

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



N^o Attribué par la bibliothèque



Année: 2015



Equations différentielles stochastiques à plusieurs échelles du temps

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Probabilités et Applications

par

Hennoune Halima¹

Sous la direction de

Encadreur : Dr T. Guendouzi

Soutenu le 14 Juin 2015 devant le jury composé de

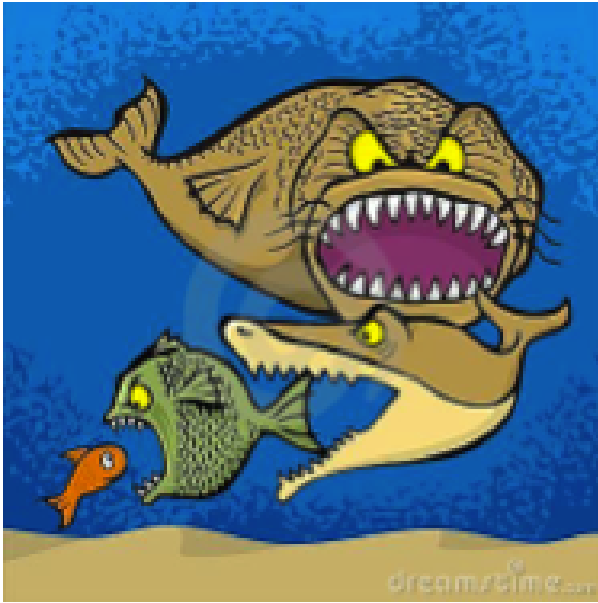
| | | |
|----------------------|------------------------------------|--------------|
| Dr Kadi | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Président |
| Mme Mokhtari | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinatrice |
| Mme Ait ouali | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinatrice |

1. e-mail : hennoune_halima@yahoo.fr

Table des matières

| | |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction | 5 |
| 1 Introduction aux systèmes lents-rapides | 9 |
| 1.1 Variétés lentes | 10 |
| 1.2 Bifurcations dynamiques | 12 |
| 1.2.1 Bifurcation de selle-noeud | 13 |
| 1.2.2 Bifurcation de Hopf | 15 |
| 1.3 Les orbites périodiques | 17 |
| 1.3.1 La convergence vers une orbite périodique stable | 17 |
| 1.3.2 Variétés invariantes | 20 |
| 2 Exemple | 23 |
| 2.1 Cas déterministe | 23 |
| 2.2 Cas stochastique | 29 |
| 3 Effet du bruit sur les systèmes lents-rapides | 33 |
| 3.1 Effet du bruit au voisinage de variété lente | 33 |
| 3.1.1 Concentration des trajectoires | 34 |
| 3.1.2 Réduction de la dynamique | 37 |
| 3.2 Effet du bruit sur les bifurcations dynamiques | 38 |
| 3.2.1 Réduction de la dynamique | 39 |
| 3.2.2 Bifurcation selle-noeud | 40 |
| 3.2.3 Bifurcation Hopf | 43 |
| 3.3 Résonance stochastique | 45 |
| 3.3.1 Quelques résultats antérieurs | 46 |

| | | |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.2 | Description des trajectoires | 48 |
| 3.4 | Effet du bruit au voisinage d'une orbite périodique | 51 |
| 3.4.1 | Dynamique près une orbite périodique fixe | 51 |
| 3.4.2 | Dynamique près d'une orbite périodique variant lentement | 54 |
| 4 | Annexe | 59 |
| 4.1 | Matrice fondamentale | 59 |
| 4.2 | Théorie de Floquet | 60 |
| 4.3 | Application de poincaré | 61 |
| 4.4 | Simulation | 62 |



Introduction

Cette étude s'inscrit dans le cadre de la description théorique de la dynamique d'un système physique donné (mécanique, électronique, biologique, économique, . . .) sous l'angle d'un modèle mathématique qui s'exprime en termes de variables d'état, permettant de définir l'état instantané du système, et d'équations d'évolution faisant passer ces variables d'un instant initial à un instant final. Suivant que ces instants sont séparés par une durée finie, ou au contraire, infinitésimale, les équations d'évolution sont des itérations d'applications (Collet et al. [1980]) ou des équations différentielles (Hirsch et al. [1974h]). Dans le premier cas, la terminologie consacrée est un système dynamique à temps discret, dans le second, à temps continu. Ce mémoire concerne plus particulièrement les systèmes dynamiques à temps continu, i.e., les systèmes d'équations différentielles dans lesquelles le temps n'apparaît pas explicitement, lorsque de tels systèmes font intervenir plusieurs échelles de temps caractéristiques, ce qui se traduit par la présence d'un ou plusieurs petits paramètres ε , ξ , . . . en facteur dans l'une ou plusieurs des composantes de leur champ de

vecteurs vitesse, ils sont qualifiés de lents-rapides. Les systèmes dynamiques lents-rapides ont, dans un premier temps, été étudiés à l'aide de la théorie des perturbations singulières (Andronov et al. [1966]) qui a permis de mettre en évidence une dichotomie du mouvement en trajectoires lentes et rapides. Le qualificatif "singulier" fait référence au fait que lorsque l'on fait tendre ε vers zéro, le nombre de degrés de liberté du système change. Ses solutions convergent alors de façon exponentiellement rapide (Tihonov [1952]) vers le ε -voisinage de variétés lentes, i.e., de variétés sur lesquelles les composantes du champ de vecteurs vitesse sont des polynômes de degré zéro en ε . Le mouvement rapide détermine l'attractivité (resp. la répulsivité) de ces variétés lentes, qui, dans le cas où ε multiplie une seule composante de la vitesse, sont des courbes en dimension deux, de surfaces en dimension trois.

Dans ce mémoire, on étudie le modèle proie-prédateur de Holling-Tanner. C'est un système dynamique du plan dépendant de six paramètres et défini par deux équations différentielles. L'une d'elle mesure la variation de la densité des proies et l'autre celle de la densité des prédateurs présents, au cours du temps. Ce système dynamique a été proposé par Tanner en 1975. Notre principal but dans cette étude est le suivant : chercher les points d'équilibre et les comportements périodiques qui peuvent apparaître, en fonction des paramètres dont dépend le système. En effet, dans le cas des régimes périodiques, des conclusions intéressantes apparaissent d'un point de vue biologique.

Avant de commencer l'étude de ce modèle, on rappelle les définitions et les résultats dont nous aurons besoin pour la mener, c'est le but du chapitre 1. Dans ce chapitre, on donne les définitions de base : variété lente, bifurcations dynamiques, les orbites périodiques... Afin de pouvoir étudier les singularités non hyperboliques qui peuvent exister, on étudie la notion de coefficients de Lyapunov. De plus, on donne la définition d'un cycle limite (une orbite périodique isolée) ainsi que les résultats importants dont nous aurons besoin pour prouver l'existence ou la non existence de telles orbites périodiques. Enfin, on donne une idée de la définition de deux types de bifurcations, la bifurcation selle-noeud et la bifurcation de Hopf, pour être capable de repérer si l'une ou l'autre se produit pour le modèle de Holling-Tanner par variation des paramètres.

En passant au chapitre 2, on quitte le cas général des systèmes dynamiques du plan

pour s'intéresser aux modèles proie-prédateur uniquement. Ce chapitre est divisé en deux parties. Premièrement, le cas déterministe. Deuxièmement, le cas stochastique

Dés qu'on possède tous les outils nécessaires et qu'on sait d'où il provient, on peut passer à l'étude du système lent-rapide avec l'effet du bruit, c'est le contenu du chapitre 3.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes lents-rapides

Un système lent-rapide implique deux types de variables dynamiques, évoluant sur des échelles de temps très différents. Le rapport entre l'échelle de temps rapide et celle de temps lent est mesuré par un petit paramètre ε .

Une équation différentielle ordinaire lente-rapide est écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

où les composantes de $x \in \mathbb{R}^n$ sont appelées variables rapides, les composantes de $y \in \mathbb{R}^m$ sont appelées variables lentes et ε est un petit paramètre (les membres de droite peuvent éventuellement dépendre de ε).

Le qualificatif "singulier" se réfère au fait que lorsque ε tend vers 0, le système (1.1) se réduit au système algébrique-différentiel

$$\begin{cases} 0 = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.2)$$

Les solutions de ce système sont concentrées sur les variétés lentes $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$, mais il n'est pas immédiatement clair s'il existe un lien entre ces solutions et celles de (1.1) pour ε petit mais positif. Une autre manière de considérer le système lent-rapide

avec t est le temps dans (1.1) pour obtenir

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = \varepsilon g(x, y). \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce système peut être interprété comme une perturbation du système associé $x' = f(x, \lambda)$, dans laquelle le paramètre λ serait lentement variable. Les variétés lentes correspondent à des points d'équilibre du système associé.

1.1 Variétés lentes

Nous considérons l'équation (1.1) pour des fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k , $k \geq 2$, dans un ouvert D de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Définition 1.1.1 Supposons qu'il existe un domaine $D_0 \subset \mathbb{R}^m$ et une fonction continue $x^* : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $(x^*(y), y) \in D$ et

$$f(x^*(y), y) = 0 \quad (1.4)$$

pour tout $y \in D_0$. Alors l'ensemble $M = \{(x, y) \in D : x = x^*(y)\}$ est une *variété lente* du système. Soit $A^*(y) = \partial_x f(x^*, y)$ la matrice jacobienne de $x \rightarrow f(x, y)$ et $a_i(y)$, $i = 1, \dots, n$, ses valeurs propres. La variété lente M est appelée :

- (i) *hyperbolique* si $\operatorname{Re}\{a_i(y)\} \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) pour tout $y \in D_0$;
- (ii) *uniformément hyperbolique* s'il existe $a_0 > 0$ t.q. $|\operatorname{Re}\{a_i(y)\}| \geq a_0 > 0$ uniformément en y ;
- (iii) *asymptotiquement stable* si $\operatorname{Re}\{a_i(y)\} < 0$ pour tout $y \in D_0$;
- (iv) *uniformément asymptotiquement stable* si $\operatorname{Re}\{a_i(y)\} \leq -a_0 < 0$ uniformément en y .

On remarquera que l'hyperbolicité implique, via le théorème des fonctions implicites, que $x^*(y)$ est de classe C^2 .

Exemples 1.1.1 (Mouvement suramorti dans un potentiel). Le mouvement d'une particule dans un potentiel $U(q)$ soumise à un frottement visqueux est décrit par l'équation

$$q'' + \gamma q' + \nabla U(q) = 0 \quad (1.5)$$

qui devient, avec $y = q$, $x = q'$ et en frottement fort $\gamma = 1/\varepsilon$,

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -x - \varepsilon \nabla U(y) \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad (1.6)$$

La variété lente est donnée par $x = -\varepsilon \nabla U(y)$, et la dynamique sur cette variété est gouvernée par l'équation $\dot{y} = -\varepsilon \nabla U(y)$ (appelée loi d'Aristote).

Exemples 1.1.2 (Oscillateur de van der Pol). L'équation de l'oscillateur de van der Pol

$$x'' + \gamma(x^2 - 1)x' + x = 0 \quad (1.7)$$

est équivalente, pour $\gamma = 1/\varepsilon$, à

$$\begin{cases} \varepsilon x' = y + x - \frac{x^3}{3} \\ y' = -x. \end{cases} \quad (1.8)$$

La variété lente est la courbe d'équation $y = -x + x^3/3$, sur laquelle la dynamique peut être décrite par l'équation réduite $x' = -x/(x^2 - 1)$ (qui devient singulière en $x = \pm 1$).

Dans l'exemple (1.1.1), $A(y) = -1$, et la variété lente est uniformément asymptotiquement stable. Par contre, dans l'exemple (1.1.2), $A(y) = 1 - x^*(y)^2$ et la variété lente se décompose en trois parties, dont deux stables (pour $x > 1$ et $x < -1$).

Nous mentionnerons deux résultats décrivant la dynamique au voisinage d'une variété lente. Le premier, plus ancien, décrit la convergence exponentiellement rapide de solutions vers un ε -voisinage d'une variété lente uniformément asymptotiquement stable.

Théorème 1.1.1 (*Théorème de Tikhonov [34]*). Si M est une variété lente uniformément asymptotiquement stable de (1.1), et si $\partial_{xx}f$ est uniformément bornée dans un voisinage de M , alors il existe des constantes $c_0, c_1, K > 0$ telles que pour ε suffisamment petit et toute condition initiale x_0, y_0 satisfaisant $\|x_0 - x^*(y_0)\| \leq c_0$, on ait

$$\|x_t - x^*(y_t)\| \leq \|x_0 - x^*(y_0)\| \exp^{-kt/\varepsilon} + c_1\varepsilon \quad (1.9)$$

Le second résultat (que nous n'énonçons que dans sa version la plus simple), montre que certaines solutions vivent en fait sur une variété invariante, proche de la variété lente.

Théorème 1.1.2 (*Théorème de Fenichel [12]*). Si M est une variété lente uniformément hyperbolique et ε suffisamment petit, il existe une variété localement invariante $M_\varepsilon = (x, y) : x = \bar{x}(y, \varepsilon)$ telle que $\bar{x}(y, \varepsilon) = x^*(y) + O(\varepsilon)$ (localement invariant signifie que si $x_0 = \bar{x}(y_0, \varepsilon)$, alors $x_t = \bar{x}(y_t, \varepsilon)$ tant que $y_t \in D_0$).

La dynamique sur la variété invariante, que nous appellerons également *variété adiabatique*, est décrite par l'équation réduite

$$\dot{y} = g(\bar{x}(y, \varepsilon), y) \quad (1.10)$$

qui peut être traitée par des méthodes de théorie des perturbations régulières.

1.2 Bifurcations dynamiques

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite. . .) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une *bifurcation* et la valeur du paramètre associée est appelée *valeur de bifurcation*. Sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation, un système est donc structurellement instable. L'analyse de bifurcations a pour objectif de localiser ces éventuelles valeurs particulières des paramètres.

Définition 1.2.1 L'hyperbolicité d'une variété lente est violée là où elle approche un point de bifurcation, c'est-à-dire un point (\hat{x}, \hat{y}) tel que $f(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ et $\partial_x f(\hat{x}, \hat{y})$ admette $q \geq 1$ valeurs propres sur l'axe imaginaire. Supposons que $(0, 0)$ soit un point de bifurcation, avec $1 < q < n$, les $n - q$ autres valeurs propres ayant une partie réelle négative. On peut alors trouver des coordonnées $(x_-, x_0, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^m$ dans lesquelles le système s'écrit, sur ε , comme

$$\begin{aligned} x'_- &= f_-(x_-, x_0, y) \\ x'_0 &= f_0(x_-, x_0, y) \\ y' &= \varepsilon g(x_-, x_0, y) \\ \varepsilon' &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec une linéarisation autour de 0 diagonale par blocs. En d'autres termes, les valeurs propres de la matrice $\partial_{x_-} f_-(0, 0, 0)$ ont leur partie réelle négative, celles de $\partial_{x_0} f_0(0, 0, 0)$ ont leur partie réelle nulle, alors que $\partial_{x_0} f_-(0, 0, 0) = 0$ et $\partial_{x_-} f_0(0, 0, 0) = 0$.

L'origine est donc un point d'équilibre de (1.11), dont la linéarisation admet $q + m + 1$ valeurs propres sur l'axe imaginaire. Le théorème de la variété centrale (voir par exemple [6]) montre alors l'existence, au voisinage du point de bifurcation, d'une variété invariante localement attractive d'équation $x_- = \bar{x}_-(x_0, y, \varepsilon)$. La dynamique sur cette variété est décrite par l'équation réduite

$$\varepsilon \dot{x}_0 = f_0(\bar{x}_-(x_0, y, \varepsilon), x_0, y) =: F(x_0, y, \varepsilon) \dot{y} = g(\bar{x}_-(x_0, y, \varepsilon), x_0, y) =: G(x_0, y, \varepsilon) \tag{1.12}$$

Dans la suite, nous laisserons tomber l'indice de x_0 et la dépendance de F et G en ε . Le comportement des orbites près du point de bifurcation dépend du type de bifurcation. Nous discutons ici deux cas apparaissant lorsque $q = 1$, et sur lesquels nous reviendrons en détail dans le cas stochastique.

