Année: 2015 N° attribué par la bibliothèque

# Espaces vectoriels symplectiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master

Universitaire de Saida

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et applications

par

**H**anane **D**ahmani [1]

Sous la direction de

**Encadreur : Mr D.D**jebbouri

Soutenue le 01/juin/2013 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **M. K**adhi | Maître assistant Univ. Saida | Président |
| **D. D**jebbouri | Maître assistant Univ. Saida | Directeur de mémoire |
| **R. N**asri | Maître de conférence Univ. Saida | Examinateur |

1. DAH.HANANE @gmail.com

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui m'ont enfantent, m'ont encouragé à suivre mes études ;
A mes frères, et spécialement à mon frère Mohamed ;
A mes chers soeurs et leurs mariés et leurs enfants Sara , Mohamed , Oussama et Abed el razak ;
A ma tente Malika, et A Hala et tous leurs familles ;
Et spécialement à mon fiançail Mohamed ;
A tout la promotion $2^{me}$ année 2015 \ 2016 ;
A tout qui prend une place dans mon coeur.

# Remerciements

Tout d'abord, nous remercions dieu tout puissant pour sa bénédiction, de nous avoir donné le privilège d'étudier et de suivre le chemin de la science.
Nous remercions mon encadreur Mr G.Djellouli qui nous a sacrifié beaucoup de son temps, ainsi pour ses précieux conseils et son grand patience.
Nous tenons à remercier les membres du jury pour l'amabilité de jury notre travail.
Nous tenons à remercier tout le personnel d'Université Dr.Moulay Tahar et en particulier ceux du département de mathématique.
Enfin nous remercions également tout ceux qui nous ont aidé, de prés ou de loin, à élaborer ce modeste travail.

*Saida,...... 2015.*

# Table des matières

Les équations différentielles se distinquent par leur champs d'application très vaste, on les trouve pratiquement dans tous les domaines des sciences appliquées (ingenierieng, mathématiques appliquées, physique, chimie, biologie, economie,...). Elles n'ont pas cessé de se développer depuis le début du siècle dernier jusqu'à nos jours. Dans ce mémoire nous nous intéressons tout d'abord à la recherche des solutions positives d'une équation différentielle du deuxième ordre par la méthode dite du tir, nous déterminons aussi leur nombre suivant les valeurs des paramètres du problème considéré. Puis nous utilisons la méthode du tir pour démontrer l'éxistence des solutions positives pour le p-Laplacien, où $p \in (1, 2]$. Plusieurs travaux sur les équations différentielles du second ordre ont été réalisés. Pour démontrer l'exislance des solutions des équations du deuxième ordre on a utilisé, entre autre, des méthodes topologiques , les méthodes sous et sur-solutions, ou la méthide de tir (voir [6]). Pour le cas particulier p=2, on trouve le problème classique de Dirichlet pour une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre. Le premier travail a été réalisé par T.Laetsch [6], il a démontré l'éxistence des solutions du problème

$$(P_1) \begin{cases} -u''(x) = \lambda f(u(x)), 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

avec $f$ foncion positive (problème positone) et $lambda$ un paramètre réel positif. Il a déterminé le nombre de solutions suivant la valeur du paramètre $\lambda$. Le problème $(P_1)$ a été repris et généralisé par C.A. stuart [3] dans le cas où $f$ est discontinue en un point. Dans [2], les auteurs ont considéré le cas où $f$ peut être positive ou nulle (problème semi-positone). Dans [1], les auteurs ont généralisé le problème $(P_1)$ pour $f$ négative dans un intervalle $[0, a]$ puis positive dans $(a, +\infty)$ (problème non-positone). Dans le cas général où $p \in (1, 2]$, on récupère le problème du p-Laplacien, i.e.

$$(P_2) \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')'(x) = \lambda f(u(x)), 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ce dernier a été considéré par plusieurs auteurs, en particulier, nous citons les travaux de U.Janfalk [7], S.Bouguima es A.Lakmeche et A.Oumansour [2]. L'objet de ce travail

est de démontrer l'éxistance es le nombre des solutions positives du problème $(P_2)$ pour $p \in (1, 2]$, et de déterminer leur nombre. Ce mémoire est constitué de trois chapitres. Dans le premier chapitre nous étudions le cas où $p = 2$ et $f$ stictement positive. Dans le deuxième chapitre nous reprenons le problème du premier chapitre avec $f$ changeant de signe. Le troisième chapitre est consacré au cas général
(i.e. $p \in (1, 2]$)

# Chapitre 1

# Problème positone

# Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de valeurs propres non linéaire de la forme

$$(P_1)\begin{cases} -u''(x) = \lambda f(u(x)), 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre et $f$ est une fonction non lineaire, Une classe particulière de ces problèmes où $f(u) > 0$, appelé les problèmes positone, ce type des problèmes ont été étudié depuis les 50 dernières années. Le terme "positone" provient du fait que la non-linéarité $f$ étant positive et monotone. Rabinowitz [1] a montré que si nous supposons $S = \{(\lambda, u) : \lambda \geq 0\}$ alors $S$ est un ensemble connexe dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbf{C}([0,1])$ joindre le point $(0,0)$ à $\infty$. La nature du continuité dépend clairement de la fonction $f$. Keller et Cohen dans [7], et Crandall et Rabinowutz [2] ont étudié le cas où $f$ est convexe et ont montré que si $f$ est suffisamment convexe alors la fonction $\frac{u}{f(u)}$ a un maximum local et donc la continuité des solutions doit replier sur lui-même. Ils ont appliqué leurs résultats à la fonction $f(u) = \exp u$ dans les conduction de la chaleur. Laetsch et Cohen [6] a examiné le cas où $f$ est concave et en particulier ont montré que si la fonction $\frac{u}{f(u)}$est non décroissante, alors $(P_1)$ a une solution unique pour tous les $\lambda > 0$.

Nous allons voir que la fonction $\frac{u}{f(u)}$ joue un rôle essentiel dans notre analyse des problèmes semipositone. Ce travail a donné lieu à l'utilisation des courbes de «bifurcation» concernant le paramètre $\lambda$ et $\parallel u \parallel$ comme représenté sur la figure(1.1) La courbe de bifurcation montre graphiquement l'ensemble des $\lambda$ pour laquelle nous n'avons pas de solutions, une solution ou plusieurs solutions. Laetsch [1] a développé une méthode de quadrature dans [1] pour étudier l'existence de solutions positives de

$(P_1)$ en ce qui concerne le paramètre $\lambda$

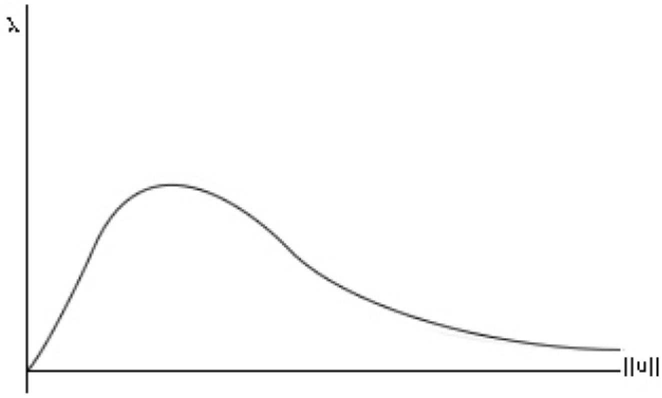



FIGURE 1.1 – courbe de bifurcation

## 1.1 Préliminaires

Soit le problème autonôme suivant

$$(P_1)\begin{cases} -u''(x) = \lambda f(u(x)), 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est localement lipschitzienne et $\lambda$ un paramètre réel positif

**Définition 1.1.1.** *Une solution de $(P_1)$ est un couple $(u, \lambda) \in C^2([0,1]) \times [0, +\infty[$, tel que $u$ satisfait $(P_1)$. On dit aussi que $u$ est solution de $(P_1)$ pour $\lambda$ donné.*

**Lemme 1.1.1.** *([6])Si $(u, \lambda)$ est une solution de $(P_1)$, alors $u$ est positive sur $[0,1]$.*

**Preuve 1.1.1.** *Supposons qu'il existe $x_1 \in ]0,1[$, tel que $u(x_1) < 0$, et appliquons le théorème des accroissements finis à $u$ sur les intervalles $]0, x_1[$ et $]x_1, 1[$.*
*Il existe donc $c_0 \in ]0, x_1[$ et $c_1 \in ]x_1, 1[$ , tels que*

$$u(x_1) = (x_1 - 0)u'(c_0)$$

*et*

$$-u'(x_1) = (1 - x_1\ )u'(c_1),$$

*Il en résulte que* $u'(c_0) < 0$ *et* $u'(c_1) > 0$. *Appliquons le théorème des accroissements finis à* $u'$ *sur l'intervalle* $]c_0, c_1[$. *Il exist donc* $c_2 \in ]c_0, c_1[$ *tel que*

$$u'(c_1) - u'(c_0) = (c_1 - c_0)u''(c_2),$$

*d'où nous avons* $u''(c_2) \geqslant 0$, *or* $u''(c_2) = -\lambda f(u(c_2)) < 0$, *ce qui est impossible.*
*Par suite, toutes les solutions* $(P_1)$ *sont positives.*

**Lemme 1.1.2.** *([6]) Soit* $f$ *une fonction localement lipschitzienne et* $(u, \lambda)$ *est solution de* $(P_1)$ *alors* $u$ *est symétrique par rapport à* $x_0$, *tel que* $u'(x_0) = 0$ *c'est à dire que*

$$u(x_0 - x) = u(x_0 + x) \text{ pour chaque } \quad x \in [0, \tilde{x}], \quad \text{où } \; \tilde{x} = \min\{x_0, 1 - x_0\}.$$

**Preuve 1.1.2.** *Si* $\lambda = 0$, *alors* $u \equiv 0$, *qui est symétrique par rapport à* $\frac{1}{2}$.
*Soient*

$$w_1(x) = u(x_0 - x) \text{ et } w_2(x) = u(x_0 + x) \text{ pour } x \in [0, \tilde{x}].$$

*Donc*

$$-w_1''(x) = -u''(x_0 - x) = \lambda g(u(x_0 - x)) = \lambda g(w_1(x)) \text{ pour } x \in [0, \tilde{x}]$$

*et*

$$w_1(0) = u(x_0), \; w_1'(0) = -u'(x_0) = 0.$$

*De même,*

$$-w_2''(x) = \lambda g(w_2(x)) \text{ pour } x \in [0, \tilde{x}], \; w_2(0) = u(x_0), \; w_2'(0) = -u'(x_0) = 0.$$

*Ainsi* $w_1$ *et* $w_2$ *sont les deux solutions du problème*

$$(P) \begin{cases} -v''(x) = g(v) \\ v(0) = u(x_0), \; v'(0) = 0 \end{cases}$$

*D'une part* $(P)$ *admet une solution unique du fait que* $f$ *est localement lipschitzienne.*

*D'autre part les fonctions*

$$\begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0 - x) \\ -u'(x_0 - x) \end{pmatrix} \; et \; \begin{pmatrix} w_2(x) \\ w_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0 + x) \\ -u'(x_0 + x) \end{pmatrix} \; où \; x \in [0, \tilde{x}]$$

*sont deux solutions de* $(P)$ *. En utilisant le théorème de Picard on obtient* $w_1 = w_2$ *ce qui implique que*

$$u_1(x_0 - x) = u_2(x_0 + x) \; \forall x \in [0, x_0].$$

*Ainsi, la solution* $u$ *est symétrique par rapport à* $x_0$*.*

**Remarque 1.1.1.** *la solution* $u$ *est symétrique par rapport à* $x_0 = \frac{1}{2}$*, car on a*

$$u(0) = u(2x_0), \; i.e. \; 2x_0 = 1, \; d'où \; x_0 = \frac{1}{2}$$

*(voir fig 1.2)*

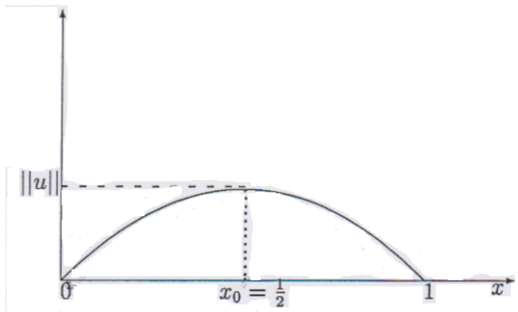



FIGURE 1.2 – La symétrie par rapport à $x_0 = \frac{1}{2}$

**Remarque 1.1.2.** *Le problème* $(P_1)$ *est équivalent au problème suivant*

$$(P_1') \begin{cases} -u''(x) = \lambda f(u(x)), 0 < x < \frac{1}{2} \\ u(0) = u'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

**Définition 1.1.2.** *Une solution de* $(P_1')$ *est un couple* $(u, \lambda) \in C^2([0, \frac{1}{2}]) \times [0, +\infty[$*, tel que* $u$ *satisfait* $(P_1')$*.*

## 1.2 Existence des solutions

pour montrer l'existence des solutions du problème $(P_1)$ en utilisant une méthode dite de quadrature élaboré par Laetsch [1], cette méthode de quadrature donne une formule explicite pour la courbe de bifurcation (qui détermine numériquement au moins la forme de la courbe de bifurcation). En utilisant cette formule, nous pouvons également déterminer les conditions suffisantes qui garantissent deux ou plusieurs solutions du problème $(P_1)$ . En effet,
Soit $(u, \lambda)$ une solution de $(P_1)$, alors

$$\|u\| = \max_{x\in[0,1]} |u(x)| = u(\frac{1}{2})$$

On a $u'(x) > 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $u'(x) \ < 0$ pour $x \in ]\frac{1}{2}, 1]$, et $u'(\frac{1}{2}) = 0$.

