Table des matières

Introduction

La périodicité appariaît souvent de manière implicite dans plusieurs phénomènes naturelles.
Par exemple le cas lorsque on étudie les effets des environnements fluctuants sur la dynamique de la population. Les fluctuations dans la nature sont presque périodique.

La presque périodicité est plus susceptible de descriptive avec précision les fluctuations naturelles [6]. Ce travail est consacré à l'étude des solutions faibles presque périodiques des équations différentielles stochastique et les équations aux dérivées partielles.
Depuis le début du siècle, la théorie de presque périodicité a été développée dans le cadre des problèmes liés aux équations différentielles, systèmes dynamiques et les autres domaines des mathématiques.

Les ouvrage classiques de Bohr [4], Corduneaunu [5], Fink [9] et Pankov [11] donnent une belle présentation de la notion des fonctions presque périodiques et les résultats nécessaires dans ce domaine
il ya un intérêt dans l'extension de certains résultats classiques des équations différentielles stochastiques dans des espaces de Hilbert séparables, presque tous les problèmes dans la situation réelle de vie les modèles mathématique
sont applicables et fondamentalement stochastique plutôt que déterministe la majorité des méthodes mathématiques sont basées sur les modèles déterministes.

La théorie d'analyse, fréquentèrent utilisée, dans les modèles déterministes peuvent être utilisées comme un outil pour obtenir des solutions aux équations différentielles stochastiques. Le concept de presque périodicité a été introduit par Sutsky [12] à la fin de 1930 qui a ensuite obtenu un certain raisonnable
des conditions suffisantes pour les chemins d'échantillon d'un processus stationnaire pour être presque périodique au sens de Besicovitch, c'est-à-dire $\mathbf{B}^2$ presque périodique.

Quelques décennies plus tard, deux autres enquêtes sur la presque périodicité des chemins de l'échantillon suivi le travail de pionnier de Slutsky.
En effet, Udagawa a étudié des conditions suffisantes pour qu'un processus soit presque périodique
dans le sens de Stepanov et Kawata a étudié la presque périodicité uniforme d'un processus stochastique.

Il y a dix ans, Swift a étendu les résultats de Kawata dans le cadre des processus harmonisables.
Swift fait une extension plus vaste du notion de presque périodicité uniforme similaire à celui étudié par Kawata.

Dans ce travail nous présentons et développons la notion de presque périodicité en moyenne d'ordre p, on va montrer que chaque processus presque périodiques en moyenne d'ordre p uniformément continu et stochastiquement borné
nous établissons deux résultats de composition des processus presque périodiques en moyenne d'ordre p qui sont des résultats de base, ils
sera utilisés par la suite pour l'existence et l'unicité des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p des équations différentielles stochastiques sur un espace de Hilbert réel et séparable.

Dans le premier et le deuxième chapitre on va introduire quelques notions de base dans la théorie spectrale et le calcule stochastique qui sont très nécessaire dans la suite, dans le troisième chapitre on va donner la notion de
presque périodicité et quelques propriétés dans le cas générale et le cas stochastique, en suite dans l quatrième chapitre, on va étudier l'existence des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p des
équations différentielles stochastique dans le cas autonomes et non autonome et dans le cinquième chapitre on va étudier
l'existence d'une solutions presque périodique en moyenne d'ordre p pour les équations différentielles partielles
stochastique, on va aussi étudier l'existence d'une solution presque périodique dans le sens de stepanove et le principe de point fixe de Schaulder.

Chapitre 1

Les opérateurs linéaires bornés et non bornés

1.1 Les opérateurs linéaires

Dans cette section les espaces de Banach sur le même ensemble $\mathbb{F}, 0$ $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ muni de la norme $\|\cdot\|$ (respectivement $\|\cdot\|'$) sont notés par $(\mathfrak{B}, \|\cdot\|)$, respectivement $(\mathfrak{B}', \|\cdot\|')$. $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ et le produit scalaire $< .,. >$. L'opérateur linéaire $A : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ est une application linéaire vérifie que :

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av.$$

1.1.1 Les opérateurs bornés

Définition 1.1.1 *L'opérateur linéaire $A : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ est dit borné s'il existe $K \geq 0$ tel que*

$$\|Au\| \leq K\|u\| \quad \forall u \in \mathfrak{B}. \tag{1.1}$$

Si $A : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ est un opérateur linéaire borné tel que sa norme $\|A\|$ inférieur à K d'après la formule (1.1) *on a donc :*

$$\|A\| := \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|'}{\|u\|}. \tag{1.2}$$

L'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathfrak{B}$ *vers* $\mathfrak{B}'$ *est noté par* $\mathbf{B}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$. *En particulier* $\mathbf{B}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$. *on le note par* $\mathbf{B}(\mathfrak{B})$.

Les propriétés des opérateurs bornés

* Si : $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ un opérateur linéaire borné les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - i) A est. continu ;
  - ii) A est continu au point "0" ;
  - iii) il existe K>0 telque $\|Au\|' \leq K\|u\|$ pour chaque $u \in \mathfrak{B}$.
* Si A,B sont des opérateurs linéaires bornés et si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $A + B$, $\lambda.A$ et AB sont aussi des opérateurs bornés satisfaites :
  - i) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
  - ii)$\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;
  - iii)$\|AB\| \leq \|A\| + \|B\|$.

L'adjoint d'un opérateur borné

Définition 1.1.2 *Soit* $A \in \mathbf{B}(\mathbb{H})$, *la quantité* $< Ax, y >$ *est linéaire en* x *et son conjugné est linéaire en* y *et borné. Il exicte un unique* $A^* \in \mathbf{B}(\mathbb{H})$ *telque :*

$$< Ax, y >=< x, A^*y > \quad \forall x, y \in \mathbb{H}$$

l'application $y \longrightarrow A^*y$ *est appelé l'adjoint d'opérateur linéaire* A.

l'auto-adjoint

Définition 1.1.3 *L'opérateur linéaire borné* $A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ *est appelé auto-adjoint ou symétrique si* $A = A^*$.

l'opérateur inverse

Définition 1.1.4 *Un opérateur linéaire borné* $A \in \mathbf{B}(\mathfrak{B})$ *est dit inversible s'il existe* $B \in \mathbf{B}(\mathfrak{B})$ *tel que* $AB = BA = I$ *dans ce cas l'opérateur* B *appelé l'opérateur inverse de* A.

l'opérateur compact

Définition 1.1.5 *L'opérateur linéaire borné A dans $\mathbf{B}$ est dit compact si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbf{B}$ avec $\|x_n\| < 1, n \in \mathbb{N}$ la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur $\mathbf{B}$.*
L'ensemble des opérateurs compactes est noté par $\mathcal{K}(\mathfrak{B})$.

L'opérateur de Hilbert Schmidt

Définition 1.1.6 *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale d'un espace de Hilbert* H, *un operateur $A \in \mathbf{B}(\mathbb{H})$ est appelé Hilbert schmidt si*

$$\|A\|_2 = (\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2)^{1/2} < \infty. \tag{1.3}$$

* *Si l'équation* (1.3) *est satisfaite $\|A\|_2$ est appelée la norme de Hilbert schmidt de A.*
* *La classe des opérateurs linéaire de Hilbert schmidt sur $\mathbb{H}$ est noté par $\mathbb{L}_2(\mathbb{H})$ en générale si $\mathbb{H}'$ un autre espace de Hilbert, on note l'ensemble des opérateurs bornés de Hilbert schmidt sur $\mathbb{H}$ vers $\mathbb{H}'$ par $\mathbb{L}_2(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$.*

1.1.2 L'opérateur linéaire non borné

Définition 1.1.7 *l'opérateur linéaire non borné sur $\mathbf{B}$ vers $\mathbf{B}'$ est le couple $(D(A), A)$ avec $D(A) \subset \mathbf{B}$ un sous espace de $\mathbf{B}$ appelé domaine de A et A est une application linéaire $A : D(A) \subset \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ il est possible que A n'est pas continu.*

1.1.3 Les exemples des opérateurs non bornés

*__L'opérateur de Laplace à une seule dimension__ :
On pose que $\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, on considère un opérateur de Laplace à une seule dimension définit par :

$$D(A) = W^{2,2}(\mathbb{R}) = \mathbb{H}^2(\mathbb{R}) \quad Au = -u''$$

pour tout $u \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$. On dit que $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ est équipé au norme définit par :

$$\|\psi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt \quad \forall \psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$$

maintenant on considère la suite des fonctions définit par :

$$\psi_n(t) = \exp^{n|t|}, n = 1, 2, ...$$

il est claire que $\forall n = 1, 2... \quad \psi_n \in D(A) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$ on a :

$$\|\psi_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\exp^{-2n|t|} dt = \frac{1}{n}$$

et

$$\|A\psi_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} n^4 |\exp^{-2n|t|} dt = n^3.$$

Donc, $\frac{\|A\psi_n\|_2}{\|\psi_n\|_2} = n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Donc A est un opérateur linéaire non borné sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

***L'opérateur dérivable**(dérivé) est définit par

$D(A) = C^1(0, 1)$ l'ensemble des fonctions continues et dérivables sur $(0, 1)$ on considère la suite des fonctions définit par :

$$\phi_n(t) = t^n, n = 1, 2, ...$$

il est claire que $\forall n = 1, 2... \phi_n \in C^1(0, 1)$ on a

$$\|\phi_n\|_2^2 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \quad et$$

$$\|A\phi_n\|_2^2 = \int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt = \frac{n^2}{2n-1}$$

on a aussi :

$$\frac{\|A\phi_n\|_2}{\|\phi_n\|_2} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \longrightarrow \infty \quad n \longrightarrow \infty$$

donc A est un opérateur linéaire non borné sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

***L'opérateur multiplicatif**

Soit $\theta \in \mathcal{K}$ est intervalle arbitraire et soit $C_0(\theta)$ l'ensemble des fonctions continues $u : \theta \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfait $\forall \varepsilon > 0$ il existe un intervalle compact $I_\varepsilon \subset \theta$ telque :

$$|u(s)| < \varepsilon, \forall s \in \theta \setminus I_\varepsilon.$$

On définit l'opérateur multiplicatif :

$$\begin{cases} D(M_\gamma) = \{u \in C_0(\theta) : \gamma u \in C_0(\theta)\} & ; \\ M_\gamma u = \gamma(x)u, \forall u \in D(A) & . \end{cases} \quad \theta\gamma : \theta \longrightarrow \mathbb{C} \text{ est continue.}$$

donc M_γ est un opérateur linéaire non borné

Le graphe d'un opérateur non borné :

Définition 1.1.8 *Si $A : D(A) \subset \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est un opérateur linéaire non borné sur* $\mathbf{B}$ *donc son graphe est défini par*

$$\mathfrak{g}(A) = \{(x, Ax) \in \mathbf{B} \times \mathbf{B} : x \in D(A)\}.$$

L'extension d'un opérateur linéaire non borné :

Définition 1.1.9 *Si A et B sont des opérateurs dans* $\mathbf{B}$ *donc A est dit étre une extension de B si $D(B) \subset D(A)$ et $Au = Bu$ pour tout $u \in D(B)$ dans ce cas on le note par $B \subset A$ en outre $B \subset A$ si et seulement si $\mathfrak{g}(B) \subset \mathfrak{g}(A)$*

Les opérateurs linéaires fermés et refermables

Définition 1.1.10 *L'opérateur linéaire $A : D(A) \subset \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est dite fermé si son graphe $\mathfrak{g}(A) \subset \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est fermé*

Définition 1.1.11 *Un opérateur $A : D(A) \subset \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est dit refermable si sa extension est fermé. si A est refermables donc l'extension est appelé fermeture*

La théorie spectrale d'opérateur linéaire non borné

Si $A : D(A) \subset \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est un opérateur linéaire fermé sur $\mathfrak{B}$ alors $\rho(A)$ l'ensemble des résolvantes de A est défini par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{I} - A \quad est \quad l'un - à - un, et(\lambda\mathbf{I} - A)^{-1} \in \mathbf{B}(\mathfrak{B})\},$$

et $\sigma(A)$ le spectre de A est le complément de l'ensemble résolvant $\rho(A)$ en $\mathbb{B}$.
Maintenant, si $\lambda \in \rho(A)$, alors la fonction opérateur à valeurs $R(\lambda, A) := (\lambda\mathbf{I} - A)^{-1}$: $\rho(A) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathfrak{B})$ est appelée l'opérateur résolvant de A. Il convient de mentionner que $\rho(A) = \emptyset$ si A est fermé.
Comme pour les opérateurs linéaires bornés, le spectre d'un opérateur non borné peut étre divisée en trois sous-ensemble disjoints du plan complexe telque :

$$\sigma(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$$

ou $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$, $\sigma_p(A)$, sont respectivement le spectre continu, le spectre résiduel et le spectre du points d'opérateur A défini par :

1. $\lambda \in \sigma_c$ si $\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda\mathbf{I} - A \quad est \quad l'un - à - un$ et $R\overline{(\lambda\mathbf{I} - A)} = \mathfrak{B}$,
2. $\lambda \in \sigma_r$ si $\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda\mathbf{I} - A \quad est \quad l'un - à - un$ et $R\overline{(\lambda\mathbf{I} - A)} \neq \mathfrak{B}$,
3. $\lambda \in \sigma_p$ si $\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda\mathbf{I} - A \quad n'est \quad pas \quad un - à - un.$

Opérateur linéaire symétrique et auto-adjoint

Définition 1.1.12 *Si $A : D(A) \subset \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ est un opérateur linéaire densément défini, son adjoint notée A^* est défini de maniére unique par*

$$D(A^*) = \{v \in \mathbb{H} : u \longrightarrow < Au, v > est \quad \mathbb{H} - continu \quad surD(A)\}$$

et $< Au, v >=< u, A^*v >, \quad \forall u \in D(A) \quad et \quad v \in D(A^*)$ on peut définir les applications suivantes
$U : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ et $V : \mathbb{H} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par

$U(x,y)=(y,-x)$ et $V(x,y)=(y,x)$ pour touts $(x,y)\in\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$ il est claire que, U et V sont des isomorphismes de $\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$ vers $\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$ alors leurs inverces sont définis par

$$U^{-1}=(-y,x)$$

et

$$V^{-1}=(y,x)$$

pour tout $x,y\in\mathbb{H}$.