1.2.1 Bifurcation de selle-noeud

Cette bifurcation correspond à un pli dans la variété lente. Considérons pour simplifier le cas $m = 1$. Outre les conditions de bifurcation $F(0, 0) = \partial_x F(0, 0) = 0$, nous supposons

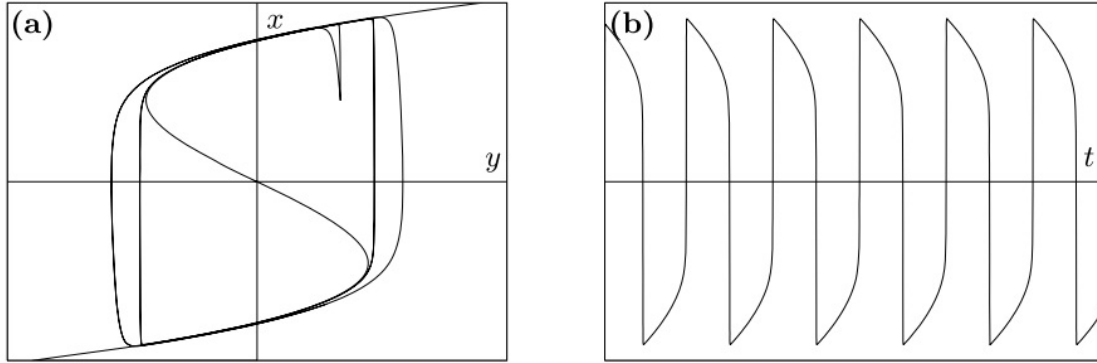


FIGURE 1.1 – [16] (a) Deux solutions des équations de Van der Pol (1.5) (courbes fines) pour la même condition initiale $(1; 1/2)$, pour $\gamma = 5$ et $\gamma = 20$. La courbe en gras est la variété lente $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. (b) Le graphe de $x(t)$ ($\gamma = 20$) montre des oscillations de relaxation, c'est-à-dire une alternance de phases rapides et lentes.

que

$$\partial_{xx}F(0, 0) < 0, \partial_y F(0, 0) < 0, G(0, 0) > 0 \quad (1.13)$$

C'est le cas, à un renversement des axes près, aux points $\pm(1, -2/3)$ dans l'exemple 2.1.2. La situation est alors qualitativement la même que pour le système

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -y - x^2 \\ \dot{y} = 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

De fait, pour $y < 0$, il existe une variété lente stable d'équation $x = x^*(y)$, se comportant comme $|y|^{1/2}$ lorsque $y \rightarrow 0^-$, et une variété lente instable, se comportant comme $-|y|^{1/2}$ lorsque $y \rightarrow 0^-$. Les trajectoires partant près de la branche stable pour $y < 0$ sont attirées par un ε -voisinage de celle-ci, mais lorsque y s'approche de 0, l'attraction est de plus en plus faible, alors que $\partial_y x^*(y)$ diverge. Lorsque y devient positif, plus rien n'empêche les trajectoires de s'échapper du voisinage de l'origine dans la direction des x négatifs, ce qui arrive après un léger retard.

Ce phénomène de saut peut conduire, comme dans le cas de l'oscillateur de Van der Pol, à des oscillations de relaxation (voir [24] et [27], ainsi que [11]). La dépendance en ε des solutions a été examinée en particulier dans [22] et [21].

Nous résumons les propriétés essentielles de la manière suivante.

Notation

Nous indiquons par $x(t, \varepsilon) \asymp y(t, \varepsilon)$ l'existence de deux constantes positives c_+, c_- , indépendantes de t et ε , telles que $c_-y(t, \varepsilon) < x(t, \varepsilon) < c_+y(t, \varepsilon)$ pour ε suffisamment petit et t dans un intervalle donné par le contexte.

Proposition 1.2.1 *Il existe des constantes $L, c_1, c_2 > 0$, telles que toute solution de condition initiale (x_0, y_0) avec $y_0 \asymp -1$ et $x_0 - x^*(y_0) \asymp \varepsilon$ satisfasse, dans un voisinage N de $(0, 0)$,*

$$\begin{aligned} x_t - x^*(y_t) &\asymp \frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \leq -\varepsilon^{2/3} \\ x_t &\asymp \varepsilon^{1/3} && \text{pour } -\varepsilon^{2/3} \leq y_t \leq c_1\varepsilon^{2/3} \\ x_t &\leq -L && \text{pour } y_t > c_2\varepsilon^{2/3} \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.2.2 Bifurcation de Hopf

La théorie des bifurcations (statiques) s'intéresse à des familles de systèmes différentiels :

$$\dot{x} = f(x, \lambda), x \in \mathbb{R}^n \quad (1.16)$$

où λ est un paramètre réel. On dit que les deux systèmes définis par $f(x, \lambda_1)$ et $f(x, \lambda_2)$ sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme de \mathbb{R}^n (une application inversible et continue) qui envoie les trajectoires de l'un sur l'autre. Deux systèmes équivalents sont "qualitativement" semblables : par exemple toute trajectoire périodique de l'un aura son correspondant dans l'autre, à un équilibre stable correspondra un équilibre stable etc...Par exemple la famille de systèmes linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = \lambda y - x. \end{cases} \quad (1.17)$$

présente, pour $\lambda < 0$, un équilibre stable, pour $\lambda = 0$, une famille de cercles concentriques enfin, pour $\lambda > 0$, un équilibre instable. Dans cet exemple les systèmes correspondant aux valeurs négatives de λ sont équivalents entre eux, les systèmes correspondant aux valeurs positives de λ sont aussi équivalents entre eux mais les systèmes qui correspondent à une

valeur négative et une valeur positive ne sont pas équivalents : On dit que $\lambda = 0$ est une *valeur de bifurcation*. Dans cet exemple le paramètre λ est très exactement la partie réelle des deux valeurs propres imaginaires de la matrice définissant le système. La partie réelle de la valeur propre passant de négatif à positif, le système passe de stable à instable. C'est cette situation qui est reprise dans un cadre plus général (et non linéaire) dans ce qu'on appelle *le théorème de bifurcation de Hopf* (mais à qui on peut associer les noms plus anciens de Poincaré, Anosof). Commençons par étudier en détail le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \lambda y - x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (1.18)$$

dont on vérifie immédiatement qu'en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{\rho} = \rho(\lambda - \rho^2) \end{cases} \quad (1.19)$$

il devient :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \dot{\rho} = \rho(\lambda - \rho^2) \end{cases} \quad (1.20)$$

Ce dernier système de deux équations couplées est absolument trivial à analyser. La première équation dit que les solutions du système original tournent dans le sens direct à vitesse constante. La seconde équation dit :

- Pour λ négatif l'origine est l'unique équilibre exponentiellement stable du système , la partie linéaire a des parties réelles de valeur propre strictement négatives.
- Pour $\lambda = 0$ l'origine est stable mais pas exponentiellement stable , la partie linéaire a des parties réelles de valeurs propres nulles.
- Pour $\lambda > 0$ les solutions $\rho(t)$ convergent vers $\sqrt{\lambda}$ ce qui veut dire que les solutions du système originel convergent vers un cycle limite qui est le cercle de rayon $\sqrt{\lambda}$.

Il se trouve que cet exemple est représentatif d'une situation très générale décrite par le théorème de bifurcation de Hopf.

Théorème 1.2.1 *On considère le système (1.16), on suppose qu'il existe pour chaque valeur de λ un équilibre $\phi(\lambda)$; on note Df_λ la matrice jacobienne (partie linéaire) de f en $\phi(\lambda)$ et on suppose que :*

1. *Toutes les valeurs propres de $Df(\lambda)$ ont leurs valeurs propres à parties réelles strictement négatives sauf une paire $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ telle que :*
2. $\beta(0) > 0$
3. $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha(\lambda) < 0; \lambda = 0 \Rightarrow \alpha(\lambda) = 0; \lambda > 0 \Rightarrow \alpha(\lambda) > 0$
4. $\alpha'(0) > 0$
5. *Pour $\lambda = 0$ l'équilibre est stable (mais pas exponentiellement stable).*

Alors pour $\lambda > 0$ suffisamment petit le système (2.16) possède un cycle limite stable dont la taille dépend continuellement de λ et est de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$.

1.3 Les orbites périodiques

1.3.1 La convergence vers une orbite périodique stable

Supposons que le système associé :

$$\frac{dx}{ds} \equiv x' = f(x, y_0), \quad (1.21)$$

a pour chaque valeur fixe de y_0 dans l'ensemble ouvert D_0 , une solution périodique $\gamma^*(s, y_0)$, avec la période $T(y_0)$. Supposons de plus que cette orbite est *asymptotiquement stable*. Rappelons que la stabilité d'une orbite périodique est liée au système linéaire

$$\xi' = \partial_x f(\gamma^*(s, y_0), y_0)\xi. \quad (1.22)$$

Soit $U(s, s_0)$ la solution principale de ce système, c'est-à-dire, telle que $\xi_s = U(s, s_0)\xi_{s_0}$. Les valeurs propres de la matrice de monodromie $U(T(y_0), 0)$ sont appelées *multiplieurs*

caractéristiques, et leurs logarithmes sont appelés *exposants caractéristiques* ou *exposants de Lyapunov*. Un des multiplicateurs est égal à 1, et le vecteur propre correspondant est le vecteur tangent de l'orbite à $s = 0$ [17]. Nous exigerons que les $n - 1$ autres multiplicateurs caractéristiques ont un module strictement inférieur à l'unité, ce qui implique la stabilité asymptotique de l'orbite.

Nous supposons de plus que $\gamma^*(s, y_0)$ est continue par rapport aux deux variables (à noter que l'origine du temps peut être choisie arbitrairement sur l'orbite), et qu'il existe des constantes positives T_1, T_2 telles que $T_1 \leq T_y \leq T_2$ uniformément pour $y \in D_0$.

Nous passons maintenant au système complet lent-rapide

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.23)$$

Il semble naturel que ce système devrait admettre des solutions (x_t, y_t) pour laquelle x_t est proche de la fonction rapidement oscillante $\gamma^*(t/\varepsilon, y_t)$. La dynamique de y_t sera alors régie par une équation de la forme

$$\dot{y}_t \simeq g(\gamma^*(t/\varepsilon, y_t), y_t), \quad (1.24)$$

qui a un terme rapidement oscillant. La philosophie générale de moyennisation est de considérer le système moyenné

$$\dot{\bar{y}} = \bar{g}(\bar{y}) := \frac{1}{T(\bar{y})} \int_0^{T(\bar{y})} g(\gamma^*(s, \bar{y}), \bar{y}) ds. \quad (1.25)$$

Remarque, en notant $\Gamma^*(\theta, y) = \gamma^*(T(y)\theta, y)$ on peut réécrire le champ de vecteur lent comme

$$\bar{g}(\bar{y}) = \int_0^1 g(\Gamma^*(\theta, \bar{y}), \bar{y}) d\theta. \quad (1.26)$$

Nous supposons que la solution \bar{y}_t de (2.25) avec la condition initiale $\bar{y}_0 = y_0$ reste dans D_0 pour $0 \leq t \leq t_1$. Sous ces hypothèses, Pontriaguine et Rodygin ont prouvé le résultat suivant [24].

Théorème 1.3.1 [15][théorème 2.3]. Soit x_0 suffisamment proche de $\Gamma^*(\theta_0, y_0)$ pour un certain θ_0 . Alors il existe une fonction Θ_t , satisfaisant la relation

$$\varepsilon \dot{\Theta}_t = \frac{1}{T(\bar{y}_t)} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (1.27)$$

tels que les estimations

$$\begin{cases} x_t = \Gamma^*(\Theta_t, \bar{y}_t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ y_t = \bar{y}_t + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} \quad (1.28)$$

réalise pour $\mathcal{O}(\varepsilon | \log \varepsilon |) \leq t \leq t_1$. Les termes d'erreur $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans (2.27) et (2.28) sont uniformes en t sur cet intervalle de temps.

Nous allons esquisser la preuve dans le cas d'une variable rapide bidimensionnelle $x \in \mathbb{R}^2$. Soit $n(\theta, y)$ un vecteur unitaire normal à $\Gamma^*(\theta, y)$ et périodique. Dans un voisinage de l'orbite périodique, la dynamique peut être décrite par des coordonnées (θ, r) tels que

$$x = \Gamma^*(\theta, y) + rn(\theta, y). \quad (1.29)$$

D'une part, nous avons

$$\varepsilon \dot{x} = f(\Gamma^*(\theta, y), y) + A(\theta, y)n(\theta, y)r + \mathcal{O}(r^2), \quad (1.30)$$

où $A(\theta, y) = \partial_x f(\Gamma^*(\theta, y), y)$. D'autre part, nous pouvons exprimer $\varepsilon \dot{x}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et \dot{r} en différentiant (2.29) et à l'aide de l'équation de \dot{y} .

La projection sur $n(\theta, y)$ et sur le vecteur unitaire tangent à l'orbite donne un système de la forme suivante, équivalent à (1.23) :

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\theta} &= \frac{1}{T(y)} + b_\theta(\theta, r, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{r} &= f_r(\theta, r, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= g(\Gamma(\theta, y) + rn(\theta, y), y). \end{aligned} \quad (1.31)$$

les fonctions b_θ et f_r peuvent être calculées explicitement en termes de A, Γ^*, n , et leurs dérivées, par rapport à y . Elles s'annulent pour $r = \varepsilon = 0$, et en particulier la linéarisation $\partial_r f_r(\theta, 0, y, 0)$ ne dépend que de $A(\theta, y)$. Dans un voisinage de $r = 0$, θ est positif et on peut considérer les équations

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= T(y) \frac{f_r(\theta, r, y, \varepsilon)}{1 + T(y)b_\theta(\theta, r, y, \varepsilon)}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= \varepsilon T(y) \frac{g(\Gamma(\theta, y) + rn(\theta, y), y)}{1 + T(y)b_\theta(\theta, r, y, \varepsilon)},\end{aligned}\tag{1.32}$$

au lieu de (1.31). La moyenne de la droite sur θ donne un système de la forme

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{r}}{d\theta} &= T(\bar{y})[\bar{a}(\bar{y})\bar{r} + \mathcal{O}(\varepsilon)], \\ \frac{d\bar{y}}{d\theta} &= \varepsilon[\bar{g}(\bar{y}) + \mathcal{O}(\bar{r}) + \mathcal{O}(\varepsilon)],\end{aligned}\tag{1.33}$$

où $\bar{a}(\bar{y}) < 0$. (En fait, $\bar{a}(y)$ est l'exposant de Lyapunov de l'orbite périodique $\gamma^*(., y)$). C'est encore un système lent-rapide, dans lequel θ joue le rôle de temps rapide. Il résulte donc du théorème de Tikhonov que \bar{r} s'approche d'une variété lente $\bar{r}^*(y) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. pour un tel \bar{r} , nous sommes dans une situation dans laquelle le théorème de la moyenne standard peut être appliqué pour montrer que $r_t - \bar{r}_t$ et $y_t - \bar{y}_t$ restent au même temps de l'ordre d' ε jusqu'au "temps" θ_t de l'ordre $1/\varepsilon$

1.3.2 Variétés invariantes

Le théorème 1.3.1 est l'équivalent du théorème de Tikhonov pour les variétés lentes. Afin de donner une description plus précise de la dynamique dans un voisinage de la famille de variation lente des orbites périodiques, il est utile d'avoir un analogue du théorème de Fenichel ainsi, sur l'existence d'une variété invariante suivi la famille des orbites périodiques.