Soient $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $F(x) = \int\limits_0^x f(s)ds$, et $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$G(p) = \sqrt{2}\int\limits_0^p \frac{ds}{[F(p)-F(s)]^{\frac{1}{2}}}$$

**Théorème 1.2.1.** *Pour tout nombre $\rho > 0$, il existe exactement un seul nombre $\lambda(\rho) = (G(\rho))^2$ et une seule fonction $u_\rho$ dans $[0, 1]$ qui satisfait $(P_1)$ avec $\rho = \|u_\rho\|$ .*

**Preuve 1.2.1.** *Soit $(u, \lambda)$ une solution du problème $(P_1)$*
*Multiplions la première équation du système $(P_1)$ par $u'(x)$, on aura*

$$-u''(x)u'(x) = \lambda f(u(x))u'(x) \ , \ x \in [0, 1] \tag{1.1}$$

*Intégrons l'équation (1.1) entre $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\frac{1}{2}$, donc*

$$-\int_x^{\frac{1}{2}} u''(s)u'(s)ds = \int_x^{\frac{1}{2}} \lambda f(u(s))\ u'(s)ds, \ x \in [0, \frac{1}{2}] \tag{1.2}$$

*Ainsi*

$$-\frac{[u'(x)]^2}{2} = \lambda F(u(x)) + C, \ x \in [0, \frac{1}{2}] \ , \tag{1.3}$$

*Soit* $\sup_{x\in(0,1)}|u| = u(\frac{1}{2}) = \rho$. *Alors* $u'(\frac{1}{2}) = 0$ *et donc* $C = -\lambda F(\|u\|) = -\lambda F(\rho)$. *Par suite*

$$\frac{(u'(x))^2}{2} = 2\lambda F(\|u\|) - F(u(x)),\ \ x \in [0, \frac{1}{2}] \ , \tag{1.4}$$

*Si* $x \in [0, \frac{1}{2}]$, *l'équation (1.3) nous donne*

$$(2\lambda)^{\frac{1}{2}} = \frac{u'(x)}{(F(\|u\|) - F(u(x)))^{\frac{1}{2}}} \tag{1.5}$$

*En intégrant cette dernière équation entre* $0$ *et* $x \in [0, \frac{1}{2}]$, *on a*

$$(2\lambda)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^x dt = \int\limits_{u(0)\ =0}^{u(x)} \frac{du}{(F(\|u\|) - F(u))^{\frac{1}{2}}} \tag{1.6}$$

*Ainsi*

$$(2\lambda)^{\frac{1}{2}} x = \int\limits_0^{u(x)} \frac{du}{(F(\|u\|) - F(u))^{\frac{1}{2}}} \tag{1.7}$$

*alors ;*

$$\int_{u(0)=0}^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}} = \sqrt{2\lambda} x, \qquad x \in [0,\ \frac{1}{2}] \tag{1.8}$$

*En substituant* $x = \frac{1}{2}$ *dans (1.5), on obtient*

$$(2\lambda)^{\frac{1}{2}} \ = 2 \int\limits_0^{\|u\|} \frac{ds}{[F(\|u\|) - F(s)]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.9}$$

*D'où*

$$\sqrt{\lambda(\rho)} = \sqrt{2} \int\limits_0^{\rho} \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(s)}} = G(\|u\|) = \ G(\rho) \tag{1.10}$$

*On remarque que* $\lambda$ *est déterminé uniquement par* $\rho = \|u\|$ .

Inversement, il est facile de vérifier que, pour $\rho$ donné, si $\lambda$ est défini par (1.9) et $u(x)$ est définie par (1.7), alors $u$ est une solution non négative de $(P)$ avec $\sup_{x\in(0,1)}|u| = \rho$.
En effet, soit $\lambda$ fixé tel que $G(\rho) = \sqrt{\lambda}$.
Soit $g : [0,\rho] \to [0,\frac{1}{2}]$ définie par

$$g(\tau) = (2\lambda)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\tau} \frac{ds}{(F(\rho)-F(s))^{\frac{1}{2}}} \tag{1.11}$$

Remmarquons que

$$\int_0^{\tau} \frac{ds}{(F(\rho)-F(s))^{\frac{1}{2}}} \leq (2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\rho} \frac{ds}{(F(\rho)-F(s))^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\lambda} \equiv G(\rho) \tag{1.12}$$

Ce qui montre que la fonction $g$ est bien définie, continue sur $[0,\rho]$ et dérivable sur $]0,\rho[$ .
De plus $g$ est strictement croissante, car

$$g'(\tau) = \frac{(2\lambda)^{-\frac{1}{2}}}{(F(\rho)-F(\tau))^{\frac{1}{2}}} > 0 \quad \forall \tau \in ]0,\rho[. \tag{1.13}$$

Donc $g$ est bijective et son inverse $g^{-1}$ est dérivable sur $]0,\frac{1}{2}[$ .
Posons $u(x) = g^{-1}(x)$, où $x \in [0,\frac{1}{2}]$. On a $u(0) = 0$ et $u(\frac{1}{2}) = \rho$.
Et

$$u'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(u(x))} \text{ pour } x \in ]0,\frac{1}{2}[. \tag{1.14}$$

Donc

$$u'(x) = (2\lambda)^{\frac{1}{2}}(F(\rho)-F(u(x)))^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in ]0,\frac{1}{2}[.$$

Par suite

$$u''(x) = -\frac{(2\lambda)^{\frac{1}{2}}}{2}(F(\rho)-F(u(x)))^{-\frac{1}{2}} f(u(x))u'(x), \quad \forall x \in ]0,\frac{1}{2}[$$

Ainsi

$$-u''(x) = \lambda f(u(x)), \quad \forall x \in ]0, \frac{1}{2}[.$$

De plus

$$u'(\frac{1}{2}) = (2\lambda)^{\frac{1}{2}} \lim_{x^{<} \to \frac{1}{2}} (F(\rho) - F(u(x)))^{\ \frac{1}{2}} = 0.$$

Donc $(u, \lambda)$ est solution du problème $(P_1')$.

**Lemme 1.2.1.** *$(u, \lambda)$ est l'unique solution positive de $(P_1')$ tel que $u(\frac{1}{2}) = \rho$.*

**Preuve 1.2.2.** *Soit $(v, \lambda)$ une autre solution positive de $(P_1')$ vérifiant $v(\frac{1}{2}) = \rho$. Sopposons qu'il existe $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $u(x_0) \neq v(x_0)$.*
*On a (1.12)*

$$g(u(x_0)) = (2\lambda)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{u(x_0)} \frac{ds}{(F(\rho) - F(s))^{\ \frac{1}{2}}} = x_0$$

*et*

$$g(v(x_0)) = (2\lambda)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{v(x_0)} \frac{ds}{(F(\rho) - F(s))^{\ \frac{1}{2}}} = x_0$$

*Ce qui donne*

$$\int_{v(x_0)}^{u(x_0)} \frac{ds}{(F(\rho) - F(s))^{\ \frac{1}{2}}} = 0,$$

*donc*

$$(F(\rho) - F(s))^{\ -\frac{1}{2}} = 0,$$

*pour tout $s$ dans l'intevalle d'extrémités $u(x_0)$ et $v(x_0)$, ce qui est impossible.*
*Ainsi on a*

$$u(x) = v(x), \, \forall x \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

*D'où l'unicité de la solution de* $(P_1')$.

*D'aprés la remarque (1.1.1), si* $\lambda$ *est fixés tel que* $\sqrt{\lambda} = G(\rho)$, *le problème* $(P_1)$ *admet une seule solution donnés par*

$$u(x) = v(x) \ pour \ x \in [0, \tfrac{1}{2}],$$

*et*

$$v(x) = u(1-x) \ pour \ x \in [\tfrac{1}{2}, 1].$$

**Remarque 1.2.1.** *Les équations (1.7) et (1.9) peuvent être utilisées pour construire les solutions de* $(P_1)$ *et* $(P_1')$

**Remarque 1.2.2.** *Soit* $\sigma > 0$ *telle que* $F(\sigma) = 0$. *Notons que pour* $\rho \in (0, \ \sigma)$ *il y aura certains* $s \in [0, \ \sigma]$ *de telle sorte que* $F(\rho) - F(s) < 0$. *Par conséquent, pour (1.7) et (1.10) soit défini nous devons* $\rho \geq \sigma$ *(voir Figure (1.3))*

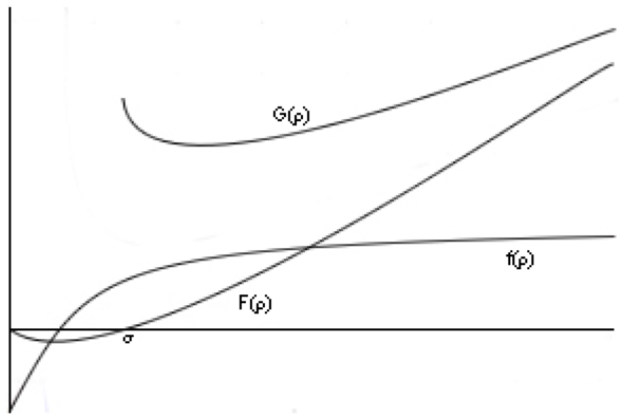



FIGURE 1.3 – Pas de solution à valeurs réelles pour $\rho < \sigma$

**Remarque 1.2.3.** *L'intégrale existe et bien défini. En effet, soit* $r > 0$ *fixé et* $\rho \in [0, r]$, *on a*

$$(\lambda(\rho))^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\rho} \frac{ds}{(F(\rho) - F(s))^{\frac{1}{2}}} = (2\rho)^{\frac{1}{2}} \int_0^{1} \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{(F(\rho) - F(\rho v))^{\frac{1}{2}}} dv \tag{1.15}$$

*Posons* $m_r = \inf\limits_{t\in[0,r]}(f(t))$. *D'après le théorème des accroissements finis, pour tout* $v \in [0,1]$

$$\exists c_0 \in ]\rho v, \rho[ \subset ]0, r[, \text{ tel que } F(\rho) - F(\rho v) = \rho(1-v)f(c_0) \geq \rho(1-v)m_r.$$

*D'où*

$$0 \leq \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{(F(\rho) - F(\rho v))^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{(m_r\rho(1-v))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(m_r(1-v))^{\frac{1}{2}}}$$

*Donc*

$$0 \leq (\lambda(\rho))^{\frac{1}{2}} \leq (\frac{2\rho}{m_r})^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^{\frac{1}{2}}} \leq (\frac{2r}{m_r})^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

*La convergence de l'intégrale impropre* $\int_0^1 \frac{dv}{(1-v)^{\frac{1}{2}}}$ *implique que l'intégrale impropre* $\int_0^\rho \frac{ds}{(F(\rho)-F(s))^{\frac{1}{2}}}$ *converge uniformément dans* $[0, r]$

Le théorème suivant résument la discussion ci-dessus.

**Théorème 1.2.2.** *Si* $\rho \in (\sigma,\ r)$, *il existe un unique* $\lambda > 0$ *tel que* (2) *a une solution positive* $u$ *satisfaisant* $\|u\|_\infty = \rho$. *pour toute* $\rho \in (\sigma,\ r)$, $\lambda$ *est donné par (1.10) et* $u(x)$ *est donnée par (1.7) pour* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, *voir figure (1.4).*

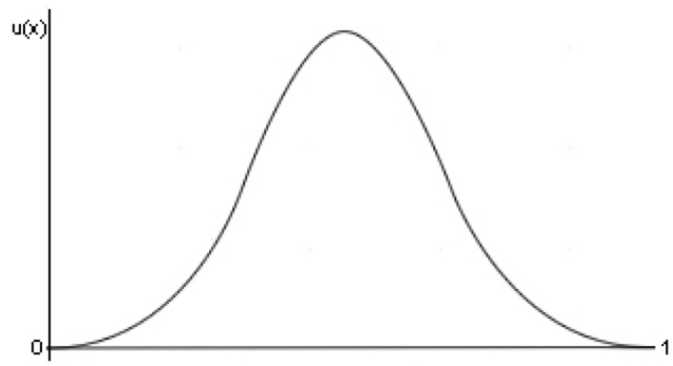



FIGURE 1.4 –

## 1.3 Continuité de $G(\rho)$

**Lemme 1.3.1.** *Si $\rho \in (\sigma,\ r)$ la courbe de bifurcation $G(\rho)$ est une fonction continue.*

**Preuve 1.3.1.** *En effet, soit $\epsilon > 0$ donné et sans perte de généralité supposons que $\rho_1 > \rho_2 \geq \sigma$. Alors*

$$|G(\rho_1) - G(\rho_2)| = |\sqrt{2}\int_0^{\rho_1} \frac{ds}{\sqrt{F(\rho_1) - F(s)}} - \sqrt{2}\int_0^{\rho_2} \frac{ds}{\sqrt{F(\rho_2) - F(s)}}|$$

$$\leq \sqrt{2}|\int_0^{\rho_1} \frac{ds}{\sqrt{F(\rho_1) - F(s)}} - \int_0^{\rho_2} \frac{ds}{\sqrt{F(\rho_1) - F(s)}}|$$

$$= \sqrt{2}|\int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{ds}{\sqrt{F(\rho_1) - F(s)}}|.$$

*Le théorème de la valeur moyenne montre qu'il existe un $\eta \in (s,\ \rho_1)$ de telle sorte que*

$$F(\rho_1) - F(s) = F'(\eta)(\rho_1 - s).$$

*Puisque*

$$F(\eta) = \int_0^{\eta} f(t)dt,$$

*nous avons donc*

$$F'(\eta) = f(\eta)\ .$$

*Ainsi,*

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}|\int_{\rho_2}^{\rho_1}\frac{ds}{\sqrt{F(\rho_1)-F(s)}}| &= \sqrt{2}|\int_{\rho_2}^{\rho_1}\frac{ds}{\sqrt{f(\eta)(\rho_1-s)}}| \\
&\leq \sqrt{2}|\int_{\rho_2}^{\rho_1}\frac{ds}{\sqrt{h_\eta(\rho_1-s)}}| \quad \textit{où } h_\eta=\min(f(\eta)) \quad \textit{et } \eta\in(s,\ \rho_1) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h_\eta}}|\int_{\rho_2}^{\rho_1}\frac{ds}{\sqrt{(\rho_1-s)}}| \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h_\eta}}2\sqrt{\rho_1-\rho_2}.
\end{aligned}$$

*Cela implique*

$$|G(\rho_1)-G(\rho_2)|<\epsilon \quad \textit{si} \quad \rho_1-\rho_2<\frac{\epsilon^2 h_\eta}{8}$$

*Donc,* $G(\rho)=\sqrt{2}\int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho_1)-F(s)}}$ *est uniformément continue pour* $\rho\geq\sigma$.