Si A est un opérateur linéaire (peut étre non borné) densément défini, et que $\overline{D(A)}$=$\mathbb{H}$ on peut facilement remarquer que

$$\mathfrak{g}(A^*)=U(\mathfrak{g}(A)^{\perp})=(U\mathfrak{g}(A))^{\perp}$$

1.2 Les opérateurs linéaires sectoriels

1.2.1 Définitions de base

Définition 1.2.1 *L'opérateur linéaire $A : D(A)\subset\mathfrak{B}\longrightarrow\mathfrak{B}$ (n'est pas nécessairement densément défini) est dit sectoriel s'il vérifie les conditions suivantes : il exicte $\zeta\in\mathbb{R}$, $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, et $M>0$ tel que*

1. *$\rho(A)\supset S_{\theta,\zeta}:=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda\neq\zeta,|\arg(\lambda-\zeta)|<\theta\}$, et*
2. *$\|R(\lambda,A)\|\leq\frac{M}{\lambda-\zeta}$ pour chaque $\lambda\in S_{\theta,\zeta}$.*

1.3 Semi groupe d'un opérateur linéaire

Définition 1.3.1 *Soit $(\mathfrak{B},\|\cdot\|)$ un espace de Banach. la famille des opérateurs bornés $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}:\mathfrak{B}\longrightarrow\mathfrak{B}$ est dit semi groupe si elle vérifie les propriétés suivante :*

1. *$T(0)=I$; et*
2. *$T(t+s)=T(t)T(s)$ pour tout $s,t\geq 0$*
3. *$\lim\limits_{t\searrow 0}\|T(t)-I\|=0$ alors le semigroupe $T(t)$ est dite uniformément continu*

1.3.1 Générateur infinitésimal

Définition 1.3.2 *Si* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *est un semi groupe d'un opérateur linéaire borné on peut l'associer avec un opérateur* $(D(A), A)$ *appelé générateur infinitésimal d'un semi groupe définit par*

$$D(A) = \{u \in \mathfrak{B} : \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} existe\} \tag{1.4}$$

$$Au := \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} pourtoutu \in D(A). \tag{1.5}$$

Définition 1.3.3 *Un opérateur* A *est un générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformément d'opérateur linéaire borné* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ *si et seulement si* A *est borné. Dans ce cas on peut choisir que* $T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$.

1.3.2 Semi groupe analytique

Définition 1.3.4 *Le semi groupe* $T(t)$ *sur* $\mathfrak{B}$ *est appelé analytique quand tout* $t \longrightarrow T(t)$ *est analytique dans* $(0, \infty)$ *à valeurs dans* $\mathbf{B}(\mathfrak{B})$.

1.3.3 Semi groupe hyperbolique

Définition 1.3.5 *Soit* A *un opérateur sectoriel sur* $\mathfrak{B}$ *associe à un semigroupe analytique* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$. *Le semi groupe* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est dit hyperbolique s'il existe une projection* P *et des constantes* $M, \delta > 0$ *tel que chaque* $T(t)$ *commute avec* P, $T(t) : R(Q) \longrightarrow R(Q)$ *est inversible et*

$$\|T(t)Px\| \leq Me^{-\delta t} pourt \geq 0, \tag{1.6}$$

$$\|T(t)Qx\| \leq Me^{\delta t} pourt \leq 0, \tag{1.7}$$

où $Q = 1 - P$ *et* $T(t) := (T(-t))^{-1}$ *pour* $t < 0$. *Un semi groupe analytique* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est hyperbolique si et seulement si voire*

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset. \tag{1.8}$$

1.4 Les espaces intermédiaires

Soit A un opérateur linéaire sectoriel sur $\mathfrak{B}$ est associé par un semigroupe analytique satisfait : pour tout $t > 0$,

$$\|T(t)\| \leq M_0 e^{-\omega t}, \|tAT(t)\| \leq M_1 e^{-\omega t},$$

pour M_0, M_1, ω.

Définition 1.4.1 *Soit $\alpha \in (0,1)$ l'espace de Banach $(\mathfrak{B}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ estapplé un espace intermédiaire entre $\mathfrak{B}$ et $D(A)$ où un espace de la classe $\mathfrak{J}_\alpha$, si $D(A) \subset \mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}$ et il y a une constante $C > 0$ tel que*

$$\|u\|_\alpha \leq C\|u\|^{1-\alpha}\|u\|_A^\alpha, \qquad u \in D(A). \tag{1.9}$$

1.4.1 Les espaces $D_A(\alpha, p)$ et $D_A(\alpha)$

Définition 1.4.2 *Soit $A : D(A) \subset \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un opérateur sectoriel. Définie la classe des espaces intermédiaire $D_A(\alpha, p)$ et $D_A(\alpha)$ entre $\mathfrak{B}$ et $D(A)$ (pour $\alpha \in (0,1)$) et $1 \leq p \leq \infty$ par*

$$D_A(\alpha, p) := \{ \in \mathfrak{B} : t \longrightarrow v(t) = \|t^{1-\alpha-1/p}AT(t) \in \mathbf{L}^p(0,1)\|\}$$

muni de la norme suivante

$$\|u\|_{D(\alpha,p)} = \|u\| + [u]_{D(\alpha,p)} = \|u\| + \|v\|_{\mathbf{L}^p(0,1)};$$

et

$$D_A(\alpha) = \{u \in D(\alpha, \infty) : \underset{t \longrightarrow O}{lim} t^{1-\alpha}AT(t)u = 0\}.$$

1.5 Famille d'évolution

Définition 1.5.1 *La famille des opérateurs linéaires*

$$\{U(t,s) : t, s \in \mathbb{R} \quad tel \quad que \quad t \geq s\}$$

sur $\mathfrak{B}$ *associe à* $A(t)$ *tel que* $U(t,s)\mathfrak{B} \subset D(A(t))$ *pour tout* $t,s \in \mathbb{R}$ *avec* $t \geq s \geq$, *et*

1. $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ *pour* $t,s,r \in \mathbb{R}$ *tel que* $t \geq s \geq r$,
2. $U(t,t) = I$ *pour* $t \in \mathbb{R}$;
3. $(t,s) \longrightarrow U(t,s) \in \mathbf{B}(\mathfrak{B})$ *est continue pour* $t > s$; *et*
4. $U(.,s) \in C^1((s,\infty), \mathbf{B}(\mathfrak{B}))$, $\frac{\partial U}{\partial t}(t,s) = A(t)U(t,s)$

est appelée une famille d'évolution.
Pour une famille des opérateurs linéaires fermés $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *l'existence d'une famille d'évolution qui lui associe n'est pas toujour garanti, mais si la famille* $A(t)$ *vérifie les conditions de Terreni-Acquistpace,qui sont :*
il existe $\lambda_0 \geq 0$ *telque l'opérateur linéaire* $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *satisfait*

$$\Sigma_\phi \cup \{0\} \subseteq \rho(A(t) - \lambda_0) \ni \lambda, \|R(\lambda, A(t) - \lambda_0)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|} \tag{1.10}$$

et

$$\|(A(t) - \lambda_0)R(\lambda_0, A(t) - \lambda_0)[R(\lambda_0, A(t)) - R(\lambda_0, A(s))]\| \leq L|t-s|^\mu |\lambda|^{-v} \tag{1.11}$$

pour $t,s \in \mathbb{R}, \lambda \in \Sigma_\phi := \{\mathbb{C}/\{0\} : |\arg| \leq \phi\}$ *avec* $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $L, K \geq 0$, *et* $\mu, v \in (0,1]$ *avec* $\mu + v \geq 1$, *alors la famille des opérateurs linéaires* $A(t)$ *a une famille d'évolution. On a aussi la propriété suivante :*

$$\bullet \|A(t)^k U(t,s)\| \leq C(t-s)^{-k} \tag{1.12}$$

pour $0 < t - s \leq 1$, $k = 0,1$;
$\bullet \partial_s^+ U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x$ *pour* $t > s$ *et* $x \in D(A(s))$ *avec* $A(s)x \in \overline{D(A(s))}$.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques

2.1 Processus de Wiener dans un espace de Hilbert séparable

Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{H}$ sont des espaces de Hilbert séparables avec les normes $\|\cdot\|_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ et les produits scalaires $< .,. >_{\mathbb{K}}$, respectivement $< .,. >_{\mathbb{H}}$

2.1.1 Processus de Wiener dans un espace de Hilbert séparable

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $\beta_n(n = 1, 2, 3, ...)$ une suite de mouvements browniens standards à valeurs réelles indépendantes sur cet espace. Fixons

$$\mathbb{W}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \beta_n(t) e_n \quad t \geq 0,$$

où $\lambda_n \geq 0 (n \geq 1)$ sont des nombres réels positives et $(e_n)_{n \geq 1}$ une base orthonormé complète dans $\mathbb{K}$.
Soit $\mathcal{L} \in \mathbf{B}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est un opérateur définit par $\mathcal{L} e_n = \lambda_n e_n$ tel que

$$Tr\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty.$$

Il est claire que, $\mathbb{E}(\mathbb{W})(t) = 0$ et pour tous $t \geq s \geq 0$, la distribution de $\mathbb{W}(t) - \mathbb{W}(s)$ est $\mathfrak{N}(0, (t-s)\mathcal{L})$.

Le processus stochastique $\mathbb{W}(t)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est appelé processus de $\mathcal{L}$-Wiener. Dans le cas où l'ensemble du temps est l'ensemble $\mathbb{R}$ on peut obtient ce qui suit : soit $\{\mathbb{W}_i, t \in \mathbb{R}\}, i = 1, 2$ sont indépendants à valeurs dans $\mathbb{K}$ alors

$$\mathbb{W}(t) = \begin{cases} \mathbb{W}_1(t) & si \quad t \geq 0, \\ \mathbb{W}_2(-t) & si \quad t \leq 0. \end{cases}$$

est un processus de $\mathcal{L}$-Wiener à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2.2 L'intégrale stochastique dans l'espace de Hilbert

Avant de définir l'intégrale stochastique dans l'espace de Hilbert, Nous introduisons les sous ensemble suivant :
$\mathbb{K}_0 = \mathcal{L}^{1/2}\mathbb{K}$ est un espace de Hilbert équipé de la norme :

$$\|u\|_{\mathbb{K}_0} = \|\mathcal{L}^{1/2}u\|_{\mathbb{K}}, \quad u \in \mathbb{K}_0,$$

et définit l'espace des opérateurs
$\mathbb{L}_2^0 = \mathbb{L}_2^0(\mathbb{K}_0, \mathbb{H}) = \{\psi \in \mathbf{B}(\mathbb{K}_0, \mathbb{H}) Tr[(\psi\mathcal{L}^{1/2})(\psi\mathcal{L}^{1/2})^*] < \infty\}$, est l'espace de tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt dans $\mathbb{K}_0$ vers $\mathbb{H}$ où $\mathbb{K}_0 = \mathcal{L}^{1/2}\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}_2^0$ est un espace de Hilbert séparable muni de la norme

$$\|\psi\|^2_{\mathbb{L}_2^0} = Tr[(\psi\mathcal{L}^{1/2})(\psi\mathcal{L}^{1/2})^*] \text{ pour chaque } \psi \in \mathbb{L}_2^0.$$

Pour un opérateur linéaire borné $\psi \in \mathbf{B}(\mathbb{K}, \mathbb{H})$ sa norme est donnée par :

$$\|\psi\|^2_{\mathbb{L}_2^0} = Tr[\psi\mathcal{L}\psi^*].$$

Pour chaque $T \geq 0$, soit $\phi := \{\phi(t), t \in [0, T]\}$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{L}_2^0$, $\mathfrak{F}_t$-addapté et pour chaque $t \in [0, T]$ on définit la norme :

$$\|\phi\|_t := \{\mathbb{E}\int_0^s Tr[(\phi\mathcal{L}^{1/2})(\phi\mathcal{L}^{1/2})^*]ds\}. \tag{2.1}$$