Pour construire cette variété invariante, on peut procéder comme suit. Soit Π le "temps" ($\theta = 1$)-le plan de Poincaré associé à l'équation (1.32). Autrement dit, si la trajectoire de condition initiale (r, y) à $\theta = 0$ passe par le point (\hat{r}, \hat{y}) à $\theta = 1$, alors par définition

$(\widehat{r}, \widehat{y}) = \Pi(r, y)$. Si nous ajoutons ε comme une variable fictive, le plan de Poincaré peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\widehat{r} &= R(r, y, \varepsilon), \\ \widehat{y} &= y + \varepsilon Y(r, y, \varepsilon), \\ \widehat{\varepsilon} &= \varepsilon.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Étant donné que pour $\varepsilon = 0$, on retrouve la dynamique du système associé, on a nécessairement $R(0, y, 0) = 0$, et $\partial_r R(0, y, 0)$ a les mêmes valeurs propres que la matrice de monodromie $U(T(y), 0)$ de l'orbite périodique, à l'exception de la valeur propre 1 associée à la variable θ .

Ainsi, chaque point de la forme $(0, y, 0)$ est un point fixe du plan de Poincaré, et la linéarisation de Π autour de chacun de ces points admet comme une valeur propre de multiplicité $m + 1$, tandis que les autres $n - 1$ valeurs propres sont strictement inférieures à 1. Le théorème de la variété centrale donne ainsi l'existence d'une variété invariante de l'équation $r = \varepsilon \bar{r}(y, \varepsilon)$, qui est,

$$\varepsilon \bar{r}\left(y + \varepsilon Y(\bar{r}(y, \varepsilon), y, \varepsilon), \varepsilon\right) = R(\varepsilon \bar{r}(y, \varepsilon), y, \varepsilon).\tag{1.35}$$

Un calcul perturbatif montre que

$$\bar{r}(y, \varepsilon) = [\mathbf{1} - \partial_r R(0, y, 0)]^{-1} \partial_\varepsilon R(0, y, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon)\tag{1.36}$$

Nous pouvons maintenant revenir à l'équation originale (1.32). L'ensemble des images sous le flux de la variété invariante $r = \varepsilon \bar{r}(y, \varepsilon)$ définit un objet invariant en forme de cylindre, dont nous pouvons noter le paramétrage comme $r = \varepsilon \bar{r}(\theta, y, \varepsilon)$. Dans les variables x d'origine, le cylindre est donné par l'équation

$$\bar{\Gamma}(\theta, y, \varepsilon) = \Gamma^*(\theta, y) + \varepsilon \bar{r}(\theta, y, \varepsilon) n(\theta, y).\tag{1.37}$$

La dynamique sur le cylindre invariant est alors régie par les équations réduites

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{\theta} &= \frac{1}{T(y)} + b_\theta(\theta, \varepsilon \bar{r}(\theta, y, \varepsilon), y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= g(\bar{\Gamma}(\theta, y, \varepsilon), y).\end{aligned}\tag{1.38}$$

Notons que le terme $b_\theta(\theta, \varepsilon \bar{r}(\theta, y, \varepsilon), y, \varepsilon)$ est au maximum d'ordre ε , alors que nous récupérons le fait que $\varepsilon \theta$ est ε -proche de $\frac{1}{T(y)}$

Chapitre 2

Exemple

Le modèle que nous considérons est de type proie-prédateur. Les interactions locales sont définies de façon à ce que la population de proie suit une croissance logistique tandis que la réponse fonctionnelle du prédateur à la proie est de la forme Holling type II. Le modèle qui découle de ces interactions locales est le suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x \left[\left(r - \frac{rx}{k} \right) - \frac{b}{c} \frac{y}{a+x} \right] \\ \dot{y} = y \left[\frac{bx}{a+x} - d \right], \end{cases} \quad (2.1)$$

où x et y représentent respectivement la densité de proies et de prédateurs à l'instant t . Le terme r (respect. d) est le taux de croissance de la proie x (respect. du prédateur y), r/k mesure la mortalité due à la compétition entre les individus de l'espece x , b/c (respect. b) est la valeur maximale que le taux de réduction par individu x (respect. y) peut atteindre et a mesure la protection dont la proie x (respect. y) bénéficie grâce à l'environnement.

2.1 Cas déterministe

Pour $\varepsilon=1$

Le modèle a été utilisé dans les applications, et ses propriétés de base sont maintenant bien connues. Gilpin [4] a été le premier à établir, par le biais de la simulation numérique, qu'il peut exister des cycles limites pour des valeurs appropriées des paramètres. Les

auteurs de [32] ont prouvé que l'origine est toujours instable (point de selle), que l'équilibre $(K, 0)$ (ressource à sa capacité de charge et l'absence des consommateurs) est stable si et seulement si

$$\lambda = \frac{ad}{b-d} > K$$

et qu'un équilibre positif

$$\bar{x} = \lambda, \quad \bar{y} = \frac{cr}{b} \left(1 - \frac{\lambda}{K}\right) (a + \lambda)$$

existe pour $\lambda < K$. le résultat est que l'équilibre (\bar{x}, \bar{y}) est stable si

$$\max \left[\frac{K-a}{2}, 0 \right] < \lambda < K$$

et instable si

$$0 < \lambda < \frac{K-a}{2}$$

En conclusion, le système peut comporter uniquement les deux modes de Kolmogorov de comportement : un équilibre globalement stable ou un cycle globalement stable. La valeur critique du paramètre h qui sépare ces deux modes est

$$\lambda^* = \frac{K-a}{2}$$

Notons que cette valeur existe si $K > a$. Pour cette valeur de λ , il y a une bifurcation de Hopf (voir [33] pour plus de détails).

L'analyse est résumée dans la Figure (2.1) (respectivement (2.2)), qui montre les équilibres et les cycles du système (2.1) pour certaine valeur de paramètre λ pour $\lambda < \lambda^*$ (respectivement pour $\lambda = \lambda^* = (k-a)/2$)

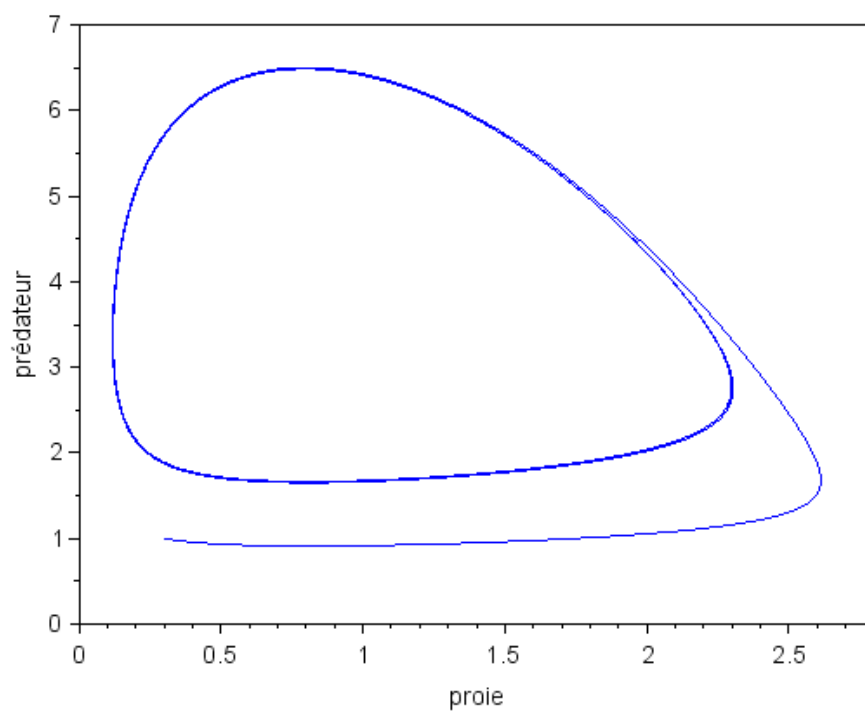


FIGURE 2.1 – Représentation graphique d'un cycle de population d'une proie par rapport à un prédateur construit à partir de l'équation (2.1) et pour $\lambda < \lambda^*$

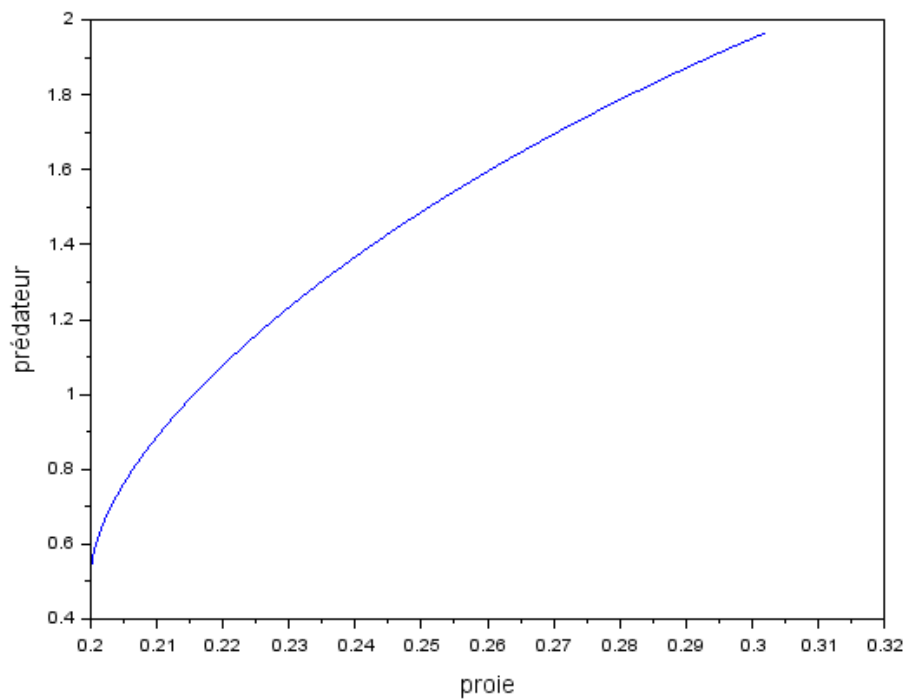


FIGURE 2.2 – Représentation graphique d'un cycle de population d'une proie par rapport à un prédateur construit à partir de l'équation (2.1) et pour $\lambda = \lambda^* = (k - a)/2$

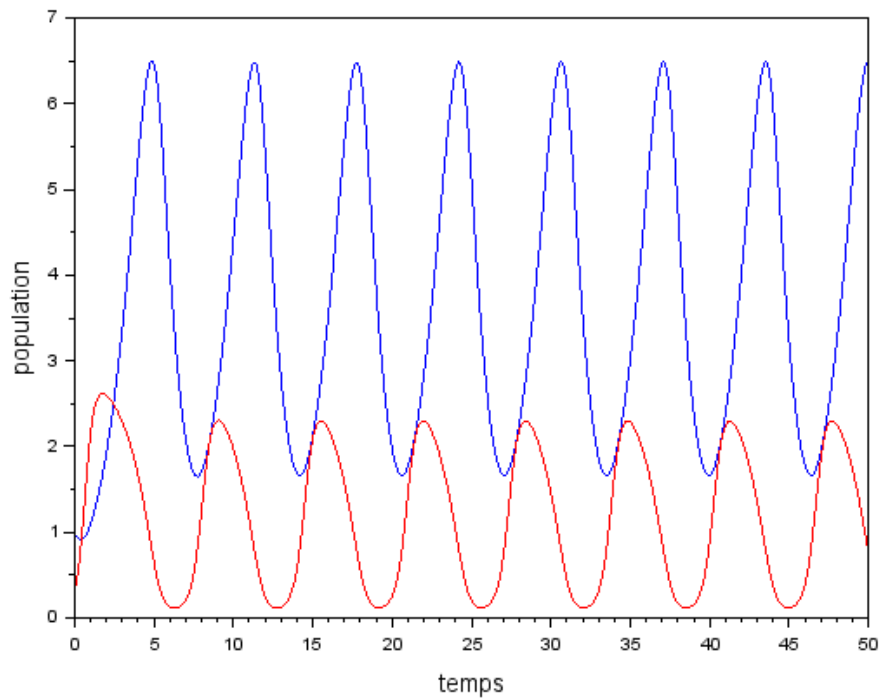


FIGURE 2.3 – Représentation graphique d’un cycle de population d’une proie (la trajectoire bleue) et d’un prédateur (trajectoire rouge) construit à partir de l’équation (2.1)

La figure (2.3) représente la trajectoire d’une proie et d’un prédateur en fonction du temps

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, la variété lente M est égale à $f(x, y)$ (figure (2.4))

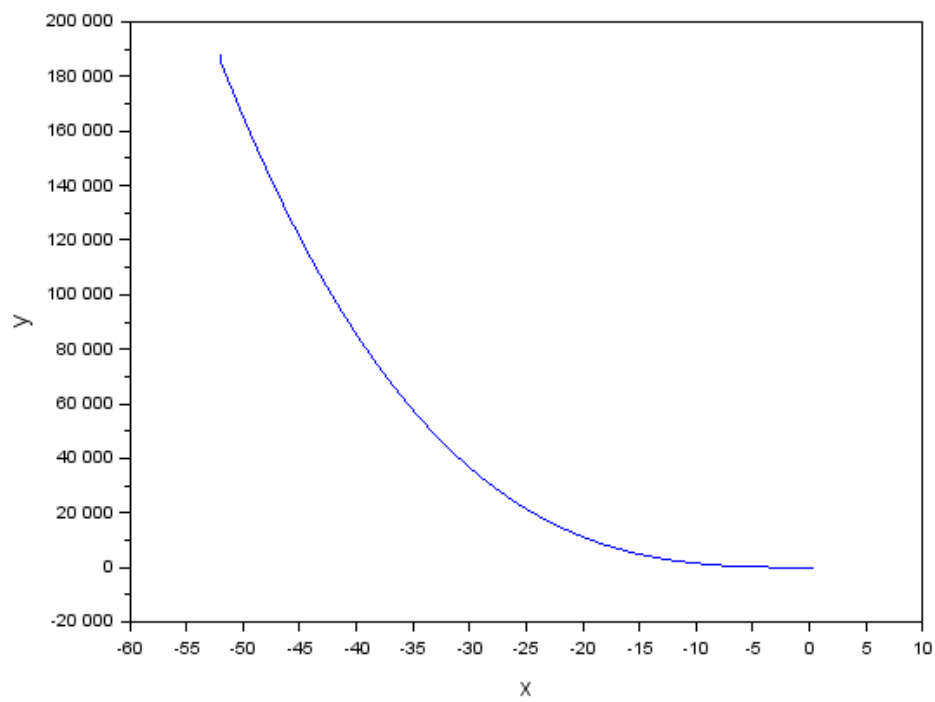


FIGURE 2.4 – Représentation graphique d'une variété lente

2.2 Cas stochastique

Maintenant on va étudier l'effet du bruit sur un système proie-prédateur (2.1) qui s'écrit sous cette forme

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x \left[\left(r - \frac{rx}{k} \right) - \frac{b}{c} \frac{y}{a+x} \right] dt + \sigma dW_1 \\ \dot{y} = y \left[\frac{bx}{a+x} - d \right] dt + \sigma dW_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