## 1.4 Dérivé de $G(\rho)$

Dans le calcul de la dérivée de $G(\rho)$ nous aurons besoin d'utiliser une conséquence de la formule Leibniz suivante :

$$\frac{dG(\rho)}{d\rho}=\int_{(\rho)}^{w(\rho)}\frac{\partial f}{\partial\rho}ds+f[w(\rho),\ \rho]\frac{dw}{d\rho}-f[v(\rho),\ \rho]\frac{dv}{d\rho},$$

ce qui montre que, si les limites d'intégration ne sont pas des fonctions a variable indépendante, alors le dérivé d'une intégrale est simplement l'intégrale de la dérivée. Après un changement de variable qui nous donne limites constantes d'intégration, le dérivé de (1.10) peut maintenant être carrément calculé ...

$$\begin{aligned}
\frac{dG(\rho)}{d\rho} &= \frac{d}{d\rho}[\sqrt{2}\rho\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}}] \\
&= \sqrt{2}\rho\frac{d}{d\rho}[\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}}]+\sqrt{2}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}}
\end{aligned}$$

qui, par la règle de Leibniz ci-dessus

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{2}\rho\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}[\frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}}] + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\int_0^1 [\frac{ds}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial\rho}(F(\rho)-F(\rho s))] + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\int_0^1 [\frac{ds}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}(\frac{d}{d\rho}F(\rho)-\frac{\partial}{\partial\rho}F(\rho s))] + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\int_0^1 [\frac{ds}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}(\frac{d}{d\rho}\int_0^{\rho} f(t)dt-\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^{\rho s} f(t)dt)] + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(\rho s)}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\int_0^1 [\frac{f(\rho)-sf(s\rho)}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}ds] + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{F(\rho)-F(\rho s)}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}ds \\
&= \sqrt{2}(\int_0^1 [\frac{-\frac{1}{2}\rho f(\rho)+\frac{1}{2}\rho s f(s\rho)}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}ds] + \int_0^1 \frac{F(\rho)-F(\rho s)}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}ds) \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 [\frac{(F(\rho)-\frac{1}{2}\rho f(\rho))-(F(\rho s)-\frac{1}{2}\rho s f(s\rho))}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}ds] \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 [\frac{-\frac{1}{2}\rho f(\rho)+\frac{1}{2}\rho s f(s\rho)+F(\rho)-F(\rho s)}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}ds] \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 [\frac{H(\rho)-H(s\rho)}{(F(\rho)-F(\rho s))^{\frac{3}{2}}}ds] \quad où\ H(\rho) = F(\rho)-\frac{1}{2}\rho f(\rho)
\end{aligned}
$$

et nous avons donc

$$G'(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\rho}\int_0^{\rho} \frac{H(\rho)-H(s)}{(F(\rho)-F(s))^{\frac{3}{2}}}ds \tag{1.16}$$

Puisque $F(\rho)-F(s) > 0$ pour tous $s \in (0,\ \rho)$ et $\sigma < \rho$, nous pouvons voir à partir (1.12) que les conditions suffisantes pour que $G'(\rho)$ soit positif et négatif respectivement sont

$$H(\rho)-H(s) > 0,\ \forall s 0 < s < \rho,\ \sigma < \rho, \tag{1.17}$$

et

$$H(\rho) - H(s) < 0,\ \forall s 0 < s < \rho,\ \sigma < \rho \tag{1.18}$$

respectivement,

# Chapitre 2

# Problème non-positone

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de valeurs propres non linéaire de la forme

$$(P_1)\begin{cases} -u''(x) = \lambda f(u(x)), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f(0) < 0$ Nous examinons les cas où la fonction $f$ convexe, concave et convexe-concave à la fois de telle sorte nous développons des conditions nécessaires et suffisantes pour examiner certains types de résultats de multiplicité commençant par l'existence de deux ou trois solutions qui se produisent souvent de façon surprenante pour des problèmes semipositone provenant dans diverses applications.
Soit le problème aux limites

$$(P_1)\begin{cases} -u''(x) = \lambda f(u(x)), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

oú $f$ est de classe $C^2$ et satisfait aux hypothèses suivantes :
$(H_1)$ $f(0) < 0, f'(s) > 0$ pour tout $s > 0$
$(H_2)$ $\exists \theta, \beta$ tel que $\theta > \beta > 0,\ f(\beta) = 0$ et $F(\theta) = 0, F(s) = \int\limits_0^s f(t)dt$ avec $s \geq 0$

**Exemple 2.0.1.** *La fonction définie par $f(s) = s^2 + s - 6$ vérifie les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$.*

*En effet* $F(s)=\frac{2s^3+3s^2-36}{6}$, $f(0)=-6<0, f'(s)>0,$ *pour* $s>0, \beta=2$ *et* $\theta\approx 3.558$

**Définition 2.0.1.** *Une solution de* $(P_1)$ *est un couple* $(u,\lambda)\in C^2([0,1];\mathbb{R}_+)\times[0,+\infty)$ *tel que u satisfait* $(P_1)$. *On dit aussi que u est solution positive de* $(P_1)$ *pour* $\lambda$ *donnée.*

**Remarque 2.0.1.** *1) D'aprés l'hypothèse* $(H_2)$, $F$ *est décroissante sur* $[0,\beta]$ *et croissante sur* $[\beta,+\infty[$.
*2) Pour* $(u,\lambda)$ *solution positive de* $(P_1)$, *on a* $\rho_{\lambda=}\max_{x\in[0,1]}|u(x)|=u(\frac{1}{2})$.
*3) Pour* $\rho\in[0,\theta[$, *le problème* $(P_1)$ *n'admet pas de solution positive.*
*En effet, si* $(u,\lambda)$ *est une solution positive de* $(P_1)$ *avec* $\rho=u(\frac{1}{2})<\theta$, *d'aprés (1.2) on a*

$$(u'(x))^2=2\lambda[F(\rho)-F(u(x))] \text{ pour } x\in[0,\tfrac{1}{2}].$$

*En particulier on a* $(u(0))^2=2\lambda\ F(\rho)<0$, *ce qui est impossible.*
*Soit* $(u,\lambda)$ *une solution de* $(P_1)$ , *(1.3) on a*

$$u'(x)=\sqrt{2\lambda(F(\rho)-F(u(x))}, \quad x\in[0,\frac{1}{2}], \tag{2.1}$$

*par suite*

$$x\sqrt{2\lambda}=\int_0^{u(x)}\frac{ds}{(F(\rho)-F(s))^{\frac{1}{2}}} \tag{2.2}$$

*où* $\rho=u(\frac{1}{2})\geq\theta$.
*En substituant* $x=\frac{1}{2}$ *dans (2.2) on obtient*

$$\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}\int_0^{\rho}\frac{ds}{(F(\rho)-F(s))^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}\int_0^{1}\frac{\rho dv}{(F(\rho)-F(\rho v))^{\frac{1}{2}}}$$

*Posons*

$$G(\rho)=\sqrt{2}\int_0^{1}\frac{\rho dv}{(F(\rho)-F(\rho v))^{\frac{1}{2}}}$$

**Lemme 2.0.1.** *([1]) La fonction $G$ est continue et différentiable pour $\rho \in ]0, +\infty[$, et on a*

$$G'(\rho) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{H(\rho) - H(\rho v)}{[F(\rho) - F(\rho v)]^{\frac{3}{2}}} dv \tag{2.3}$$

*où $H(s) = F(s) - \frac{s}{2} f(s)$.*

## 2.1 Comportement des $G(\rho)$ au voisinage de $\sigma$

Le comportement de $G(\rho)$ au voisinage de $\sigma$ s'est avéré être un facteur crucial dans la détermination de nombre de solutions. Nous allons voir que ce comportement dépend aussi de la valeur de $f(0)$. Considérant que des solutions positives, rappelons que

$$G(\rho) = \sqrt{2} \int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(s)}} \qquad \text{où } F(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

**Remarque 2.1.1.** *Si $f(0) < 0$ on a les deux lemmes suivants*

**Lemme 2.1.1.** *Si $f(0) < 0$ Alors $\lim_{\rho \to \sigma^+} G(\rho) < \infty$.*

**Preuve 2.1.1.** *On a $F(0) = 0$ et puisque $F'(s) = f(s)$ et $f(0) < 0$ nous avons que $F'(0) < 0$.*
*Alors il existe un $\omega \in (0,\ \sigma)$ de telle sorte que pour certaines $m > 0,\ -ms > F(s)$ pour $s \in (0,\ \omega)$. également , $ns - b > F(s)$ pour certaines $n > 0$ et $b > 0,\ s \in (\omega,\ \sigma)$ et $F'(s) > n$ pour $s \in [\sigma,\ \sigma + \epsilon]$ pour certaines $\epsilon > 0$*
*(voir Figure (2.1))*

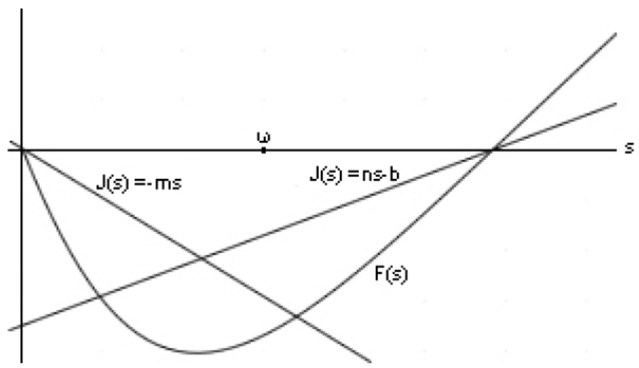



Figure 2.1 – Fonction $J(s)$

*Ainsi, en définissant*

$$J(s) = \begin{cases} -ms, & 0 \leq s \leq \omega \\ ns - b, & \omega < s \leq \rho \ et\ \rho \in [\sigma,\ \sigma + \epsilon]. \end{cases}$$

*nous avons que*
$J(\rho) - J(s) \leq F(\rho) - F(s)$ *pour* $\rho \in (\sigma,\ \sigma + \epsilon]$ *et* $0 \leq s \leq \rho$.
*Cela implique que*

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \sqrt{2}\int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho) - F(s)}} \leq \sqrt{2}\int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{J(\rho) - J(s)}} \\ &= \sqrt{2}\int_0^\omega \frac{ds}{\sqrt{n\rho - b + ms}} + \sqrt{2}\int_\omega^\rho \frac{ds}{\sqrt{n\rho - ns}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{m}[\sqrt{n\rho - b + m\omega} - \sqrt{n\rho - b}] + \frac{2\sqrt{2}}{n}\sqrt{n(\rho - \omega)}. \end{aligned}$$

*Notant que* $n\sigma - b = 0$ *et qu'il existe* $k \in (0, 1)$ *telle que* $\omega = k\sigma$, *nous avons que*

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho \to \sigma^+}[\frac{2\sqrt{2}}{m}[\sqrt{n\rho - b + m\omega} - \sqrt{n\rho - b}] + \frac{2\sqrt{2}}{n}\sqrt{n(\rho - \omega)}] \\ =\ & [\frac{2\sqrt{2}}{m}[\sqrt{n\sigma - b + mk\sigma} - \sqrt{n\sigma - b}] + \frac{2\sqrt{2}}{n}\sqrt{n(\sigma - k\sigma)}] \quad (0 < k < 1) \\ =\ & 2\sqrt{2}[\frac{1}{m}[\sqrt{mk\sigma}] + \frac{1}{n}\sqrt{n\sigma(1 - k)}] < \infty. \end{aligned}$$

*donc,* $\lim_{\rho\to\sigma^+} G(\rho) < \infty$.

**Lemme 2.1.2.** *([6])*
*Si* $f(0) = 0$ *alors* $\lim_{\rho\to\sigma^+} G(\rho) = \infty$.

**Preuve 2.1.2.** *Nous avons*

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \sqrt{2}\int_0^\rho \frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(s)}} \\ &\geq \sqrt{2}\int_0^\epsilon \frac{ds}{\sqrt{F(\rho)-F(s)}} \qquad 0<\epsilon<\rho \end{aligned}$$

*Soit* $k(s) = F(\rho) - F(s)$. *Alors* $k'(s) = -f(s)$ *et* $k''(s) = -f'(s)$. *Supposons que* $\epsilon$ *est suffisamment petit pour que* $f(s) < 0$ *et* $f'(s) < 0$ *pour* $s \in (0,\ \epsilon]$ *et* $\rho \in (\sigma,\ \sigma+1]$. *Alors il existe* $a > 0$ *tel que* $k(s) \leq F(\rho) + \alpha^2 s^2$. *Alors*

$$\begin{aligned} G(\rho) &\geq \sqrt{2}\int_0^\epsilon \frac{ds}{\sqrt{F(\rho)+\alpha^2 s^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\int_0^\epsilon \frac{ds}{\sqrt{s^2+\frac{F(\rho)}{a^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\ln[s+\sqrt{s^2+\frac{F(\rho)}{\alpha^2}}]_0^\epsilon \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\alpha}[\ln\{\epsilon+\sqrt{\epsilon^2+\frac{F(\rho)}{\alpha^2}}\} - \ln\sqrt{\frac{F(\rho)}{\alpha^2}}] \end{aligned}$$

*donc,* $\lim_{\rho\to\sigma^+} G(\rho) = \infty$ *puisque* $F(\sigma) = 0$.

## 2.2 Pente de $G(\rho)$ au voisinage de $\sigma$

**Lemme 2.2.1.** *Si* $f(0) \leq 0$ *alors* $\lim_{\rho\to\sigma^+} G'(\rho) < 0$.

**Preuve 2.2.1.** *Si* $f(0) = 0$ *alors* $\lim_{\rho\to\sigma^+} G(\rho) = \infty$ *et donc* $\lim_{\rho\to\sigma^+} G(\rho) < 0$.

