République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année: 2015

Sur le spectre d'une variété produit

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

Mohamed **A**ibout [1]

Sous la direction de

Encadreur : Dr S. Ouakkas

Soutenue le 16 Juin 2015 devant le jury composé de

K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
R. Nasri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
D. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : aiboutmat2014@gmail.com

Table des matières

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère :Halima, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père :Benaissa, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

À tous mes proches de la famille Aibout, et plus particulièrement, mes soeurs et mes frères tout à son nom et sans oublier la familles Bouzouira.

Mes frères et soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mon encadreur qui ma guidais durant tout ma recherche.

Mes professeurs de l'université "Dr.Moulay Taher à saida" qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

À mes amis proches : Dahah, Daoudi, Mostafa, Abbes, khalifa,Tayeb.

Tout qui mon donne de l'aide et des courages surtout : Mr. Djerfi, Mr. Djebbouri et ma soeur Nacera.

Toutes mes amies qui ont toujours été présentes pour moi.

Tous les étudiants du département de mathématique surtout mes amis de la promotion.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.
J'adresse le grand remerciement à notre encadreur Mr.S.Ouakkas, Maitre de conférences à l'université de Saïda, qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils du début à la fin de ce travail.
Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fais en acceptant de siéger à mon soutenance, tout particulièrement :
Mr.K.Djerfi pour m'avoir fais l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
Je souhait exprimer notre gratitude à Mr.R.Nasri et Mr.D.Djebbouri pour avoir accepté d'examiner ce mémoire. Je vous remercie pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour vos précieux conseils et remarques.
Finalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et à tout ce qui ont participé à réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Introduction

La géométrie spectrale est une branche qui se trouve au carfour " géométrie, analyse et topologie ", de nombreaux problèmes issus de la physique mathématiques utilisent les notions de base de cette discipline, d'une part, et d'autre part les outils de l'analyse fournis par cette branche de mathématiques ont une grande importance dans le développement de l'analyse mathématique lui même, l'algébre, la géométrie, la théorie des nombres...

Pour les variétés riemanniennes, les propriétés du laplacien " comme un opérateur linéaire bornés sous des conditions déterminées " impliquent des propriétés et des informations sur la géométrie de cette variété, le cas compact est assez simple à voir. Ici l'opérateur est auto-adjoint positif, et à résolvante compacte (théoème spectrale 3.1.1 page 48), donc son spectre est une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$. Dans notre travail on se restrient au cas compact. Dans la pratique le calcul du spectre n'est pas toujours simple " à l'exeption de quelques cas ". On a besion donc des méthodes non-directes (exemple méthodes d'aproximation).

Ce mémoire est composé de quatre chapitres, le premier est consacre au définitions et propriétés des variétés riemanniennes dans le deuxième an définit le laplacien sur une variété riemannienne " quelconque" comme un opérateur auto-adjoint positif agissant sur les fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété compacte. Pour les variété produit, on définit le laplacien relativement à la métrique du produit tordu avec des exemples de calcul du spectre. Dans le quatrième chapitre on discute le probléme d'isospectralité des variétés non isométriques, on utilise le produit tordu pour construire des variétés isospectrales non isométriques, ceci répond au probléme posé par M.Kac en 1966, dont une première réponse est donnée par Milnor.

Chapitre 1

Produit riemannien et produit tordu

1.1 Produit riemannien

1.1.1 Rappels et Préliminaires

Commençons par quelques rappels et définitions.
Soient M et N deux variétés différentielles et soit ϕ une application C^∞ de M dans N.
Une telle fonction envoie par le biais de son application tangente, un vecteur tangent à M sur un vecteur tangent à N.
Mais en général il n'y a pas de moyen d'envoyer un champ de vecteurs de M sur un champ de vecteur de N.

Définition 1.1.1. *On dira que deux champs de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ et $Y \in \Gamma(TN)$ sont ϕ-reliés (et on notera $X \overset{\phi}{\sim} Y$) si $\forall p \in M$ on a $d\phi_p(X_p) = Y_{\phi(p)}$.*
ceci est équivalent à dire que : $\forall f \in C^\infty(N), X(f \circ \phi) = Y(f) \circ \phi$.
Il est aisé de vérifier à partir des définitions que si :
$X \overset{\phi}{\sim} X_1$ et $Y \overset{\phi}{\sim} Y_1$ alors :

1. $\lambda X + \mu Y \overset{\phi}{\sim} \lambda X_1 + \mu Y_1 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $f \circ \phi.X \overset{\phi}{\sim} f.\phi \quad \forall f \in C^\infty(N)$.
3. $[X, Y] \overset{\phi}{\sim} [X_1, Y_1]$.

et dans le cas où ϕ est un difféomorphisme, pour tout champ $X \in \Gamma(TM)$ on obtient un unique champ de vecteur $d\phi(X) \in \Gamma(TN)$ $\phi-reli$ à X, il suffit de le définir pour *tout* $q = \phi(p)$ *par* $(d\phi(X))_q = d\phi(X_p)$.

Nous allons maintenant rappeler quelques résultats concernant la structure différentielle produit de $M \times N$ (i.e dont les cartes sont les produits des cartes de M et N) :

a. Les projections

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & M \times N & \longrightarrow & M \\ & & (p,q) & \longrightarrow & p. \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \sigma & : & M \times N & \longrightarrow & N \\ & & (p,q) & \longrightarrow & q. \end{array}$$

sont des applications de C^∞ (et même des submersions).

b. Pour tout $(p,q) \in M \times N$,$\top_{(p,q)}(M \times \{q\})$ et $\top_{(p,q)}(\{p\} \times N)$ sont des sous espaces vectoriels de l'espace tangent $\top_{(p,q)}(M \times N)$.

c. Les restrictions : $\pi|_{M \times \{q\}}$ (resp $\sigma|_{\{p\} \times N}$) est un difféomorphisme de $M \times \{q\}$(resp $\{p\} \times N$) sur M (resp N). En particulier, leurs applications tangentes nous donnent des isomorphismes :

$\top_{(p,q)}(M \times \{q\}) \longrightarrow \top_p(M)$

et

$\top_{(p,q)}(\{p\} \times N) \longrightarrow \top_q(N)$.

d. On peut déduire de (c) et du fait que $\dim M \times N = \dim M + \dim N$, que pour tout $(p,q) \in M \times N$, nous avons : $\top_{(p,q)}(M \times N) = \top_p(M) \oplus \top_q(N)$.

e. Si $X \in \Gamma T(M \times N)$ est tel que : $\forall f \in C^\infty(M)$ et $\forall h \in C^\infty(N)$ $X(f \circ \pi) = 0$ et $X(g \circ \sigma) = 0$, alors $X = 0$.