En génèral, nous notons tous les processus prévisible ϕ à valeurs dans $\mathbb{L}_2^0$ tel que $\|\phi\|_T < \infty$ par $\mathfrak{U}^2([O,T],\mathbb{L}_2^0)$. L'intégrale stochastique $\int_0^t \phi(s)d\mathbb{W}(s) \in \mathbb{H}$ sera défini pour tout $\phi \in \mathfrak{U}^2([O,T],\mathbb{L}_2^0)$. par

$$\int_0^t \phi(s)d\mathbb{W}(s) = L^2 - \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_0^t \phi(s)d\beta_i(s), \quad t \in [0,T],$$

où $\mathbb{W}$ est un processus de $-$Wienr

Proposition 2.2.1 [7] *Pour un arbtraire $T \geq 0$, soit $\phi \in \mathfrak{U}^2([O,T],\mathbb{L}_2^0)$ alors l'intégrale stochastique $\int_0^t \phi(s)d\mathbb{W}(s)$ est une martingale continue, quarré intégrable sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{H}$ et*

$$\mathbb{E}\| \int_0^t \phi(s)d\mathbb{W}(s)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|\phi\|_t^2, t \in [0,T] \tag{2.2}$$

et pour chaque processus adapté ϕ à valeurs dans $\mathbb{L}_2^0$, la relation générale de (2.2) est donnée par :

$$\mathbb{E}\| \int_0^t \phi(s)d\mathbb{W}(s)\|_{\mathbb{H}}^2 \leq \mathbb{E}\int_0^t \|\phi\|_{\mathbb{L}_2^0}^2 \tag{2.3}$$

Proposition 2.2.2 [7] *Pour chaque $p \geq 2$ et pour un processus arbitraire et prévisible $\phi(t), t \in [0,T]$ on a*

$$\mathbb{E}[\sup_{s\in[O,t]} \| \int_0^s \phi(s)d\mathbb{W}(s)\|^p] \leq C_p\mathbb{E}[\int_0^s \|\phi(s)\|_{\mathbb{L}_2^0}^2 ds]^{p/2} \tag{2.4}$$

pour certain C_p.

2.3 Intégrale stochastique de type de convolution

On définit l'intégrale stochastique par :

$$I(t) = \int_0^t U(t,s)\psi(s)d\mathbb{W}(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

où ψ est un processus mesurable à valeurs dans $\mathbb{L}_2^0$ Cette intégrale sera défini et vérifié que :

$$\int_0^t \|U(t,s)\psi(s)\|^2_{\mathbb{L}_2^0} ds < \infty p.s$$

et que cette intégrale est l'intégrale de type de convolution sa forme est donnée par :

$$\int_0^\sigma (t-s)^{\zeta-1}(s-\sigma)^{-\zeta} ds = \frac{\Pi}{\sin(\Pi\zeta)} \text{ pour } \sigma \leq s \leq t, \zeta \in (0,1).$$

Proposition 2.3.1 [7] *Soit $p > 2, \alpha \in [0, \frac{p-2}{2p})$ et soit $\psi : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{L}_2^0$ est un processus stochastique mesurable et adapté, vérifie que :*

$$\int_0^T \mathbb{E}\|\psi(s)\|^p_{\mathbb{L}_2^0} ds < \infty$$

alors

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} \| \int_0^t U(t,s)\psi(s)d\mathbb{W}(s)\|^p_\alpha] \leq C \int_0^T \mathbb{E}\|\psi(s)\|^p_{\mathbb{L}_2^0} ds$$

2.4 L'existence des solutions des équations différentielles stochastiques dans l'espace de Hilbert

2.4.1 L'existence et l'unicité

On considère une équation différentielle stochastique sur $\mathbb{H}$ de la forme suivante

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))d\mathbb{W}(t), t \in [0,T], \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

ou $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ et $g : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{L}_2^0$ sont Borel measurable, $x_0 \in \mathbb{H}$ et $\mathbb{W}$ est un processus de $\mathcal{L}$-Winer sur $\mathbb{H}$, on peut écrire l'intégral d'équation stochastique par :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))d\mathbb{W}(s).$$

Nous supposons que f et g satisfaites les conditions de liptschiz :
il existe une constante positive C tel que

$$\|f(x-y)\|_{\mathbb{H}} \leq C\|x-y\|_{\mathbb{H}}$$

$$\|g(x-y)\|_{\mathbb{L}_2^0} \leq C\|x-y\|_{\mathbb{L}_2^0}.$$

On a la proposition suivante :

Proposition 2.4.1 [7]
Il existe une solution unique X d'équation $(2,2)$

$$Lh =< h'(x), f(x) >_{\mathbb{H}} +(1/2)Tr[g^*(x)h''(x)g(x)],$$

avec L est un générateur et X est un processus de diffusion a un trajectoire continu.

2.4.2 La solution L^2-bornée d'une équation différentielle stochastique

Nous avons intéressés d'étudier la solution L^2-bornée de l'équation différentielle stochastique de la forme suivante

$$dX(t) = \mathcal{A}X(t) + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))d\mathbb{W} \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

avec la condition initiale suivante

$$X(0) = x_0 \in D(\mathcal{A}),$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ est. un opérateur linéaire fermé et densément défini (il est possible qu'il est borné), $f : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{L}_2^0$ sont des fonctions conjointement continues et $\mathbb{W}(t)$ est processus de $\mathcal{L}$-Winer à valeurs dans $\mathbb{K}$ on va déclarer les hypothèses suivantes :
$(2H)_0$ L'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe expentiellement stable $(T(t))_{t\geq 0}$ définit sur $\mathbb{H}$ et qu'il existe des constantes $M, \delta > 0$ telque

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}, \quad t \geq 0.$$

$(2H)_1$ Les coefficients $f(.,.)$ et $g(.,.)$ satisfaites les conditions de liptschiz et de croissement linéaire il existe une constante positive vérifie les condition suivantes :

$$\begin{aligned} \|f(t,x)-g(t,y)\| &\leq C_1\|x-y\|; &(2.7)\\ \|f(t,x)-g(t,y)\|_{\mathbb{L}_2^0} &\leq C_2\|x-y\|, &(2.8)\end{aligned}$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$, x et $y\in\mathbb{H}$.
$(2H)_2$ Il existe une constante C telle que

$$\|f(t,x)\|^2+\|g(t,x)\|^2_{\mathbb{L}_2^0}\leq C,$$

pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{H}$.

Définition 2.4.1 *Le processus stochastique* $\{X(t),t\in\mathbb{R}\}$ *est dit solution faible de l'équation* (2.2) *si*

1. $X(t)$ *est adapté à* $\mathfrak{F}_t$
2. $X(t)$ *est continu en* t *presque sûrement ;*
3. $X(t)$ *est mesurable avec* $\int_{-\infty}^t\|X(t)\|^2dt<\infty$ *presque sûrement pour chaque* $T>0$ *et*

$X(t)=T(t)X(s)+\int_s^t T(t-\sigma)f(\sigma,X(\sigma))d\sigma+\int_s^t T(t-\sigma)g(\sigma,X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$ *pour tout* $t\geq s$ *avec une probabilité égale à un.*

On note l'ensemble des variables aléatoires p-intégrables à valeurs dans $\mathbb{H}$ par $\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})$ avec $p\geq 2$ et que $\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})$ est un espace de Banach s'il est équipé par la norme qu'est défini par
$\|V\|_{\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})}:=[\mathbb{E}\|V\|^p]^{1/p}$, pour chaque $V\in\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})$.
Soit $\mathbf{BUC}(\mathbb{R},\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}))$ l'ensemble de tous les processus $X=\{X(t)\in\mathbb{R},\}$ bornés et uniformément continus et que $\mathbf{BUC}(\mathbb{R},\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}))$ est un espace de Banach qu'il est équipé par la norme suivante :
$\|X\|_\infty=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|X(t)\|_{\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})}$

Théorème 2.4.1 [7] *On suppose que les hypothèses $(2H)_0, (2H)_1$ et $(2H)_2$ satisfaites. L'équation* (2.2) *a une solution faible L^2-bornée unique et uniformément continue qu'est donnée par*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)f(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)g(\sigma, X(\sigma))d(\sigma)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$ quand $\Theta := 2M^2(\frac{C_1}{\delta^2} + \frac{C_2}{\delta}) < 1$.

Chapitre 3

Les fonctions aléatoires presque périodiques en moyenne d'ordre p

3.1 Les fonctions presque périodiques

3.1.1 Définitions de base

Soit $(\mathfrak{B}, \| \bullet \|)$ est un espace de Banach , l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{B}$ est noté par $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Comme d'habitude $\mathbf{B}\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ l'espace de tous les fonctions continues bornnées de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{B}$ équipé du sup norme. De même $\mathbf{B}\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathfrak{B})$ désigne l'espace de toutes les fonctions continues et bornés de $(\mathbb{R} \times \mathfrak{B})$ dans $\mathfrak{B}$.

Définition 3.1.1 *Une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ est appelée (Bohr) presque périodique si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $T_0(\varepsilon)$ telque chaque intervalle de longueur $T_0(\varepsilon)$ contient le nombre τ admet la propriété suivante :*

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon \text{ pour chaque } t \in \mathbb{R}$$

le nombre τ ci-dessus est alors appelé ε-translation de f l'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathbf{AP}(\mathfrak{B})$ il bien connu que si $f \in \mathbf{AP}(\mathfrak{B})$, sa moyenne définie par

$$\mathcal{M}(f) := \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} f(t)\, dt.$$

On a pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$ la limite suivante

$$a(f,\lambda) = \underset{n\longrightarrow\infty}{lim} \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} f(t)\ \exp(-i\lambda t)\ dt$$

existe et s'appelle le transformé de Bohr de f. il est bien connu que $a(f,\lambda)$ est non nulle au plus dénombrable, l'ensemble défini par

$$\sigma_b(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} : a(f,\lambda) \neq 0\}$$

est appelé le spectre de Bohr de f.

Théorème 3.1.1 *(Théorème d'approximation)*[3]
Soit $f \in \mathbf{AP}(\mathbb{B})$, pour chaque $\varepsilon > 0$ il exicte un polynôme trigonométrique

$$P_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k t)$$

ou $a_k \in \mathfrak{B}$ et $\lambda_k \in \sigma_b(f)$ de telle sorte que $\|f(t) - P_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Nous avons aussi les propriétés de la moyenne suivantes

Proposition 3.1.1 *Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions presque périodiques et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ alors*
- $*\ \mathcal{M}(\overline{f}(t)) = \overline{\mathcal{M}}(f(t))$;
- $*\ \mathcal{M}(\alpha f(t)) = \alpha\mathcal{M}(f(t))$;
- $*\mathcal{M}(f(t)) \geq 0$ si $f \geq 0$;
- $*\mathcal{M}(f(t) + g(t)) = \mathcal{M}(f(t)) + \mathcal{M}(g(t))$.

De plus si $(f_n(t))$ est une suite des fonctions presque périodiques qui converge uniformément vers $f(t)$ alors

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{lim} \mathcal{M}(f_n(t)) = \mathcal{M}(f(t)).$$

Remarque Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{B}$ sont des fonctions presque périodiques et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors
- si f et g ont des valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $f + g$ et $f.g$ sont presque périodique
- Les fonctions $t \longrightarrow f(t + \alpha)$, $t \longrightarrow f(\alpha t)$ et $t \longrightarrow \alpha f(t)$ sont presque périodique
- Chaque fonction presque périodique est borné

3.1.2 Les propriétés des fonctions presque périodiques

Proposition 3.1.2 [2] *Si $f :\longrightarrow \mathfrak{B}$ est presque périodique, alors f est uniformément continu en $t \in \mathbb{R}$ de plus $R(f) = \{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$, est pré compact dans $\mathfrak{B}$.*

Preuve
Tout d'abord, on a chaque polynôme trigonométrique est uniformément continu. Soit $f \in \mathbf{AP}(\mathfrak{B})$ alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il exicte un estimateur du polynome trigonométrique P_ε dans $\mathfrak{B}$ telque

$$\|f(t) - P_\varepsilon\| < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

• Pour la continuité uniforme de P_ε, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|P_\varepsilon(t_1) - P_\varepsilon(t_2)\| < \tfrac{\varepsilon}{3},\ |t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$$

ensuite

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \|f(t_1) - P_\varepsilon(t_1)\| + \|P_\varepsilon(t_1) - P_\varepsilon(t_2)\| + \|P_\varepsilon(t_2) - f(t_2)\|$$

alors

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon,\ |t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$$

et donc f est uniformément continue.
• Il reste de montrer que $R(f) = \{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est pré compact dans $\mathfrak{B}$. et aussi que f presque périodique, pour chaque $\varepsilon > 0$ il exicte $I_\varepsilon > 0$ telque chaque intervalle de longueur I_ε contient le nombre τ tel que :

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \tfrac{\varepsilon}{2},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On a $f([0, I_\varepsilon])$ est un compact sur $\mathfrak{B}$, nous choisissons une suite finie, $t_1, ..., t_n \in [0, I_\varepsilon]$ tel que

$$f(t) \in \cup_{i=1}^{n} B(f(t_i), \tfrac{\varepsilon}{2});\ i = 1, 2, ...$$

où $B(x, r) = \{y \in \mathfrak{B} : \|y - x\| \leq r\}$. Maintenant, pour $t \in \mathbb{R}$, $\tau = \tau(t)$ et $0 < t+\tau < I_\varepsilon, t_j$ un élément de la suite $t_1, ..., t_n$ telle que $f(t+\tau) \in B(f(t_i), \varepsilon)$ alors

$$\|f(t)-f(t_j)\| \ leq\|f(t)-f(t+\tau)\|+\|f(t+\tau)-f(t_j)\|<\varepsilon$$

donc

$$R(f) \subset \cup_{i=1}^{n} B(f(t_i), \tfrac{\varepsilon}{2});$$

en déduit que $R(f)$ est pré compact.