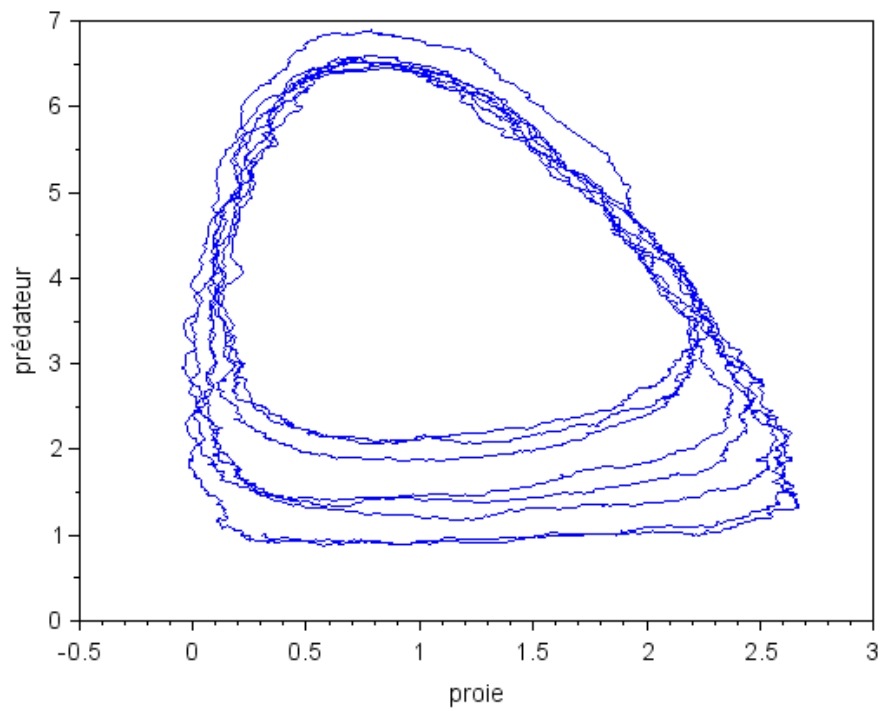


FIGURE 2.5 – Représentation graphique de l'effet du bruit sur un système proie prédateur

La figure (2.4) représente l'effet du bruit sur un système proie-prédateur en fonction du temps

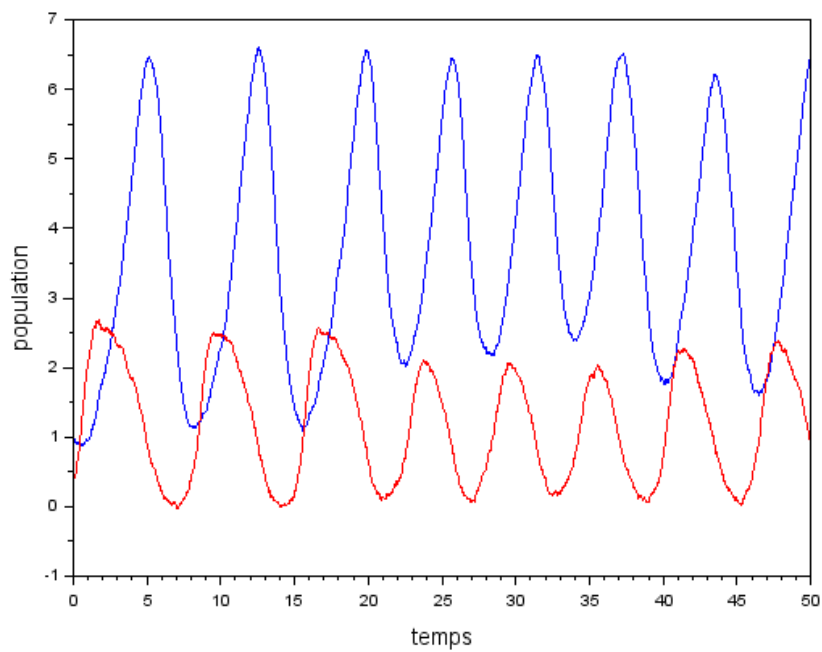


FIGURE 2.6 – Représentation graphique de l'effet du bruit sur une proie (trajectoire bleue) et un prédateur (trajectoire rouge) en fonction du temps

Chapitre 3

Effet du bruit sur les systèmes lents-rapides

3.1 Effet du bruit au voisinage de variété lente

Nous considérons, dans ce chapitre, des perturbations stochastiques de l'EDO lente-rapide (1.1), de la forme

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F(x_t, y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t, y_t) dW_t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

De cette façon, σ^2 et $(\sigma')^2$ mesurent le rapport entre taux de diffusion et de dérive, respectivement, pour la variable rapide x et lente y . Nous pouvons envisager, $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ et $\sigma' = \sigma'(\varepsilon)$ comme étant des fonctions de ε , pourvu que le rapport $\rho(\varepsilon) = \sigma'(\varepsilon)/\sigma(\varepsilon)$ soit borné supérieurement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

En outre, nous supposons dans toute la suite que :

1. Les coefficients de dérive $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$ et $g \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$, et les coefficients de diffusion $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n \times k})$ et $G \in C^1(D, \mathbb{R}^{m \times k})$ seront uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$;
2. $\{W_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener k -dimensionnel standard dans $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, et les intégrales stochastiques sont définies dans le sens d'Itô;

3. les coefficients de dérive et de diffusion satisfont les conditions usuelles de croissance et de Lipschitz garantissant l'existence d'une unique solution forte $(x_t, y_t)_{t \geq t_0}$ de (3.1), admettant une version continue.

Pour $(x_0, y_0) \in D$, nous dénotons par $\mathbb{P}^{t_0, (x_0, y_0)}$ la loi du processus de Markov homogène $(x_t, y_t)_{t \geq t_0}$, de condition initiale $(x_{t_0}, y_{t_0}) = (x_0, y_0)$, et par $\mathbb{E}^{t_0, (x_0, y_0)}$ les espérances relativement à $\mathbb{P}^{t_0, (x_0, y_0)}$. Dans ce chapitre, nous supposons de plus que

Hypothèse 1

Pour $\sigma = \sigma' = 0$, le système (3.1) admet une variété lente uniformément asymptotiquement stable $M = \{(x, y) \in D : x = x^*(y), y \in D_0\}$.

3.1.1 Concentration des trajectoires

Soit $M_\varepsilon = \{(x, y) \in D : x = \bar{x}(y, \varepsilon), y \in D_0\}$ la variété invariante dont l'existence est assurée par le théorème de Fenichel. Notre but est de montrer que les trajectoires partant près de M_ε restent concentrées dans son voisinage sur des échelles de temps exponentiellement longues (pour autant que la dynamique de y le permette).

L'idée de départ est de montrer que la déviation $\xi_t = x_t - \bar{x}(y_t, \varepsilon)$ est bien approximée par le processus ξ_t^0 , solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} d\xi_t^0 &= \frac{1}{\varepsilon} A(y_t^{det}, \varepsilon) \xi_t^0 dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_0(y_t^{det}, \varepsilon) dW_t \\ dy_t^{det} &= g(\bar{x}(y_t^{det}, \varepsilon), y_t^{det}) dt, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarquons qu'ici, $A(y, \varepsilon)$ est la matrice obtenue en linéarisant l'équation pour ξ en $\xi = 0$, en particulier elle satisfait $A(y, 0) = A^*(y)$. De même, $F_0(y, \varepsilon)$ est le coefficient de diffusion en $\xi = 0$, et satisfait $F_0(y, 0) = F(x^*(y), y)$.

La solution de (3.2) est un processus gaussien, centré, donc entièrement caractérisé par sa covariance $\text{Cov}(\xi_t^0)$ telle que $\text{Cov}(\xi_t^0) = \frac{\sigma^2}{\varepsilon} \int_0^t U(t, s) F_0(y_s^{det}, \varepsilon) F_0(y_s^{det}, \varepsilon)^T U(t, s)^T ds$. Il s'avère que $X_t = \sigma^{-2} \text{Cov}(\xi_t^0)$ satisfait le système lent-rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{X} &= A(y, \varepsilon) X + X A(y, \varepsilon)^T + F_0(y, \varepsilon) F_0(y, \varepsilon)^T \\ \dot{y} &= g(\bar{x}(y, \varepsilon), y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le théorème de Fenichel peut être appliqué, et nous fournit l'existence d'une variété invariante attractive d'équation $X = \bar{X}(y, \varepsilon)$, $y \in D_0$, où $X^*(y) = \bar{X}(y, 0)$ est la solution de

$$A^*(y)X^*(y) + X^*(y)A^*(y)^T F_0(y, 0)F_0(y, 0)^T = 0. \quad (3.4)$$

Une telle matrice existe en vertu de l'hyperbolicité [26], et des résultats bien connus en théorie du contrôle assurent qu'elle est non-singulière si le couple (A^*, F_0) est contrôlable [26], i.e. la matrice

$$[F_0(y, 0) \quad A^*(y)F_0(y, 0) \dots A^*(y)^{n-1}F_0(y, 0)] \in \mathbb{R}^{n \times nk} \quad (3.5)$$

est de rang n . Il est donc permis de supposer

Hypothèse. 2

Les normes (au sens des opérateurs) $\|\bar{X}(y, \varepsilon)\|$ et $\|\bar{X}(y, \varepsilon)^{-1}\|$ sont uniformément bornées pour $y \in D_0$.

Comme $\bar{X}(y, \varepsilon)$ décrit la covariance asymptotique de ξ_0^t , il paraît raisonnable que les solutions du système original (3.1) soient concentrées dans un ensemble de la forme

$$\mathcal{B}(h) = \{(x, y) \in D : y \in D_0, \langle x - \bar{x}(y, \varepsilon), \bar{X}(y, \varepsilon)^{-1}(x - \bar{x}(y, \varepsilon)) \rangle < h^2\}. \quad (3.6)$$

Cet ensemble est une réunion d'ellipsoïdes (pleins) centrés sur la variété adiabatique M_ε . Nous fixons une condition initiale (déterministe) $(x_0, y_0 \in M_\varepsilon)$, et introduisons les temps de première sortie

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{B}(h)} &= \inf\{t > 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{B}(h)\} \\ \tau_{D_0} &= \inf\{t > 0 : y_t \notin D_0\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

(Remarquons que ce sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration canonique engendrée par le processus de Wiener, et que la propriété de Markov forte s'applique pour de tels temps).

Notre résultat principal dit que $\mathbb{P}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < t\}$ se comporte comme $(t^2/\varepsilon)e^{-h^2/2\sigma^2}$ lorsque ε, σ et h tendent vers zéro. Plus précisément,

Théorème 3.1.1 [15][Théorème 2.4]. Il existe $\varepsilon_0, \Delta_0, h_0, c, c_1, L > 0$ tels que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\Delta \leq \Delta_0$, $h \leq h_0$, et tout $0 < \gamma < 1$, on ait

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(x_0, y_0)}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < t \wedge \tau_{D_0}\} &\leq C_{h/\sigma, n, m, \gamma, \Delta}^+(t, \varepsilon) e^{-k_+ h^2 / 2\sigma^2} \\ \mathbb{P}^{(x_0, y_0)}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < t\} &\geq C_{h/\sigma, n, m, \Delta}^-(t, \varepsilon) e^{-k_- h^2 / 2\sigma^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Les exposants k^\pm sont donnés par

$$\begin{aligned} k^+ &= \gamma \left[1 - c_1 \left(h + \Delta + m\varepsilon\rho^2\sigma^2/h^2 + \left(\frac{e^{-c/\varepsilon}}{1-\gamma} \right) \right) \right] \\ k^- &= 1 + c_1(h + e^{-c(t \wedge t_0)/\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.9)$$

où t_0 d'ordre 1. Quant aux préfacteurs, ils sont de la forme

$$\begin{aligned} C_{h/\sigma, n, m, \gamma, \Delta}^+(t, \varepsilon) &= L \frac{(1+t)^2}{\Delta_\varepsilon} [(1-\gamma)^{-n} + e^{n/4} + e^{m/4}] \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2} \right) \\ C_{h/\sigma, n, m, \Delta}^-(t, \varepsilon) &= \frac{1}{L} \left[1 - \left(e^{n/4} + \frac{e^{m/4}}{\Delta_\varepsilon} \right) e^{-h^2/4\sigma^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Il est à noter que les termes d'erreur dans les exposants sont uniformes en t (pour $t > t_0$ dans le cas de k_-). En choisissant par exemple $\gamma = 1 - h$, $\Delta = h$ et $\sigma \ll h \ll 1$, on obtient k^\pm proches de 1. Les préfacteurs C^\pm sont loins d'être optimaux, mais il est naturel que C^+ croisse au cours du temps, reflétant le fait qu'il devient plus probable avec le temps d'avoir observé une excursion occasionnelle.

Les principales étapes de la démonstration sont les suivantes :

1. pour l'approximation linéaire, des estimations légèrement meilleures que (3.8), s'obtiennent à partir de l'inégalité de Doob et quelques intégrales gaussiennes ;
2. le résultat est étendu à l'équation originale sur des échelles de temps d'ordre 1, en traitant les termes non-linéaires comme de petites perturbations ;
3. l'extension à des échelles de temps plus longues s'obtient en redémarrant le processus à tous les temps kT , $k \geq 1$, à l'aide de la propriété de Markov et d'une intégration par parties par rapport à $\langle \xi_{kT}, \bar{X}(y_{kT}, \varepsilon)^{-1} \xi_{kT} \rangle$.

Le théorème (3.2) de [15] fournit des informations supplémentaires sur la dynamique, montrant que sur des échelles de temps d'ordre 1 au moins, les trajectoires restent concentrées autour de leur pendant déterministe. Ainsi τ_{D_0} sera typiquement très grand si D_0 est un ensemble invariant par la dynamique déterministe.

Pour une condition initiale voisine de la variété invariante, on obtient une convergence exponentiellement rapide vers $\mathcal{B}(h)$. De façon équivalente, on montre que la trajectoire a de fortes chances de rester dans un tube centré sur la solution déterministe.

3.1.2 Réduction de la dynamique

Le théorème (3.1.1) ayant montré que les trajectoires sont concentrées au voisinage de la variété adiabatique M_ε , il est tentant d'approximer la dynamique du système original (3.1) par sa "projection" sur M_ε :

$$dy_t^0 = g(\bar{x}(y_t^0, \varepsilon), y_t^0)dt + \sigma'G(\bar{x}(y_t^0, \varepsilon), y_t^0)dWt. \quad (3.11)$$

On est en droit de se demander si les trajectoires de (3.11) sont proches de celles du système original. Pour quantifier cet écart, introduisons la matrice

$$B(y, \varepsilon) = \partial_x g(\bar{x}(y, \varepsilon), y) \partial_y \bar{x}(y, \varepsilon), y + \partial_y g(\bar{x}(y, \varepsilon), y), \quad (3.12)$$

qui correspond à la linéarisation en 0 de l'équation gouvernant la dynamique de $\eta_t = y_t - y_t^{det}$. Dénotons par $V(t, s)$ la solution fondamentale de $\dot{\eta} = B(y_t^{det}, \varepsilon)\eta$ et introduisons

$$\mathcal{X}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \left(\sup_{u \leq v \leq s} \|V(s, v)\| \right) du. \quad (3.13)$$

Cette fonction est une mesure de l'instabilité linéaire des orbites de l'équation réduite déterministe. On peut alors estimer (c.f. ([15][Remarque 2.7])

$$\mathbb{P}^{(0,0)} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_{\mathcal{B}(h)}} \|y_s - y_s^0\| \geq h \right\} \leq c \left(1 + \frac{t}{\varepsilon} \right) e^{m/4} \exp \left\{ - \frac{k_1 h^2}{[(\sigma')^2 h^2 + \sigma^2 \varepsilon] (1 + \mathcal{X}(t))} \right\}, \quad (3.14)$$

ce qui montre que la déviation typique entre y_s et y_s^0 est d'ordre $\sigma\sqrt{\varepsilon}(1+\mathcal{X}(t)^{1/2})$. D'autre part,

$$\mathbb{P}^{(0,0)} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_{D_0}} \|y_s^0 - y_s^{det}\| \geq h_1 \right\} \leq c(1+t)e^{m/4} \exp \left\{ -\frac{k_2 h_1^2}{(\sigma')^2(1+\mathcal{X}(t))} \right\}, \quad (3.15)$$

et donc la déviation typique entre y_s^0 et y_s^{det} est d'ordre $\sigma'(1+\mathcal{X}(t)^{1/2})$. Ainsi pour $\sigma'/\sigma > \sqrt{\varepsilon}$, l'équation réduite (3.11) donne une meilleure approximation de la dynamique originale que l'équation déterministe (2.10).