Pour établir les liens entre les calculs dans $M \times N$ et ceux dans chacun des facteurs et par souhait de rigueur, nous avons besoin de la notion de relèvement :

1.1.2 Définitions et notations

- Si $f \in C^\infty(M)$, alors on appelera la relevée de f à $M \times N$ la fonction
$\tilde{f} = f \circ \pi \in C^\infty(M \times N)$.

- Si $X \in \top_p(M)$ et $q \in N$, alors le relevé de x au point (p, q) est par définition l'unique vecteur tangent $\tilde{x} \in \top_{(p,q)}(M \times N)$ tel que $d\pi(\tilde{x}) = x$.
- Si $x \in \Gamma(TM)$ alors le relevé de X à $M \times N$ est le champ de vecteur $\tilde{X}$ qui en tout point (p, q) est le relevé de X_p au point (p, q).

De la même manière, les fonctions, les vecteurs tangents et les champs de vecteurs de N ont des relevés à $M \times N$ définies de la même manière en utilisant la projection σ au lieu de π.

- On notera $L(M)$ (resp $L(N)$) l'ensemble des relevés des champs de vecteurs de M (resp N).

A partir de la définition et les propriétés de structures différentielles produits qu'on vient de rappeler, on peut facilement déduire que :

- $L(M)$ et $L(N)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\Gamma T(M \times N)$ et $L(M) \cap L(N) = 0$.
- Le relevé $\tilde{X}$ (resp $\tilde{Y}$)d'un champ $X \in \Gamma(TM)$ (resp $Y \in \Gamma(TN)$) est caractérisé par le fait que : $\tilde{X} \overset{\pi}{\sim} X$ et $\tilde{X} \overset{\sigma}{\sim} 0$ (resp $\tilde{Y} \overset{\sigma}{\sim} Y$ et $\tilde{Y} \overset{\pi}{\sim} 0$).
- Cette caractérisation permet de voir que :
  $\forall f \in C^\infty(M)$ et $\forall h \in C^\infty(N)$, on a :

$$\tilde{X}(\tilde{f}) = \widetilde{X(f)}, \tilde{X}(\tilde{h}) = 0, \tilde{Y}(\tilde{f}) = 0 \qquad et \tilde{Y}(\tilde{h}) = \widetilde{Y(h)}.$$

Une autre propriété des relevés est le :

Lemme 1.1.1. **1.** *Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y} \in L(M)$ (resp $L(N)$) alors :*
$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} \in L(M)$ *(resp $L(N)$).*

2. *Si $\tilde{X} \in L(M)$ et $\tilde{Y} \in L(N)$, alors $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$.*

Preuve 1.1.1. *Il suffit pour cela d'utiliser le fait que*

$d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [d\pi\tilde{X}, d\pi\tilde{Y}]$

et

$d\sigma([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [d\sigma\tilde{X}, d\sigma\tilde{Y}]$.

1.1.3 Métrique produit et ses invariants riemanniens

Soit (M, g^M) et (N, g^N) deux variétés riemanniennes, notons comme avant π et σ les projections respectives de $M \times N$ sur M et N. On va munir la variété produit $M \times N$ de la métrique produit des métriques riemanniennes g^M et g^N. cette métrique produit est par définition :

$$g = \pi^*.g^M + \sigma^*.g^N.$$

En d'autres termes, $\forall (p,q) \in M \times N$ et $\forall v, w \in \top_{(p,q)}(M \times N)$ on a :
$g_{(p,q)}(v,w) = g^M|_p(d\pi|_{(p,q)}v, d\pi|_{(p,q)}w) + g^N|_q(d\sigma|_{(p,q)}v, d\sigma|_{(p,q)}w).$
et il est aisé de vérifier que g définit bien une métrique sur $M \times N$:
C'est la métrique produit de g^M et g^N. Pour la suite, nous avons besoin de comprendre le lien entre la connexion de Levi-Civita de g notée ∇ et celle de g^M et g^N notées respectivement ∇^M et ∇^N. C'est l'objet de la :

Proposition 1.1.1. (*Comme avant les champs avec tilde représentant les relevés de ceux sans tilde). Soient $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in L(M)$ et $\tilde{V}$, $\tilde{W} \in L(N)$ on a :*

(1) $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ *est le relevé de* $\nabla^M_X Y$.

(2) $\nabla_{\tilde{V}}\tilde{W}$ *est le relevé de* $\nabla^N_V W$.

(3) $\nabla_{\tilde{V}}\tilde{X} = 0 = \nabla_{\tilde{X}}\tilde{V}$

Preuve 1.1.2. 1) *Revient à montrer que* $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} = (\widetilde{\nabla^M_X Y})$
D'un part, $\forall \tilde{Z} \in L(M)$, *on a :* $\tilde{X}(g(\tilde{Y},\tilde{Z})) = \tilde{X}(g(Y,Z)\circ\pi) = X(g(X,Y))\circ\pi$ *de même en invertissant les rôle de* $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$. *D'autre part, la formule de Koszul nous donne :*
$g(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) = \frac{1}{2}[\tilde{X}.g(\tilde{Y},\tilde{Z}) + \tilde{Y}.g(\tilde{Z},\tilde{X}) - \tilde{Z}.g(\tilde{X},\tilde{Y}) - g(\tilde{Y},[\tilde{X},\tilde{Z}]) - g(\tilde{Z},[\tilde{Y},\tilde{X}]) + g(\tilde{X},[\tilde{Z},\tilde{Y}])]$
donc $g(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) = g((\nabla^M_X Y), Z) \circ \pi$. *maintenant vu que Z est quelconque et que* $\pi|_{M\times\{q\}}$ *est une isométrie, on en deduit que* $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} \overset{\pi}{\sim} (\nabla^M_X Y)$ *de la même manière, on montre que* $\forall V \in L(N), g(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{V}) = 0$ *et vu que* $\sigma|_{\{p\}\times N}$ *est une isométrie et que V est quelconque, on en deduit que :*

$$\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} \overset{\sigma}{\sim} 0.$$