Proposition 3.1.3 [2] *Soit* $f \in \mathbf{AP}$, *si* $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, *alors* $f * g$ *est presque périodique*

Preuve Il est claire que $t \longrightarrow (f*g)(t)$ est continue et $|f*g| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ donc $f*g \in \mathbf{BC}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
• Il reste de prouver que $f*g$ est presque périodique
• Il est claire que si $g \equiv 0$ il n'y a rien à prouver
• Si $g \neq 0$ et comme $f \in \mathbf{AP}(\mathbb{R})$, pour chaque $\varepsilon > 0$, il exicte $T_0(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ il exicte $\tau \in [\delta, \delta + T_0(\varepsilon)]$ avec

$$|f(\sigma+\tau)-f(\sigma)| < \tfrac{\varepsilon}{\|g\|_1} \text{ pour chaque } \sigma \in \mathbb{R}.$$

En particulier, la condition suivante :

$$|f(t-s+\tau)-f(t-s)| < \frac{\varepsilon}{\|g\|_1} pour chaque \sigma = t-s \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Maintenant

$$(f*g)(t+\tau)-(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(t-\sigma+\tau)-f(t+\sigma)\} \quad g(\sigma)d\sigma, t \in \mathbb{R}.$$

A partir de l'équation (3.1) et le fait que $g \in L^1(\mathbb{R})$ il est claire que $\|\sigma_\tau(f*g)-(f*g)\|_\infty < \varepsilon$ et donc$f*g \in \mathbf{AP}(\mathbb{R})$

Proposition 3.1.4 [2] *Si* $f, g \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *sont des fonctions presque périodique et s'il existe une constante* $m > 0$ *tel que*

$$m < |g(t)| \text{ pour chaque } t \in \mathbb{R}.$$

Alors $(f/g)(t) = f(t)/g(t)$ *est presque périodique*

Preuve
Il suffit de montrer que$1/g(t)$ est presque périodique tel que :

$$|g(t+\tau) - g(t)| < m^2\varepsilon(t \in \mathbb{R}).$$

pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour certain nombre τ qui appartient à un intervalle de longueur I_ε.

On a

$$\begin{aligned} |\frac{1}{g(t+\tau)} - \frac{1}{g(t)}| &= \frac{|g(t+\tau) - g(t)|}{|g(t+\tau)g(t)|} \\ &\leq \frac{|g(t+\tau) - g(t)|}{m^2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Proposition 3.1.5 *Soit* $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des fonctions presque périodique tels que* $f_n(t)$ *converge uniformément en* $t \in \mathbb{R}$ *vers* $f(t)$. *Alors* f *est presque périodique.*

Preuve
Pour $\varepsilon > 0$, il existe N_ε. tel que

$$\|f_n - f(t)\| \leq \tfrac{\varepsilon}{3}, \forall t \in \mathbb{R}, n \geq N(\varepsilon).$$

Puisque $f_N(t)$ est presque périodique alors :

$$\|f_N(t+\tau) - f_N(t)\| < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour certain nombre τ qui appartient à un intervalle de longueur I_ε. Maintenant

$$\begin{aligned} \|f(t+\tau) - f(t)\| &= \|f(t+\tau) - f_N(t+\tau) + f_N(t+\tau) - f_N - f_N + f(t)\| \\ &\leq \|f(t+\tau) - f_N(t+\tau)\| + \|f_N(t+\tau) - f_N(t)\| + \|f_N(t) - f(t)\| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Proposition 3.1.6 (4) *Soit* f *est une fonction presque périodique et si sa dérivé* f' *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$, *alors* f' *est aussi presque périodique.*

Preuve
Soit $f_n(t) = n \cdot [f(t + \frac{1}{n}) - f(t)]$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et pour $n = 1, 2, ...$ il est claire que $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une suite des fonctions presque périodique qui converge uniformément vers f' alors d'après la proposition 3.1.5 f' est presque périodique.

Théorème 3.1.2 *(Le critère de Bochner) Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est presque périodique si et seulement si pour chaque suite des nombres réels $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une sous suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{f(t + \sigma_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément en $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve Voir la preuve dans N'Guérékata [147, preuve du théorème 3.1.8 p. 55]

Définition 3.1.2 *Un espace vectorielle $(\mathfrak{B}, \| \bullet \|)$ est dite uniformément convexe si pour chaque $0 < \varepsilon < 2$, il exicte un nombre $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $(x, y) \in \mathfrak{B}$ satisfont*
$\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| \geq \varepsilon$,
alors $\|(x - y)/2\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$.

Exemples 3.1.1 $\bullet\mathfrak{R}^n$ *est un espace uniformément convexe*
• *Les espaces de Hilbert sont uniformément convexe*

Proposition 3.1.7 *On suppose que l'espace de Banach $\mathfrak{B}$ est uniformément convexe. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{B}$ est presque périodique alors sa primitive*

$$F(t) = \int_0^t f(\sigma)d\sigma \tag{3.2}$$

est presque périodique si et seulement si elle est bornée dans $\mathfrak{B}$ c'est à dire,
$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t)\| < \infty$
Preuve Voir la preuve dans Corduneanu [42, preuve du théorème 6.20, p. 179 − 180].

Définition 3.1.3 *Une fonction $F \in \mathbf{BC}(\mathbb{R} \times \mathfrak{B})$, $(t, x) \longrightarrow F(t, x)$ est appellée presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément dans $x \in \Gamma$ ($\Gamma \subset \mathfrak{B}$ est un sous ensemble compact) si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $T_0(\varepsilon) > 0$ tel que chaque intervalle de longueur $T_0(\varepsilon)$ contient un certain nombre τ vérifie :*

$$\|F(t + \tau) - F(t + x)\| < \varepsilon, \; \forall x \in \Gamma \; \forall, t \in \mathbb{R}.$$

La classe de ces fonctions sera notée $\mathbf{AP}(\mathbb{R} \times \mathfrak{B})$.

Proposition 3.1.8 *Soient* $(\mathfrak{B}, \| \bullet \|)$ *et*$(\mathfrak{B}', \| \bullet \|')$ *deux espaces de Banach sur le même domaine de* f*. Soit* $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ *est presque périodique en* $t \in \mathbb{R}$ *uniformément en* $x \in \mathfrak{B}$*. On suppose que* f *est liptshizienne en* $x \in \mathfrak{B}$ *uniformément en* $t \in \mathbb{R}$ *c'est à dire il existe* $\mathcal{L} \geq 0$ *tel que*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|' \leq \mathcal{L} \cdot \|x - y\|, \; \forall x, y \in \mathfrak{B}, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *est presque périodique, la fonction* $h(t) = f(t, \phi(t)) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *est aussi presque périodique.*

Preuve Voir la preuve dans Corduneanu [42, preuve du théorème 2.8, p.61].

Définition 3.1.4 *Une fonction* $f \in \mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *est appelée Bochner presque périodique si pour toute suite de nombres réels* $(\sigma'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *il existe une sous suite* $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* $(\sigma'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que la suite des fonctions* $(f(t + \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément en* $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.1.3 *Une fonction* $f \in \mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *est Bohr presque périodique si et seulement si elle est Bochner presque périodique.*

Preuve Une preuve détaillée de ce résultat dans $\mathbb{R}$ peut être trouvée dans Corduneanu[42]. La preuve peut être facilement vérifier pour un grand espace de Banach B.

3.2 Processus presque périodiques en moyenne d'ordre p

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{p})$ un espace de probabilité, pour $p \geq 2$ les espaces $\mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B})$ et $\mathbf{BUC}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B}))$ sont des espaces de Banach quand ils sont munis avec ses normes respectivement
$\| \bullet \|_{\mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B})}$ et $\| \bullet \|_\infty$.

Définition 3.2.1 *Un processus stochastique* $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B})$ *est dit continue si*

$$\lim_{t \longrightarrow s} \mathbb{E}\|X(t) - X(s)\|^p = 0$$

Définition 3.2.2 *Un processus stochastique* $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B})$ *est dit stochastiquement borné si*

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \quad \mathbf{P}\{\|X(t)\| > N\} = 0.$$

Définition 3.2.3 *Un processus stochastique continu* $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B})$ *est dit presque périodique en moyenne p si pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il exicte* $T_0(\varepsilon) > 0$ *tel que chaque intervalle de longueur* $T_0(\varepsilon)$ *contient un certain nombre* τ *vérifie :*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \quad \mathbb{E}\|X(t + \tau) - X(t)\|^p < \varepsilon \tag{3.3}$$

Le processus stochastique continu X *qui est presque périodique en moyenne d'ordre* 2 *appelé presque périodique en moyenne quadratique.*
Comme pour les fonctions périodiques classiques, le nombre τ *sera appellée* ε*-translation de* X*. L'ensemble de tous les processus presque périodiques* $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B})$ *sera notés* $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B}))$*. Le lemme suivant donne certaines propriétés de processus presque périodique en moyenne p*

Lemme 3.2.1 *Si* X *appartient à* $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B}))$*,alors*

1. *L'application* $t \longrightarrow \mathbb{E}\|X(t)\|^p$ *est uniformément continue ;*
2. *Il existe une constante* $M > 0$ *tel que* $\mathbb{E}\|X(t)\|^p$*, pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*;*
3. X *est stochastiquement bornée.*

Preuve Les preuves (1) et (2) ne sont pas difficiles, pour montrer (3) on utilise l'inégalité de Tchebychev et la propriété (2) du lemme précédant et on obtient

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{P}\{\|X(t)\| > N\} \leq \frac{1}{N^P} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\|X(t)\|^p \leq \frac{M}{N^p};$$

donc $\lim_{N \longrightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \quad \mathbf{P}\{\|X(t)\| > N\} = 0.$

Remarque $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B})) \subset \mathbf{BUC}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B}))$ est un sous-espace fermé.

Définition 3.2.4 *Une fonction* $F : (\mathbb{R} \times \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B}))$ *avec* $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^P(\Omega; \mathfrak{B}))$ *est l'espace des processus presque périodiques en moyenne p muni avec la norme sup* $\|\cdot\|_\infty$ *est un espace de Banach.*
Soit $(\mathfrak{B}_1, \|\cdot\|_1)$ *et* $(\mathfrak{B}_2, \|\cdot\|_2)$ *sont des espaces de Banach et soient* $\mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_1)$, $\mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_2)$ *ses espaces-*$\mathbf{L}^p$ *respectivement.*

Définition 3.2.5 *Une fonction* $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_1) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_2)$, $(t, Y) \longrightarrow F(t, Y)$, *qui est conjointement continue est appelée presque périodique en moyenne d'ordre p en* $t \in \mathbb{R}$ *uniformément en* $Y \in K$ *Où* $K \in \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_1)$ *est un compact si* $\forall \varepsilon > 0$, *il existe* $T_0(\varepsilon) > 0$ *tel que chaque intervalle de longueur* $T_0(\varepsilon)$ *contient un certain nombre* τ *vérifie :*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t+\tau, Y) - F(t, Y)\|_2^p$$

pour chaque processus stochastique $Y : \mathbb{R} \longrightarrow K$.

3.2.1 Composition du processus presque périodiques en moyenne d'ordre p

Nous avons les résultats de composition suivants :

Théorème 3.2.1 [2] *Soit* $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_1) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_2)$, *un processus presque périodique en moyenne d'ordre p en* $t \in \mathbb{R}$ *uniformément en* $Y \in K$ *où* $K \subset \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}^1)$ *est un compact, on suppose que F est liptschizienne dans le sens suivant :*

$$\mathbb{E}\|F(t, Y) - F(t, Z)\|_2^p \leq M\mathbb{E}\|Y - Z\|_1^p$$

pour tous $Y, Z \in \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_1)$ *et pour chaque* $t \in \mathbb{R}$, *où* $M > 0$ *alors pour tout processus presque périodique en moyenne d'ordre p* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_1)$ *le processus stochastique* $t \longrightarrow F(t, \phi(t))$ *est aussi presque périodique.*

Preuve La preuve de ce théorème est la même preuve de proposition 3.1.8.