*Rappelons que si* $f(0) < 0$ *alors* $G(\sigma) < \infty$ *de sorte qu'il n'est pas immédiatement* *évident que* $\lim_{\rho \to \sigma^+} G(\rho) < 0$ *comme il était au-dessus. Cependant, pour* $\epsilon > 0$ *suffisamment petit, nous avons* $F'(s) > 0$ *pour* $\sigma \leq s < \sigma + \epsilon$*. Ainsi* $G(\sigma + s) - G(\sigma) < 0$ *pour* $\sigma < s < \sigma + \epsilon$ *et donc* $G'(\rho) < 0$ *pour* $\rho$ *au voisinage de* $\sigma$.

## 2.3 Résultats de Multiplicité

Il est difficile de tirer des conclusions générales sur le comportement de la courbe de bifurcation (1.1), et donc le nombre est l'ensemble de solutions du problème $(P_1)$ à cause de la forte dépendance de la nature du caractère non linéaire de la fonction $f$. Toutefois, si nous faisons certaine hypothèses simples sur le comportement de $f$ alors nous pouvons tirer quelques conclusions sur le nombre de solutions du problème $(P_1)$
Avant d'examiner des cas spécifiques,chacun avec des hypothèses particulières sur le comportement de $f$ (et donc $\frac{f(u)}{u}$) nous allons étudier comment la nature de $f$ influe sur la forme de la courbe de bifurcation.
Tout d'abord, remarquons que $\frac{d}{du}(\frac{f(u)}{u}) = \frac{f'(u)u - f(u)}{u^2} > 0$ pour $0 < u < \tau$ et restera négative pour $u < \tau$ sauf si $f$ est suffisamment convexe pour que $\frac{f(u)}{u}$ atteint un maximum local .
Rappelons que

$$H(u) = F(u) - \tfrac{1}{2}uf(u))$$

et ainsi

$$H'(u) = \tfrac{1}{2}(f(u) - uf'(u))$$

et

$$H''(u) = -uf''(u).$$

Puisque $\frac{d}{du}(\frac{f(u)}{u}) = \frac{f(u) - uf'(u)}{u^2}$, le signe de $H'(u)$ correspond au signe de $\frac{f(u)}{u}$ et nous avons $H(u)$ et $\frac{f(u)}{u}$ sont concave lorsque $f$ convexes est et convexe lorsque $f$ est concave.

### 2.3.1 Nonlinéarité convexe

**Lemme 2.3.1.** *([1]) Si* $f''(s) > 0$ *pour* $s > 0$ *et* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$ *alors* $G''(\rho) < 0$ *et* $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = 0$.

**Preuve 2.3.1.** *On a*

$$H(s) = F(s) - \tfrac{s}{2} f(s),\ H'(s) = \tfrac{1}{2}[f(s) - s\ f'(s)]$$

*et*

$$H''(s) = -\tfrac{s}{2} f''(s).$$

*Comme* $f''(s) > 0$ *pour* $s > 0$, *donc* $H'(s) < 0$ *est décroissante.*
*De plus*

$$H'(s) < H'(0) < 0,\ \forall s > 0.$$

*Par suite* $H$ *est décroissante, d'où* $H(\rho) - H(\rho v) < 0$ *pour* $v \in [0,1]$, *par conséquent* $G'(\rho) < 0$. *Pour* $\rho \in ]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} G(\rho) &= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\rho dv}{(F(\rho)-F(\rho v))^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.4)\\ &= \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho dv}{(F(\rho)-F(\rho v))^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\rho dv}{(F(\rho)-F(\rho v))^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

*Pour* $0 < v < \frac{1}{2}$ *et* $\rho$ *assez grand on a*

$$F(\rho v) \le F(\frac{1}{2}\rho),\ \ donc\ F(\rho) - F(\rho v) \ge F(\rho) - F(\frac{\rho}{2}) \qquad (2.5)$$

*En utilisent le théorème des acroissement finis sur* $[\frac{\rho}{2}, \rho]$, *on obtient*

$$F(\rho) - F(\frac{\rho}{2})\ = \frac{1}{2}\rho f(c_0),\quad c_{0\in}]\frac{\rho}{2}, \rho[.$$

*Alors*

$$F(\rho) - F(\frac{\rho}{2}) \geq \frac{1}{2}\rho f(\ \frac{\rho}{2})\ \textit{(car } f \textit{ est croissante)} \tag{2.6}$$

*Pour* $\frac{1}{2} < v < 1$ *et* $\rho$ *assez grant, on a*

$$F(\rho) - F(\rho v) = \rho(1-v)f(c_1),\ ou\ c_1 \in ]\rho v, \rho[$$

*d'où*

$$F(\rho) - F(\rho v) \geq \rho(1-v)f(\ \frac{\rho}{2})\ \ \textit{(car } f \textit{ est croissante)} \tag{2.7}$$

*Par suite, on a*

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda(\rho)} &= G(\rho) \leq \sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho dv}{\sqrt{\frac{1}{2}\rho f(\frac{1}{2}\rho)}} + \sqrt{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\rho}{\sqrt{\frac{1}{2}\rho f(\frac{1}{2}\rho)}} \frac{dv}{\sqrt{1-v}} \\ &= 3\sqrt{\frac{\rho}{f(\frac{1}{2}\rho)}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

*Comme* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$ *, alors*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \sqrt{\lambda(\rho)} = \lim_{\rho\to+\infty} G(\rho) = 0$$

**Théorème 2.3.1.** *([3]) Si* $f''(s) > 0$ *pour* $s > 0$ *et* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty$*, alors il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que* $(P_1)$ *a une seule solution positive pour* $0 < \lambda < \lambda^*$ *et n'a pas de solution positive pour* $\lambda > \lambda^*$*. De plus la norme de la solution positive* $\rho_\lambda$ *est croissante quand* $\lambda$ *décroit. En particulier* $\rho_{\lambda^*} = \theta$ *et* $\lim\limits_{\lambda\to 0} \rho_\lambda = +\infty$.

**Preuve 2.3.2.** *D'aprés le lemme (2.2.1)., on a*

$$G'(\rho) < 0$$

*et*

$$\lim_{\rho\to+\infty} G(\rho) = 0.$$

*Comme*

$$\sqrt{\lambda(\theta)} = G(\theta) = \sqrt{2}\int_0^\theta \frac{ds}{\sqrt{-F(s)}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\theta dv}{\sqrt{-F(\theta v)}} = \sqrt{\lambda^*} \tag{2.9}$$

*est finie et positive.*
*Alors* $\lambda(\rho)$ *est bornée pour* $\rho \in [\theta, +\infty[$, *ainsi le problème* $(P_1)$ *n'a pas de solution positive pour* $\lambda > \max\limits_{[\theta,+\infty[} \lambda(\rho)$ *(voir fig 2.2)*

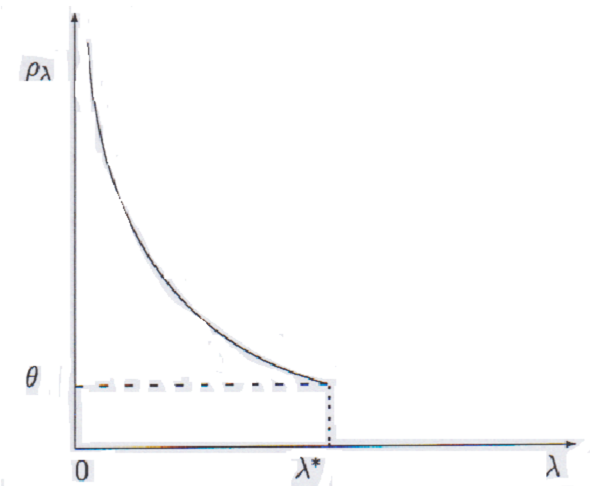



FIGURE 2.2 –

*Puisque* $\lambda(\rho)$ *est continue décroissante alors* $\lambda(\rho)$ *est inversible et son inverse* $\rho_\lambda$ : $]0, \lambda^*] \to [\theta, +\infty[$ *vérifier* $\rho'_\lambda < 0$ *sur* $]\theta, +\infty[$,

$$\rho_{\lambda^*} = \theta \text{ et } \lim_{\lambda \to 0} \rho_\lambda = +\infty.$$

### 2.3.2 Nonlinéarité concave

**Lemme 2.3.2.** *([1]) Si* $f''(s) < 0$ *pour* $s > 0$, $\lim\limits_{s\to+\infty} f(s) = M$, *avec* $0 < M \leq +\infty$, $\lim\limits_{s\to+\infty} sf'(s) = 0$ *et* $\frac{f(\theta)}{\theta} < f'(\theta)$, *alors il existe* $\delta, \gamma > 0$ ; $\theta < \delta < \gamma$, *tel que* $H'(\delta) = 0$ *et* $H(\gamma) = 0$.
*De plus* $G'(\rho) < 0$ *pour* $\rho \in ]\theta, \delta[$, $G'(\rho) > 0$ *pour* $\rho > \gamma$ *et* $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = +\infty$.

**Preuve 2.3.3.** *Du fait que* $f''(s) < 0$ *pour* $s > 0$ *et* $H''(s) = -\frac{s}{2}f''(s) > 0$ *pour* $s > 0$, $H'(s) = \frac{1}{2}[f(s) - sf'(s)]$ *est croissante, d'autre part on a*

$$H'(0) = \tfrac{f(0)}{2} < 0,\ H'(\theta) < 0$$

*et*

$$\lim_{s\to+\infty} H'(s) = \tfrac{M}{2} > 0.$$

*La fonction* $H$ *est convexe de l'infinie (voir fig (2.3)).*

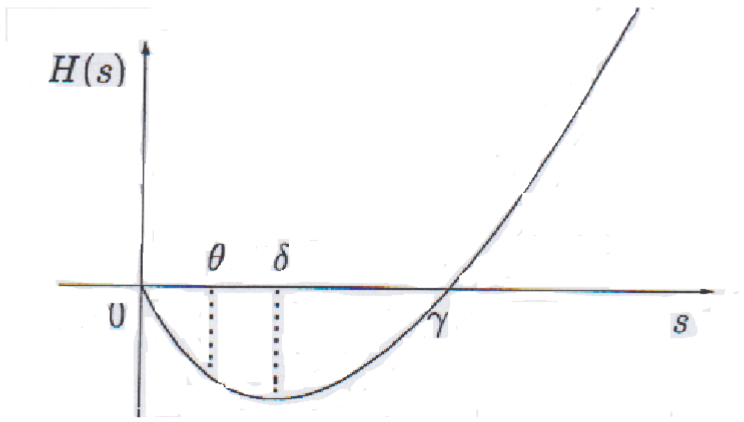



FIGURE 2.3 – Nonlinéarité concave

*D'où l'existance de* $\delta$ *et* $\gamma$ *tels que* $\theta < \delta < \gamma$, $H'(\delta) = 0$ *et* $H(\gamma) = 0$.
*Ainsi pour* $\rho \in ]\theta, \delta[$ $H$ *est décroissante, donc* $H(\rho) - H(\rho v) < 0$ *pour tout* $v \in ]0, 1[$.
*D'où* $G'(\rho) < 0$ *pour* $\rho \in ]\theta, \delta[$. *Pour* $\rho > \gamma$, $H$ *et croissante, donc* $H(\rho) - H(\rho v) > 0$ .
*D'où* $G'(\rho) > 0$ *pour* $\rho > \gamma$. *Il nous reste à montrer que* $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = +\infty$.
*En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe alors* $c \in ]0, \rho v[$ *tel que*

$$F(\rho v) - F(0) = (\rho v - 0)\ f(c) \geq \rho v\ f(0)\ \textit{(car } f'(s) > 0, \textit{ pour } s > 0)$$

*i.e.*

$$F(\rho v) \geq \rho v\ f(0)$$

*d'où*

$$\frac{F(\rho v)}{F(\rho)} \geq \frac{\rho v\ f(0)}{F(\rho)},\ \textit{(car } F(\rho) > 0) \tag{2.10}$$

*Comme*

$$G(\rho) = \sqrt{2}\frac{\rho}{\sqrt{F(\rho)}} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{F(\rho v)}{F(\rho)}}}$$

*Alors d'aprés (2.10)on a*

$$G(\rho) \geq \sqrt{2}\frac{\rho}{\sqrt{F(\rho)}} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{f(0)\rho v}{F(\rho)}}}$$

*i.e.*

$$G(\rho) \geq -\sqrt{2}\frac{\sqrt{F(\rho)}}{f(0)} \int_0^{-\frac{\rho f(0)}{F(\rho)}} \frac{dy}{\sqrt{1+y}}$$

*Par suite*

$$G(\rho) \geq -2\sqrt{2}\frac{\sqrt{F(\rho)}}{f(0)} \, [\sqrt{1 - \frac{\rho f(0)}{F(\rho)}} - 1]$$

*D'où*

$$\lim_{\rho \to +\infty} G(\rho) = +\infty$$

**Théorème 2.3.2.** *([1]) Si $f''(s) < 0$ pour $s > 0$, $\lim_{s \to +\infty} f(s) = M$ où $0 < M \leq +\infty$, $\lim_{s \to +\infty} sf'(s) = 0$ et $\frac{f(\theta)}{\theta} < f'(\theta)$, alors il existe $\lambda^*, \lambda_1$ et $\lambda_2$ tel que $0 < \lambda_1 < \lambda^* \leq \lambda_2$ et le problème $(P_1)$ possède*

*1) zéro solution positive pour $0 < \lambda < \lambda_1$ ,*

*2) au moins deux solutions positives pour $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$,*

*3) au moins une solutions positives pour $\lambda \geq \lambda^*$, ou $\lambda = \lambda_1$, (en particulier il y a une unique solution positive pour $\lambda > \lambda_2$).*

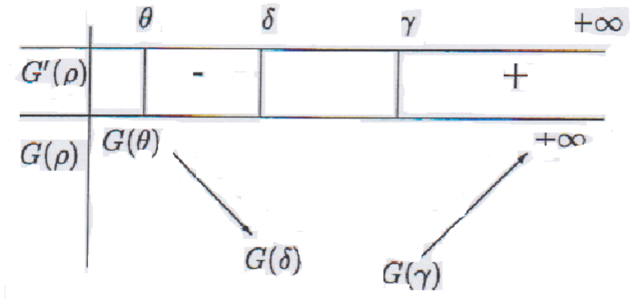
*De plus $\rho_{\lambda^*} = \theta$ et $\lim_{\lambda \to +\infty} \rho_\lambda = +\infty$.*

**Preuve 2.3.4.** *D'aprés le lemme(2.3.1), on a $G'(\rho) < 0$ pour $\rho \in ]\theta, \delta[$, $G'(\rho) > 0$ pour $\rho > \gamma$ et $\lim_{\rho \to +\infty} G(\rho) = +\infty$.*

*Soient*

$$\lambda^* = (G(\theta))^2,\ \lambda_1 = \min_{\rho\in[\delta,\gamma[}(G(\rho))^2$$

*et* $\lambda_2 = \{\lambda^*, (G(\gamma))^2\}$.




