment d'ordre q si

$$q > 1 - \frac{a}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2}.$$

4.5 Stabilisation stochastique et la distabilisation

Il est pas surprenant que le bruit peut déstabiliser un système stable. Par exemple, supposer un système exponentiellemnet stable de dimension 2 donné

$$\dot{y}(t) = -y(t) \quad sur \quad t \geq t_0, y(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^2 \tag{4.20}$$

est perturbé par le bruit et le système stochastique perturbé est décrit par l'équation d'Itô

$$dx(t) = -x(t)dt + Gx(t)dB(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.21}$$

$B(t)$ est un mouvement brownien unidimensionnel et

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution explicite de (4.21) est

$$x(t) = \exp[(-I - \tfrac{1}{2}G^2)(t - t_0) + G(B(t) - B(t_0))]x_0$$

$$= \exp[I(t - t_0) + G(B(t) - B(t_0))],$$

I est la matrice identitée de dimension 2. Par conséquent

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| = 1 \quad p.s.$$

Autrement dit, le système stochastique perturbé (4.21) devient instable presque sûre de façon exponentielle.

Dautre part, il a également été observé que le bruit peut avoir un effet stabilisant aussi bien. Par exemple, considérer le système instable scalaire

$$\dot{y}(t) = y(t), \quad y(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

perturber ce système par le bruit et supposons que le système perturbé a le forme

$$dx(t) = x(t)dt + 2x(t)dB(t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \tag{4.23}$$

cette dernière a la solution explicite

$$x(t) = x_0 \exp[-(t - t_0) + 2(B(t) - B(t_0))],$$

ce qui donne immédiatement que

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| = -1 \quad p.s.$$

Autrement dit, le système perturbé (4.23) devient stable, en d'autres termes, le bruit a stabilisé le système instable (4.22).
Dans cette section, nous allons établir une théorie générale de la stabilisation stochastique et la déstabilisation d'un système non linéaire donné. Supposons que le système donné est décrit par une équation différentielle ordinaire non linéaire

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t) \quad t \geq t_0,\ y(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d \tag{4.24}$$

$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction localement Lipschitz continue et en particulier, pour certain $K > 0$

$$|f(x,t)| \leq K|x| \tag{4.25}$$

Nous utilisons maintenant le mouvement brownien m dimensionnel $B(t) = (B_1(t), ..., B_m(t))^T$ comme la source de bruit pour perturber le système donné. Pour simplifier, supposons que la perturbation stochastique est d'une forme linéaire, qui est le système stochastique perturbé est décrit par l'équation semilinéaire d'Itô.

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + \sum_{i=1}^{m} G_i x(t) dB_i(t),\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d \tag{4.26}$$

Où, $G_{1 \leq i \leq m}$ sont tous les matrices de $d \times d$, l'équation (4.26) a une solution unique notée par $x(t; t_0, x_0)$ encore et, d'ailleurs, elle admet une solution triviale $x(t) \equiv 0$.

Théorème 4.5.1. *[9] Supposons que la condition(4.25) a tien, supposons qu'il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $\rho \geq 0$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{m} |G_i x|^2 \leq \lambda |x|^2 \, et \sum_{i=1}^{m} |x^T G_i x|^2 \geq \rho |x|^4 \tag{4.27}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.Alors

$$\limsup_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| \leq -(\rho - K - \frac{\lambda}{2}) \, p.s. \tag{4.28}$$

En particulier, si $\rho > K + \frac{1}{2}\lambda$, alors la solution triviale de l'équation (4.26) est stable exponentiellement presque sûre.

Théorème 4.5.2. *[8] Chaque système non linéaire $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ de dimension d peut être stabiliser par le mouvement brownien pour $d \geq 2$ et (4.25) est satisfie.*

$$dx(t) = -ax(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i x(t) dB_i(t) \, t \geq t_0 \tag{4.29}$$

avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$, cette équation est regardée comme un système stochastiquement perturbé d'un système exponentiellement stable

$$\dot{y}(t) = -ay(t) \, (a > 0).$$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| = -a - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} b_i^2 < 0 \, p.s.$$