2) *La preuve est similaire en remplaçant M par N.*
3)le même type d'argument qu'en 1) permet de montrer que $(\nabla_{\tilde{V}}\tilde{X} \overset{\pi}{\sim} 0$ *et* $\nabla_{\tilde{V}}\tilde{X} \overset{\sigma}{\sim} 0)$ *d'où* $\nabla_{\tilde{V}}\tilde{X} = 0$.
d'autre part, par le lemme 1.1.1, on a :
$\nabla_{\tilde{X}}\tilde{V} = \nabla_{\tilde{V}}\tilde{X} - [\tilde{V}, \tilde{X}] = \nabla_{\tilde{V}}\tilde{X}$.
Pour le tenseur de courbure, on a le résultat suivant, où R, R^M et R^N désignent les tenseurs de courbure repectifs de $M \times N$, de M et de N.

Proposition 1.1.2. *Soient $\tilde{X}$, $\tilde{Y}, \tilde{Z} \in L(M)$ et $\tilde{U}$, $\tilde{V}, \tilde{W} \in L(N)$ on a :*

1. *$R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z}$ est le relevé de $R^M(X, Y)Z$.*
2. *$R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{U}$ est le relevé de $R^N(V, W)U$.*
3. *R est nulle si l'un des champs est dans $L(M)$ et les autres dans $L(N)$ ou l'inverse.*

Preuve 1.1.3. 1) *On a par définition et par la proposition 1.1.1 .*
$R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \nabla_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{Z} - \nabla_{\tilde{X}}\nabla_{\tilde{Y}}\tilde{Z} - \nabla_{\tilde{Y}}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Z} = \widetilde{\nabla[X, Y]}Z - \widetilde{\nabla_X\nabla_Y}Z + \widetilde{\nabla_Y\nabla_X}Z = \widetilde{(R^M(X, Y)Z)}$.
2) Même argument qu'en 1).
3)On a par la proposition 1.1.1, $R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{V} = \nabla_{\widetilde{[X,Y]}}\tilde{V} - \nabla_{\tilde{X}}\widetilde{\nabla_Y V} - \nabla_{\tilde{Y}}\widetilde{\nabla_Y V} = 0$ *et de la même manière, on peut démontre* $R(\tilde{V}, \tilde{X})\tilde{Y} = R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{Y} = R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{X} = R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W} = R(\tilde{W}, \tilde{X})\tilde{V} = 0$.

1.2 Produits tordus

1.2.1 Définition.

Soient (B, g^B) et (F, g^F) deux variétés riemenniennes et f une fonction $C^\infty(B)$ strictement positive.
Le produit tordus $M = B \times_f F$ est le produit $B \times F$ muni de la métrique $g = \pi^* g^B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g^F$.
En d'autres termes, $\forall (p, q) \in M$ et $\forall x, y \in \top_{(p,q)}(M)$ on a : $g_{(p,q)}(x, y) = g^B \mid_p (d\pi \mid_{(p,q)} x, d\pi \mid_{(p,q)} y) + f^2(p) g^F \mid_q (d\sigma \mid_{(p,q)} x, d\sigma \mid_{(p,q)} y)$.
B est appelé la base de $M = B \times_f F$ et F est appelé le fibre. remarquons que pour

$f = 1$, la métrique de ce produit tordu n'est que le produit des métriques g^B et g^F. On notera D la connexion de Levi-Civita de (F, g^F) et respectivement ∇ et ∇^B celles de(M, g^M) et (B, g^B).

1.2.2 Quelques propriétés et notations

Comme dans le cas d'un produit , les fibres $\{p\} \times F = \pi^{-1}(q)$ sont des sous variétés de M. et le produit tordu caracterisé par les propiétés suivantes :
(1) $\forall q \in F$, la restriction $\pi \mid_{(M\times\{q\})}$: $B \times \{q\} \longrightarrow B$ est une isométrie.
(2) $\forall p \in B$, la restriction $\sigma \mid_{(\{p\}\times F)}$: $\{p\} \times F \longrightarrow F$ est une homothétie de rapport $\frac{1}{f(p)}$.(en fait $\|v\|^2_{(\{p\}\times F)} = f^2(p).\|v\|^2_F$).
(3) $\forall (p, q) \in M$: on a la feulle $B \times \{q\}$ et la fibre $\{p\} \times F$ sont orthogonaux en (p, q).
Les vecteurs tangents aux feuilles seront dits horizontaux et ceux tangents aux fibres seront dits verticaux.
On notera H la projection orthogonal de $\top_{(p,q)}(M)$ sur le sous-espace horizontal $\top_{(p,q)}(B \times \{q\})$ et par V la projection sur le sous espace vertical $\top_{(p,q)}(\{p\} \times F) = (\top_{(p,q)}(B \times \{q\}))^{\perp}$.
Ainsi, pour deux champs de vecteurs V, W verticaux de M, on a $H(D_V W) = \prod(V, W)$ qui n'est autre que la seconde forme fondamentale des fibres.

1.2.3 Les invariants riemanniens d'un produit tordu

Comme au premier chapitre, $L(F)$ et $L(B)$ dénoteront respectivement les relevés à M des champs de vecteur de F et de B.
D'autre part et pour ne pas alourdir le texte nous omettrons les tildes : un champ et son relevé seront notés de la même manière. Commençons d'abord par un lemme qui nous sera utile pour la suite :

Lemme 1.2.1. *soit $h \in C^\infty(B)$. Le gradient du relevé $h \circ \pi$ de h à $M = B \times_f F$ est le relevé à M du gradient de h dans B.*

Preuve 1.2.1. *Pour cela, il suffit de montrer que $grad(h \circ \pi)$ est horizontal et π-relié à $grad\, h$. soit v un vecteur tangent vertical à M. on a $d\pi(v) = 0$
et donc $g(grad(h \circ \pi), v) = v(h \circ \pi) = d(h \circ \pi)(v) = dh(d\pi v) = 0$ ce qui prouve que*

$grad(h \circ \pi)$ est horizontal.
Soit X un vecteur tangent horizontal à M.
Vu que $d\sigma(X) = 0$, on a $g^B(d\pi(grad(h \circ \pi))d\pi(X) = g(grad\, h \circ \pi, X) = X(h \circ \pi)$
$= d\pi(X)(h) = g^B(grad\, h, d\pi(X))$, et donc on a bien en tout point : $d\pi(grad(h \circ \pi))$
$= grad(h)$.
Avec les notations du chapitre précédent pour les relevés (avec les tildes), le lemme 1.2.1 signifie $grad\tilde{h} = \widetilde{grad\, h}$.
Dans toute la suite et pour ne pas alourdir le texte, on notera de la même manière les champs de B et de F et leurs relevés dans $L(B)$ et $L(F)$, de mème pour les fonctions et leur relevés.
Le résultat suivant décrit la relation entre ∇, ∇^B et D.