Théorème 3.2.2 (2) *Soit* $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_1) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega; \mathfrak{B}_2)$, $(t, Y) \longrightarrow F(t, Y)$ *un processus presque périodique en moyenne p en* $t \in \mathbb{R}$ *uniformément en* $Y \in K$, *où* $K \subset$

$\mathbf{L}^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ *est un compacte. On suppose que* $F(t,\cdot)$ *est uniformément continue et bornée dans le sous espace* $K' \subset \mathbf{L}^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ *dans le sens suivant : pour tout* $\varepsilon > 0$ *il exicte* $\delta_\varepsilon > 0$ *tels que* $(X,Y) \in K' \subset \mathbf{L}^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ *et* $\mathbb{E}\|X-Y\|_1 < \delta_\varepsilon$*, alors*

$$\mathbb{E}\|F(t,Y) - F(t,Z)\|_2^p < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors pour tout processus presque périodique en moyenne d'ordre p $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ *le processus stochastique* $t \longrightarrow F(t;\phi(t))$ *est aussi presque périodique.*

Preuve Puisque $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ est presque périodique alors :

$$\mathbb{E}\|\phi(t+\tau) - \phi(t)\|_1^p < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

On a aussi que $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ est borné et que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|\phi(t)\|_1^p < \infty$. Soit $k'' \subset \mathbf{L}^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ un sous ensemble borné tel que $\phi(t) \in K''$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Maintenant

$$\mathbb{E}\|F(t+\tau,\phi(t+\tau)) - F(t,\phi(t))\|_2^p \le 2^{P-1}\mathbb{E}\|F(t+\tau,\phi(t+\tau)) - F(t+\tau,\phi(t))\|_2^p$$
$$+2^{p-1}\mathbb{E}\|F(t+\tau,\phi(t)) - F(t,\phi(t))\|_2^p.$$

Tenant compte de l'équation (3.4) (prendre $\delta_\varepsilon = \varepsilon$) et en utilisant la continuité uniforme de F sur un sous espace borné de $mathbf L^p(\Omega;\mathfrak{B}_1)$ on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t+\tau,\phi(t+\tau)) - F(t+\tau,\phi(t))\|_2^p < \frac{\varepsilon}{2^p} \tag{3.5}$$

Par l'utilisation de presque périodicité de F on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t+\tau,\phi(t)) - F(t,\phi(t))\|_2^p < \frac{\varepsilon}{2^p} \tag{3.6}$$

A partir de (3.5) et (3.6) on obtient :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t+\tau,\phi(t+\tau)) - F(t,\phi(t))\|_2^p < \varepsilon$$

Donc le processus $t \longrightarrow F(t,\phi(t))$ est presque périodique en moyenne P.

Chapitre 4

Existence des solutions presque périodiques pour certaines équations différentielles stochastiques

Dans la suite de ce chapitre, $(\mathbb{K}, \|\cdot\|_{\mathbb{K}})$ et $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ sont des espaces de Hilbert réels et séparables, $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité filtré.
L'espace $\mathbb{L}_2^0 = \mathbf{L}_2(\mathbb{K}, \mathbb{H})$ représente l'espace de tous les opérateurs de $\mathcal{L}$-Hilbert-Schmidt de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{H}$ muni du norme de Hilbert-Schmidt $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2^0}$.

4.1 Le cas autonome

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité du solution presque périodique en moyenne p de l'équation suivante :

$$dX(t) = AX(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))d\mathbb{W}(t), t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

où $A : D(A) \subset \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est un opérateur linéaire fermé densément défini (il est possible qu'il est non borné), $F, G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ sont des fonctions conjointement continues, et $\mathbb{W}$ est un processus de $\mathcal{L}$-Wiener à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Dans cette section en plus de $(2H)_0$ nous avons besoin les hypothèses supplémentaires suivantes :
$(4H)_1$ soit $F\mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega; \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega; \mathbb{H})(t, X) \longrightarrow F(t, X)$ est une fonction presque

périodique en moyenne d'ordre p en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $X \in \varrho$ ($\varrho \subset \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H})$) est un sous espace compact. De plus F est liptscizienne dans le sens suivant : il existe $K > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\|F(t,X) - F(t,Y)\|^p \leq K\mathbb{E}\|X - Y\|^p$$

pour tous processus stochastiques $X, Y \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$. et $t \in \mathbb{R}$

$(4H)_2$ soit $G\mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{L}_2^0)(t,X) \longrightarrow G(t,X)$ est une fonction presque périodique en moyenne p en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $X \in \varrho'$ ($\varrho' \subset \mathbf{L}^p(\Omega;\mathbb{H})$) est un sous espace compacte. De plus G est liptscizienne dans le sens suivant : il existe $K' > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\|G(t,X) - G(t,Y)\|^p \leq K\mathbb{E}\|X - Y\|^p$$

pour tous processus stochastiques $X, Y \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$. et $t \in \mathbb{R}$

Définition 4.1.1 *Un processus progressivement mesurable $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est appelée une solution faible de l'équation différentielle stochastique* (5.1) *sur $\mathbb{R}$ si*

$$X(t) = T(t-s)X(s) + \int_s^t T(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_s^t T(t-\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$$

pour tout $t \geq s$ et pour chaque $s \in \mathbb{R}$.

En utilisant le principe de points fixé de Banach, on obtient ce qui suit :

Théorème 4.1.1 [3] *Sous les hypothèses $(2H)_0 - (4H)_1 - (4H)_2$ alors l'équation* (4.1) *admet une solution unique faible et presque périodique en moyenne d'ordre p sous la forme suivante :*

$$X(t) = \int_\infty^t T(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_{-\infty}^t T(t-\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si pour $\Theta_p < 1$, où

$$\Theta_p := 2^p M^p [K_F(\tfrac{1}{\delta^p}) C_p K_G (\tfrac{p-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}} \tfrac{1}{\delta p}] \quad pour p > 2$$

et

$$\Theta_p = 2M^2(\tfrac{K}{\delta^2} + \tfrac{K'}{\delta}) \quad pour p = 2.$$

Preuve
D'aprés tout X est donné par

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_{-\infty}^{t} G(t, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma) \tag{4.2}$$

satisfait

$$X(t) = T(t-s)X(s) \int_{s}^{t} T(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_{s}^{t} G(t, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$$

pour tout $t \geq s$ et pour chaque $s \in \mathbb{R}$ et puisque X est donné par (4.2) est une solution faible de l'équation (4.1). On définit $\Lambda X(t) = \phi X(t) + \psi X(t)$, où

$$\begin{aligned} \phi X(t) &= \int_{-\infty}^{t} T(t-\sigma)F(\sigma, X(\sigma)) \\ \psi X(t) &= \int_{-\infty}^{t} G(t, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma) \end{aligned}$$

On va montrer que $\phi X(.)$ et $\psi X(.)$ sont presque périodique en moyenne d'ordre p, on suppose que X est presque périodique en moyenne d'ordre p et on utilise l'hypothèse $(4H)_1$ et le théorème (3.2.1) alors on peut dire façillement que $\sigma \longrightarrow F(\sigma, X(\sigma))$ est presque périodique en moyenne d'ordre p c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p < \mu\varepsilon$$

pour chaque $\sigma \in \mathbb{R}$, avec $\mu = \frac{\delta^p}{M^p}$. On utilise l'hypothèse $(2H)_0$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\phi X(t+h) - \phi X(t)\|^p &\leq M^p \mathbb{E}[\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)} \|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\| d\sigma]^p \\ &\leq M^p \mathbb{E}[\| \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{q}\delta(t-\sigma)} e^{-\frac{1}{p}\delta(t-\sigma)} \| \|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\| d\sigma]^p. \end{aligned}$$

Maintenant on utilise l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p \leq M^p (\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)} d\sigma)^p$$

$$\begin{aligned} &\times \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p \\ &\leq \frac{\sigma^p}{\delta^p} \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))\|^p \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a aussi $\mathbb{E}\|\phi X(t+\tau) - \phi X(t)\|^2 < \varepsilon$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, alors $\phi X(.)$ est presque périodique en moyenne d'ordre p.
Pour $\psi X(.)$, on le montrer en deux cas : $p > 2$ et $p = 2$. On commence par le cas où $p > 2$ on suppose que X est presque périodique en moyenne d'ordre p, on utilise $(4H)_1$ et le théorème 3.2.1 on peut façillement dire que $\sigma \longrightarrow G(\sigma, X(\sigma))$ est presque périodique en moyenne d'ordre p c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\|G(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - G(\sigma, X(\sigma))\|^p_{\mathbb{L}_2^0} < \frac{\varepsilon}{C^p M^p (\frac{2}{\delta P})(\frac{P-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}}}$$

on utilise l'hypothèse $(2H)_0$, l'inégalité de Hölder et la proposition 2.2.1 on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\psi X(t+\tau) - \psi X(t)\|^p &\leq C_p \mathbb{E}[\int_{-\infty}^t \|T(t-\sigma)\|^2 \|G(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - G(\sigma, X(\sigma))\|^2_{\mathbb{L}_2^0} d\sigma]^{p/2} \\ &\leq C_p M^p \mathbb{E}[\int_{-\infty}^t e^{-2\delta(t-\sigma)} \|G(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - G(\sigma, X(\sigma))\|^2_{\mathbb{L}_2^0} d\sigma]^{p/2} \\ &\leq C_p M^p (\int_{-\infty}^t e^{-\frac{p^\delta}{p-2}}(t-\sigma) d\sigma)^{\frac{p-2}{2}} \\ &\times (\int_{-\infty}^t e^{-\frac{p^\delta}{2}\delta(t-\sigma)} \times \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|G(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - G(\sigma, X(\sigma))\|^p_{\mathbb{L}_2^0} d\sigma) \\ &\leq C_p M^p (\frac{2}{\delta p})(\frac{p-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|G(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - G(\sigma, X(\sigma))\|^p_{\mathbb{L}_2^0}) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour le cas quand $p = 2$

$$\mathbb{E}\|\psi X(t+\tau) - \psi X(t)\|^2 \leq M^2 (\int_{-\infty}^t e^{-2\delta(t-s)} ds) \sup \mathbb{E}\|G(s+\tau, X(s+\tau)) - G(s, X(s))\|^p_{\mathbb{L}_2^0}$$

$$< \quad \varepsilon$$

alors $\psi X(\cdot)$ est presque périodique en moyenne d'ordre p.
Maintenant on choisit Λ est une constraction pour que, soit $X, Y \in \mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L^p}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbb{H}))$. On commance par le cas $p > 2$, on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|\Lambda X(t) + \Lambda Y(t)\|^p &\leq 2^{p-1}\mathbb{E}\| \int_{-\infty}^{t} \|T(t-\sigma)F(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - F(\sigma, X(\sigma))d\sigma\|^p \\
&\times 2^{p-1} \int_{-\infty}^{t} \|T(t-\sigma)G(\sigma+\tau, X(\sigma+\tau)) - G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)\|^p.
\end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse $(2H)_0$, en appliquant l'inégalité de Hölderö. Proposition 2.1.1 et on utilise aussi les hypothèses $(4H)_1$ et $(4H)_2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|\Lambda X(t) + \Lambda Y(t)\|^p &\leq 2^{p-1}M^p K_F(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)^p \|X - Y\|_{-\infty}^p \\
&+ 2^{p-1}C_p M^p K_G(\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{p\delta}{p-2}(t-\sigma)}d\sigma)^{\frac{p-2}{2}} \\
&\times (-\int_{\infty}^{t} e^{-\frac{p\delta}{2}(t-\sigma)}d\sigma)\|X - Y\|_{-\infty}^p.
\end{aligned}$$

Le cas où $p = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|\Lambda X(t) + \Lambda Y(t)\|^2 &\leq 2M^2 \cdot C_1(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-\sigma)}d\sigma)^2 \times \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|X(\sigma) - Y(\sigma)\|^2 \\
&\times 2M^2 \cdot C_2(\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-\sigma)}d\sigma) \sup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|X(\sigma) - Y(\sigma)\|^2 \\
&\leq 2M^2(\frac{C_1}{\delta^2} + \frac{C_2}{\delta})\|X - Y\|_{-\infty}^2.
\end{aligned}$$

Si $\Theta_p < 1$, alors Λ est une constraction. Donc pour completer la preuve on utilise le principe de point fixe de Banach.

4.2 Le cas non autonome

Soit $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert réel et séparable. Dans cette section on intéresse d'étudier l'existence des solutions presque périodique en moyenne d'ordre p aux équations différentielles stochastiques semi linéaire non autonomes

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))d\mathbb{W}(t), t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

où $(A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille des opérateurs linéaires fermés densément définis qui satisfaites les conditions (1.10) et (1.11) de "Acqiustpace-Terrini", $F : \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ sont des fonctions conjointement continues satisfaites certaines conditions, et $\mathbb{W}$ est un processus de $\mathcal{L}$-Wiener à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'existence des solutions presque périodique respectivement (périodique) des équations différentielles stochastiques autonomes a été étudier par plusieurs ouvrage, voir par exemple [3] et [20]. Dans Da Prato et Tudor [10], l'existence de solution presque périodique de (4.3) dans le cas où $A(t)$ est périodique et que $A(t+T) = A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{B}$ et pour certain $T > 0$. Dans cette section on va étudier l'existence et l'unicité de solution presque périodique en moyenne quadratique d'équation (4.3) lorsque les opérateurs $A(t)$ satisfont les conditions (1.10) et (1.11).
Nous supposons que $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est une famille des opérateurs linéaires fermés densément définis sur un domaine commun $D = D(A)$, qui est indépendant de t et dense dans $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$, $F : \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ sont des fonctions conjointement continues.
Nous supposons que le système

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \quad t \geq s, \\ u(s) = x \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}), \end{cases} \tag{4.4}$$

a une famille d'évolution des opérateurs $\{U(t,s); t \geq s \quad avec \quad t, s \in \mathbb{R}\}$. est uniformément, asymptotiquement stable

4.2.1 Existence des solutions presque périodiques

Dans cette subsection nous avons besoin l'hypothèse suivante de plus que les hypothèses $(4H)_1$, $(4H)_2$ dans la section précédente :
$(4H)_3$ Les opérateurs $A(t), U(t,s)$ commute et que la famille d'évolution $U(t,s)$ est asymptotiquement stable, il existe des constantes $M, \delta > 0$ telles que

$$\|U(t,s)\| \leq Me^{-\delta(t-s)} \quad pour \quad tout \quad t \geq S.$$

De plus, $R(\lambda_0, A(\cdot)) \in \mathbf{AP}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^{\mathrm{p}}(\mathbf{\Omega}, \mathbb{H}))$ pour A fin d'étudier l'équation (4.3) nous avons besoin du lemme suivant qui est une conséquence immédiate de [136, Proposition 4.4].