*La fonction* $\lambda(\rho)$ *est décroissante sur* $[\theta, \delta]$, *croissante sur* $]\gamma, +\infty[$.
*Donc* $\lambda_1 = (\min_{\rho\geq\theta} G(\rho))^2$.

*Ainsi en déduit que*

1) $(P_1)$ *n'a pas de solution positive pour* $0 < \lambda < \lambda_1$.

2) $(P_1)$ *admet au moins une solution positive pour* $\lambda^* < \lambda < \lambda_2$, *ou* $\lambda = \lambda_1$.

3) $(P_1)$ *admet au moins deux solution positive pour* $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$.

4) $(P_1)$ *admet une unique solution positive pour* $\lambda >\ \lambda_2$. *(voir fig (2.4)).*

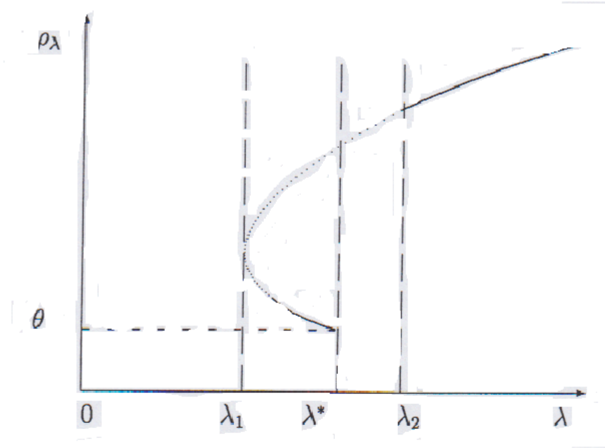



FIGURE 2.4 –

### 2.3.3 Nonlinéarité concave-convexe

**Lemme 2.3.3.** *([1]) Si $f''(s) < 0$ pour $s \in ]0, s_0[$ avec $s_0 > \theta$, $f''(s) > 0$ pour $s > s_0$, $\frac{f\ (\theta)}{\theta} < f'\ (\theta)$ et s'il existe $\sigma > \theta$ tel que $H(\sigma) > 0$, $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f\ (s)}{s} = +\infty$ et $\lim\limits_{s\to+\infty} (f(s) - sf'(s)) < 0$, alors il existe $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et $\sigma_4$ tels que $\theta < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$ et*

$$G'(\rho) < 0, \ \text{pour } \rho \in ]\theta, \sigma_1[ \cup ]\sigma_{4,+\infty}[$$

*et*

$$G'(\rho) > 0, \ \text{pour } \rho \in ]\sigma_2, \sigma_3[$$

*De plus $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = 0$.*

**Preuve 2.3.5.** *$H'(s) = \frac{1}{2}[f(s) - sf(s)]$, $H''(s) = -\frac{1}{2}sf''(s)$.*
*D'après les hypothèses sur $f''$, on a $H'(s)$ est croissante sur $]0, s_0[$ et décroissante sur $]s_0, +\infty[$, de plus $H''(s_0) = 0$, $H'(0) = \frac{f(0)}{2} < 0$ et $\lim\limits_{s\to+\infty} H'(s) < 0$ (voir fig (2.5)).*

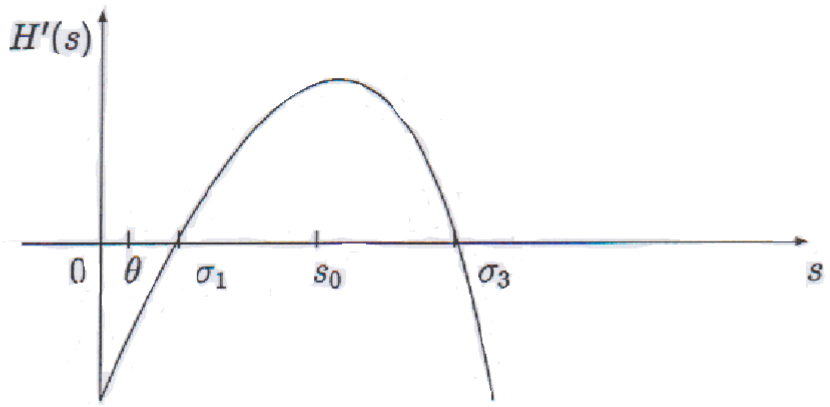



FIGURE 2.5 –

*On a $H'(s_0) > 0$, en effet supposons le contraire, $H'(s_0) \leq 0$ pour tout $s \geq 0$, ce qui implique que $H$ est décroissante avec $H(0) = 0$, donc $H'(s) \leq 0$ pour tout $s \geq 0$, ce qui est impossible car $H(\sigma) = H'(\sigma_3) = 0$.*

*De plus $\sigma_1 > \theta$ car $H'(\theta) = \frac{\theta}{2}(\frac{f(\theta)}{\theta} - f\prime(\theta)) < 0$ et $\theta < s_{0.}$*

*Donc*

$$H'(s) = \frac{1}{2}[f(s) - sf\prime(s)] < 0 \quad pour\ s \in ]0, \sigma_1[\cup]\sigma_3, +\infty[$$

*et*

$$H'(s) = \frac{1}{2}[f(s) - sf\prime(s)] < 0 \quad pour \quad s \in ]\sigma_1, \sigma_3[$$

*On déduit le tableau de variation de $H$*

*Il est claire que $H(\sigma_1) < 0$.*

*Puisqu'il existe $\sigma > \theta$, alors $H(\sigma_3) = \max\limits_{s \geq 0} H(s) > H(\sigma) > 0$. Comme $H$ est décroissante sur $]\sigma_3, +\infty[$ et $H''(s) < 0$.($H$ est concave), donc $\lim\limits_{s \to +\infty} H(s) = -\infty$.*

*(voir fig (2.6))*

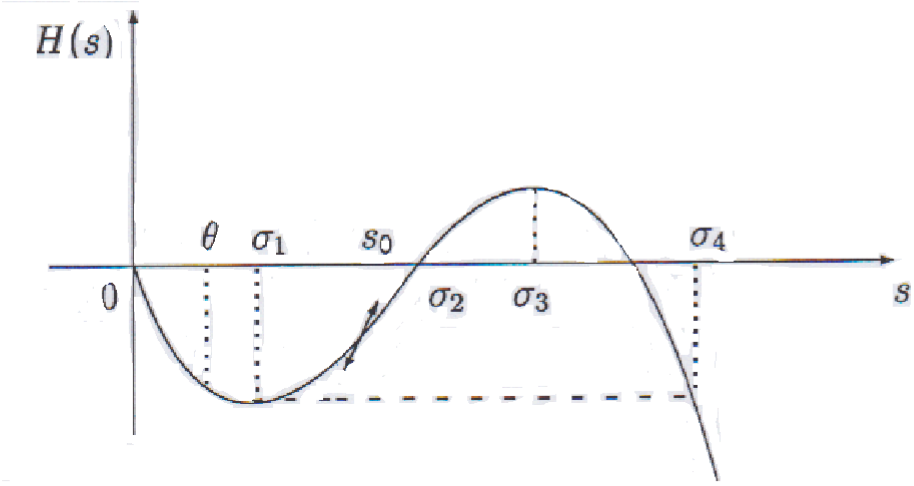



FIGURE 2.6 –

*Soient $\sigma_2$ et $\sigma_4$ tels que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4$ et $H(\sigma_2) = 0$, $H(\sigma_4) = H(\sigma_1)$.*
*On rappelle que*

$$G'(\rho) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{H(\rho) - H(\rho v)}{[F(\rho) - F(\rho v)]^{\frac{3}{2}}} dv \tag{2.11}$$

1) *Si $\rho \in ]\theta, \sigma_1[$, alors $H(\rho) - H(\rho v) \leq 0$ pour tout $v \in [0, 1]$ car $H$ est décroissante sur $]\theta, \sigma_1[$. D'où $G'(\rho) \leq 0$.*
2) *Si $\rho \in ]\sigma_4, +\infty[$, alors pour $v \in [0, 1]$, on a deux cas :*
* *Si $\rho v \geq \sigma_4$, alors $H(\rho) - H(\rho v) \leq 0$ car $H$ est décroissante sur $]\sigma_4, +\infty[$.*
* *Si $\rho v < \sigma_4$, alors $H(\rho v) > H(\sigma_4) \geq H(\rho)$.*

*Alors dans les deux cas, on a $G'(\rho) \leq 0$.*
1) *Si $\rho \in ]\sigma_2, \sigma_3[$, alors $H(\rho) > 0$ et pour $v \in [0, 1]$ on a deux cas :*
* *Si $\rho v \geq \sigma_2$, alors $H(\rho) - H(\rho v) \geq 0$ car $H$ est croissante sur $]\sigma_2, \sigma_3[$.*
* *Si $\rho v < \sigma_2$, $H(\rho v) < 0 \leq H(\rho)$.*

*Alors dans les deux cas, on a $G'(\rho) \geq 0$.*
*Comme $G(\rho) \leq 3\sqrt{\frac{\rho}{f\ (\frac{1}{2}\rho)}}$ (lemme (2.2.1)) et $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \frac{f\ (s)}{s} = +\infty$ alors $\lim\limits_{\rho \to +\infty} G(\sigma) = 0$*

**Remarque 2.3.1.** *Si $\rho \in ]\sigma_1, \sigma_2[ \cup ]\sigma_3, \sigma_4[$ l'allure de $G$ dépend de la nature de $f$ .*

**Théorème 2.3.3.** *([1]) Supposons que les conditions du lemme (2.4.1)sont satisfaites.*

*Posons* $\lambda_* = (G(\theta))^2$ *et* $\lambda_2 = (\max_{\sigma_2 \le \rho \le \sigma_4} G(\rho))^2$.

*1- Si* $\lambda_2 \ge \lambda_*$, *alors il existe* $\lambda_0$ *et* $\lambda_1$ *tels que* $0 < \lambda_1 \le \lambda_0 < \lambda^* \le \lambda_2$ *et le problème* $(P_1)$

$*$ *admet une seule solution positive pour* $0 < \lambda < \lambda_1$.

$*$ *admet au moins solution positive pour* $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_0$.

$*$ *admet au moins deux solution positive pour* $\lambda^* \le \lambda \le \lambda_2$.

$*$ *n'a pas de solution positive pour* $\lambda > \lambda_2$.

$*$ *admet au moins trois solution positive pour* $\lambda_0 < \lambda < \lambda^*$.

*2- Si* $\lambda_2 < \lambda^*$ *alors il existe* $\lambda_0$ *et* $\lambda_1$ *tels que* $0 < \lambda_1 \le \lambda_0 < \lambda^* \le \lambda_2$ *et le problème* $(P_1)$

$*$ *admet une seule solution positive pour* $0 < \lambda < \lambda_1$.

$*$ *admet au moins solution positive pour* $\lambda_1 \le \lambda < \lambda_0$.

$*$ *admet au moins trois solution positive pour* $\lambda_0 < \lambda < \lambda_2$.

$*$ *admet au moins deux solution positive pour* $\lambda = \lambda_2$.

$*$ *admet une seule solution positive pour* $\lambda_2 < \lambda < \lambda_*$.

$*$ *n'a pas de solution positive pour* $\lambda > \lambda_*$.

*De plus* $\rho_{\lambda^*} = \theta$, $\lim_{\lambda \to +\infty} \rho_\lambda = +\infty$

**Preuve 2.3.6.** *De l'étude de H (lemme (2.4.1)), on a* $G'(\rho) < 0$ *pour* $\rho \in ]\theta, \sigma_1[ \cup ]\sigma_4, +\infty[$, $G'(\rho) > 0$ *pour* $\rho \in ]\sigma_2, \sigma_3[$ *et* $\lim_{\rho \to +\infty} G(\rho) = 0$,

*On voit que* $\lambda(\rho)$ *est décroissante sur* $[\theta, \sigma_1] \cup [\sigma_4, +\infty[$, *croissante sur* $[\sigma_2, \sigma_3]$.
*Soient* $\lambda_0 = (\min_{\sigma_1 \le \rho \le \sigma_2} G(\rho))^2$.