3.2 Effet du bruit sur les bifurcations dynamiques

Nous considérons toujours le système lent-rapide stochastique (3.1), mais cette fois nous supposons que le dynamique lente amène les trajectoires au voisinage d'un point de bifurcation.

Concrètement, supposons que $f(0,0) = 0$ et que $\partial_x f(0,0)$ admet q valeurs propres sur l'axe imaginaire, les autres $n-q$ valeurs propres ayant partie réelle négative. Nous pouvons alors introduire des coordonnées $(x^-, z) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ dans lesquelles le système s'écrit

$$\begin{aligned} dx_t^- &= \frac{1}{\varepsilon} f^-(x_t^-, z_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^-(x_t^-, z_t, y_t) dW_t \\ dz_t &= \frac{1}{\varepsilon} f^0(x_t^-, z_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^0(x_t^-, z_t, y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t^-, z_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t^-, z_t, y_t) dW_t, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où les valeurs propres de la matrice $\partial_{x^-} f^-(0,0,0)$ ont leur partie réelle négative, celles de $\partial_z f^0(0,0,0)$ ont leur partie réelle nulle, alors que $\partial_z f^-(0,0,0) = 0$ et $\partial_{x^-} f^0(0,0,0) = 0$. Nous avons vu que ce système admettait, dans un voisinage de l'origine, une variété invariante d'équation $x^- = \bar{x}^-(z, y, \varepsilon)$, $(z, y) \in \mathcal{N}$.

Nous allons commencer par dériver des résultats similaires (bien qu'un peu plus faibles) à ceux de la section précédente sur la concentration des trajectoires au voisinage de la variété invariante, ainsi que sur l'approximation par un système réduit. Ensuite nous discuterons la dynamique réduite le cas particulier avec $q = 1$: la bifurcation selle-noeud.

3.2.1 Réduction de la dynamique

Notre but est de montrer que la déviation $\xi_t^- = x_t^- - \bar{x}^-(z_t, y_t, \varepsilon)$ reste concentrée dans un voisinage de 0. En parfaite analogie avec le cas stable, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{B}^-(h) = \{(x^-, z, y) : (z, y) \in \mathcal{N}, \langle x^- - \bar{x}^-(z, y, \varepsilon), \bar{X}^-(z, y, \varepsilon)^{-1}(x^- - \bar{x}^-(z, y, \varepsilon)) \rangle\} < h^2, \quad (3.17)$$

où $\bar{X}^-(z, y, \varepsilon)$ est définie à partir de la linéarisation $A^-(z, y, \varepsilon)$ en $\xi^- = 0$ de l'équation satisfaite par ξ_t^- , de la même manière que $\bar{X}(y, \varepsilon)$ dans (3.3) et (3.4). Considérons alors, pour une condition initiale fixée (x_0^-, z_0, y_0) sur la variété invariante, les temps d'arrêt

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{B}^-(h)} &= \inf\{t > 0 : (x_t^-, z_t, y_t) \notin \mathcal{B}^-(h)\} \\ \tau_{\mathcal{N}} &= \inf\{t > 0 : (z_t, y_t) \notin \mathcal{N}\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sous l'hypothèse que $\|\bar{X}^-(z, y, \varepsilon)\|$ et $\|\bar{X}^-(z, y, \varepsilon)^{-1}\|$ soient uniformément bornées dans \mathcal{N} , nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.2.1 *Il existe des constantes $h_0, \Delta_0, L > 0$ et $v \in (0, 1]$ telles que pour tout $h \leq h_0$, tout $\Delta \leq \Delta_0$ et tout $0 < \gamma < 1$ avec la condition initiale $(z_0, y_0) \in \mathcal{N}, x_0^- = \bar{x}^-(z_0, y_0, \varepsilon)$,*

$$\mathbb{P}^{(x_0^-, z_0, y_0)}\{\tau_{\mathcal{B}^-(h)} < t \wedge \tau_{\mathcal{N}}\} \leq C_{h/\sigma, n, m, q, \gamma, \Delta}(t, \varepsilon)e^{-kh^2/2\sigma^2}, \quad (3.19)$$

à condition que $\varepsilon |\log(h(1 - \gamma))| \leq 1$. Ici

$$k = \gamma[1 - \mathcal{O}(\Delta) - \mathcal{O}(h^v(1 - \gamma)^{1-v} |\log(h(1 - \gamma))|)]$$

$$C_{h/\sigma, n, m, q, \gamma, \Delta}(t, \varepsilon) = L \left(1 + \frac{t}{\Delta_\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right) \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2}\right) \left[(1 - \gamma)^{-(n-q)} + e^{(n-q)/4} + e^{m/4} + e^{q/4} \right]. \quad (3.20)$$

Ces propriétés de concentration suggèrent d'approximer la dynamique de (3.16) par l'équation réduite

$$dz_t^0 = \frac{1}{\varepsilon} f^0(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^0(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dW_t \quad (3.21)$$

$$dy_t^0 = g(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dt + \sigma' G(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dW_t$$

qui a l'avantage de ne faire intervenir que les modes bifurcants parmi les variables rapides. On peut alors montrer (c.f. [15][Théorème 2.9]) que la déviation entre solutions de l'équation réduite et celles du système original satisfait

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{(x_0^-, z_0^0, y_0^0)} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_{\mathcal{N}}} \| (z_s, y_s) - (z_s^0, y_s^0) \| \geq h \right\} \\ & \leq C_{m,q}(t, \varepsilon) \exp \left\{ -k_0 \frac{h^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\mathcal{X}_C^{(2)}(t) + h\mathcal{X}_C^{(1)}(t) + h^2\mathcal{X}_C^{(2)}(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

pour tout $h \leq h_0[\mathcal{X}^{(1)}(t) \vee \mathcal{X}_C^{(1)}(t)]^{-1}$, où k_0 est une constante positive. Les fonctions $\mathcal{X}^{(i)}(t)$ et $\mathcal{X}_C^{(i)}(t)$ mesurent à nouveau l'instabilité des orbites du système réduit. La déviation typique croît comme $\sigma\mathcal{X}_C^{(2)}(t)^{1/2} + \sigma^2\mathcal{X}_C^{(1)}(t)$. Malheureusement, les croissent en général trop rapidement pour que l'estimation (3.22) suffise à justifier l'étude du seul système réduit. C'est néanmoins ce que nous allons faire dans la suite.

3.2.2 Bifurcation selle-noeud

Nous considérons ici un système réduit dans le cas d'une bifurcation selle-noeud à l'origine (en particulier $q = 1$). Pour simplifier, nous discutons le cas où $m = 1$, et où la dynamique lente est triviale :

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ dy_t &= 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous pouvons donc admettre que $y_t = t$ (avec t_0 pas nécessairement nul), et considérer le processus inhomogène $\{x_t\}_{t \geq t_0}$. Une bifurcation selle-noeud (indirecte) a lieu en $(0, 0)$ si

$$f(0, 0) = 0, \quad \partial_x f(0, 0) = 0, \quad \partial_y f(0, 0) < 0, \quad \partial_{xx} f(0, 0) < 0. \quad (3.24)$$

Dans ce cas, la variété lente est formée d'une branche stable $\{x = x^*(y), y \leq 0\}$, avec $x^*(y) \asymp |y|^{1/2}$, et une variété instable $\{x = x_-(y), y \leq 0\}$, avec $x_-(y) \asymp -|y|^{1/2}$.

Les résultats présentés ici sont un cas particulier de ceux de [20]. Nous fixons une condition

initiale déterministe $(x_0, y_0) = (x_0, t_0)$ avec $t_0 < 0$ et x_0 dans un ε -voisinage de $x^*(y_0)$. Le comportement de la solution déterministe x_t^{det} , obtenue avec la même condition initiale et $\sigma = 0$, est décrit dans la proposition (1.7). En particulier, x_t^{det} effectue une transition rapide vers les x négatifs après un retard d'ordre $\varepsilon^{2/3}$.

Tant que $y_t = t$ ne s'approche pas de 0, le théorème (3.1.1) s'applique et montre que les trajectoires sont concentrées dans un ensemble $\mathcal{B}(h)$, centré en x_t^{det} . Dans ce cas particulier, il prend la forme d'une bande

$$\mathcal{B}(h) = \left\{ (x, t) : \frac{(x - x_t^{det})^2}{\zeta(t)} < h^2 \right\}, \quad (3.25)$$

où $\zeta(t)$ est l'analogie de la matrice $X(t)$ du cas général. Un peu d'analyse montre qu'ici,

$$\zeta(t) \asymp \frac{1}{|\partial_x f(x_t^{det}, t)|} \asymp \frac{1}{|t|^{1/2} \vee \varepsilon^{1/3}} \quad (3.26)$$

pour $t \leq c_1 \varepsilon^{2/3}$. Une preuve analogue à celle du théorème (3.1.1), mais plus simple, nous donne alors

Théorème 3.2.2 [20][Proposition 4.2]. *Soit $\hat{\zeta}(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} \zeta(s)$. Il existe une constante h_0 telle que pour $h \leq h_0 \hat{\zeta}(t)^{-3/2}$ et $t \leq t_1 = c_1 \varepsilon^{2/3}$,*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < t \} \leq \text{const} \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-kh^2/2\sigma^2}, \quad (3.27)$$

avec $k = 1 - \mathcal{O}(\varepsilon) - \mathcal{O}(h\hat{\zeta}(t)^{3/2})$.

Ainsi, tant que $\hat{\zeta}(t)^{3/2} \ll 1/\sigma$, les trajectoires sont concentrées dans un voisinage d'ordre $\sigma\sqrt{\hat{\zeta}(t)}$ de la solution déterministe x_t^{det} . Comme $\hat{\zeta}(t_1) \simeq \varepsilon^{-1/3}$, il y a deux cas à considérer :

1. Si $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$, alors (3.27) est applicable jusqu'au temps t_1 et montre qu'en t_1 les trajectoires sont concentrées dans un voisinage d'ordre $\sigma\varepsilon^{-1/6} < \varepsilon^{1/3}$ de $x_{t_1}^{det}$
2. Si $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$, alors (3.27) n'est utile que pour $\hat{\zeta}(t) < \sigma^{-2/3}$, i.e. les trajectoires sont concentrées autour de x_t^{det} tant que $t < -\sigma^{4/3}$

Une manière de décrire la dynamique aux temps ultérieurs est de considérer le temps de premier passage en $x = -L$ ($L > 0$ étant une constante fixée telle que $(-L, t) \in \mathcal{N}$ pour les temps considérés) :

$$\tau^0 = \inf\{t \geq t_0 : x_t \leq -L\}. \quad (3.28)$$

En effet, une fois le niveau $-L$ atteint, le processus a toutes les chances de quitter immédiatement le voisinage \mathcal{N} dans la direction des x négatifs. L'estimation (3.27) implique

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0}\{\tau^0 < t\} \leq \text{const} \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-k/\hat{\zeta}(t)^3 \sigma^2} \quad (3.29)$$

pour $t \leq t_1$ dans le premier cas, et $t \leq -\sigma^{4/3}$ dans le second cas. Le résultat suivant montre que les trajectoires ont de fortes chances de s'échapper par la suite :

Théorème 3.2.3 [20][Propositions 5.1 et 6.1]. *Il existe une constante $k > 0$ telle que si $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$, alors*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0}\{\tau^0 \geq t\} \leq 3 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{\sigma^2} \left(\frac{k(t - t_1)}{\varepsilon^{2/3} |\log \varepsilon|} - 1 \right) \right\} \quad (3.30)$$

pour $t_1 \leq t \leq t_1 + \mathcal{O}(1)$. D'autre part, si $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$, alors

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0}\{\tau^0 \geq t\} \leq \frac{3}{2} \exp \left\{ -\frac{k\sigma^{2/3}(t + \sigma^{4/3})}{\varepsilon |\log \sigma|} \right\} + e^{-k/\sigma^2} \quad (3.31)$$

pour $-\sigma^{4/3} + \mathcal{O}(\varepsilon) \leq t \leq t_1$.

Ainsi,

- si $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$, la grande majorité des trajectoires aura quitté le voisinage du point de bifurcation dès que $t - t_1 \gg \varepsilon^{2/3} |\log \varepsilon|$, c'est-à-dire peu après que la solution déterministe saute
- si $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$, alors la plupart des trajectoires se seront échappées vers le bas dès que $t + \sigma^{4/3} \gg \varepsilon |\log \sigma|$, c'est-à-dire *avant* que la bifurcation ait eu lieu

Le second cas est un phénomène nouveau, entièrement dû à la présence du bruit. Il est intéressant de noter que plusieurs quantités, comme le temps typique du saut et

l'exposant dans (3.31), ont des dépendance en lois de puissance non triviales de σ et ε . Cet exposant s'obtient en comptabilisant le nombre d'excursions que le processus a le temps d'entreprendre afin de franchir la variété instable (c.f. [13][Section 4.2] et [14][Section 3.2]).

3.2.3 Bifurcation Hopf

Dans cette section, nous considérons le cas où le système rapide admet un point de bifurcation de Hopf. Afin de garder la discussion raisonnablement simple, plutôt que de considérer le cas le plus général, nous restreindrons notre attention aux situations dans lesquelles

- le coefficient de diffusion pour la variable rapide ne dépend que de la variable lente,
- Il n'y a aucun terme de bruit agissant sur la variable lente,
- la variable lente est unidimensionnelle, tandis que la variable rapide et le mouvement brownien sont 2-dimensionnels.

Nous examinerons donc un système lent-rapide d'EDS de la forme

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F(y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t, y_t) dt, \end{aligned} \tag{3.32}$$

sous les hypothèses suivantes.

Hypothèse (Bifurcation Hopf).

- **Domaine et dérivabilité** : Il y a un ensemble ouvert $D \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont real-analytique et uniformément bornées dans la norme par une constante M .
- **Variété lente** : Il existe une fonction $x^* : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $(x^*(y), y) \in D$ et $f(x^*(y), y) = 0$ pour tout y .
- **Bifurcation de Hopf** : la matrice jacobienne $A^*(y) = \partial_x f(x^*(y), y)$ a valeurs propres complexe conjugué $a^*(y) = \pm i w^*(y)$. Il y a un $y_0 \in I$ tel que $a^*(y)$ a le même signe que $y - y_0$ et $d_y a^*(y_0)$ est strictement positif. La partie imaginaire $w^*(y)$ est bornée loin de 0 dans I . Enfin, $g(0, y) > 0$ pour $y \in I$.

- Non-dégénérescence du terme de bruit : $F(y)F(y)^T$ est définie positive pour tout $y \in I$.