4.6 Autres sujets

Si les coéfficients f et g dans l'équation (2.2) de telle sorte que $f(0,t) \not\equiv 0$ et $g(0,t) \not\equiv 0$, mais f a une décomposition $f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$ avec $f_1(0,t) \equiv 0$, alors nous pouvons considérer l'équation

$$dx(t) = [f_1(x(t),t) + f_2(x(t),t)]dt + g(x(t),t)dB(t) \tag{4.30}$$

comme un système stochastique perturbé de l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{y} = f_1(y(t),t). \tag{4.31}$$

Dans ce cas, la position d'équilibre est une solution du système non perturbé (4.31) mais pas du système perturbé (4.30). Cependant, nous pouvons, en principe, appliquer nos définitions de la stabilité. Par exemple, considérer l'équation différentielle stochastique linéaire au sens étroit

$$dx(t) = [Ax(t) + F(t)]dt + G(t)dB(t)\, sur\, t \geq t_0 \tag{4.32}$$

Avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$, et

$$A \in \mathbb{R}^{d\times d}\, F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d\, G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times m}$$

Nous imposons deux hypothèses :

(i) Les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives.

Ceci est équivalent à ce qu'il y a une paire des constantes positives β_1 et λ_1 tel que

$$\|e^{At}\|^2 \leq \beta_1 e^{-\lambda_1 t}\, pourt \geq 0 \tag{4.33}$$

(ii) Il existe aussi une paire des constantes positives β_2 et λ_2 tel que

$$|F(t)|^2 \vee |G(t)|^2 \leq \beta_2 e^{-\lambda_2 t} \tag{4.34}$$

La solution de l'équation (4.32) est

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)ds + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}G(s)dB(s). \tag{4.35}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}|x(t)|^2 \\ \leq 3\beta_1|x_0|^2 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + 3\beta_1\beta_2(t-t_0+1)(t-t_0)e^{-(\lambda_1\wedge\lambda_2)t} \tag{4.36}$$

cela implique

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\sup\frac{1}{t}\log(\mathbb{E}|x(t)|^2) \leq -(\lambda_1\wedge\lambda_2) \tag{4.37}$$

Soit maintenant $0 < \epsilon < (\lambda_1 \wedge \lambda_2)$ être un arbitraire, on pose

$$c_1 = 3\beta_1|x_0|^2 + 3\beta_1\beta_2\sup_{t\geq t_0}[(t-t_0+1)(t-t_0)e^{-\epsilon t}]$$

il resulte de (4.36) que

$$\mathbb{E}|x(t)|^2 \leq c_1 e^{-(\lambda_1\wedge\lambda_2-\epsilon)(t-t_0)}$$

En d'autres termes, nous avons montré que, sous des hypothèses (i) et (ii), la solution de l'équation (4.32) tend vers 0 exponentiellement en moyenne quadratique et presque sûrement. Pour plus de détails voir [11].
On passe maintenant à un autre sujet. Dans le cas de la stabilité stochastique asymptotique dans le large, nous savons que toutes les solutions tends vers 0 presque sûrement, mais nous ne savons pas à quelle vitesse. Pour améliorer cette situation, nous introduisons la stabilité exponentielle presque sûre, et dans ce cas, nous savons que les solutions tend vers 0 rapidement presque sûre. Cependant, nous pouvons parfois trouver que les solutions aurront tendance à 0, mais pas plus rapide de façons exponentielle, et nous tenons à déterminer plus précisément à quelle vitesse elles ont tendance à zéro. Pour expliquer, nous considérons une équation différentielle stochastique linéaire scalaire

$$dx(t) = -\frac{p}{1+t}x(t)dt + (1+t)^{-p}dB(t) \tag{4.38}$$

avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$, où $p > \frac{1}{2}$ et $B(t)$ est un mouvement brownien scalair, la solution de cette équation est

$$\begin{aligned} x(t) = \; & x_0 \exp(-\int_{t_0}^{t} \frac{p}{1+r} dr) + \int_{t_0}^{t} \exp(-\int_{s}^{t} \frac{p}{1+r} dr)(1+s)^{-p} dB(s) \\ & = x_0 (\tfrac{1+t}{1+t_0})^{-p} + \int_{t_0}^{t} (\tfrac{1+t}{1+s})^{-p} (1+s)^{-p} dB(s) \\ & = [x_0(1+t_0)^p + B(t) - B(t_0)](1+t)^{-p} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Par conséquent l'échantillon exposant de Lyapunov [10]