*Ainsi on obtient l'allure de* $\lambda(\rho)$. *(voir fig (2.7), fig (2.8))*

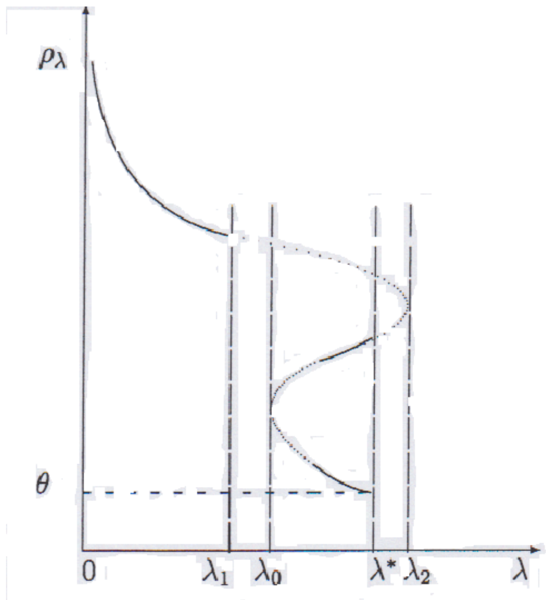



FIGURE 2.7 –

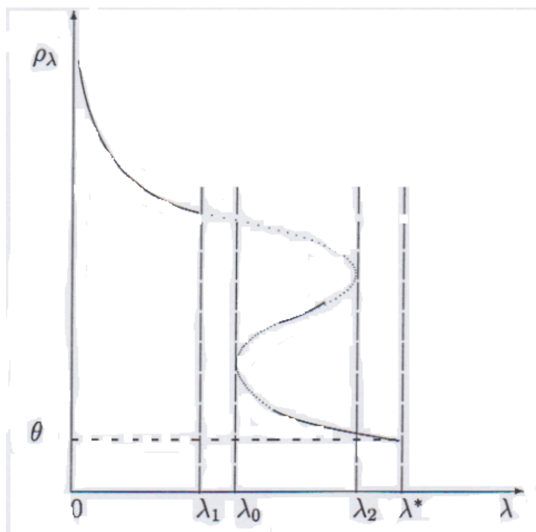



FIGURE 2.8 –

$*$ *Dans le premier cas le problème* $(P_1)$ *a une seule solution positive pour* $0 < \lambda < \lambda_1$, *n'a pas de solution positive pour* $\lambda > \lambda_2$, *a au moins trois solutions positives pour* $\lambda_0 < \lambda < \lambda^*$, *a au moins deux solutions positives pour* $\lambda^* \leq \lambda < \lambda_2$ *et au moins une solution positive pour* $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

$*$ *Dans le deuxième cas*

*le problème* $(P_1)$ *a une seule solution positive pour* $0 < \lambda < \lambda_1$, *n'a pas de solution positive pour* $\lambda > \lambda^*$, *a au moins trois solutions positives pour pour* $\lambda_0 < \lambda < \lambda_2$, *a au moins deux solutions positives pour* $\lambda = \lambda_2$ *et admet une solution positive pour* $\lambda_2 < \lambda \leq \lambda^*$.

**Remarque 2.3.2.** *Etant donnée qu'on ne peut pas déterminer les variations de* $G$ *dans les intervalles* $]\sigma_1, \sigma_2[$ *et* $]\sigma_3, \sigma_4[$, *on ne peut déterminer le nombre exacte des solutions positives pour* $\lambda \in ]\lambda_1, \lambda_2[$ *(pour le premier cas) et* $\lambda \in ]\lambda_1, \lambda^*[$ *(pour le deuxième cas).*

## 2.4 Solutions positives avec $n$ zéros intérieurs

**Lemme 2.4.1.** *([1]) Soit* $\alpha = \frac{\theta^2}{-F(\beta)}$, *alors* $2\alpha \leq \lambda^* \leq 8\alpha$.

**Preuve 2.4.1.** *D'une part, puisque* $\beta$ *réalise le minimum de* $F$, *on a* $F(s) \geq F(\beta)$ *pour tout* $s \in ]0, \theta[$.
*D'où*

$$\frac{1}{\sqrt{-F(s)}} \geq \frac{1}{\sqrt{-F(\beta)}} \quad \forall s \in ]0, \theta[.$$

*Par suite*

$$G(\theta) = \sqrt{2} \int_0^\theta \frac{ds}{\sqrt{-F(s)}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-F(\beta)}} \int_0^\theta ds = \frac{\theta\sqrt{2}}{\sqrt{-F(\beta)}}$$

*Alors*

$$\lambda^* = (G(\theta))^2 \geq \frac{2\theta^2}{-F(\beta)} = 2\alpha \tag{2.12}$$

*D'autre part*

$$F(s) \leq As \quad \textit{pour } s \in [0, \beta]$$

*et*

$$F(s) \leq B(\theta - s) \quad \textit{pour } s \in [\beta, \theta]$$

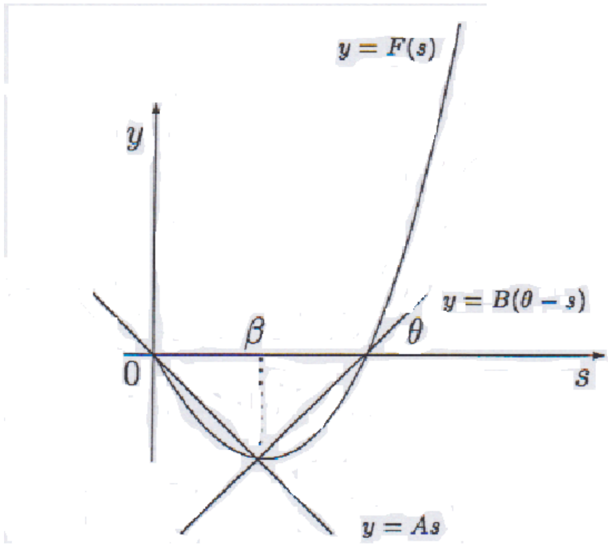



FIGURE 2.9 –

*où* $A = \frac{F(\beta)}{\beta}$ *et* $B = \frac{F(\beta)}{\theta-\beta}$ *(voir fig (2.9)).*
*Ainsi on a*

$$\frac{1}{\sqrt{-F(s)}} \leq \sqrt{\frac{-\beta}{F(\beta)s}} \quad pour\ 0 \leq s \leq \beta$$

*et*

$$\frac{1}{\sqrt{-F(s)}} \leq \sqrt{\frac{-(\theta-\beta)}{F(\beta)(\theta-s)}} \quad pour\ \ \beta < s \leq \theta$$

*Par suite*

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \sqrt{2}\int_0^\beta \frac{ds}{\sqrt{-F(s)}} + \sqrt{2}\int_\beta^\theta \frac{ds}{\sqrt{-F(s)}} \\ &\leq 2\sqrt{2\beta}\sqrt{\frac{-\beta}{F(\beta)}} + 2\sqrt{2(\theta-\beta)}\sqrt{\frac{-(\theta-\beta)}{F(\beta)}} \end{aligned}$$

*i.e.*

$$G(\theta) \leq \frac{2\theta\sqrt{2}}{\sqrt{-F(\beta)}} = \sqrt{8\alpha} \qquad (3.13)$$

*D'où d'aprés (2.12) et (3.13) on a*

$$2\alpha \leq \lambda^* = (G(\theta))^2 \leq 8\alpha$$

**Théorème 2.4.1.** *([6]) Soient $(u_1, \lambda)$ et $(u_2, \lambda)$ deux solutions positives distinctes du problème $(P_1)$ pour $\lambda$ positif fixé. Alors ou bien $u_1(x) < u_2(x)$ pour tout $x \in ]0, 1[$, ou bien $u_1(x) > u_2(x)$ pour tout $x \in ]0, 1[$*

**Preuve 2.4.2.** *Soient $\rho_1 = \max\limits_{0<x<1} u_1(x) = u_1(\frac{1}{2})$ et $\rho_2 = \max\limits_{0<x<1} u_2(x) = u_2(\frac{1}{2})$, avec $\rho_1 \neq \rho_2$.*
*Comme $u_1$ et $u_2$ sont deux solutions positives du problème $(P_1)$ pour $\lambda > 0$, alors $\rho_1 \geq \theta$ et $\rho_2 \geq \theta$.*
*Supposons que $\rho_1 < \rho_2$.*
*Alors $F(\rho_1) < F(\rho_2)$ car $F$ strictement croissante sur $[\theta, +\infty[$.*
*D'aprés (2.1), on a*

$$u_1'(x) = \sqrt{2\lambda(F(\rho_1) - F(u(x)))} \text{ et } u_2'(x) = \sqrt{2\lambda(F(\rho_2) - F(u(x)))} \text{ pour tout } x \in ]0, \frac{1}{2}].$$

*D'où $u_1'(x) < u_2'(x)$.*
*Ainsi $u_1(x) = \int\limits_0^x u_1'(t)dt < \int\limits_0^x u_2'(t)dt = u_2(x)$ pour tout $x \in ]0, \frac{1}{2}]$, et par symétrique on a $u_1(x) < u_2(x)$ pour tout $x \in ]0,\ 1[$.*
*Si $\rho_1 = \rho_2$, de la même façon que précédemment, on obtient $u_1(x) = u_2(x)$ $\forall\, x \in ]0,\ 1[$. De plus*

$$u_1(0) = u_2(0) = u_1(1) = u_2(1).$$

*Par conséquent, si $u_1$ et $u_2$ sont distinctes alors l'ensemble $\{x \in ]0,\ 1[ / u_1(x) = u_2(x)\}$ est vide.*

**Définition 2.4.1.** *Soit $(u, \lambda)$ une solution de $(P_1)$. On dit que $u$ est une solution positive avec $n$ zéro intérieurs de $(P_1)$ pour $\lambda$ donnée si $u(x) > 0$ $\forall\, x \in [0,\ 1]$ et s'il existe $x_1, x_2, ..., x_n \in ]0,\ 1[$. tels que $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ et $u(x_i) = 0$ pour $i = 1, 2, ..., n$.*

**Remarque 2.4.1.** *Si $u$ est une solution positive avec $n$ zéro intérieurs $x_1, x_2, ..., x_n$ de $(P_1)$ pour $\lambda$ donnée, alors $u'(x_i) = 0$ car $f$ est positive et de classe $C^2$.*

**Théorème 2.4.2.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le problème $(P_1)$ admet une solution positive avec $n$ zéros intèrieurs $\{x_i = \frac{i}{n+1},\ i = 1, .., n\}$ si et seulement si $\lambda = (n+1)^2\lambda^*$.*

**Preuve 2.4.3.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que le problème $(P_1)$ admet une solution positive $u$ avec $n$ avec zéros intérieurs $\{x_i = \frac{i}{n+1},\ i = 1, .., n\}$ pour $\lambda$ donnée.*
*Montrons que $\lambda = (n+1)^2\lambda^*$.*
*$u$ vérifie le problème*

$$(s)\begin{cases} -u''(x) = \lambda f(u(x)) \qquad 0 < x < 1 \\ u(x_i) = 0 \quad\ i = 1, .., n \\ u'(x_i) = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

*Posons $y = (n+1)x$, donc $x \in [0, \frac{1}{n+1}]$ si et seulement si $y \in [0, 1]$.*
*On définit la fonction $v$ par :*

$$v(y) = u(x) = u(\frac{y}{n+1})$$

*on a*

$$v'(y) = \frac{1}{n+1}u'(\frac{y}{n+1})$$

*et*

$$v''(y) = \frac{1}{(n+1)^2}u''(\frac{y}{n+1}) = \frac{-\lambda}{(n+1)^2}f(u(\frac{y}{n+1}))$$

*d'où*

$$v''(y) = \frac{-\lambda}{(n+1)^2}f(v(y))$$

*de plus $v(0) = u(0) = 0$, $v(1) = u(\frac{y}{n+1}) = 0$ et $v(y) \geq 0$.*
*par suite vvérifiele problème*

$$\begin{cases} -v''(y) = \lambda' f(v(y)), \quad 0 < y < 1 \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

*avec* $\lambda' = \frac{\lambda}{(n+1)^2}$.

*D'où* $(v, \lambda')$ *est une solution de* $(P_1)$.

*D'aprés l'équation (1.4), on a*

$$v'(y) = -\sqrt{2\lambda(F(\rho) - F(v(y)))} \;\; \textit{pour } y \in [\frac{1}{2}, 1] \tag{2.13}$$

*où* $\rho = v(\frac{1}{2}) \geq \theta$.

*Comme* $v'(1) = \frac{1}{n+1}u'(\frac{1}{n+1}) = 0$ *et* $F(v(1)) = F(0) = 0$, *alors (2.13) nous donne* $F(\rho) = 0$ *donc* $\rho = \theta$. *D'où* $\lambda' = (G(\rho))^2 = (G(\theta))^2$ *d'aprés (2.9).*

*Alors*

$$\frac{\lambda}{(n+1)^2} = \lambda^* \quad \textit{ie} \quad \lambda = (n+1)^2\lambda^*.$$

*Soient maintenant*

$$\lambda = (n+1)^2\lambda^*.$$

*Ainsi à* $\rho = \theta$, *on a une solution positive* $u$ *pour* $\lambda^*$.

*Soit* $y = \frac{x}{(n+1)^2}$, *donc* $x \in [0, 1]$ *si et seulement si* $y \in [0, \frac{1}{n+1}]$.

*Posons*

$$w_1(y) = u(x) = u((n+1)y).$$

*On a*

$$w_1(0) = u(0) = 0 \textit{ et } w_1(\tfrac{1}{n+1}) = u(1) = 0.$$

*d'aprés (1.3) on a*

$$u'(x) = \sqrt{2\lambda^*(F(\theta) - F(u(x)))} \;\; \textit{pour } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

*D'où* $u'(0) = 0$, *de même* $u'(1) = 0$ *d'aprés (1.4).*

*Comme*

$$w_1'(y) = (n+1)u'((n+1)y),$$

*alors*

$$w_1'(0) = (n+1)u'(0) = 0$$

*et*

$$w_1'(\tfrac{1}{n+1}) = (n+1)u'(1) = 0.$$

*Soit la fonction* $w : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ *définie par* $w(y) = w_1(y - \frac{i}{n+1})$ *si* $y \in [\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}]$ *où* $i = 0, 1, ..., n$.

$w$ *est bien positive et on a* $w(\frac{i}{n+1}) = 0$, *pour* $i = 1, ..., n$, $w(0) = w(1) = 0$.

*Il nous reste à voir si* $w$ *est de classe* $C^2$ *et si elle vérifie l'équation*

$$w''(y) = -\lambda f(w(y))$$

$w$ *est de classe* $C^2$ *sur*$]0,1[/\{\frac{i}{n+1}, i = 1, ..., n\}$.