Proposition 1.2.1. *Soient $X, Y \in L(B)$ et $V, W \in L(F)$:*

1. *$\nabla_X Y \in L(B)$ est le relevé de $\nabla^B_X Y$.*
2. *$\nabla_X V = (X.f/f)V$.*
3. *$nor\nabla_V W = \prod(V, W) = -g(V, W/f).gradf$.*
4. *$tan\nabla_V W \in L(F)$ est le relevé de $(D_V W)$.*

(*attention dans* (3) *et* (4) *f et $grad\, f$ désignent leurs relevés respectifs*).

Preuve 1.2.2. 1) *Le crochet de deux champs de vecteurs ne dépendant que de la structure différentielle, nous avons donc, comme au chapitre* 1 $[X, V] = [Y, V] = 0$ *,* *et la formule de Kosul nous donne alors :*
$2.g(\nabla_X Y, V) = -V.g(X, Y) - g(V, [X, Y])$.
Or le champs X et Y sont relevés de champ de B et donc $g(X, Y)$ est constante sur les fibres. Mais vu que V est vertical on a $V(g(X, Y)) = 0$.
D'autre part, le champ $[X, Y]$ étant horizontal on a $g(V, [X, Y]) = 0$.
Ainsi, $g(\nabla_X Y, V) = 0$ pour tout $V \in L(F)$, donc $\nabla_X Y$ est horizontal.
Et puisque $\pi|_{B\times\{q\}}$ est isométrie, on a $\nabla_X Y \overset{\pi}{\sim} {}^B\nabla_X Y$.
2) *Vu que $[X, V] = 0$, on a bien :*
$\nabla_X V = \nabla_V X$. Ces deux champs $\nabla_X V$ et $\nabla_V X$ sont verticaux,(on a par (1) *:* *$g(\nabla_X V, Y) = g(V, \nabla_X Y) = 0$ et ceci pour tout$Y \in L(B)$).*
Ainsi, dans la formule de Kosul pour $2.g(\nabla_X V, W)$, tous les termes s'annullent

excepté $X.g(V, W)$. *Mais par définition du produit tordu, on a :* $g(V, W)_{(p,q)} = f^2(p).g^F(V_q, W_q)$, *En d'autres termes,* $g(V, W) = (f \circ \pi)^2 g^F(V, W) \circ \sigma$. *Le terme* $g^F(V, W) \circ \sigma$ *est constant sur les feuilles auxquelles* X *est tangent, d'où :*
$X.g(V,W) = X((f \circ \pi)^2(g^F(V, W) \circ \sigma))$ $2.X(f \circ \pi)(g^F(V, W) \circ \sigma)$
$= 2.\frac{X(f \circ \pi)}{f \circ \pi} g(V, W)$
$= 2.\frac{X(f)}{f} g(V, W)$.
Ou dans la dernière égalité. comme dans l'énoncé (2) *nous avons désigné la relevée* $f \circ \pi = \tilde{f}$ *de* f *par* f.
3) *par* (2), *on a pour tout* $X \in L(B)$ *:*
$g(\nabla_V W, X) = -g(W, \nabla_V X) = -\frac{X(f \circ \pi)}{f \circ \pi} g(W, V)$. *Mais par le lemme 1.2.1,* $X(f \circ \pi) = g(grad(f \circ \pi), X) = g^B(grad\, f, X)$, *et donc :* $g(\nabla_V W, X) = \frac{-g(W,V)}{f} g(grad\, f, X)$. *d'où le résultat.*
4) *Puisque* V *et* W *sont tangents aux fibres, la théorie de sous variétés et vu que les homothéties préservent la connexion, nous donne :* $d\sigma(tan(\nabla_V W)) = D_V W$.

Remarque 1.2.1. *:*
1) *Les feuilles, comme dans le cas d'un produit sont des sous variétés totalement géodésiques de* M *(i.e leur seconde forme fondamental est = 0).*
2) *L'assertion* (3) *montre que les fibres sont des sous variétés totalement ombiliques de* M.

Nous allons, maintenant intéresser au tenseur de courbure.
Commençons d'abord par quelques précisions et définitions :
Pour un tenseur covariant T et B, son relevé $\tilde{T}$ à M est tout simplement le tenseur covariant de$M$: $\pi^*(T)$.
Dans le cas d'un $(1, s)$ tenseur T : $\Gamma(TB) \times ... \times \Gamma(TM) \xrightarrow{T} \Gamma(TB)$
La situation est un peu plus compliquée. Pour définir le relevé $\tilde{T}$ à M du tenseur T, nous procédons de la manière suivante : Si $v_1, ..., v_s \in \top_{(p,q)}(M)$ alors on définit $\tilde{T}_{(p,q)}(v_1, ..., v_s)$ comme étant le vecteur tangent horizontal au point (p, q) qui se projette sur $T_p(d\pi v_1, ..., d\pi v_s)$ dans $\top_p(B)$.
On définit de la même manière les relevés des tenseurs de F.
Nous allons intéresser aux tenseurs de courbure $(1, 3)$.
Notons ${}^B R$ et ${}^F R$ respectivement les relevés à M des tenseurs des courbures $(1, 3)$ de

B et de F.
Puisque π est une isométrie sur les feuilles, ${}^{B}R$ donne le tenseur de courbure sue les feuilles. De même , σ étant une homothétie sur les fibres, ${}^{F}R$ donne le tenseur de courbure sur les fibres.
De plus, vu que les feuilles sont des sous variétés totalement géodésiques de M, l'équation de Gauss montre que ${}^{B}R$ coincide avec le tenseur R de M sur les vecteurs horizontaux. (notons qu'il n'en est pas de même pour ${}^{F}R$ et R puisque les fibres ne sont pas totalement géodésiques).
En plus de ces définitions et précisions concernant les tenseurs de courbures et avant d'énoncer le résultat, nous avons besoin d'une autre précision concernant la hessienne d'une fonction.
Soit $h \in C^{\infty}$, le relevé à M de la hessienne de h (en tant que 2-tenseur covariant) sera noté $Hess(h)$. Cette relevée de la hessienne de h ne coincide en général avec la hessienne de la relevé $\tilde{h}$ et de $\tilde{h}$ que sur des vecteurs horizontaux.