Théorème 3.2.4 [19][théorème 5.3.8]. *On va fixer la condition initiale $(0, y_0) \in \mathcal{B}(h)$ avec $y_0 \leq \sqrt{\varepsilon}$. Il existe des constantes $\varepsilon_0, \Delta_0, h_0, c_1, L > 0$, tel que pour tous $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \Delta \leq \Delta_0$ et tout $\gamma \in (0, 1)$ et pour tout $h \leq h_0\sqrt{\varepsilon}$,*

$$\mathbb{P}^{0, y_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < \bar{\tau}(\sqrt{\varepsilon}) \} \leq \frac{L}{\Delta_\varepsilon} \frac{1}{1 - \gamma} e^{-k_+ h^2 / 2\sigma^2} \quad (3.33)$$

où l'exposant k_+ satisfait

$$k_+ = \gamma[1 - c_1(\Delta + h^2/\varepsilon)]. \quad (3.34)$$

Considérons maintenant la dynamique après y_t a atteint $\sqrt{\varepsilon}$, toujours en supposant que $\sigma \leq \sqrt{\sigma}$. Nous attendons maintenant des chemins d'échantillon de quitter les environs de la direction de l'équilibre au $x = 0$ exponentiellement rapide. L'évasion est dominée par diffusion dans un ensemble de forme

$$\mathcal{S}(h) = \{ (x, y) : y > \sqrt{\varepsilon}, y \in I, \|x\| \leq h\rho(y) \}, \quad (3.35)$$

où la définition de $\rho(y)$ est donné par

$$\rho(y) = \sqrt{\frac{\text{Tr}(F(y)F(y)^T)}{2a(y)}} \quad (3.36)$$

Théorème 3.2.5 [19][théorème 5.3.9]. *Soit $\mu > 0$, et l'ensemble $C_\mu = (2 + \mu)^{-(1+\mu/2)}$. Alors, pour tout y et pour tout condition initiale $(x_0, y) \in \mathcal{S}(h)$ telle que $\sigma < h < (y_0^2 C_\mu \sigma^{1+\mu})^{1/(3+\mu)}$, et tout $y \in I$ avec $y \geq y_0 \vee \sqrt{\varepsilon}$,*

$$\mathbb{P}^{x_0, y_0} \{ \tau_{\mathcal{S}(h)} \geq \bar{\tau}(y) \} \leq \left(\frac{h}{\sigma} \right)^{2\mu} \exp \left\{ -k_\mu \frac{\alpha(y, y_0)}{\varepsilon} \right\}, \quad (3.37)$$

où $\alpha(y, y_0) = \int_{y_0}^y a(z) dz$, et l'exposant k_μ est donnée par

$$k_\mu = \frac{2\mu}{1 + \mu} \left[1 - \mathcal{O} \left(\varepsilon \frac{1 + \mu}{\mu} \right) - \mathcal{O} \left(\frac{1}{\mu \log(1 + h/\sigma)} \right) \right]. \quad (3.38)$$

La probabilité en (3.37) devient petite dès que y est telle que $\alpha(y, y_0) \gg \varepsilon(1 + \mu) \log(h/\sigma)$. Étant donné que $\alpha(y, y_0)$ croît quadratiquement avec y , Nous pouvons conclure que les chemins de l'échantillon sont susceptibles de quitter le domaine après un moment d'ordre $\sqrt{\varepsilon \log(h/\sigma)}$.

Pour compléter la discussion, Nous devons montrer que les chemins de l'échantillon laissent un voisinage d'ordre \sqrt{y} de la branche d'équilibre dès qu'y atteint ordre $\sqrt{\varepsilon |\log \sigma|}$, et puis, si la bifurcation de Hopf est supercritique, approcher l'orbite périodique originaires de la bifurcation. Cette analyse n'ayant ne pas encore été travaillée en détail, nous allons nous limiter à ce qui donne une idée de comment on pourrait procéder.

Selon la formule de Itô passer à coordonnées polaires, on obtient un système de la forme

$$\begin{aligned} dr_t &= \frac{1}{\varepsilon} [a(y_t)r_t + b_r(r_t, \theta_t, y_t)]dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_r(\theta_t, y_t) dW_t \\ d\theta_t &= \frac{1}{\varepsilon} [w(y_t) + b_\theta(r_t, \theta_t, y_t)]dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{F_\theta(\theta_t, y_t)}{r_t} dW_t \end{aligned} \quad (3.39)$$

où b_r contient des termes d'ordre r^2 et σ^2/r , et b_θ contient des termes d'ordre r et σ^2/r^2 , tandis que F_r et F_θ sont d'ordre 1. Notons, en particulier, qu'en dehors de la $\mathcal{S}(\sigma)$ les termes d'ordre σ^2/r et σ^2/r^2 , qui résultent de l'expression de second ordre dans la formule d'Itô deviennent négligeable en ce qui concerne le rôle de premier plan de l'expression correspondante de la dérive.

Dans l'analyse, nous nous intéressons principalement à la dynamique de la r_t . Comme le mouvement de θ_t se produit sur une échelle de temps plus rapide que le mouvement de r_t pour y_t petit, nous attendons le système (3.39) soit bien approchées par sa version moyenne

$$d\bar{r}_t = \frac{1}{\varepsilon} [a(y_t)\bar{r}_t + \bar{b}_r(\bar{r}_t, y_t)]dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} \bar{F}_r(y_t) dW_t. \quad (3.40)$$

3.3 Résonance stochastique

Nous avons vu dans la section précédente que le bruit pouvait occasionner des transitions entre variétés lentes, avec probabilité non-négligeable, *avant* qu'un point de bifurca-

tion ne soit atteint. En fait, il n'est même pas nécessaire qu'il y ait un point de bifurcation, l'existence d'une bifurcation évitée, dans laquelle plusieurs parties de la variété lente s'approchent sans se toucher, peut être suffisante à rendre des transitions probables. Lorsqu'il est accompagné d'une dynamique lente périodique, ce mécanisme peut donner lieu au phénomène de *résonance stochastique*.

3.3.1 Quelques résultats antérieurs

Le phénomène de résonance stochastique a été initialement introduit dans [28] (voir aussi [30]) dans le but de proposer une explication de l'apparence régulière d'époques glaciaires (c.f. [16] pour une description de leur modèle). Depuis, la résonance stochastique a été observée dans de nombreux systèmes physiques et biologiques, voir par exemple [3, 7, 8].

Pour être concrets, considérons l'équation

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} [x_t - x_t^3 + A \cos(y_t)] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ dy_t &= 1 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Elle décrit le mouvement suramorti d'une particule dans un potentiel $V(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + A \cos(y)x$, où le dernier terme agit comme une force déterministe périodique. Si $A < A_c := 2/(3\sqrt{3})$, alors la variété lente, d'équation $x - x^3 = A \cos y$, comporte deux branches stables, que nous noterons $x_-^*(y) < x_+^*(y)$, séparées par une branche instable $x_0^*(y)$. Soit $H = V(0, \Pi/2) - V(1, \Pi/2) = 1/4$ la hauteur de la barrière de potentiel pour $\cos y = 0$. Les cas suivants peuvent se présenter :

1. si $\sigma = 0$ et $0 < A < A_c$, les trajectoires restent toujours voisines de l'une des variétés stables (c'est-à-dire l'un des puits de potentiel), sans jamais visiter l'autre variété stable ;
2. si $\sigma > 0$ et $A = 0$, on a affaire au problème bien connu du passage stochastique par-dessus une barrière de potentiel : les transitions ont lieu à des temps aléatoires, dont la loi converge, pour $\sigma \rightarrow 0$, vers la loi exponentielle [10], d'espérance d'ordre $\varepsilon e^{2H/\sigma^2}$ (ceci reste vrai pour des potentiels multidimensionnels) ;

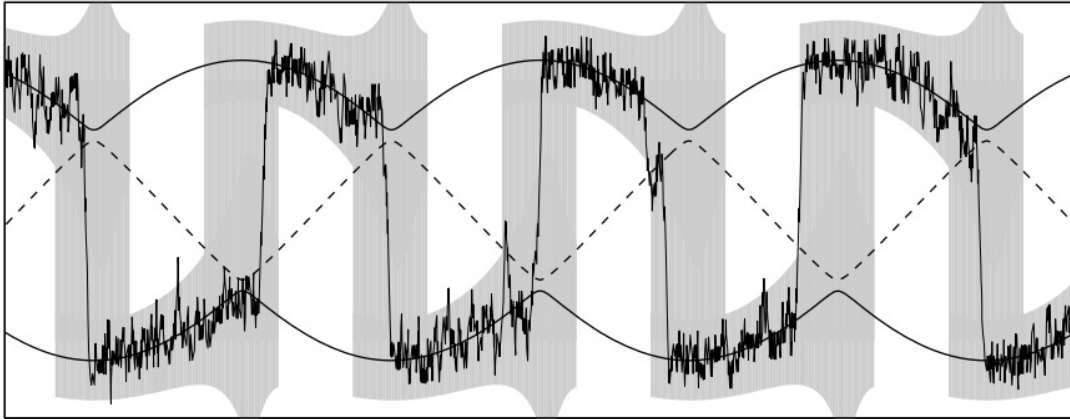


FIGURE 3.1 – [13] Une trajectoire (trait fin) de l'équation (3.41) présentant le phénomène de résonance stochastique. La trajectoire saute presque périodiquement d'une variété stable à l'autre (courbes en gras) en passant par dessus la barrière de potentiel (en traitillé).

3. si $\sigma > 0$ et $0 < A < A_c$, la loi des transitions aléatoires sera influencée par le terme périodique $-A \cos(y)x$, qui rend ces transitions plus probables à certains instants qu'à d'autres; c'est cette trace du caractère périodique du forçage dans le comportement de x_t que l'on dénomme résonance stochastique

Les premières approches mathématiques à ce problème se sont concentrées sur des versions simplifiées de l'équation (3.41). En particulier, le cas où le potentiel $V(x, y)$ est une fonction constante par morceaux de y a été considéré dans [28], et plus récemment dans [5]. Le cas d'une variable x discrète, i.e. d'une chaîne de Markov, a été étudié dans [2, 1], puis dans [31]. Enfin, les physiciens ont passablement étudié les propriétés spectrales du générateur de (3.41) et la densité de probabilité [29, 23]. Ces différentes approches montrent en particulier que le phénomène de résonance est le plus prononcé pour une période $1/\varepsilon$ proche du temps de Kramers e^{2H/σ^2} .

Une description du comportement des trajectoires a été donnée pour la première fois par Freidlin dans [9], en utilisant la théorie des grandes déviations. Ses résultats montrent que les trajectoires convergent en probabilité, au sens de la norme L^p , vers une fonction

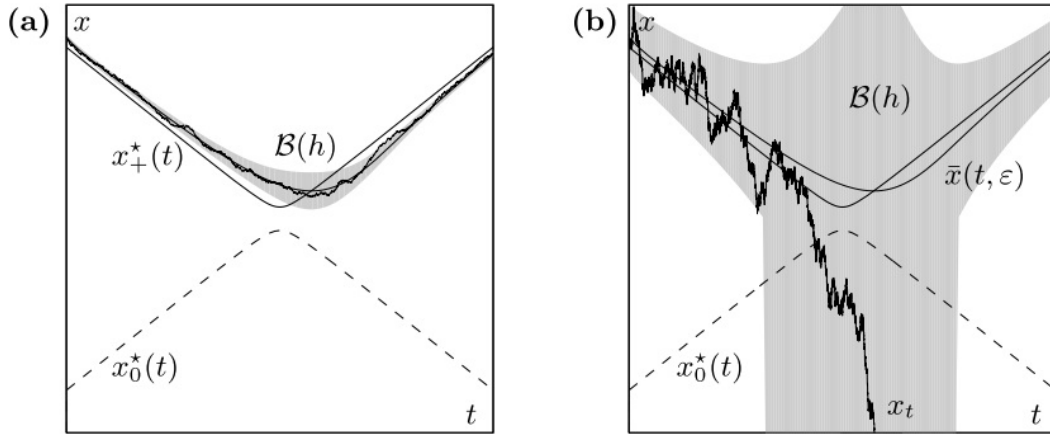


FIGURE 3.2 – [13] Trajectoires près d’une bifurcation selle-noeud évitée. (a) Pour $\sigma < a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, les trajectoires restent confinées, avec grande probabilité, dans un voisinage $\mathcal{B}(h)$ de la solution déterministe x_t^{det} . (b) Pour $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, les trajectoires ont toutes les chances de traverser la barrière de potentiel en $x_0^*(t)$ durant l’intervalle $[-\sigma^{2/3}, \sigma^{2/3}]$.

périodique $P(t)$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0, \varepsilon = e^{-2H_1/\sigma^2}} \mathbb{P} \left\{ \int_0^T |x_t - P(t)|^p dt > \delta \right\} = 0 \quad (3.42)$$

pour $H_1 > H$, tous δ ; $T > 0$ fixés et $p \geq 1$. La fonction $P(t)$ suit le fond d’un puits de potentiel, en changeant de puits deux fois par période. Ce résultat s’applique à une classe de systèmes très générale, en revanche il ne donne pas d’informations sur la vitesse de convergence, ni sur sa dépendance de δ et p .

3.3.2 Description des trajectoires

Nous considérons ici le cas où $a_0 = A_c - A$ est un petit paramètre, ce qui a pour effet de rendre probables les transitions sur des échelles de temps sous-exponentielles.

Pour simplifier la présentation, nous nous concentrons sur l’équation (3.41), bien que les résultats de [13] s’appliquent à des équations plus générales.

Si a_0 est petit mais positif, on est dans une situation de bifurcation selle-noeud évitée.

Lorsque $\cos y = -1$, la variété stable $x_+^*(y)$ et la variété instable $x_0^*(y)$ s'approchent à une distance d'ordre $\sqrt{a_0}$, et la barrière de potentiel a une hauteur d'ordre $a_0^{3/2}$. Nous choisissons l'origine du temps de manière que $\cos y_t = -1$ en $t = 0$.

Dans le cas déterministe $\sigma = 0$, une généralisation de la proposition (1.2.1) donne (c.f.[13][Théorème 2.5])

$$\begin{aligned} x_t^{det} - x_+^*(y) &\asymp \frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \leq -c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}) \\ x_t^{det} - x_c &\asymp \sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon} && \text{pour } |y_t| \leq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}) \\ x_t^{det} - x_+^*(y) &\asymp -\frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \geq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

pour une constante $c_0 > 0$, où $x_c = 1/\sqrt{3}$ est le "centre" de la bifurcation évitée. Nous pouvons donc essayer d'imiter le théorème (3.2.2) en définissant à nouveau

$$\mathcal{B}(h) = \left\{ (x, t) : \frac{(x - x_t^{det})^2}{\zeta(t)} < h^2 \right\}, \quad (3.44)$$

avec ici,

$$\zeta(t) \asymp \frac{1}{|\partial_x f(x_t^{det}, t)|} \asymp \frac{1}{|t| \vee \sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}} \quad (3.45)$$

On obtient alors, comme au théorème (3.2.2),

Théorème 3.3.1 [13][Théorème 2.6]. *Il existe une constante h_0 telle que pour $h \leq h_0$ et $t \leq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon})$,*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < t \} \leq \text{const} \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-kh^2/\sigma^2}, \quad (3.46)$$

avec $k = 1 - \mathcal{O}(\varepsilon) - \mathcal{O}(h/[|t|^{3/2} \vee a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}])$.

Comme précédemment, nous avons donc deux cas à considérer :

1. si $\sigma < a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, alors les trajectoires restent concentrées dans un voisinage d'ordre $\sigma\sqrt{\zeta(t)}$ de la solution déterministe, et des transitions vers l'autre variété stable sont peu probables

2. si $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, alors le résultat ne s'applique que pour $t \leq -\sigma^{2/3}$. Il suit du théorème (3.3.1) que le temps de premier passage τ^0 , disons, en $x = 0$, satisfait

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 < t \} \leq \text{const} \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-k[(-t^3) \vee a_0^{3/2} \vee \varepsilon^{3/2}] / \sigma^2}, \quad (3.47)$$

pour tous les t dans un voisinage de 0 dans le premier cas, et pour $t \leq -\sigma^{2/3}$ dans le second cas. Le comportement pour $t \geq -\sigma^{2/3}$ dans le second cas est alors décrit par l'analogie suivant du théorème (3.3.2).