*Par construction* $w$ *est continue et dérivable aux point* $\frac{i}{n+1}, i = 1, ..., n$ , *car*

$$w_1(0) = w_1(\tfrac{1}{n+1}) = 0 \text{ et } w_1'(0) = w_1'(\tfrac{1}{n+1}) = 0.$$

*On a aussi pour* $y \in [\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}]$, $i = 0, 1, ..., n$

$$\begin{aligned} w''(y) &= w_1''(y - \tfrac{i}{n+1}) \\ &= (n+1)^2 u''((n+1)y - i) \\ &= -(n+1)^2 \lambda^* f(u((n+1)y - i)) \\ &= -(n+1)^2 \lambda^* f(w(y) \end{aligned}$$

*Puisque* $f$ *et* $w$ *sont continues, alors* $w''$ *existe et continue sur* $[0,1]$. *On a bien* $w$ *est de classe* $C^2$ *sur* $]0,1[$ *et* $w"(y) = -\lambda^* f(w(y))$ *avec* $\lambda = (n+1)^2\lambda^*$.

**Remarque 2.4.2.** *On peut démontrer que les seules solutions positives à $n$ zéro intérieurs pour $\lambda$ donnée sont celles données par le théorème (2.5.2).*

# Chapitre 3

# Le $p$-Laplacien

Dans ce chapitre on va généralisé l'étude du 1 et 2 chapitre a l'opérateur p-Laplacien où $p \in (1, 2]$, on récupère le priblème du p-Laplacien, i.e.

$$(P_2)\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')'(x) = \lambda f(u(x)), 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ce dernier a été considéré par plusieurs auteurs, en particulier, nous citons les travaux de U.Janfalk [7], S.Bouguima es A.Lakmeche et A.Oumansour [2]. L'objet de ce travail est de démontrer l'éxistance es le nombre des solutions positives du problème $(P_2)$ pour $p \in (1, 2]$, et de déterminer leur nombre.

## 3.1 Préliminaires

Dans ce chapitre, nous considérons le problème aux limites suivant

$$(P_2)\begin{cases} -(|u'|^{p-2}\, u')'(x) = \lambda f\ (u(x)),\ \text{p.p. } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ est assez régulière, $\lambda$ un paramètre réel positif et $p \in ]1, 2]$.

**Définition 3.1.1.** *Le couple* $(u, \lambda) \in \mathbb{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}_+) \times [0, +\infty[$ *est dit solution du problème* $(P_2)$ *si* *i)* $u > 0$ *dans* $]0,1[$,

*ii)* $(|u'|^{p-2}u')$ *est absolument continue,*

*iii)* $-(|u'(x)|^{p-2}u'(x))' = \lambda f\ (u(x))$ *sur* $(0,1)$ *et* $u(0) = u(1) = 0$.

*On dit aussi que u est solution positive de* $(P_2)$ *pour* $\lambda$ *donnée.*

**Remarque 3.1.1.** *Soient* $(u, \lambda)$ *une solution de* $(P_2)$ *et* $x_0 \in ]0,1[$

*i) Si* $u'(x_0) > 0$ *alors* $|u'(x_0)|^{p-2}u'(x_0) = (u'(x_0))^{p-1}$

*ii) Si* $u'(x_0) < 0$ *alors* $|u'(x_0)|^{p-2}u'(x_0) = -(-u'(x_0))^{p-1}$

*iii) Si* $u'(x_0) = 0$ *alors* $\exists \epsilon \succ 0 \ / \ u'(x) = 0 \ \forall x \in ]x_0 - \epsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \epsilon[$.

*Donc pour* $x \neq x_0$ *on a* $\lim\limits_{x \to x_0} |u'(x)|^{p-1} = 0$, *d'où*

$$\lim_{x \to x_0} |u'(x)|^{p-2}u'(x) = \begin{cases} -\lim\limits_{x \to x_0} |u'(x)|^{p-1} & si\ u'(x_0) < 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} |u'(x)|^{p-1} & si\ u'(x_0) > 0 \end{cases}$$

*i.e.*

$$\lim_{x \to x_0} |u'(x)|^{p-2}u'(x) = 0.$$

**Lemme 3.1.1.** *([2]) L'équation différentielle*

$$-\left(|u'|^{p-2}u'\right)'(x) = \lambda f\ (u(x)),\ \ p.p.\ 0 < x < 1 \tag{3.1}$$

*et le système*

$$(S)\begin{cases} u'(x) = v(x)\,|v(x)|^{\frac{2-p}{p-1}} \\ v'(x) = -\lambda\ f\ (u(x)) \quad p.p.\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

*sont équationts, (i.e. si u est solution de (3.1) alors le couple* $(u, v = |u'|^{p-2}u'))$ *est solution de* $(S)$ *et inversement si* $(u, v)$ *est solution de* $(S)$ *alors u est solution de (3.1).*

**Lemme 3.1.2.** *La fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(v) = v\,|v|^{\frac{2-p}{p-1}}$ *est localement lipschitzienne pour* $p \in ]1,2]$.

**Preuve 3.1.1.** *En dehors de lorigine $v = 0$, $g$ est continûment différentiable, elle est donc lipschitzienne sur $\mathbb{R}^*$.*

*D'autre part, $g$ est impaire, et pour $v > 0$ on a $g'(v) = \frac{1}{p-1}v^{\frac{2-p}{p-1}}$.*

*De plus $\lim\limits_{v\to 0^+} g'(v) = 0$.*

*Donc $g$ est de classe $\mathbb{C}^1$ au voisinage de zéro.*

*Par suite $g$ est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc elle est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

**Lemme 3.1.3.** *([5]) Si $(u, \lambda)$ est solution de $(P_2)$ alors $u$ est symétrique par rapport à $x_0 = \frac{1}{2}$.*

**Preuve 3.1.2.** *Soit $(u, \lambda)$ est solution de $(P_2)$, telle que $\|u\| = \max\limits_{x\in[0,1]} u(x) = u(x_0)$, où $x_0 \in (0, 1)$. En particulier on a $u'(x_0) = 0$.*

*Considérons le système*

$$(C)\begin{cases} z' = w\,|w|^{\frac{2-p}{p-1}}, \\ w' = -\lambda\ f\ (z), \\ z(0) = u(x_0), \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

*Soient*

$$(z_1(x), w_1(x)) = (u(x_0 - x), -v(x_0 - x)), \quad x \in [0, x_0] \tag{3.2}$$

*et*

$$(z_2(x), w_2(x)) = (u(x_0 + x), -v(x_0 + x)), \quad x \in [0, x_1] \tag{3.3}$$

*où $x_1 = \min\{x_0, 1 - x_0\}$ et $v = |u'|^{p-2}\,u'$.*

*Alors $(z_1, w_1)$ et $(z_2, w_2)$ sont deux solutions de $(C)$.*

*D'aprés le lemme(3.1.1), on a*

$$z_1'(x) = -u'(x_0-x) = -v(x_0-x)\,|v(x_0 - x)|^{\frac{2-p}{p-1}} = w_1(x)\,|w_1(x)|^{\frac{2-p}{p-1}} \quad \text{pour } x \in ]0, x_0[, \tag{3.2}$$

*et*

$$w_1'(x) = -v'(x_0 - x) = -\ \lambda\ f\ (u(x_0 - x)) = -\lambda\ f\ \ (z_1(x)) \quad \text{pour } \ x \in ]0, x_0[, \tag{3.3}$$

*De plus*

$$z_1(0) = u(x_0) \text{ et } w_1(0) = -v(x_0) = -|u'(x_0)|^{p-2}\, u'(x_0) = 0.$$

*Et de même, pour* $x \in ]0, x_1[$, *on a d'aprés lemme (3.1.1)*

$$z_2'(x) = u'(x_0+x) = v(x_0+x)\,|v(x_0+x)|^{\frac{2-p}{p-1}} = w_2(x)\,|w_2(x)|^{\frac{2-p}{p-1}} \quad \text{pour } x \in ]0, x_1[, \tag{3.4}$$

*et*

$$w_2'(x) = v'(x_0+x) = -\lambda f\, (u(x_0+x)) = -\lambda f\, (z_2(x)) \quad \text{pour } x \in ]0, x_1[, \tag{3.5}$$

*et*

$$z_2(0) = u(x_0) \text{ et } w_2(0) = v(x_0) = -|u'(x_0)|^{p-2}\, u'(x_0) = 0.$$

*D'autre part, l'application* $(z, w) \to (g(w), \lambda f (z))$ *est localement lipschitzienne car* $f$ *et* $g$ *le sont (lemme (3.1.2)). Donc le problème* $(C)$ *admet une unique solution dans* $]0, x_1[$, *i.e.* $(z_1(x), w_1(x)) = (z_2(x), w_2(x))$, *pour* $x \in ]0, x_1[$.
*D'aprés les propriétés de prolongement des équations différentielles ordinaires, on peut dire que* $(z_1(x), w_1(x)) = (z_2(x), w_2(x))$, *dans* $x \in [0, x_1]$. *Ceci implique que* $u(x_0+x) = u(x_0-x)$, $x \in ]0, x_0[$. *D'où on a* $u(0) = u(2x_0) = 0$, *puisque* $u$ *est positive sur* $(0,1)$ *alors* $2x_0 = 1$, *i.e.* $x_0 = \frac{1}{2}$.*De plus* $u$ *est symétrique par rapport à* $\frac{1}{2}$.
*Soient* $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *définie par* $F(u) = \int\limits_0^u f(s)ds$ *et* $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *définie par*

$$G(\rho) = 2(\frac{p-1}{p}) \int\limits_0^\rho \frac{ds}{[F(\rho) - F(s)]^{\frac{1}{p}}} \tag{3.6}$$

*pour* $\rho > 0$ *et* $G(0) = 0$.

**Lemme 3.1.4.** *([2]) Si* $(u, \lambda)$ *est solution de* $(P_2)$, *alors* $\lambda^{\frac{1}{p}} = G(\|u\|)$.

**Preuve 3.1.3.** *Soit* $(u, \lambda)$ *une solution de* $(P_2)$ *alors on a*

$$-\,(|u'|^{p-2}\,u')'(x) = \lambda\ f(u(x)) \quad p.p\ x \in [0,1] \tag{3.7}$$

*En multipliant l'équation précédente par* $u'(x)$*, et en intégrant entre* $x \in [0, \frac{1}{2}]$ *et* $\frac{1}{2}$*, on obtient*

$$-\int_x^{\frac{1}{2}} (|u'(t)|^{p-2}\,u'(t))'u'(t)dt = \int_x^{\frac{1}{2}} \lambda\ f(u(t))u'(t)dt. \tag{3.8}$$

*Nous avons, d'une part,*

$$\int_x^{\frac{1}{2}} \lambda\ f(u(t))u'(t)dt = \lambda \int_{u(x)}^{u(\frac{1}{2})} f(y)dy = \lambda(F(\|u\|)) - F(u(x)). \quad \text{où}\ \ \|u\| = u(\frac{1}{2}) \tag{3.9}$$

*et d'autre part,*

$$\begin{aligned}
-\int_x^{\frac{1}{2}} (|u'(t)|^{p-2}\, u'(t))' u'(t)dt &= -\int_x^{\frac{1}{2}} ((u'(t))^{p-1})u'(t)dt, \\
&= -\int_x^{\frac{1}{2}} u'(t)d((u'(t))^{p-1}) \\
&= -\int_{u^{'}(x)}^{u^{'}(1/2)} vd(v^{\,p-1}) \\
&= -\int_{u^{'}(x)}^{0} v\left[(p-1)v^{\,p-2}\right]dv \\
&= -(p-1)\int_{u^{'}(x)}^{0} v^{\,p-1}dv \\
&= -\frac{(p-1)}{p}\left[v^{\,p}\right]u^{'}(x)
\end{aligned}$$

*par suite*

$$-\int_x^{1/2}\left(|\, u^{'}(t)\, |^{p-2}\, u^{'}(t)\right)^{'} u^{'}(t)dt \;=\frac{(p-1)}{p}(u^{'}(t))^{p} \tag{3.11}$$

*De (3.8), (3.9) et (3.11), on a*

$$\frac{(p-1)}{p}(u^{'}(x))^{p} = \lambda(F(\|u\|) - F(u(x))).$$

*Donc pour tout $x \in \,]0,1/2[$ on a*

$$(u'(x))^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)\lambda(F(\| u \|)) - F(u(x)) \tag{3.12}$$

*D'ou*

$$\lambda^{1/p} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \frac{u^{'}(x)}{[F(\| u \|) - F(s)]^{1/p}} \quad pour \quad x \in \left]0, 1/2\right[. \tag{3.13}$$

*Aprés intégration et changement de variable on obtient,*

$$\lambda^{1/p} = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int\limits_0^{\|u\|} \frac{ds}{[F(\| u \|) - F(s)]^{1/p}} = G(\| u \|) \tag{3.14}$$

**Lemme 3.1.5.** *([2]) La fonction $G$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

**Preuve 3.1.4.** *Soit $\rho \in ]0, +\infty[$, on a*

$$\inf_{r\in[0,\rho]} \{f\ (r)\}.(\rho - s) \leq \int\limits_s^{\rho} f\ (s)ds \leq F(\rho) - F(s) \leq \sup_{r\in[0,\rho]} \{f(r)\}.(\rho - s) \tag{3.15}$$

*On a*

$$\begin{aligned} G(\rho) &\leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int\limits_0^{\rho} \frac{ds}{(\inf\limits_{r\in[0,\rho]}(f\ (r))^{\frac{1}{p}}(\rho - s)^{\frac{1}{p}}} \qquad (3.16)\\ &\leq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} (\inf_{r\in[0,\rho]}(f\ (r))^{-\frac{1}{p}} \int\limits_0^{\rho} \frac{ds}{[\rho - s]^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}-1} (\inf_{r\in[0,\rho]}(f\ (r))^{-\frac{1}{p}}\rho^{1-\frac{1}{p}} \prec \infty \end{aligned}$$

*La convergence uniforme de l'intégrale impropre* $\int_0^\rho \frac{ds}{[\rho-s]^{\frac{1}{p}}}$ *sur tout intervalle fermé et borné de* $\mathbb{R}^*$ *implique la continuité de* $G$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

*Soit* $\rho < 1$, *on a* $\inf\limits_{r\in[0\rho]} f(r) \geq \inf\limits_{r\in[01]} f(r)$, *d'où* $(\inf\limits_{r\in[0\rho]} f(r))^{-\frac{1}{p}} \leq (\inf\limits_{r\in[01]} f(r))^{-\frac{1}{p}}$.