Proposition 1.2.2. *Soient $X, Y, Z \in L(B)$ et $U, V, W \in L(F)$ on a :*

1. *$R(X, Y)Z \in L(B)$ est le relevé de ${}^{B}R(X, Y)Z)$ sur B.*
2. *$R(V, X)Y = -(Hessf(X, Y)/f)V = -(1/f)g(\nabla_X G, Y)$ où $Hessf$ est la relevée à M de la hessienne de f et G le relevé de son gradient.*
3. *$R(X, Y)V = R(V, W)X = 0$.*
4. *$R(X, V)W = (g(V, W)/f)\nabla_X G = f.g^{F}(V, W)\nabla_X G$.*
5. *$R(V, W)U =^{F} R(V, W)U - (\|G\|/f)^2.[g(U, V)W - g(W, U)V]$.*

Preuve 1.2.3. 1) *Par définition, $R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z$. On a directement le résultat en utilisant* (1) *de la proposition 1.2.1.*
2) *Comme déja vu $[X, V] = 0$ et donc $R(V, X)Y = -\nabla_V\nabla_X Y + \nabla_X\nabla_V Y$. Par* (2) *de la proposition 1.2.1, on a $\nabla_X\nabla_V Y = \nabla_X[(Yf/f)V] = X(Yf/f)V + (Yf/f)\nabla_X V$*
$= [X(Yf)/f + Yf.X(1/f)]V + (Yf/f)(Xf/f)V$.
mais $X(1/f) = -Xf/f^2$.
donc $\nabla_X\nabla_V Y$ se réduit à $(X.Yf/f)V$.
D'autre part, vu que $\nabla_X Y \in L(B)$, on a $\nabla_V\nabla_X Y = ((\nabla_X Y)f/f)V$.
et donc $R(V, X)Y = -[(X.Y.f/f - \nabla_X Y)f/f]V = (Hessf(X, Y)/f)V$, de plus

$Hessf(X,Y) = \nabla_X df(Y) = (\nabla_X df^\sharp)^b(Y) = g(\nabla_X G, Y)$ *et le résultat en découle.*

3) *Faisons le calcul en un point* $m \in M$. *On peut supposer* $[V,W] = 0$ *au point* m, *en prolongeant* $V(m)$ *et* $W(m)$ *par des champs parallèles, on a donc au point* m *:* $R(V,W)X = -\nabla_V\nabla_W X + \nabla_W\nabla_V X$.

D'aprés (2) *de la proposition 1.2.1, on a :* $\nabla_V(\nabla_W X) = \nabla_V((Xf/f)W)$

$= V(Xf/f)W + (Xf/f)\nabla_V W$.

Et le fait que Xf/f *est constante sur les fibres implique* $V(Xf/f) = 0$, *et donc* $\nabla_W(\nabla_V X) = (Xf/f)\nabla_W V$.

De la même manière, on démontre $\nabla_W(\nabla_V X) = (Xf/f)\nabla_W V$, *d'où* $R(V,W)X$

$= (Xf/f)(-\nabla_V W + \nabla_W V) = (Xf/f)[W,V] = 0$

D'autre part, en utilisant les symétries du tenseur de de courbure, on a :

(i) *g(R(X, Y)V, W)= R(X, Y, V, W) =R(V, W, X, Y)=g (R(V, W)X, Y)=0.*

(ii) *De même g(R(X , Y)V, Z) = R(X, Y, V, Z)= -R(X,Y,Z,V) = -g(R(X, Y)Z, V)=0* (*d'aprés la partie 1*).

Comme (i) est vraie pour $\forall W \in L(F)$ *et (ii) est vraie pour* $\forall Z \in L(B)$, *on a bien* $R(X,Y)V = 0$.

4) *Puisque* $g(R(X,Y)W,U) = R(X,V,W,U) = R(W,U,X,V)$

$= g(R(W,U)X,V) = 0$, *on en déduit que* $R(X,V)W$ *est horizontal.*

Soit Y *un champ horizontal quelconque, par* (2) *on obtient* $g(R(X,V)W,Y)$

$= R(W,Y,X,V) = g(R(W,Y)X,V) = \frac{Hessf(X,Y)}{f}g(V,W)$.

Et le fait que $Hessf(X,Y) = g(\nabla_X grad\, f, Y)$ *implique le résultat.*

5) *Par* (3) *on a* $g(R(V,W)U,X) = -g(R(V,W)X,U) = 0$ *,ce qui entraine que* $R(V,W)U$ *est verticale. Comme* σ *est une homothétie sur les fibres, on en déduit que* $R(V,W)U \in L(F)$ *est le tenseur de courbure sur chaque fibre.*

Le fait que R *et* ${}^FR$ *sont reliés par la formule de Gauss (théorie de sous variétés) et en utilisant* (3)*la proposition 1.2.1* (*L'expression de la seconde forme fondamentale*) *on obtient le résultat.*

Courbure de Ricci. Considérons maintenant le tenseur de Ricci (Ric) de l'espace tordu M. *On écrit* ${}^BRic$ *le relevé de tenseur de Ricci en* B *et* ${}^FRic$ *celui en* F.

Proposition 1.2.3. *soit* $M = B\times_f F$ *avec* $d = dimF$ *et* $n = dimB$. *soient* $X, Y \in L(B)$ *et* $V, W \in L(F)$ *on a :*

1. $Ric(X, Y) =^B Ric(X, Y) - (d/f)Hessf(X, Y)$
2. $Ric(X, V) = 0$
3. $Ric(V, W) = {}^F Ric(V, W) - g(V, W)f^{\#}$
   où $f^{\#} = (\triangle f)/f + (d-1)g(grad\, f, grad\, f)/f^2$ *et* $\triangle f = traceHessf$.