Lemme 4.2.1 [3] *Supposons que $A(t)$ satisfait les conditions d'"Acquistpace-Terrini" $U(t,s)$ est expentiellement stable, et $R(\lambda_0, A(\cdot)) \in \mathbf{AP}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^{\mathrm{p}}(\mathbf{\Omega}, \mathbb{H}))$. Soit $h > 0$ Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I_\varepsilon > 0$ telque chaque intervalle de longueur I_ε contient un certain nombre τ vérifie la propriété suivante*

$$\|U(t+\tau, s+\tau) - U(t,s)\| \leq \varepsilon e^{\frac{-\delta}{2}(t-s)} \text{ pour tout } t-s \geq h.$$

Définition 4.2.1 *Un processus progressivement mesurable $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ appelé une solution faible d'équation (4.3) sur $\mathbb{R}$ si*

$$X(t) = U(t,s)X(s) + \int_s^t U(t,\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_s^t U(t,\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W} \tag{4.5}$$

pour tout $t \geq s$ pour chaque $s \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.2.1 (3) *Sous les hypothèses $(4H)_1$, $(4H)_2$ et $(4H)_3$ alors l'équation (4.3) a une solution faible unique et presque périodique en moyenne, qui peut être exprimé comme suit :*

$$X(t) = \int_{-\infty}^t U(t,\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_{-\infty}^t U(t,\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$$

on a

$$\Theta_p := 2^p M^p [K_F(\tfrac{1}{\delta^p}) C_p K_G(\tfrac{p-2}{p^\delta})^{\frac{p-2}{2}} \tfrac{1}{\delta p}] \quad pour p > 2$$

et

$$\Theta_p = M^2(2\frac{K}{\delta^2} + \frac{K'}{\delta}) \quad pour p = 2.$$

Preuve
Pour la preuve de ce théorème on va suivre les même étapes de la preuve précédant mais en remplaçant le semi groupe $T(t)$ par la famille d'évolution.
Pour plus de détaille voire **Paul H.Benzandry.Toka Diagana** [preuve de théorème 2.5 p $136, 137$.]

Chapitre 5

Existence des solutions des certaines équations stochastiques aux dérivées partielles

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions des certaines équations stochastiques aux dérivées partielles inspirés par leurs homologue diterministes. Les applications se posent dans les systémes du control, par exemple.
Dans ce chapitre, $(\mathbb{H}, \|\cdot\|, <.,.>)$ est un espace de Hilbert réel et séparable, $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilité filtré. Si $A : D(A) \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ est un opérateur linéaire, on définit alors l'opérateur correspondant $A : D(A) \subset \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ de la manière suivante : $X \in D(A)$ et $AX = Y$ si et seulement si $X, Y \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ et $AX(\omega) = Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$

5.1 Le cas autonome

Soit $\mathbb{A} \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ un opérateur linéaire sctoriel. Pour $\alpha \in (0, 1)$, soit $\mathbb{H}_\alpha$ est un espace de Banach intermédiaire entre $D(\mathbb{A})$ et $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert
Cette section est inspirée par le chapitre précédent et consiste à étudier l'existence des solutions presque périodiques des équations différentielles stochastique de la forme suivante :

$$d(X(\omega, t) + f(t, \mathfrak{B}X(\omega, t))) = [\mathbb{A}X(\omega, t) + g(t, \mathfrak{C}X(\omega, t))]dt + h(t, \mathfrak{L}X(t, \omega))d\mathbb{W}(\omega) \quad (5.1)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$, où $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ est un opérateur sectoriel correspendant à un semi groupe analytique et hyperbolique, et que $\sigma(\mathbb{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{L}$ sont des opérateurs linéaires (il est possible qu'ils sont non bornés sur $\mathbb{H}$) et $f : \mathbb{H} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}_\beta(0 < \alpha < \frac{1}{p} < \beta < 1)$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, et $h : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{L}_2^0$ sont des fonctions conjointement continues.
Pour analyser l'équation (5.1), notre stratégie consiste à étudier l'existence des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p à la classe correspondante des équations différentielles stochastiques de la forme

$$d(X(t) + F(t, BX(t))) = [AX(t) + G(t, CX(t))]dt + H(t, LX(t))d\mathbb{W}(t) \tag{5.2}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, où $A : D(A) \subset \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est un opérateur sectoriel d'un semi groupe analytique et hyperbolique et que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, B, C et L sont des opérateurs linéaires sur $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ (il est possible qu'ils sont non bornés)
et $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\beta)$
avec $(0 < \alpha < \frac{1}{p} < \beta < 1)$, $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ et $H : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$
sont des fonctions conjointement continues satisfaites quelques hypothèse supplémentaires, et $\mathbb{W}$ est un processus de $\mathcal{L}$-Wiener à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Bien que l'existence et l'unicité des solutions presque périodiques de l'équation (5.1) dans le cas où A est sectorielle est un sujet important avec quelques applications intéressantes, ce est toujours une question non traitée et constitue la principale motivation de ce problème. Les techniques que nous utilisons pour calculer des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution presque périodique en moyenne d'ordre p de l'équation (5.1) sont basées sur la méthode de semi groupes analytiques associés avec les opérateurs sectoriels et le principe de point fixe de Banach.

5.1.1 Existence des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p

Définition 5.1.1 *Soit $\alpha \in (0,1)$. Une fonction aléatoire continue $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha)$ est dite solution faible à condition que la fonction $s \longrightarrow \mathbb{E}\|AT(t-s)PF(s, BX(s))\|^p$ est* *intégrable sur* $(-\infty, t)$*, la fonction* $s \longrightarrow \mathbb{E}\|AT(t-s)QF(s, BX(s))\|^p$ *est intégrable sur* (t, ∞) *pour chaque* $t \in \mathbb{R}$*, et*

$$\begin{aligned}X(t) = -F(t, BX(t)) - \textstyle\int_{-\infty}^{t} AT(t-s)PF(s, BX(s))ds + \int_{t}^{\infty} AT(t-s)QF(s, BX(s))ds \\ + \textstyle\int_{-\infty}^{t} T(t-s)PG(s, CX(s))ds - \int_{t}^{\infty} T(t-s)QG(s, CX(s))ds \\ + \textstyle\int_{-\infty}^{t} T(t-s)PH(s, LX(s))d\mathbb{W}(s) - \int_{t}^{\infty} T(t-s)QH(s, LX(s))d\mathbb{W}(s)\end{aligned}$$

pour $t \in \mathbb{R}$ *et soit* $Q = 1 - P$ *pour la projction* P*.*
Definir $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ *et* Γ_6 *respectivement par les opérateurs intégraux non linéaires*

$$\begin{aligned}(\Gamma_1 X)(t) &:= \int_{-\infty}^{t} AT(t-s)PF(s, BX(s))ds \\ (\Gamma_2 X)(t) &:= \int_{t}^{\infty} AT(t-s)QF(s, BX(s))ds \\ (\Gamma_3 X)(t) &:= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)PG(s, CX(s))ds \\ (\Gamma_4 X)(t) &:= \int_{t}^{\infty} T(t-s)QG(s, BX(s))ds \\ (\Gamma_5 X)(t) &:= \int_{-\infty}^{t} T(t-s)PH(s, LX(s))d\mathbb{W}(s) \\ (\Gamma_6 X)(t) &:= \int_{t}^{\infty} T(t-s)QH(s, BX(s))d\mathbb{W}(s).\end{aligned}$$

Pour discuter de l'existence de solution presque périodique à l'equation (5.1)*. Nous devons établir certaines hypothèses sur* A, B, C, L, F, G *et* H *tout d'abord, noter que pour* $0 < \alpha < \beta < 1$*, alors* $\mathbf{L}(\Omega, \mathbb{H}_\beta) \hookrightarrow \mathbf{L}(\Omega, \mathbb{H}_\alpha) \hookrightarrow \mathbf{L}(\Omega, \mathbb{H})$ *sont continument noyés et donc il existe des constantes* $k > 0, k(\alpha) > 0$ *telque*
$\mathbb{E}\|X\|^p \leq k_1 \mathbb{E}\|X\|_\alpha^p$ *pour chaque* $X \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbb{H}_\alpha)$
$\mathbb{E}\|X\|_\alpha^p \leq k(\alpha)\mathbb{E}\|X\|_\beta^p$ *pour chaque* $X \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbb{H}_\beta)$*.*
$(5H)_1$ *L'opérateur* A *est sectoriel et génère un semi groupe analytique et hyperbolique* $(T(t))_{t\geq}$

$(5H)_2$ *Soit* $\alpha \in (0,1)$ *alors* $\mathbb{H}_\alpha = D((-A))^\alpha)$ *où* $\mathbb{H}_\alpha = D_A(\alpha, p), 1 \leq p \leq \infty,$ *où* $\mathbb{H}_\alpha = D_A(\alpha),$ *où* $\mathbb{H}_\alpha = [\mathbb{H}, D(A)]_\alpha$ *nous supposons aussi que* $B, C, L : \mathbf{L}(\Omega, \mathbb{H}_\alpha) \longrightarrow \mathbf{L}(\Omega, \mathbb{H})$ *sont des opérateurs linéaires bornés et soit l'ensemble* $\varpi := \max\big(\|B\|_{B(\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}_\alpha),\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}))}, \|C\|_{B(\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}_\alpha),\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}))}, \|L\|_{B(\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}_\alpha),\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}))}\big).$

$(5H)_3$ *Soit* $\alpha \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{P})$ *si* $p > 2$ *et* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ *si* $p = 2,$ *et* $\alpha < \beta < 1.$ *Les fonctions* $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\beta),$ $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ *et* $H : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ *sont presque périodique en moyenne d'ordre p. Par ailleurs, les fonctions* F, G *et* H *sont uniformément lipchitziennes par rapport aux deuxième argument dans le sens suivant il existe des constantes positives* K_F, K_G K_H *tels que*

$$\mathbb{E}\|F(t,X) - F(t,Y)\|_\beta^p \leq K_F \mathbb{E}\|X - Y\|^p,$$

$$\mathbb{E}\|G(t,X) - G(t,Y)\|^p \leq K_G \mathbb{E}\|X - Y\|^p \quad et$$

$$\mathbb{E}\|H(t,X) - H(t,Y)\|_{\mathbb{L}_2^0}^p \leq K_H \mathbb{E}\|X - Y\|^p$$

pour tous les processus stochastiques $X, Y \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ *et* $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.1.1 [9] *Sous les hypothèses* $(5H)_1, (5H)_2$ *et* $(5H)_3$ *l'equation d'évolution* (5.1) *a une solution faible unique et presque périodique en moyenne d'ordre p à chaque fois que* $\Theta < 1,$ *où*

$$\begin{aligned}
\Theta &:= k'(\alpha).K'\varpi(1 + c[C(\Gamma, \alpha, \gamma, p) + \frac{2}{\delta})] \\
&+ k'_1 C(\alpha) K'_G \varpi[C(\Gamma, \alpha, \gamma, p) + \frac{2}{\delta}] + 2cC_p.k'_H C_1(\Gamma, \xi, \delta, p) \\
&\times \varpi[M_1(\alpha)^\alpha C_2(\Gamma, \alpha, \xi, \delta, p) + C_3(\Gamma, \xi, \delta, p)]
\end{aligned}$$

pour $p > 2$ *et*

$$\begin{aligned}
\Theta &:= \varpi[k'(\alpha)K'_F\{1 + c(\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\gamma^{1-\alpha}} + \frac{1}{\delta})\} + k'_1 \cdot K'_G(M'(\alpha)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\gamma^{1-\alpha}} \\
&+ \frac{C'(\alpha)}{\delta}) + c \cdot K'_H \cdot k'_1\{\frac{K'(\alpha,\beta)}{\sqrt{\delta}} + 2K'(\alpha, \gamma, \delta, \Gamma)\}]
\end{aligned}$$

pour $p = 2$.
Pour prouver ce théorème nous aurons besoin des lemmes suivants

Lemme 5.1.1 [3] *Sous les hypothèses $(5H)_1, (5H)_2$ et $(5H)_3$ les opérateurs intégraux Γ_1 et Γ_2 définis ci-dessus sont des applications sur $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ c'est-à-dire des applications presque périodiques en moyenne d'ordre p.*