*En utilisant (3.16), on obtient* $G(\rho) \leq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}-1} (\inf\limits_{r\in[01]} f(r))^{-\frac{1}{p}} \rho^{1-\frac{1}{p}}$.

*D'où* $\lim\limits_{\rho\to 0^+} G(\rho) = 0$.

## 3.2 Existence des solutions

**Lemme 3.2.1.** *([2])*

*1) Si* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f\ (s)}{s^{p-1}} = 0$ *alors* $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = +\infty$.

*2) Si* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f\ (s)}{s^{p-1}} = +\infty$ *et Si* $\lim\limits_{s\to+\infty} f\ '(s) > 0$ *alors* $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = 0$.

**Preuve 3.2.1.** *1- Nous avons*

$$\begin{aligned} G(\rho) &= 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^\rho \frac{ds}{[F(\rho)-F(s)]^{\frac{1}{p}}} \geq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^\rho \frac{ds}{[F(\rho)]^{\frac{1}{p}}} \\ &\geq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\rho}{[F(\rho)]^{\frac{1}{p}}} \\ &\geq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\rho^p}{F(\rho)}\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

*Comme* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f\ (s)}{s^{p-1}} = 0$, *alors*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{\rho^p}{F(\rho)} = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{p\rho^{p-1}}{f\ \ (\rho)} = +\infty$$

*D'où* $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = +\infty$.

*2.On a*

$$G(\rho) = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int\limits_0^{\rho} \frac{ds}{[F(\rho)-F(s)]^{\frac{1}{p}}}$$

*En faisant le changement $s = \rho v$, on obtient,*

$$\begin{aligned} G(\rho) &= 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int\limits_0^{1} \frac{\rho dv}{[F(\rho)-F(\rho v)]^{\frac{1}{p}}} \\ &= 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\rho^p}{F(\rho)}\right)^{\frac{1}{p}} \int\limits_0^{1} \frac{dv}{[1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}]^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

*D'où*

$$G(\rho) = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\rho^p}{F(\rho)}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{-\frac{1}{p}} dv + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{-\frac{1}{p}} dv \right\}. \tag{3.18}$$

*Puisque $\lim\limits_{s\to+\infty} f\ '(s) > 0$, alors il existe $M > 0$ tel que $f$ est strictement croissante sur $(M, +\infty)$.*
*Pour $\rho > 2M$, on a $f(\frac{\rho}{2}) < f(\rho)$. Par suite*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{F(\frac{\rho}{2})}{F(\rho)} = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{f\ (\frac{\rho}{2})}{2\ f\ (\rho)} \leq \frac{1}{2} \tag{3.19}$$

*D'une part pour $\rho$ assez grand, on a pour $v \in [0, \frac{1}{2}]$.*
*$F(\rho v) \leq F(\frac{\rho}{2})$, d'où$\frac{F(\rho v)}{F(\rho)} \leq \frac{F(\ \frac{\rho}{2})}{F(\rho)} \leq \frac{1}{2}$, d'aprés (3.19).*
*on en déduit que*

$$\left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{-\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

*Ainsi*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{-\frac{1}{p}} dv \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{p}-1} \quad \textit{pour } \rho \textit{ assez grand} \tag{3.20}$$

*D'autre part, soit* $K(v) = \frac{F(\rho v)}{F(\rho)}$ *pour* $v \in [\frac{1}{2}, 1]$. *On a* $K''(v) = \frac{\rho^2 f''(\rho v)}{F(\rho)} > 0$ *pour* $\rho > 2M$. *Par suite la fonction* $K$ *est convexe et on a* $K(v) \leq av + b$, *avec* $a = 2\left(1 - \frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)$ *et* $b = \frac{2F(\rho v)}{F(\rho)} - 1$ *(voir fig (3.1))*

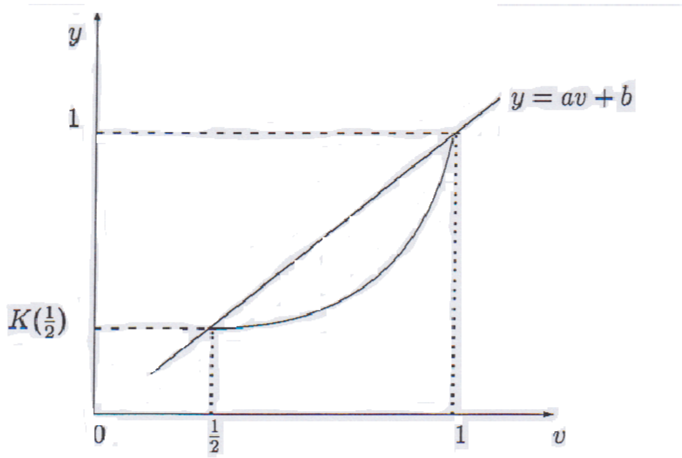



FIGURE 3.1 –

*D'oú*

$$\left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{\frac{-1}{p}} = (1-K(v))^{\frac{-1}{p}} \leq (1-av-b)^{\frac{-1}{p}}$$

*Comme* $1 - b = a = 2(1 - \frac{F(\frac{\rho}{2})}{F(\rho)})$, *on obtient*

$$\left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{\frac{-1}{p}} \leq a^{\frac{-1}{p}}(1-v)^{\frac{-1}{p}} \quad \forall v \in [\frac{1}{2}, 1[$$

*D'oú*

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{\frac{-1}{p}}dv &\leq a^{\frac{-1}{p}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-v)^{\frac{-1}{p}}dv\\
&\leq a^{\frac{-1}{p}}\left[-\frac{(1-v)^{\frac{-1}{p}}}{\frac{-1}{p}+1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\\
&\leq a^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\\
&\leq 2^{\frac{-1}{p}}\left(1-\frac{F(\frac{\rho}{2})}{F(\rho)}\right)^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

*Puisque* $\frac{F(\frac{\rho}{2})}{F(\rho)} \leq \frac{1}{2}$ *pour* $\rho$ *assez grant (d'après (3.19))*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{F(\rho v)}{F(\rho)}\right)^{\frac{-1}{p}}dv \leq 2^{\frac{-1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)2^{\frac{1}{p}-1} \text{ pour } \rho \text{ assez grand} \quad (3.23)$$

*De(3.18), (3.19) et (3.20), on obtient*

$$G(\rho) \leq 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\rho^p}{F(\rho)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[2^{\frac{1}{p}-1}+\left(\frac{p}{p-1}\right)2^{\frac{1}{p}-1}\right]$$

*Alors*

$$G(\rho) \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2p-1}{p-1}\right)\left(\frac{\rho^p}{F(\rho)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } \rho \text{ assez grand} \tag{3.21}$$

*Comme* $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\frac{\rho^p}{F(\rho)} = \lim\limits_{\rho\to+\infty}\frac{p\rho^{p-1}}{f\ (\rho)} = 0,$ *on a*

$$\lim_{\rho\to+\infty} G(\rho) = 0$$

**Théorème 3.2.1.** *([2])*

*1) Si* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f\ \ (s)}{s^{p-1}} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{s\to+\infty} f'(s) > 0$, *alors il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que le problème* $(P_2)$ *admet*

$*$ *au moins deux solutions positives pour* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

$*$ *au moins une solution positive pour tout* $\lambda = \lambda^*$.

$*$ *zéro solution positive pour* $\lambda > \lambda^*$.

*2) Si* $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{f\ \ (s)}{s^{p-1}} = 0$, *alors* $(P_2)$ *admet au moins une solution positive pour tout* $\lambda > 0$.

*Si de plus* $(p-2)\ f'(s) > s\ f''(s)$, *pour* $s > 0$ *ou* $(p-1)f(s) > s\ f'(s)$ *pour* $s > 0$, *alors* $(P_2)$ *admet une unique solution positive pour tout* $\lambda > 0$.

**Preuve 3.2.2.** *1) D'après le lemme (3.1.5), on a* $\lim\limits_{\rho\to+\infty} G(\rho) = 0$.

*Par suite,* $G$ *est bornée. Soit* $\lambda^* = \left(\sup\limits_{\rho\geq 0} G(\rho)\right)^p$

*Donc* $(P_2)$ *admet au moins deux solutions positives pour* $0 < \lambda < \lambda^*$, *au moins une solution positive pour tout* $\lambda = \lambda^*$ *et n'a pas de solution positive pour* $\lambda > \lambda^*$.
*(voir fig (3.2)).*

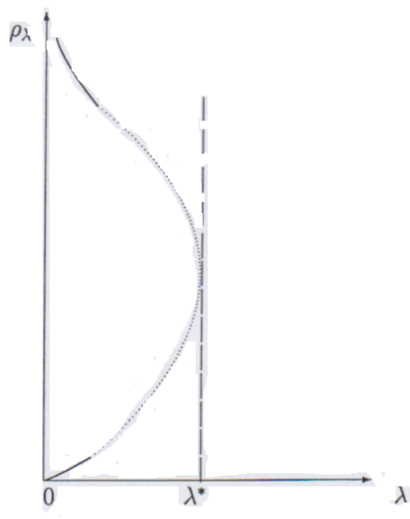



FIGURE 3.2 –

*2) D'aprés le lemme (3.1.5), on a*

$\lim_{\rho\to 0^+} G(\rho) = 0$ *et d'aprés le lemme (3.2.1), on a* $\lim_{\rho\to+\infty} G(\rho) = +\infty$.

*Alors* $(P_2)$ *a au moins une solution positive pour tout* $\lambda > 0$. *(voir fig (3.3))*

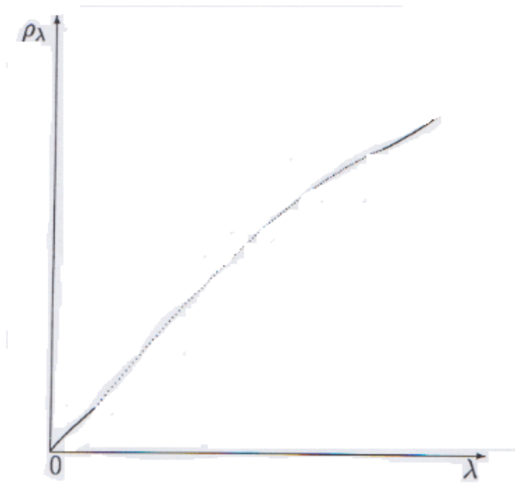



FIGURE 3.3 –

*On a*

$$G(\rho) = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{\rho} \frac{ds}{[F(\rho)-F(s)]^{\frac{1}{p}}} = 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{1} \frac{\rho dv}{[F(\rho)-F(\rho v)]^{\frac{1}{p}}}$$

*D'où*

$$\begin{aligned} G'(\rho) &= 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{1} \frac{[F(\rho)-F(\rho v)] - \frac{\rho}{p}[\,f\;(\rho) - vf\;(\rho v)]}{[F(\rho)-F(\rho v)]^{\frac{1}{p}+1}} dv \\ &= 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{1} \frac{H(\rho)-H(\rho v)}{[F(\rho)-F(\rho v)]^{\frac{1}{p}+1}} dv \end{aligned}$$

*où* $H(s) = F(s) - \frac{s}{p}\,f\;(s)$.

*On a*

$$\begin{aligned} H'(s) &= f(s) - \frac{f(s)}{p} - \frac{s}{p} f'(s) \\ &= \frac{1}{p}[(p-1)f(s) - sf'(s)] \end{aligned}$$

*et* $H''(s) = \frac{1}{p}[(p-2)\ f\ '(s) - s\ f''(s)\ ]$.

*Si* $(p-1)\ f\ '(s) > s\ f''(s)$, *alors* $H''(s) > 0$ *pour* $s > 0$.*Donc* $H'$ *est croissante et* $H'(0) = \frac{p-1}{p} f(0) > 0$. *D'où* $H'(s) > 0$ *pour* $s > 0$, *ce qui implique que* $G'(\rho) > 0$.

*Si* $(p-2)\ f(s) > s\ f'(s)$ *pour* $s > 0$, *nous avons* $H'(s) > 0$ *pour* $s > 0$, *par suite* $G'(\rho) > 0$. *Dans les deux cas on a* $G$ *zst strictement croissante. De plus*

$$\lim_{\rho \to 0^+} G(\rho) = 0 \ \textit{et} \ \lim_{\rho \to +\infty} G(\rho) = +\infty.$$

*Donc* $P_2$ *à bien une solution positive unique pour tout* $\lambda > 0$.

# Bibliographie


[1] A. Castro et R. Shivaji, Non-negative solutions for a class of non-positone problems, Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, 108A (1988), 291-302.

[2] A. Lakmeche et A. Oumansour Multiple solutions of P-Laplacian, instituto superior téchnico portugal. (2003)

[3] C.A Stuart, the number of solutions of boundary value problem with discontinuous nonlinearities, Arch. Rat. Mech. Anal, 66 (1997) 3, 225-235

[4] C. Maya & R. Shivaji, "Positive Solutions multiples pour une classe de Elliptic Boundary

[5] S.M. Bouguima et A. Lakmeche, Multiple solutions of nonlinear P_Laplacian boundary value problem, 7 (2000) 3, 83-96.

[6] T. Laetsch, The number of solutions of a nonlinear two point boundary value problem, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970) 1-13

[7] V. Janfalk, Oncertain problem concerning the P-Lalace operator, Likoping Studies in sciences and Technology, Dissertations 326, 1993.

# Annexe

## 3.3 Théorème des accroissements finis :

Soit f une application continue des [a ; b] dans dérivable sur ]a ; b[. Alors il existe au moins un réel c appartenant à ]a ; b[ tel que :
f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)

## 3.4 Théorème de Picard :

Soit $(X, d)$ un espacen métrique complet et $T : X \to X$ une application contractante.
$\exists K \in [0, 1)$, $\forall x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y)$$

Alors $\exists! x \in X$ tel que $Tx = x$.

## 3.5 Théorème de la valeur moyenne :

Si $f$ est continue sur $[a, b]$ $(b \succ a)$ alors il existe $c$ comprie entre $a$ et $b$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

Autrement dit : Si une fonction est continue sur un intervalle, sa valeur moyenne est atteinte !