Preuve 1.2.4. 1) *Soit* $(p, q) \in M$.
Soient $(V_i)_{1 \leq i \leq d}$ *un repère local orthonormé de* F *et* $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ *un repère local orthonormé de* B. *En notant pareillement leurs relevés, on a* $\{V_1/f, ..., V_d/f, E_1, ..., E_n\}$ *est un repère local* g*-orthonormé de* $B \times_f F$. *Par définition,* $Ric(X, Y) \mid_{(p,q)}$
$= \sum_{i=1}^{+d} R(X, V_i/f, Y, V_i/f) + \sum_{j=1}^{+n} R(X, V_j/f, Y, V_j/f)$
$=^B Ric(X, Y) + \sum_{i=1}^{+d} R(X, V_i/f, Y, V_i/f)$.
D'autre part, et en utilisant (2) *de la proposition* 1.2.2*, on a :* $R(X, V_i/f, Y, V_i/f)$
$= -(1/f^2)R(V_i, X, Y, V_i)$
$= -(1/f^2)g(R(V_i, X)Y, V_i) = -(1/f^2)g(Hessf(X, Y)/f\, V_i, V_i)$
$= -(1/f^2)Hessf(X, Y)/f.f^2.g^F(V_i, V_i)$
et vu que $g^F(V_i, V_i) = 1$ *on a le résultat.*
2) *On a* $Ric(X, V) \mid_{(p,q)} = \sum_{i=1}^{d} R(X, V_i, V, V_i/f) + \sum_{j=1}^{n} R(X, E_j, V, E_j)$.
En utilisant les symétries de R *et (3)de la proposition* 1.2.2*, le premier terme devient* $R(X, V_i/f, V, V_i/f) = 1/f^2 R(X, V_i, V, V_i) = 0$.
Le même type d'argument pour le deuxième terme nous donne $R(X, E_i, V, E_i) = 0$*, et donc finalement* $Ric(X, V) \mid_{(p,q)}) = 0$.
3) *On a que* $\Delta f = traceHessf = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(df(E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i}(df^{\#})^b(E_i)$
$= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} df^{\#}, E_i) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} gradf, E_i)$.
Or $Ric(V, W) \mid_{(p,q)} = \sum_{i=1}^{d} R(V, V_i/f, W, V_i/f) + \sum_{j=1}^{n} R(V, E_j, W, E_j)$.
Les symétries de R *et* (4) *de la proposition* 1.2.2 *donnent pour le premier terme :* $R(V, E_j, W, E_j)$
$= -g(V, W)/fg(\nabla_{E_j} grad\, f, E_j)$*, et donc* $\sum_{j=1}^{n}(V, E_j, W, E_j) = -g(V, W)\Delta f/f$.
Pour la deuxième terme , (5) *de la proposition* 1.2.2 *donne :*
$R(V, V_i, W, V_i) = g({}^F R(V, V_i)W, V_i) - g(grad\, f, grad\, f).f^2[g^F(V, W)g^F(V_i, V_i) - g^F(V_i, W).g^F(V, V_i)]$.
Le fait que $(V_i)_{1 \leq i \leq d}$ *soit un repère orthonormé de* F *donne :*
- ${}^F Ric(V, W) = \sum_{i=1}^{d} {}^F R(V, V_i)W, V_i) = \sum_{i=1}^{d} g^F({}^F R(V, V_i)W, V_i)$

- $g^F(V_i, V_i) = 1$
- $g^F(W, V) = \sum_{i=1}^{d} g^F(V_i, W)g^F(V, V_i)$
et donc $\sum_{i=1}^{d}(1/f^2)R(V, V_i, W, V_i)$
$= {}^F Ric(V, W) - g(grad\, f, grad\, f)/f^2.g(V, W)(d-1)$.
d'où le résultat.
On va utiliser la proposition 1.2.2 pour trouver la courbure sectionnelle de M. Considérons un 2-plan J tangent à M en $m = (p, q)$.
On peut choisir une base orthonormale de J qui soit formé de 2 vecteurs $X + V$ *et* $Y + W$ *avec* X, Y *horizontaux et* V, W *verticaux.*
De plus, notons K la courbure sectionnelle de M $,{}^F K$ *et* ${}^B K$ *celles de F et B respectivement. On a :*

Lemme 1.2.2. *La courbure sectionnelle du 2-plan J dans l'espace tordu M est donnée par la formule :* $K(J) = {}^B K(X, Y).\|X \wedge Y\|^2 - f(p).\{g^F(W, W)(Hessf(X, X) - 2g^F(V, W)Hessf(X, Y) + g^F(V, V)Hessf(Y, Y)\} + f^2(p).[{}^F K(V, W)\|G(p)\|^2].g^F(V \wedge W, V \wedge W)$.

Preuve 1.2.5. *On a* $K(J) = K(X + V, Y + W)$.
Comme $\{X + V$ *et* $Y + W\}$ *est une base orthonormée de J, la courbure sectionnelle s'écrit :* $K(X + V, Y + W) = R(X + V, Y + W, X + V, Y + W) = R(X, Y, X, Y) + R(X, Y, X, V) + R(X, Y, V, Y) + R(X, Y, V, W) + R(X, W, X, Y) + R(X, W, X, W) + R(X, W, V, Y) + R(X, W, V, W) + R(V, Y, X, Y) + R(V, Y, X, W) + R(V, Y, V, Y) + R(V, Y, V, W) + R(V, W, X, Y) + R(V, W, X, W) + R(V, W, V, Y) + R(V, W, V, W)$.
En utilisant les symétries de R et la proposition 1.2.2, on remarque que tous les termes sont nuls exeptés :
- $R(X, Y, X, Y) = {}^B K(X, V).\|X \wedge Y\|^2$ *(d'aprés la définition de la courbure sectionnelle sur B)*
- $R(X, W, X, W) = g(R(X, W)X, W) = -1/f(p)Hessf(X, X)g(W, W)$
$= -1/f(p)Hessf(X, X)g^F - f(p)Hessf(X, X)g^F(W, W)$ *(d'aprés 2 de la proposition 1.2.2), et de la même manière, on démontre que* $R(X, W, V, Y)$
$= -f(b)Hessf(X, Y)g^F(W, V)$.
-$R(V, Y, V, Y) = g(R(V, Y), V, Y) = -g(R(Y, V), Y) = -f(p)g^F(V, V)g(\nabla_Y G, Y)$
$= -f(p)g^F(V, V)Hessf(Y, Y)$ *(utiliser 4 de la proposition 1.2.2).*