Lemme 5.1.2 [3] *Sous les hypothèses $(5H)_1, (5H)_2$ et $(5H)_3$ les opérateurs intégraux Γ_3 et Γ_4 définis ci-dessus sont des applications sur $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ c'est-à-dire des applications presque périodiques en moyenne d'ordre p.*

Lemme 5.1.3 *Sous les hypothèses $(5H)_1, (5H)_2$ et $(5H)_3$ les opérateurs intégraux Γ_5 et Γ_6 définis ci-dessus sont des applications sur $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ c'est-à-dire des applications presque périodiques en moyenne d'ordre p.*

Preuve
Les preuves de ces lemmes sont basées par le principe général de point fixe de Banach et la même principe de preuve de théorème 4.1.1 dans le cas autonome dans le chapitre précédant. Voire le détaille dans **P.Benzandry et T.Diagana**[3]

5.2 Le cas non autonome

Dans cette section nous considérons un cadre plus général nous faisons une extension plus vaste des techniques des espaces intermédiaires pour étudier l'existence des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p de la classe des équations différentielles non autonomes données par

$$d(X(\omega,t) + f_1(t, \mathfrak{B}X(\omega,t))) = [\mathbb{A}(t)X(\omega,t) + f_2(t, \mathfrak{C}X(\omega,t))]dt + f_3(t, \mathfrak{L}X(t,\omega))d\mathbb{W}(\omega) \tag{5.3}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$ où $\mathbb{A}(t)$ est une famille des opérateurs linéaires fermés sur $\mathfrak{D} = D(\mathbb{A}(t))$, qui est indépendant de t, et satisfait les conditions de Terrini-acquistapace (1.10) et (1.11) $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}^t_\beta (0 < \alpha < \frac{1}{p} < \beta < 1)$, $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ et $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{L}^0_2$

sont des fonctions presque périodiques dans $t \in \mathbb{R}$ uniformément en seconde variable, il est bien connu que dans ce cas il existe une famille d'évolution $\mathfrak{U} = \{U(t,s)\}_{t\geq s}$ associe à la famille des opérateurs linéaires $\mathbb{A}$ on suppose que la famille d'évolution $\{U(t,s)\}_{t\geq s}$ est expntiellement stable et hyperbolique. Sous certaines hypothèses supplémentaires on sera montré que l'équation (5.4) a une solution presque périodique en moyenne d'ordre p.
Pour analyser eq (5.4) notre stratégie consiste à étudier l'existence de solution presque périodique en moyenne d'ordre p de la classe correspondante des équations différentielles stochastiques de la forme

$$d(X(\omega,t) + F_1(t, BX(\omega,t))) = [A(t)X(\omega,t) + F_2(t, CX(\omega,t))]dt + F_3(t, LX(t,\omega))d\mathbb{W}(\omega) \tag{5.4}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})$ est un opérateur linéaire sectorielle d'un semi groupe analytique et hyperbolique, on a $\sigma(A(t)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset, B, C$ et L sont des opérateurs linéaires (il est possible qu'ils sont non bornés) sur $\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H})$ et $F_1 : \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}^t_\beta)(0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{P}$ et $\alpha < \beta < 1), F_2 : \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}), F_3 : \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega\mathbb{L}^0_2)$ sont des fonctions conjointement continues satisfaites certaines hypothèses, et $\mathbb{W}$ est un processus de $\mathcal{L}-$ Winer à valeurs dans $\mathbb{K}$

5.2.1 L'existence des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p

Nous étudions les opérateurs $\mathbb{A}(t)$ qui vérifient les conditions de terrini-acquisapace (1.10) et (1.11) de plus nous avons besoin les hypothèses suivantes
$(5H)_5$ La famille d'évolution engendrée par $\mathbb{A}(\cdot)$ a une dichotomie exponentielle avec des constantes $N, \delta > 0$ et la projection $P(t)$ pour $t, C_0 \in \mathbb{R}$ et $0 \in \rho(\mathbb{A}(t))$ on a la propriété suivante :

$$\sup_{t,s\in\mathbb{R}} \|\mathbb{A}(s)\mathbb{A}^{-1}(t)\|_{B(\mathbb{H},\mathbb{H}_\alpha)} < c_0. \tag{5.5}$$

$(5H)_6$ il existe $0 \leq \alpha < \beta < 1$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ telque

$$\mathbb{H}^t_\alpha = \mathbb{H}^{t_0}_\alpha \quad et \quad \mathbb{H}^t_\beta = \mathbb{H}^{t_0}_\beta$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec les normes équivalentes uniformes.

Définition 5.2.1 *Soit $\alpha \in (0,1)$. Une fonction aléatoire continue $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha)$ est dite solution faible à condition que la fonction $s \longrightarrow \mathbb{E}\|A(s)U(t-s)Pf_1(s, BX(s))\|^p$ est intégrable sur $(-\infty, t)$, la fonction $s \longrightarrow \mathbb{E}\|A(t)U(t-s)Qf_1(s, BX(s))\|^p$ est intégrable sur (t, ∞) pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et*

$$X(t) = -F_1(t, BX(t)) - \int_{-\infty}^{t} AU(t-s)PF_1(s, BX(s))ds + \int_t^\infty AU(t-s)QF_1(s, BX(s))ds$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} U(t-s)PF_2(s, CX(s))ds - \int_t^\infty U(t-s)QF_2(s, CX(s))ds$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} U(t-s)PF_3(s, LX(s))d\mathbb{W}(s) - \int_t^\infty U(t-s)QF_3(s, CX(s))d\mathbb{W}(s)$$

pour $t \in \mathbb{R}$ et soit $Q = 1 - P$ pour la projection P.
Definir $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ et Γ_6 respectivement par les opérateurs intégraux non linéaires

$$\begin{aligned}
(\Gamma_1 X)(t) &:= \int_{-\infty}^{t} AU(t-s)P\psi_1(s, BX(s))ds \\
(\Gamma_2 X)(t) &:= \int_{t}^{\infty} AU(t-s)Q\psi_1(s, BX(s))ds \\
(\Gamma_3 X)(t) &:= \int_{-\infty}^{t} U(t-s)P\psi_2(s, CX(s))ds \\
(\Gamma_4 X)(t) &:= \int_{t}^{\infty} U(t-s)Q\psi_2(s, CX(s))ds \\
(\Gamma_5 X)(t) &:= \int_{-\infty}^{t} U(t-s)P\psi_3(s, LX(s))d\mathbb{W}(s) \\
(\Gamma_6 X)(t) &:= \int_{t}^{\infty} U(t-s)Q\psi_3(s, LX(s))d\mathbb{W}(s).
\end{aligned}$$

où $\psi_1(t) = F_1(s, BX(s))$, $\psi_2(t) = F_2(s, BX(s))$ et $\psi_3(t) = F_3(s, BX(s))$. pour discuter de l'existence de solution presque périodique en moyenne d'ordre p aux eq (5.5). *Nous devons établir certaines hypothèses sur $A, B, C, L, F_i (i = 1, 2, 3)$.*
$(5H)_7$ *$R(\zeta, A(.)) \in \mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ il existe une fonction $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ avec*

$\gamma \in \mathbf{L}^1[0,\infty)$ *telque pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe* I_ε *telque tout intervalle de longueur* I_ε *contient un certain nombre* τ *vérifie la propriété suivante*

$$\|A(t+\tau)\Gamma(t+\tau, s+\tau) - A(t)\Gamma(t,s)\| \leq \varepsilon\gamma(|t-s|) \text{ pour tout } s,t \in \mathbb{R}.$$

$(5H)_8$*Soit* $\alpha \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{P})$ *si* $p > 2$ *et* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ *si* $p = 2$, *et* $\alpha < \beta < 1$. *avec* $2\beta > \alpha + 1$ *Les fonctions* $F_1 : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\beta)$, $F_2 : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ *et* $F_3 : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ *sont presque périodique en moyenne d'ordre p. Par ailleurs, les fonctions* $F_i (i = 1, 2, 3)$ *sont uniformément liptchiziennes par rapport aux dexièmme argument dans le sens suivant il existe des constantes positives* K_F, K_G K_H *tels que*

$$\mathbb{E}\|F(t,X) - F(t,Y)\|_\beta^p \leq K_1\mathbb{E}\|X-Y\|^p,$$

$$\mathbb{E}\|G(t,X) - G(t,Y)\|^p \leq K_2\mathbb{E}\|X-Y\|^p et$$

$$\mathbb{E}\|H(t,X) - H(t,Y)\|_{\mathbb{L}_2^0}^p \leq K_3\mathbb{E}\|X-Y\|^p$$

pour tous les processus stochastiques $X, Y \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ *et* $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 5.2.1 (2) *Sous les hypothèses* $(4H)_1, (5H)_5, (5H)_6, (5H)_7$ *et* $(5H)_8$ *l'equation d'évolution* (5.5) *a une solution faible unique et presque périodique en moyenne d'ordre* p *à chaque fois que* $\Theta < 1$, *où*

$$\begin{aligned}
\Theta \quad &:= \quad [k_1'K_1'(k'(\alpha) + \frac{m(\alpha,\beta)}{\delta} + n(\alpha)C_2(\Gamma,\alpha,\delta,\zeta,p)) \\
&+ \quad k_2'K_2'(C_2(\Gamma,\alpha,\delta,\zeta,p) + \frac{m(\alpha,\beta)}{\delta}) \\
&+ \quad C_p'k_3'K_3'(M(\alpha)C_2(\Gamma,\alpha,\delta,\zeta,p) + \frac{m(\alpha,\beta)}{\delta})C_1(\Gamma,\delta,\zeta,p)]\varpi
\end{aligned}$$

pour $p > 2$ *et*

$$\begin{aligned}
\Theta \quad &:= \quad [k'(\alpha)\cdot K_1' + k_1'\cdot K_1'(K(\alpha,\delta,\Gamma) + \frac{m(\alpha,\beta)}{\delta}) \\
&+ \quad k_2'\cdot K_2'(K(\alpha,\delta,\Gamma) + \frac{m'(\alpha,\beta)}{\delta}) \\
&+ \quad k_3'\cdot K_3'(K(\alpha,\delta,\Gamma) + \frac{k(\alpha,\beta)}{\sqrt{\delta}})]\varpi
\end{aligned}$$

pour $p = 2$.
Pour prouver ce théorème nous aurons besoin des lemmes suivants

[2]

Lemme 5.2.1 *Sous les hypothèses $(4H)_1, (5H)_5, (5H)_6, (5H)_7$ et $(5H)_8$ les opérateurs intégraux Γ_1 et Γ_2 définis ci-dessus sont des applications sur $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ c'est-à-dire des applications presque périodiques en moyenne d'ordre p.*

Lemme 5.2.2 [3] *Sous les hypothèses $(4H)_1, (5H)_5, (5H)_6, (5H)_7$ et $(5H)_8$ les opérateurs intégraux Γ_3 et Γ_4 définis ci-dessus sont des applications sur $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ c'est-à-dire des applications presque périodiques en moyenne d'ordre p.*

Lemme 5.2.3 *Sous les hypothèses $(4H)_1, (5H)_5, (5H)_6, (5H)_7$ et $(5H)_8$ les opérateurs intégraux Γ_5 et Γ_6 définis ci-dessus sont des applications sur $\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ c'est-à-dire des applications presque périodiques en moyenne d'ordre p.*

Preuve
Les preuves de ces lemmes sont basées par le principe général de point fixe de Banach et la même principe de preuve de théorème 4.1.2 dans le cas autonome dans le chapitre précédant. Voire le détaile dans **P.Benzandry et T.Diagana**[3]

5.3 Existence des resultats par le principe de point fixe

5.3.1 L'existence des solutions faibles presque périodiques en moyenne d'ordre p

Dans cette section nous étudions l'existence des solutions presque périodiques de classe non autonome des equations différentielles stochastiques de type (4.3) où $(A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille des opérateurs linéaires fermés denséments définis qui satisfait les conditions (1.10) et (1.11) de "Acqiustpace-Terrini", $F : \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ sont des fonctions conjointement continues satisfaites certaines conditions, et $\mathbb{W}$ est un processus de $\mathcal{L}$-Wiener à valeurs dans $\mathbb{K}$. avec des nombres réels comme paramètre

du temps.
Notre méthode d'enquêter sur l'existence de solutions presque périodiques (4.3) se basée sur le théorème de point fixe de Schauder.
Pour étudier l'existence des solutions presque périodiques en moyenne d'ordre p d'eq (4.3) on suppose que

$$\mathbb{H}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}$$

est compact et de plus $(4H)_3, (5H)_6$ nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées
$(6H)_9$ $R(\zeta, A(\cdot)) \in \mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$
$(6H)_{10}$ La fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est presque périodique dans la première variable uniformément dans la deuxième variable telle que $X \longrightarrow F(t, X)$ est uniformément continue sur tout sous ensemble ϱ de $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t, X)\|^p \leq \mathfrak{M}_1(\|X\|_\infty)$$

où $\mathfrak{M}_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, monotone croissante satisfaite

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}_1(r)}{r} = 0.$$

$(6H)_{11}$ La fonction $G : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ est presque périodique dans la première variable uniformément dans la deuxième variable telle que $X \longrightarrow F(t, X)$ est uniformément continue sur tout sous ensemble ϱ' de $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\|G(t, X)\|^p \leq \mathfrak{M}_2(\|X\|_\infty)$$

où $\mathfrak{M}_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, monotone croissante satisfait

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}_2(r)}{r} = 0.$$

Remarque
Notons que l'injection $\mathbb{H}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{H}$ est compacte alors l'injection $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha) \hookrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est

aussi compacte.
Dans cette section Γ_1 et Γ_2 répresente respeectivement des opérateurs non linéaires définis par
$(\Gamma_1 X)(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t,s)F(s,X(s))ds$ et $(\Gamma_2 X)(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t,s)G(s,X(s))d\mathbb{W}(s)$
on suppose que $\alpha \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ si $p > 0$ et $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ si $p = 2$ et que

$$2\beta > \alpha + 1$$

Lemme 5.3.1 [3] *Sous les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{10}$ *et* $(5H)_{11}$ *les applications* $\Gamma_i (i = 1, 2) : \mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha)$ *sont bien définis et continues.*

Lemme 5.3.2 *Sous les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{10}$ *et* $(5H)_{11}$ *les opérateurs intégraux* $\Gamma_i (i = 1, 2)$ *sont des applications définis dans* $\mathbf{AP}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})))$ *vers lui même*

Lemme 5.3.3 [3] *Sous les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{10}$ *et* $(5H)_{11}$ *l'application* Γ_1, Γ_2 *définis précédemment sont des application dans un ensemble borné de* $\mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$ *vers* $\mathbf{BC}^\gamma(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$ *pour* $0 < \gamma < 1$.