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| = 0 \quad p.s.$$

pa la loi du logarithme itéré, nous notons que pour $\omega \in \Omega$ il existe $T = T(\omega)$ tel que

$$|B(t) - B(t_0)| \leq 2\sqrt{2(t-t_0) \log\log(t-t_0)} \quad si \quad t \geq T$$

Il résulte donc de 4.39 que, presque sûrement,

$$|x(t)| \leq [|x_0|(1+t_0)^p + 2\sqrt{2(t-t_0) \log\log(t-t_0)}]$$

et pour $0 < \epsilon < p - \frac{1}{2}$, il existe une variable aléatoire finie ξ

$$|x(t)| \leq \xi t^{-(p-\frac{1}{2}-\epsilon)} \quad pour \quad t \geq t_0 \tag{4.40}$$

presque sûrement. Cela signifie que la solution tend vers 0 $p.s.$ .Il est beaucoup plus agréable d'exprimer (4.40) comme

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{\log |x(t)|}{\log t} \leq -(p - \frac{1}{2}) \quad p.s. \tag{4.41}$$

4.40 implique

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \frac{\log |x(t)|}{\log t} \leq -(p - \frac{1}{2} - \epsilon) \quad p.s.$$

Définition 4.6.1. *Soit $\lambda : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0, \infty]$ une fonction continue décroissante tel que $\lambda(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$. La solution triviale de l'équation (2.2) est dite stable* *asymptotiquement presque sûre avec la fonction de taux* $\lambda(t)$ *si*

$$|x(t;t_0,x_0)| \leq \xi\lambda(t)\, pour\, tout\, t \geq t_0 \tag{4.42}$$

Presque sûre, où ξ *est une variable aléatoire finie qui dépend de* x_0 *et* t_0.

Théorème 4.6.1. *[9] Soit* $p > 0$ *et* $V(x,t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0,\infty);\mathbb{R}_+)$. *Soit* $\gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *être une fonction continue décroissante tel que* $\gamma(t) \longrightarrow \infty$ *quand* $t \longrightarrow \infty$. *Soit* $\eta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *être une fonction continue tel que* $\int_0^\infty \eta(t)dt < \infty$. *If*

$$\gamma(t)|x|^p \leq V(x,t)\, et\, \mathbf{L}V(x,t) \leq \eta(t) \tag{4.43}$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0,\infty)$, *alors la solution triviale de l'équation (2.2) est stable asymptotiquement presque sûre avec la fonction de taux* $\lambda(t) = (\gamma(t))^{-1/p}$

Bibliographie

[1] Arnold, L., Oeljeklaus, E. et Pardoux, E. (1984), Almost sure and moment stability for linear Itô, Lecture Note in Math. 1186, pp129-159.

[2] Coddington, R.F. and Levinson, N. (1955), Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill.

[3] Davis, M. (1994), Linear Stochastic Systems, Chapman and Hall.

[4] Doléans-Dade, C. and Meyer, P.A. (1977), Equations Différentielles Stochastique, Sém. Probab. XI, Lect. Notes in Math. 581.

[5] Freidman, A. (1975), Stochastic Differential Equations and Applications, Vol.1 and 2, Academic Press.

[6] Has'minski R.Z.(1980),Stocastic stability of differential equations, Alphen : Sijtjoff and Noordhof.(translation of the Russian edition, Moscow, Nauka 1969).

[7] Mao,X. (1990a) Eventual asymptotic stability for stochastic differential equations with respect to semimartingales. Quarterly J. Math. Oxford (2),41, pp71-77

[8] Mao,X.(1992e),Exponential stability of large-scale stochastic differential equations, Systemes and Control Letters 19, pp71-81.

[9] Mao,X.(1994c), Stochastic stabilization and destabilization, Systems and Control Letters 23, pp279-290.

[10] oksendal,B.(1995), Stochastic differential equations : An introduction
with Applications.

[11] Pinsky, M.A. and Wihstutz, V. (1988), Lyapunov exponents of nilponent Itô systems, Stochastics 25, pp43-57.

[12] Wu,R,Q and Mao, X.(1983), Existence and uniqueness of the solutions of stochastic differential equations, Stochastics 11, pp19-32