- $R(V,W,V,W) = f^2(b)\,{}^F R(V,W,V,W) - (\|G\|/f)^2 g(V,V)g(W,W)$
$+ g(W,V)g(V,W)$.
Le fait que ${}^F K(V,W) = \frac{{}^F R(V,W,V,W)}{\|V\wedge W\|_F^2}$
implique $R(V,W,V,W) = K(V,W).(V\wedge W, V\wedge W)$
d'où :
$R(V,W,V,W) = f^2(p).\,{}^F K(V,W).g^F(V\wedge W, V\wedge W) - \|G\|^2.f^2(p)g^F(V,V)g^F(W,W)$
$+\|G\|^2.f^2(b)(g^F(V,W))^2$
$= f^2(p).K(V,W).(V\wedge W, V\wedge W) + \|G\|^2.f^2(p)[g^F(V,W)^2 - g^F(V,V)g^F(W,W)]$
$= f^2(p).\,{}^F K(V,W).(V\wedge W, V\wedge W) + \|G\|^2.f^2(p).\|V\wedge W\|_F^2$
$= f^2(p).\,{}^F K(V,W).(V\wedge W, V\wedge W) + \|G\|^2.f^2(p).g^F(V\wedge W, V\wedge W)$
d'où le résultat.

Lemme 1.2.3. *En particulier, si* $dimB = 1$*,* J *admet une base orthonormale de la forme* $\{X+V, W\}$ *avec* V, W *verticaux et* X *horizontal, et la formule précédente devient :*
$K(J) = -(f''/f)\|X\|^2 + (1/f)^2[{}^F K(V,W) - (f')^2].\|V\|^2$
avec $f' = \frac{d}{ds}f$ *et* $f'' = \frac{d^2}{ds^2}f$ *ou* $\frac{d}{ds}$ *est un champ de vecteur unitaire sur B.*

Preuve 1.2.6. *D'abord vu que* $dimB = 1$*, on a* ${}^B K = 0$*.*
En utilisant la formule précédente avec $Y = 0$*, on obtient* $K(J) = K(X+V,W) = R(X+V,W,X+V,W) = -f(b).1/f^2(p)g^F(W,W)Hessf(X,X) + f^2(p).[{}^F K(V,W) - \|G\|^2]g^F(V\wedge W, V\wedge W)$.
Mais $g^F(V\wedge W, V\wedge W) = g^F(V,V)g^F(W,W) - (g^F(V,W))^2$
$= 1/f^4(p)g(V,V)g(W,W) - 1/f^4(p)(g(V,W))^2 + 1/f^4(p).\{\|V\|^2.\|W\|^2 - (g(V,W))^2\}$.
Et Vu que $\|W\|_M = 1$ *et* $g(V,W) = g(X+V,W) = 0$ *(car* $X+V$ *et* W*) sont orthonormaux dans M), on a* $g^F(V\wedge W, V\wedge W) = 1/f^4(b)\|V\|^2$.
d'où :
$K(J) = -1/f(p)Hessf(X,X) + 1/f^2(p)[{}^F K(V,W) - \|G(p)\|^2].\|V\|^2$.
Or si $\frac{d}{ds}$ *est un champ de vecteur unitaire sur B, alors* $gradf = \alpha_s\frac{d}{ds}$ *avec* $\alpha_s = g(grad\,f, \frac{d}{ds})$ *, et donc :*
$\|G\| = \|grad\,f\| = \alpha_s\|\frac{d}{ds}\| = \alpha_s = g(grad\,f, \frac{d}{ds}) = df(\frac{d}{ds}) = \frac{d}{ds}f = f'$.
D'autre part, $g(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}) = 1$ *entraîne que* $\frac{d}{ds}g(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}) = 2g(\nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds}) = 0$.
Et donc que $\nabla_{\frac{d}{ds}}\frac{d}{ds} = 0$.

On en déduit que : $Hessf(\frac{d}{ds},\frac{d}{ds}) = \nabla_{\frac{d}{ds}} df(\frac{d}{ds}) = \frac{d^2}{ds^2} f = f''$*, et donc :* $Hessf(X,X) = \|X\|^2.f''$.
D'où le résultat.

Chapitre 2

L'opérateur Laplacien sur une variété riemannienne

Dans ce chapitre, on va définir quelques opérateurs sur les variétés riemanniennes, ces opérateurs vont nous permettre de définir le Laplacien. En dernière partie de ce chapitre on étudie le Laplacien sur les variétés produit tordu.

2.1 Les isomorphismes musicaux

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, g_x est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur T_xM, En tout point x de M, on peut identifier T_xM à T_x^*M à l'aide de l'isomorphisme noté $\#$, et défini par :

$$\begin{array}{rccl} \# & : & T_x^*M & \longrightarrow & T_xM \\ & & \omega_x & \longmapsto & \#_x(\omega_x) \end{array}$$

tel que : pour tout $X_x \in T_xM$,

$$g_x(\#_x(\omega_x), X_x) = \omega_x(X_x).$$

$\#_x$ est un isomorphisme , on note b_x son inverse qui est défini par :

$$\begin{array}{rccl} b_x & : & T_xM & \longmapsto & T_x^*M \\ & & X_x & \longmapsto & b_x(X_x) \end{array}$$

tel que : pour tout $Y_x \in T_xM$,

$$b_x(X_x)(Y_x) = g_x(X_x, Y_x).$$

On peut définir les opérateurs $\#$ et b, appelés opérateurs musicaux de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc} \# & : & \Gamma^*(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & & \omega & \longmapsto & \#(\omega) \end{array}$$

tel que pour tout $x \in M$, on a

$$(\#(\omega))_x = \#_x(\omega_x),$$

et

$$\begin{array}{cccc} b & : & \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma^*(TM) \\ & & X & \longmapsto & b(X) \end{array}$$

tel que : pour tout $x \in M$,

$$(b(X))_x = b_x(X_x)$$

Proposition 2.1.1. *Les opérateus $\#_x$ et b sont des isomorphismes inverse l'un de l'autre et sont également définis par :*

$$\begin{cases} \#(\omega) & \textit{est tel que} \quad g(\#(\omega), X) = \omega(X) \\ b(X) & \textit{est tel que} \quad b(X)(Y) = g(X, Y) \end{cases}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma^*(TM)$