Théorème 5.3.1 [3] *On suppose que les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{10}$ *et* $(5H)_{11}$ *satisfaites alors l'eq* (4.3) *a au moins une solution faible presque périodique en moyenne d'ordre p.*

Preuve
Nous utilisons les lemmes 5.3.1, 5.3.2 pour plus de détaile voir **Paul.Benzandry et Toka Diagana** [3 preuve de théorème 6.4 p 176.]

5.3.2 Existence des solutions faibles S^p presque périodiques

Dans cette subsection nous introduisons et développons une autre notion de presque périodicité connue sous le concept de presque périodicité de Stepanov cette notion est plus faible que la presque périodicité d'ordre p. Les résultats de base des processus presque périodiques de Stepanov seront par utilisés par la suite pour étudier l'existence et l'unicité des solutions S^p presque périodiques de l'équation différentielle non autonome (4.3) où $(A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille des opérateurs linéaires fermés sur $\mathbf{L}^p(\Omega,\mathbb{H}))$ satisfait les conditions de Terrini-Acquitapace, F, G sont S^p presque périodiques.

Processus S^P presque périodiques

Définition 5.3.1 *Le transformer de Bochner $X^b(t,s), t\in\mathbb{R}, s\in[0,1]$ de proceessus $X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbf{L}^q(\Omega,\mathfrak{B}))$ est défini par*

$$X^b(t,s) := X(t+s)$$

Remarque
Le processus stochastique $Z(t,s), t\in\mathbb{R}, s\in[0,1]$ est un transformer de Bochner d'un certain processus $X(t)$

$$Z(t,s) = X^b(t,s)$$

si et seulement si

$$Z(t+\tau, s-\tau) = Z(s,t)$$

pour tout $\tau\in[s-1,s]$.

Définition 5.3.2 *Soit $p,q\geq 1$ l'espace $\mathbf{SB}^p(\mathbf{L}^q(\Omega,\mathfrak{B}))$ de touts les processus bornés de stepanov contient tous les proecessus stochastiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbf{L}^q(\Omega,\mathfrak{B})$ tel que $X^b\in\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbf{L}^p((0,1),\mathbf{L}^q(\Omega,\mathfrak{B})))$. c'est un espace de Banach avec la norme*

$$\|X\|_{S^P} = \|X^b\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R};\mathbf{L}^p)} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\int_t^{t+1}\mathbb{E}\|X(\tau)\|^p d\tau\right)^{1/p}$$

Définition 5.3.3 *Soit $p,q\geq 1$. le processus stochastique $\mathbf{SB}^p(\mathbf{L}^q(\Omega,\mathfrak{B}))$ est dit Stepanov presque périodique où S^p presque périodique si $X^b\in\mathbf{AP}(\mathbb{R};\mathbf{L}^p((0,1),\mathbf{L}^q(\Omega,\mathfrak{B})))$ et que pour chaque $\varepsilon>0$ tel que chaque intervalle de longueur I_ε contient un certain nombre τ vérifie*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\mathbb{E}\|X(s+\tau)-X(s)\|^p ds < \varepsilon.$$

L'ensemble de ces fonctions est noté par $S^p\mathbf{AP}(\mathbb{R},\mathbf{L}^q(\Omega,\mathfrak{B}))$.
Dans la suite de cette section nous supposons que $p=q$.

Théorème 5.3.2 *Si $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathfrak{B})$ est un processus stochastique en moyenne d'ordre p alors il est S^p presque périodique.*

Remarque
Les processus S^p presque périodiques admet les même propriétés des processus presque périodiques en moyenne d'ordre p surtout les théorèmes de composition des processus presque périodiques

L'existence des solutions S^p presque périodiques

Pour étudier les solutions S^p presque périodique d'eq (4.3), on commence d'étudier l'existence des solutions S^p presque périodiques de l'équation différentielle stochastique non autonome

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + f(t)dt + g(t)d\mathbb{W}(t) \tag{5.6}$$

où $(A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille des opérateurs linéaires fermés, $f : S^p\mathbf{AP}(\mathbb{R}; \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})) \cap \mathbf{C}(\mathbb{R}\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$ et $G : S^p\mathbf{AP}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})) \cap \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0))$ de plus $(4H)_3, (5H)_6$ nous supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées

$(6H)_{12}$ $R(\zeta, A(\cdot)) \in \mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$

$(6H)_{13}$ La fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ est S^p presque périodique dans la première variable uniformément dans la deuxième variable telle que $X \longrightarrow F(t, X)$ est uniformément continue sur tout sous ensemble ϱ de $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|F(t, X)\|^p \leq \mathfrak{M}_1(\|X\|_\infty)$$

où $\mathfrak{M}_1 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, monotone croissante satisfait

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{\mathfrak{M}_1(r)}{r} = 0.$$

$(6H)_{14}$ La fonction $G : \mathbb{R}\times\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0)$ est presque périodique dans la première variable uniformément dans la deuxième variable telle que $X \longrightarrow F(t, X)$ est uniformément continue sur tout sous ensemble ϱ' de $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\|G(t, X)\|^p \leq \mathfrak{M}_2(\|X\|_\infty)$$

où $\mathfrak{M}_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, monotone croissante satisfait

$$\lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}_2(r)}{r} = 0.$$

Théorème 5.3.3 [3] *On suppose que les conditions de Terrini-Acquistapace et* $(4H)_3$ *satisfaites l'équation* (5.7) *a une solution unique borné* $X \in S^p\mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$.

Preuve
Pour prouver ce théorème nous avons besoin des lemmes suivantes

Lemme 5.3.4 *Sous les conditions de Terrini-Acquistapace et* $(4H)_3$ *l'intégral suivant*

$$X_n = \int_{n-1}^{n} U(t, t-\zeta) f(t-\zeta) d\zeta$$

est définit sur $S^p\mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$. *pour chaque* $n = 1, 2, ...$

Lemme 5.3.5 [3] *Sous les conditions de Terrini-Acquistapace et* $(4H)_3$ *l'intégral suivant*

$$Y_n = \int_{n-1}^{n} U(t, t-\zeta) g(t-\zeta) d(\zeta)$$

est défint sur $S^p\mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{L}_2^0))$. *pour chaque* $n = 1, 2, ...$

Définition 5.3.4 *Un processus* $X(t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est dit solution d'eq* (4.3) *sur* $\mathbb{R}$ *si*

$$X(t) = U(t,s)X(s) + \int_s^t U(t,\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_s^t U(t,\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma) \tag{5.7}$$

pour tout $t \geq s$ *et pour chaque* $s \in \mathbb{R}$.
Maintenant, on définit les opérateurs intégraux non linéaires Γ *sur* $S^p\mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$. *suivant*

$$\Gamma X(t) = \Gamma_1 X(t) + \Gamma_2 X(t)$$

où

$$\Gamma_1 X(t) := \int_s^t U(t,\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma$$

et

$$\Gamma_2 X(t) := \int_s^t U(t,\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$$

Dans la suite de cette section, nous supposons que $\alpha \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ *et* $p > 2$ *et* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ *si* $p = 2$ *et on suppose que*

$$2\beta > \alpha + 1.$$

Lemme 5.3.6 *Sous les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{13}$ *et* $(5H)_{14}$ *les applications* $\Gamma_i(i = 1, 2, ...) : \mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})) \longrightarrow \mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ *seront définies et continues*

Lemme 5.3.7 *Sous les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{13}$ *et* $(5H)_{14}$ *les opérateurs intégraux* $\Gamma_i(i = 1, 2, ...)$ *sont des applications sur* $S^p\mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$ *vers lui même.*

Lemme 5.3.8 [9] *Sous les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{13}$ *et* $(5H)_{14}$ *l'application* $\Gamma_i(i = 1, 2, ...)$ *définis précédemment sont des application dans un ensemble borné de* $\mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$ *vers* $\mathbf{BC}^\gamma(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha))$ *pour* $0 < \gamma < 1$.

Lemme 5.3.9 [3] *Les opérateurs intégraux* $\Gamma_i(i = 1, 2, ...)$ *sont des applications dans un ensemble borné de* $\mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$ *vers un ensemble borné de* $\mathbf{BC}^\gamma(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}_\alpha)) \cap S^p\mathbf{AP}(\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H}))$.

Théorème 5.3.4 [2] *On suppose que les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{13}$ *et* $(5H)_{14}$ *satisfaites alors l'eq* (4.3) *a au moins une solution faible* S^p *presque périodique.*

Théorème 5.3.5 [2] *Sous les hypothèses* $(4H)_3, (5H)_6, (5H)_9, (5H)_{13}$ *et* $(5H)_{14}$ *si on suppose qu'il existe* $\mathcal{L} > 0$ *tel que* $\mathbb{E}\|G(t, Y)\| \leq \mathcal{L}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\mathbf{L}^p(\Omega, \mathbb{H})$, *alors l'equation* (4.3) *a une solution faible unique et presque périodique en moyenne d'ordre p de la forme suivante*

$$X(t) = \int_{-\infty}^t U(t,\sigma)F(\sigma, X(\sigma))d\sigma + \int_{-\infty}^t U(t,\sigma)G(\sigma, X(\sigma))d\mathbb{W}(\sigma)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$ *et pour* k, k' *sont assez petits.*

Bibliographie

[1] L.Arnold et C.Tudor,Stationary and Almost Periodic Affine Stochastic Differential Equations. Stochastics Stochastic Rep. 64(1998), no. $3-4$, $177-193$.

[2] P.Bezandry and T.Diagana, Existance of Almost Periodic Solutions to some Stochastic Differential Equations. Applicable Anal. 86(2007),no. $7, 819-827$.

[3] Paul.H. Benzandry. Toka Diagana Almost Periodic Stochastic Processus, springer-Science+Business Media, New York, (2011)

[4] H.Bohr, Almost Periodic Functions. Chelsea Publishing Company, New York, 194.

[5] C.Corduneanu, Almost Periodic Functions. Second Edition, Chelsea, New York 1989.

[6] T.Diagana,S.Elaydi,andA.-Z. Yakubu, Models in Almost Periodic Envirenements.J. Deffirence Equ. Appl. 13(2007,) no. 4, $239-260$.

[7] T.Diagana, Almost Automorphic Mild Solutions To Some Classes of Nonautonomous Higer-Order Diffirential Equations. Semigroup Forum (in press).

[8] T.Diagana, An Introduction to Classical and p-adic Theory of Linear Operators and Apllications. Nova Science Publishers, New York, 2006.

[9] A. M. Fink, Almost Deffirential Equations. Lecture Notes in Mathematics 377, Springer-Verlag, New York, 1974

[10] G. Da Prato and C.Tudor, Periodic and Almost Periodic Solutions For semilinear stochastic Evolution Equations. Stoch, Anal. Appl. 13(1)(1995,) $13-33$.

[11] A. Pankov, Bounded and Almost Periodic Stochastic of Nonlinear Operator Differental Equations Kluwer, Dordrecht, 1990.

[12] E. Slutsky, Sur les fonctions aléatoires presque périodique et sur la decomposition des fonctions aléatoires. Actualités scientifique et industrielles, 738, $33-55$, Herman. Paris, 1938.

[13] M. Yor, Existence et unicité de diffusion à valeurs dans un espace de Hilbert. Ann. Inst Poincaré Sect B 10(1974,) $55-88$