Théorème 3.3.2 [13][Théorème 2.7]. *si $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, alors il existe une constante $k > 0$ telle que*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 \geq t \} \leq \frac{3}{2} \exp \left\{ - \frac{k\sigma^{2/3}(t + \sigma^{2/3})}{\varepsilon |\log \sigma|} \right\} + e^{-k/\sigma^2} \quad (3.48)$$

pour $-\sigma^{2/3} + \mathcal{O}(\varepsilon) \leq t \leq \sigma^{2/3}$.

Par conséquent, le système a une probabilité d'ordre $1 - e^{-k\sigma^{4/3}/\varepsilon|\log \sigma|}$ d'effectuer une transition dans l'intervalle de temps $-\sigma^{2/3} \leq t \leq \sigma^{2/3}$. Une fois le niveau 0 atteint, le processus a une forte probabilité d'atteindre rapidement la variété lente en $x_-(t)$, qu'il suit pendant une demi-période jusqu'à la transition suivante

Il est à relever que le seuil $a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ de l'intensité du bruit rendant des transitions probables ne tend pas vers 0 avec le paramètre a_0 contrôlant la hauteur minimale de la barrière de potentiel. Ceci est un effet purement dynamique, dû au fait que même si la barrière de potentiel disparaît, elle le fait durant un intervalle de temps trop court pour augmenter la probabilité de transition.

Remarquons finalement que des résultats analogues peuvent être obtenus dans le cas d'un potentiel symétrique, dont la barrière est modulée périodiquement, comme dans le cas

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} [(a_0 + 1 - \cos t)x_t - x_t^3] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ dy_t &= 1. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Le petit paramètre a_0 correspond à nouveau à la hauteur minimale de la barrière de potentiel. Les instants t tels que $\cos t = 1$ correspondent à une bifurcation fourche évitée. Les résultats sont similaires aux précédents, avec d'autres exposants. Ainsi,

1. si $\sigma < \sigma_c = a_0 \vee \varepsilon^{2/3}$, les trajectoires restent concentrées dans un voisinage d'ordre $\sigma/(|t| \vee \sqrt{\sigma_c})$ de la solution déterministe, et des transitions vers l'autre variété stable sont exponentiellement peu probables ;
2. si $\sigma \geq \sigma_c$, les trajectoires peuvent passer d'un puits de potentiel à l'autre durant l'intervalle de temps $[-\sqrt{\sigma}, \sqrt{\sigma}]$; après cet intervalle de transition, elles suivront à nouveau l'une des branches stables, et auront changé de branche avec probabilité exponentiellement proche de $1/2$

3.4 Effet du bruit au voisinage d'une orbite périodique

Dans cette section, nous considérons l'effet du bruit sur les systèmes lents-rapides dans lesquels le système rapide admet, pour chaque valeur de la variable lente, une orbite asymptotiquement périodique stable. Nous avons vu dans la Section 1.3.1 que les solutions du système lent-rapide peuvent suivre l'orbite périodique plus lentement ou à une distance d'ordre ε , alors que la dynamique des variables lentes est bien approchée par le système en moyenne sur le mouvement rapide de l'orbite.

3.4.1 Dynamique près une orbite périodique fixe

Nous considérons ici une SDE de la forme

$$dx_s = f(x_s)ds + \sigma F(x_s)dW_s \quad (3.50)$$

où W_s est un mouvement brownien k -dimensionnel, dans le cas où le système déterministe $\dot{x} = f(x)$ admet une orbite périodique asymptotiquement stable. Plus précisément, nous ferons les hypothèses suivantes.

Hypothèse. 1 (Orbite périodique asymptotiquement stable)

- **Domaine et dérivabilité** : Il existe des constantes $n, k \geq 1$ telle que $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$, $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n \times k})$ où D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . Nous supposons de plus

que f , F et toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2, respectivement 1, sont uniformément bornées pour la norme dans D par une constante M .

- orbite périodique : Il existe une fonction périodique $\gamma^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, de période T , telle que

$$\dot{\gamma}^*(s) = f(\gamma^*(s)) \quad (3.51)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

- Stabilité : soit $A(s) = \partial_x f(\gamma^*(s))$ et soit $U(s)$ la solution principale de $\dot{\xi} = A(s)\xi$. Alors toutes les valeurs propres, sauf $U(T)$ est strictement inférieur à 1 en module.

Dans un voisinage de l'orbite périodique, nous pouvons introduire un système de coordonnées qui sépare les mouvements de l'orbite et transversale à celle-ci, en définissant par exemple

$$x = \gamma^*(T\theta) + r, \quad (3.52)$$

où r est perpendiculaire à $\dot{\gamma}^*(T\theta)$. Dans le cas déterministe, s'appuyant sur le fait que $f(\gamma^*(T\theta) + r) = \dot{\gamma}^*(T\theta) + A(T\theta)r + \mathcal{O}(r^2)$, on obtient des équations d'évolution de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{T} + \mathcal{O}(\|r\|^2), \\ \dot{r} &= A(T\theta)r + \mathcal{O}(\|r\|^2). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Appliquer la formule d'Itô dans le cas stochastique donne un système de la forme

$$\begin{aligned} d\theta_s &= \left[\frac{1}{T} + b_\theta(\theta_s, r_s; \sigma) \right] ds + \sigma F_\theta(\theta_s, r_s) dW_s, \\ dr_s &= [A(T\theta_s)r_s + b_r(\theta_s, r_s; \sigma)] ds + \sigma F_r(\theta_s, r_s) dW_s. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Les fonctions b_θ et b_r contiennent des termes d'ordre r^2 et $n\sigma^2$. En principe, il serait possible d'éliminer les termes d'ordre $n\sigma^2$ dans b_r , qui proviennent des termes de second ordre dans la formule d'Itô, par un autre changement de variables. Mais ce ne sera pas nécessaire pour nos besoins.

Comme nous prévoyons que r_t reste petit, il semble raisonnable de rapprocher la dynamique des (3.54) par l'équation linéaire

$$dr_s^0 = A(T\theta_s^{det})r_s^0 ds + \sigma F_r(\theta_s^{det}, 0) dW_s, \quad (3.55)$$

où $\theta_s^{det} = \theta_0 + s/T$. Le processus r_s^0 est gaussien centré avec la matrice de covariance $\sigma^2 X_s$, où X_s satisfait l'EDO linéaire avec les coefficients périodique

$$\dot{X} = A(T\theta_s^{det})X + XA(T\theta_s^{det})^T + F_r(\theta_s^{det}, 0)F_r(\theta_s^{det}, 0)^T. \quad (3.56)$$

Cette équation admet une unique solution périodique $X^{per}(s)$, qui décrit la covariance asymptotique de r_s^0 . Nous sommes ainsi amenés à introduire l'ensemble

$$\mathcal{B}(h) = \{(\theta, r) : \langle r, X^{per}(T\theta)^{-1}r \rangle < h^2\}, \quad (3.57)$$

qui a la forme d'un tore plein qui entoure l'orbite périodique. Ce faisant, nous avons supposé que le $X^{per}(T\theta)$ est non singulière pour chaque θ . Dans la suite, nous aurons besoin de supposer qu'en outre, $X^{per}(T\theta)^{-1}$ est bornée uniformément en norme. Une condition suffisante pour que cela soit vrai est que la matrice FF^T soit définie positive le long de l'orbite.

Théorème 3.4.1 [17][théorème 5.2.2]. *Si $X^{per}(T\theta)^{-1}$ est bornée en norme, alors il existe des constantes $\varepsilon_0, \Delta_0, h_0, c_1, L > 0$ tel que pour tous $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \Delta \leq \Delta_0, h \leq h_0, \gamma \in (0, 1)$ et pour tout $s > 0$*

$$\mathbb{P}^{\gamma_0, 0}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < s\} \leq C_{h/\sigma, n, \gamma, \Delta}^+(s)e^{-k_+ h^2/2\sigma^2}, \quad (3.58)$$

où k_+ est uniforme dans le temps et satisfait

$$k_+ = \gamma[1 - c_1(h |\log h| + \Delta + \sigma^2/h^2)]. \quad (3.59)$$

et la préfacteur est donnée par

$$C_{h/\sigma, n, \gamma, \Delta}^+(s) = L \frac{(1+s)^2}{\Delta} [(1-\gamma)^{-1} + e^{n/4}] \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.60)$$

Théorème 3.4.2 [17][théorème 5.2.3]. *Il existe des constantes k_1, k_2, L telle que pour tout choix de h, h_1 tout au plus jusqu'à l'ordre $1/s$,*

$$\mathbb{P}^{\theta_0, 0} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq s \wedge \tau_{\mathcal{B}(h)}} \|\theta_u - \theta_u^0\| \geq h \right\} \leq L(1+s) \exp \left\{ -\frac{k_1 h_1^2}{\sigma^2 (h^2 + h_1^2) s} \right\}, \quad (3.61)$$

et

$$\mathbb{P}^{\theta_0} \left\{ \sup_{0 \leq u \leq s} \|\theta_u^0 - \theta_u^{det}\| \geq h_1 \right\} \leq L(1+s) \exp \left\{ -\frac{k_2 h_1^2}{\sigma^2 s} \right\} \quad (3.62)$$

3.4.2 Dynamique près d'une orbite périodique variant lentement

Nous retournons maintenant aux EDSs lents-rapides de la forme

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F(x_t, y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t, y_t) dW_t \end{aligned} \quad (3.63)$$

où nous supposons que le système déterministe $x' = f(x, y)$ admet une orbite périodique asymptotiquement stable pour chaque y fixe. Plus précisément, nous allons faire les hypothèses suivantes.

Hypothèse. 2 (Orbite périodique asymptotiquement stable variant lentement).

- **Domaine et dérivabilité** : il existe des entiers $n, m, k \geq 1$ telle que $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$ et $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n \times k})$, $G \in C^1(D, \mathbb{R}^{m \times k})$ où D est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Nous supposons de plus que f, g, F, G et toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2, respectivement 1, sont uniformément bornées pour la norme dans D par une constante M .
- **Orbite périodique** : il y a un sous-ensemble ouvert $D_0 \subset \mathbb{R}^m$, des constantes $T_2 > T_1 > 0$, et des fonctions continues $T : D_0 \rightarrow [T_1, T_2]$, $\gamma^* : \mathbb{R} \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que $\gamma^*(t + T(y), y) = \gamma^*(t, y)$ et

$$\partial_t \gamma^*(t, y) = f(\gamma^*(t, y), y) \quad (3.64)$$

pour tout (t, y) dans $\mathbb{R} \times D_0$

- **Stabilité** : soit $A(t, y) = \partial_x f(\gamma^*(t, y), y)$ la linéarisation du champ vectoriel rapide à l'orbite périodique. Puis tous les multiplicateurs caractéristiques sauf un de l'équation linéaire de temps périodiques $\xi' = A(t, y)\xi$, pour y fixe, sont strictement inférieurs à un module.

Rappelons (c.f. section 1.3.2) qu'il existe un tube invariant, suivi de la famille des orbites périodiques, dont nous notons la paramétrisation par $\bar{\Gamma}(\theta, y, \varepsilon) = \gamma^*(T(y)\theta, y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Le

changement de variables $x = \bar{\Gamma}(\theta, y, \varepsilon) + r$ où r est perpendiculaire à l'orbite, donne un système de la forme

$$\begin{aligned} d\theta_t &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{T(y_t)} + b_\theta(\theta_t, r_t, y_t) \right\} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_\theta(\theta_t, r_t, y_t) dW_t \\ dr_t &= \frac{1}{\varepsilon} [\bar{A}(\theta_t, y_t) r_t + b_r(\theta_t, r_t, y_t)] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_r(\theta_t, r_t, y_t) dW_t \\ dy_t &= \tilde{g}(\theta_t, r_t, y_t) dt + \sigma' \tilde{G}(\theta_t, r_t, y_t) dW_t, \end{aligned} \quad (3.65)$$

où nous avons mis en $\bar{A}(\theta, y) = \partial_x f(\bar{\Gamma}(\theta, y, \varepsilon), y)$. Les restes $b_r(\theta, r, y)$ et $b_\theta(\theta, r, y)$ contiennent des termes d'ordre $\|r\|^2$ et les termes d'ordre $(n+m)\sigma^2$ issus de la formule d'Itô. Les fonctions \tilde{g} et \tilde{G} sont obtenus en exprimant g et G dans les nouvelles variables.

La dynamique de r_t peut être approchée par l'équation linéaire

$$dr_t^0 = \frac{1}{\varepsilon} \bar{A}(\theta_t^{det}, y_t^{det}) r_t^0 dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_r(\theta_t^{det}, 0, y_t^{det}) dW_t, \quad (3.66)$$

où $(\theta_t^{det}, y_t^{det})$ est une solution du système déterministe, limité au tube paramétré invariant. Le processus r_t^0 est gaussien centré et la matrice de covariance $\sigma^2 X_t$, où X_t est la solution du système déterministe lent-rapide

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{X} &= \bar{A}(\theta, y) X + X \bar{A}(\theta, y)^T + F(\theta, 0, y) F(\theta, 0, y)^T \\ \varepsilon \dot{\theta} &= \frac{1}{T(y)} \\ \dot{y} &= \tilde{g}(\theta, 0, y). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Nous savons déjà de la section précédente que pour y fixe, ce système admet une solution périodique $X^{per}(\theta, y)$. Cette solution est asymptotiquement stable parce que la solution principale associée avec \bar{A} se contracte. Nous pouvons donc conclure du théorème 1.3.1 que (3.67) admet une solution de la forme

$$\bar{X}(\theta, y, \varepsilon) = X^{per}(\theta, y) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (3.68)$$

Nous procédons donc à la définition du domaine de concentration des chemins comme

$$\mathcal{B}(h) = \{(\theta, r, y) : \langle r, \bar{X}(\theta, y, \varepsilon)^{-1}r \rangle < h^2, \quad (3.69)$$

en supposant encore que, $\bar{X}(\theta, y, \varepsilon)$ est inversible. Le résultat suivant de concentration est prouvé exactement comme

Théorème 3.4.3 [17][théorème 5.2.5]. *Si $\bar{X}(\theta, y)^{-1}$ est bornée en norme, il existe des constantes $\varepsilon_0, \Delta_0, h_0, c, c_1, L > 0$, tel que pour tous $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \Delta \leq \Delta_0, h \leq h_0$ et $\gamma \in (0, 1)$,*

$$\mathbb{P}^{\gamma_0, 0, y_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < t \} \leq C_{h/\sigma, n, m, \gamma, \Delta}^+(t, \varepsilon) e^{-k_+ h^2 / 2\sigma^2}, \quad (3.70)$$

où l'exposant k_+ est uniforme dans le temps et satisfait

$$k_+ = \gamma [1 - c_1(h + \Delta + (n + m)\sigma^2/h^2 + e^{-c/\varepsilon}/(1 - \gamma))], \quad (3.71)$$

et le préfacteur est donné par

$$C_{h/\sigma, n, m, \gamma, \Delta}^+(t, \varepsilon) = L \frac{(1 + t)^2}{\Delta_\varepsilon} [(1 - \gamma)^{-n} + e^{n/4} + e^{m/4}] \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.72)$$

Une question naturelle à se poser est de savoir si la dynamique du la système complet (3.65) peut être approchée par la dynamique du système réduit

$$\begin{aligned} d\theta_t^0 &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{T(y_t^0)} + b_\theta(\theta_t^0, 0, y_t^0) \right\} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_\theta(\theta_t^0, 0, y_t^0) dW_t \\ dy_t^0 &= \tilde{g}(\theta_t^0, 0, y_t^0) dt + \sigma' \tilde{G}(\theta_t^0, 0, y_t^0) dW_t. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Il s'avère, cependant, qu'en raison de l'attelage avec les variables lentes via la période $T(y)$, la déviation $\theta_t - \theta_t^0$ peut se développer relativement vite (sur la lente échelle de temps). Dans le pire des cas, toutes les informations sur la phase sont perdues après un temps d'ordre $\varepsilon |\log \sigma|$. Une autre question intéressante, que nous ne poursuivons pas en détail ici, est de savoir si la dynamique des variables lentes peut être approchée par une équation réduite. Un candidat naturel est l'équation réduite en moyenne

$$d\bar{y}_t^0 = \bar{g}(\bar{y}_t^0) dt + \sigma' \bar{G}(\bar{y}_t^0) dW_t, \quad (3.74)$$

obtenue en calculant la moyenne \tilde{g} et \tilde{G} sur l'angle θ . Pour analyser la précision de l'approximation, on doit partir de l'équation (3.65), et construire un changement de variable d'ordre ε décroissant des termes dépendants de θ . On peut alors estimer les écarts du processus résultant de la réduction processus \bar{y}_t^0 .

Chapitre 4

Annexe

4.1 Matrice fondamentale

Définition 4.1.1 (Matrice fondamentale).

En mathématiques, une matrice fondamentale d'un système de n équations différentielles ordinaires linéaires homogènes

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

est une fonction de valeurs matricielles $\Psi(t)$ dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes du système. Alors la solution générale du système peut s'écrire comme $X = \Psi(t)c$, où c varie sur les vecteurs constants (écrit comme vecteurs colonnes de taille n).

On peut montrer qu'une fonction de valeurs matricielles Ψ est une matrice fondamentale de $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ si et seulement si $\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t)$ et Ψ est une matrice non singulière pour tous t

Définition 4.1.2 (Matrice de monodromie).

En mathématiques et plus particulièrement en théorie des équations différentielles ordinaires (c'est-à-dire de déterminant non nul), une matrice de monodromie est l'inverse de la matrice fondamentale d'un système des ODEs, évaluée à la période des coefficients du système. Elle est utilisée pour l'analyse des solutions périodiques des ODEs en théorie de Floquet.

4.2 Théorie de Floquet

La théorie de Floquet est une branche de la théorie des équations différentielles ordinaires relative à la classe des solutions à des équations différentielles linéaires périodiques de la forme

$$\dot{x} = A(t)x$$

avec $A(t)$ une fonction périodique continue par morceaux avec la période T et définit l'état de la stabilité des solutions.

Le théorème principal de la théorie de Floquet, dû à Gaston Floquet (1883), donne une forme canonique pour chaque solution de matrice fondamentale de ce système linéaire commune. Il donne un changement de coordonnées $y = Q^{-1}(t)x$ avec $Q(t + 2T) = Q(t)$ qui transforme le système périodique en un système traditionnel linéaire à coefficients constants, réels.

Notons que les solutions de l'équation différentielle linéaire forment un espace vectoriel. Une matrice $\phi(t)$ s'appelle une solution de la matrice fondamentale si toutes les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes. Une matrice $\Phi(t)$ s'appelle une solution principale de la matrice fondamentale si toutes les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes et s'il existe t_0 tel que $\Phi(t_0)$ soit l'identité. Une matrice fondamentale principale peut être construite à partir d'une matrice fondamentale à l'aide de $\Phi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)$. La solution de l'équation différentielle linéaire avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est $x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)x_0$ avec $\phi(t)$ est une solution de la matrice fondamentale.

Théorème 4.2.1 (*Théorème de Floquet*).

Soit $\dot{x} = A(t)x$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $x(t)$ est un vecteur colonne de longueur n et $A(t)$ une matrice périodique $n \times n$ de période T (c'est-à-dire $A(t + T) = A(t)$ pour toutes les valeurs réelles de t). Soit $\phi(t)$ une solution de la matrice fondamentale de cette équation différentielle. Alors, pour tous $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t + T) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\phi(T)$$

Ici, $\phi^{-1}(0)\phi(T)$ est appelée la matrice de monodromie. En outre, pour chaque matrice B (éventuellement complexe) tel que

$$e^{TB} = \phi^{-1}(0)\phi(T)$$

il existe une fonction de la matrice périodique (de période T) $t \rightarrow P(t)$ telle que

$$\phi(t) = P(t)e^{tB}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En outre, il existe une matrice réelle R et une fonction de la matrice réelle périodique (de période $2T$) $t \rightarrow Q(t)$ telle que

$$\phi(t) = Q(t)e^{tR}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Dans ce qui précède B, P, Q et R sont des matrices $n \times n$.

4.3 Application de Poincaré

En mathématiques, particulièrement en système dynamique, une application de Poincaré, nommée en l'honneur de Henri Poincaré, est une application liée à une orbite périodique (en) dans l'espace d'états (en) d'un système dynamique et un certain sous-espace de dimension moindre, appelé la section de Poincaré, transverse au flot du système. Plus précisément, on considère une orbite suffisamment proche d'une orbite périodique avec une condition initiale sur la section de Poincaré et on observe le point auquel cette orbite revient à la section pour la première fois, d'où son autre nom, application de récurrence. La transversalité de la section de Poincaré fait référence au fait que l'orbite périodique commence au travers du flot du sous-espace et non pas de façon parallèle à celui-ci. Une orbite est périodique si et seulement si sa condition initiale est un point fixe de l'application de Poincaré.

Définition 4.3.1 Soit R, M, φ un système dynamique global, où R est un nombre réel, M est l'espace des phases (en mathématique, l'espace des phases est un espace abstrait

dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié) et φ est la fonction de l'évolution, Soit γ une orbite périodique par un point p et S une section locale de différentiable et transversale de φ passant par p , appelée section de Poincaré par le biais de p .

Étant donné un voisinage ouvert et connecté $U \subset S$ de p , une fonction $P : U \rightarrow S$ est appelée carte de Poincaré pour l'orbite γ sur la section de Poincaré S par le point p Si :

- $P(p) = p$
- $P(U)$ est un voisinage de p et $P : U \rightarrow P(U)$ est un difféomorphisme
- pour chaque point x de U , semi-l'orbite positif de X croise S pour la première fois à $P(x)$

Définition 4.3.2 (Le flot d'un système différentiel).

Le *flot*, coulée, ou encore courant est, en mathématiques, un concept utilisé en géométrie différentielle. Il est associé à la notion de champ de vecteurs, c'est-à-dire à une application f , qui, à un point x d'un ouvert Ω d'un espace de Banach E , associe un vecteur de E . Un tel champ définit une équation différentielle du type $\alpha'(t) = f(\alpha(t))$. Si la fonction f est localement lipschitzienne, pour chaque point x de U , il existe un intervalle réel maximal et une fonction α_x , définie sur l'intervalle maximal, avec la condition dite de Cauchy $\alpha_x(0) = x$. Vue comme une fonction de deux variables, t et x , l'application α est appelée le flot du champ f de vecteurs. Cette définition se généralise dans le cas d'un champ de vecteurs temporel (c'est-à-dire dépendant d'une variable t qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}) et dépendant d'un paramètre λ . Le flot et le champ de vecteurs deviennent des fonctions de trois variables : t , x et λ .

4.4 Simulation

Scilab est un logiciel libre de calcul numérique multi-plate-forme fournissant un environnement de calcul pour des applications scientifiques. Il possède un langage de programmation orienté calcul numérique de haut niveau. Il peut être utilisé pour le traitement du signal, l'analyse statistique, le traitement d'images, les simulations de dynamique des

fluides, l'optimisation numérique, et la modélisation et simulation de systèmes dynamiques explicites et implicites.

Voilà la simulation de notre système dans le cas déterministe :

```
function [r]=randn()
r=rand(1,"normal");
endfunction
function [rr]=randn1()
rr=rand(1,"normal");
endfunction
// les paramètre de processus
eps=1;
lambda=0.8;
b=2.1;
c=2;
lambda2=1;
k=3;
r=4;
a1=0.8;
a=k-2*lambda2;
d=lambda*b/(a+lambda)
sigma=0;
x0=0.3; // valeur initiale
y0=1;
dt=0.01; //le pas de temps
n=5000;
//simulation
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1 :n
dw=sqrt(dt)*randn();
dx=1/eps*x(i)*(r*(1-x(i)/k)-b/c*(y(i)/(a1+x(i))))*dt+sigma*dw;
```

```

x(i+1)=x(i)+dx;
dw1=sqrt(dt)*randn1();
dy=y(i)*(b*x(i)/(a+x(i))-d)*dt+sigma*dw1;
y(i+1)=y(i)+dy;
end;
    t=0 :dt :n*dt ; le temps
figure(1);
a=gca();
a.background=color("white");
a=gcf();
a.background=color("white");
plot(x,y);
//plot(t,y,"b")
//plot(t,x,"r")
xlabel("temps","fontsize",3);
ylabel("population","fontsize",3);
La simulation de notre système dans le cas stochastique :
function [r]=randn()
r=rand(1,"normal");
endfunction
function [rr]=randn1()
rr=rand(1,"normal");
endfunction
// les paramètre de processus
eps=1;
lambda=0.8;
b=2.1;
c=2;
lambda2=1;
k=3;
r=4;

```



```
a1=0.8;
a=k-2*lambda2;
d=lambda*b/(a+lambda)
sigma=0.1;
x0=0.3; // valeur initiale
y0=1;
dt=0.01; //le pas de temps
n=5000;
//simulation
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1 :n
dw=sqrt(dt)*randn();
dx=1/eps*x(i)*(r*(1-x(i)/k)-b/c*(y(i)/(a1+x(i))))*dt+sigma*dw;
x(i+1)=x(i)+dx;
dw1=sqrt(dt)*randn1();
dy=y(i)*(b*x(i)/(a+x(i))-d)*dt+sigma*dw1;
y(i+1)=y(i)+dy;
end;

t=0 :dt :n*dt; le temps
figure(1);
a=gca();
a.background=color("white");
a=gcf();
a.background=color("white");
plot(x,y);
//plot(t,y,"b")
//plot(t,x,"r")
xlabel("temps","fontsize",3);
ylabel("population","fontsize",3);
```


Bibliographie

- [1] Bruce McNamara and Kurt Wiesenfeld, Theory of stochastic resonance, *Phys. Rev. A* 39 (1989), 4854-4869.
- [2] J.P. Eckmann and L. E. Thomas, Remarks on stochastic resonance, *J. Phys. A* 15 (1982), L261-L266.
- [3] Frank Moss and Kurt Wiesenfeld, The benefits of background noise, *Scientific American* 273 (1995), 50-53.
- [4] M. E. Gilpin, Enriched predator-prey systems : Theoretical stability, *Science* 177902994 (1972).
- [5] P. Imkeller and I. Pavlyukevich, Model reduction and stochastic resonance, *Stoch. Dyn.* 2 (2002), no. 4, 463-506.
- [6] Jack Carr, Applications of centre manifold theory, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 35, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [7] Kurt Wiesenfeld and Frank Moss, Stochastic resonance and the benefits of noise : from ice ages to crayfish and SQUIDS, *Nature* 373 (1995), 33-36.
- [8] Luca Gammaitoni, Peter Hanggi, Peter Jung, and Fabio Marchesoni, Stochastic resonance, *Rev. Mod. Phys.* 70 (1998), 223-287.
- [9] Mark I. Freidlin, Quasi-deterministic approximation, metastability and stochastic resonance, *Physica D* 137 (2000), 333-352.
- [10] Martin V. Day, On the exponential exit law in the small parameter exit problem, *Stochastics* 8 (1983), 297-323.

-
- [11] E. F. Mishchenko and N. Kh. Rozov, Differential equations with small parameters and relaxation oscillations, Plenum Press, New York, 1980.
 - [12] Neil Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Differential Equations* 31 (1979), no. 1, 53-98.
 - [13] Nils Berglund and Barbara Gentz, A sample-paths approach to noise-induced synchronization : Stochastic resonance in a double-well potential, *Ann. Appl. Probab.* 12 (2002), 1419-1470.
 - [14] Nils Berglund and Barbara Gentz, Beyond the FokkerPlanck equation : Pathwise control of noisy bistable systems, *J. Phys. A* 35 (2002), no. 9, 2057-2091.
 - [15] Nils Berglund and Barbara Gentz, Geometric singular perturbation theory for stochastic differential equations, *J. Differential Equations* 191 (2003), 1-54.
 - [16] Nils Berglund and Barbara Gentz, Metastability in simple climate models : Pathwise analysis of slowly driven Langevin equations, *Stoch. Dyn.* 2 (2002), 327-356.
 - [17] Nils Berglund and Barbara Gentz, On the noise-induced passage through an unstable periodic orbit I : Two-level model, *J. Statist. Phys.* 114 (2004), 1577-1618.
 - [18] Nils Berglund and Barbara Gentz, On the noise-induced passage through an unstable periodic orbit II : The general case, In preparation, 2005.
 - [19] Nils Berglund and Barbara Gentz, Pathwise description of dynamic pitchfork bifurcations with additive noise, *Probab. Theory Related Fields* 122 (2002), no. 3, 341-388.
 - [20] Nils Berglund and Barbara Gentz, The effect of additive noise on dynamical hysteresis, *Nonlinearity* 15 (2002), no. 3, 605-632.
 - [21] Nils Berglund and Hervé Kunz, Memory effects and scaling laws in slowly driven systems, *J. Phys. A* 32 (1999), no. 1, 15-39.
 - [22] Peter Jung, George Gray, Rajarshi Roy, and Paul Mandel, Scaling law for dynamical hysteresis, *Phys. Rev. Letters* 65 (1990), 1873-1876.
 - [23] Peter Jung and Peter Hänggi, Stochastic nonlinear dynamics modulated by external periodic forces, *Europhys. Letters* 8 (1989), 505-510.

-
- [24] L. S. Pontryagin and L. V. Rodygin. Approximate solution of a system of ordinary differential equations involving a small parameter in the derivatives. *Soviet Math. Dokl.*, 1 :237-240, 1960.
- [25] Richard Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGrawHill, New York, 1960.
- [26] Richard Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGrawHill, New York, 1960.
- [27] Richard Haberman, Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems, *SIAM J. Appl. Math.* 37 (1979), no. 1, 69-106.
- [28] Roberto Benzi, Alfonso Sutera, and Angelo Vulpiani, The mechanism of stochastic resonance, *J. Phys. A* 14 (1981), no. 11, L453-L457.
- [29] Ronald F. Fox, Stochastic resonance in a double well, *Phys. Rev. A* 39 (1989), 4148-4153.
- [30] Roberto Benzi, Giorgio Parisi, Alfonso Sutera, and Angelo Vulpiani, A theory of stochastic resonance in climatic change, *SIAM J. Appl. Math.* 43 (1983), no. 3, 565-578.
- [31] Samuel Herrmann and Peter Imkeller, Barrier crossings characterize stochastic resonance, *Stoch. Dyn.* 2 (2002), no. 3, 413-436, Special issue on stochastic climate models.
- [32] Y. Shimazu, K. Sugiyama, T. Kojima, and E. Tomida, Some problems in ecology oriented environmentology. II. Terrestrial environmentology, 1. *Earth Sci. Nagoya Univ.* 20 :31-89 (1972).
- [33] H. L. Smith, The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two-predator-one-prey competition model, *SIAM J. Appl. Math.* 42 :27-43 (1982).
- [34] A. N. Tihonov, Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives, *Mat. Sbornik N. S.* 31 (1952), 575-586.