Preuve 2.1.1. *La linéarité est une conséquence de la linéarité des $\#_x$ et b_x, pour tout $x \in M$. Il suffit de montrer que les opérateur $\#$ et b sont inverse l'un de l'autre. Soient $x \in M$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma^*(TM)$.*
D'une part, on a :

$$g_x(\#_x(b_x(X_x)), Y_x) = (b_x(X_x))(Y_x = g_x(X_x, Y_x)),$$

et comme g_x et non dégénérée , alors pour tout $x \in M$ il suit que :

$$\#_x(b_x(X_x)) = X_x$$

et

$$((\# \circ b)(X))_x = X_x,$$

enfin on déduit que :

$$\# \circ b = Id_{\Gamma(TM)}.$$

D'autre part, on a :

$$((b \circ \#)(\omega))_x(X_x) = (b_x(\#_x(\omega_x))(X_x) = g_x(\#_x(\omega_x, X_x)) = \omega_x(X_x),$$

alors

$$((b \circ \#)(\omega))_x = \omega_x,$$

pour tout $x \in M$, et

$$b \circ \# = Id_{\Gamma^*(TM)}.$$

En rappelant que :

$$(\omega(X))_x = \omega_x(X)_x,$$

et

$$(g(X,Y)) = g_x(X_x, Y_x),$$

on aura à partir des définitions de $\#_x$ et b_x les relations suivantes :

$$\begin{cases} g_x((\#(\omega))_x, X_x) = \omega_x(X_x) \\ (b(X))_x(Y_x) = g_x(X_x, Y_x) \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} (g((\#(\omega)), X))_x = (\omega(X))_x \\ ((b(X))(Y))_x = (g(X,Y))_x) \end{cases}$$

d'où les relations voulues.

2.1.1 Les isomorphismes musicaux en coordonnées locales

Soit (U, φ) une carte local sur M , $\{U, (\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1,\dots,n}\}$ et $\{U, (dx^i)_{i=1,\dots,n}\}$ sont respectivement le repère et le corepére local associés à la carte donnée (U, φ). En utilisant la covention d'**Einstein** pour les indices,on a pour $\omega \in \Gamma^*(TM)$,

$$\omega = \omega_i dx^i.$$

Pour $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

La métrique g s'écrit sous la forme :

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}).$$

Comme

$$g(\#(\omega), X) = \omega(X),$$

alors

$$g_{ij}(\#(\omega))^i X^j = \omega_j X^j,$$

Pour tout $X \in \Gamma(TM)$.
En particulier pour $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors

$$g_{ij}(\#(\omega))^i = \omega_j,$$

d'où :

$$(\#(\omega))^i = g^{ij} \omega_j,$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}).
Enfin nous obtenons la formule suivante :

$$\#(\omega) = g^{ij} \omega_j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

De même, pour l'opérateur b nous avons d'une part

$$(b(X))(Y) = (b(X))_j (Y)^j,$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcl} (b(X))(Y) & = & g_{ij} X^i . Y^j \\ & = & \omega_j X^j, \end{array}$$

pour tout $Y \in (TM)$, en particulier pour $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, on obtient la formule

$$(b(X))_j = g_{ij} X^i,$$

par suite on déduit que :

$$b(X) = g_{ij} X^i dx^j$$

2.2 Les opérateurs sur une variété riemannienne

2.2.1 L'opérateur gradient sur une variété riemannienne

Définition 2.2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur gradient (noté grad)par :*

$$\begin{array}{rcccl} grad & : & C^{\infty}(M) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & & f & \longmapsto & grad(f) = \#(df) \end{array}$$

où df est la différentielle de f, tel que pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

$$g(grad\, f, X) = df(X) = X(f).$$

Proposition 2.2.1. (***Expression du gradient en coordonnées locales***) *Soit (M^m, g) une variété riemannienne , (U, φ) une carte sur M avec les champs de base associée $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$, alors pour tout $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ on a :*

$$grad\, f = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Preuve 2.2.1. *On applique directement la définition de l'application $\#$ (voir proposition 2.2.1), et la définition de la différentielle la fonction $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ relativement à la carte (U, φ) sur M, on a :*

$$\begin{array}{rcl} df & = & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ \#df & = & \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial x_j} \\ & = & \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \frac{\partial}{\partial x_j} \end{array}$$

où $dx^1, ..., dx^m$ est la base duale.

propriétés 2.2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, pour toutes $f, h \in C^{\infty}(M)$ on a :*

1. $grad(f + h) = grad\, f + grad\, h$

2. $grad(fh) = hgrad(f) + f\, grad(h)$

3. $(grad(f))(h) = (grad(h))(f)$

Preuve 2.2.2. *Soit $f, h \in C^\infty(M)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :*

1.

$$\begin{aligned} g(grad(f+h), X) &= X(f+h) \\ &= X(f) + X(h) \\ &= g(grad\, f, X) + g(grad\, h, X) \\ &= g(grad\, f + grad\, h, X), \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g(grad(fh), X) &= X(fh) \\ &= hX(f) + fX(h) \\ &= hg(grad\, f, X) + fg(grad\, h, X) \\ &= g(hgrad\, f + fgrad\, h, X), \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (gradf)(h) &= g(grad\, h, grad\, f) \\ &= g(grad\, f, grad\, h) \\ &= (grad\, h)(f). \end{aligned}$$

2.2.2 L'opérateur divergence sur une variété riemannienne

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété riemannienne (M, g), l'application définie par :

$$\begin{aligned} \nabla X \quad : \quad \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z X \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire (∇X est un tenseur de type $(1,1)$). Si $x \in M$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla X)_x \quad : \quad T_xM &\longrightarrow T_xM \\ v &\longmapsto (\nabla_v X)_x \end{aligned}$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 2.2.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $divX$ est une fonction sur M définie par :*

$$\begin{aligned} div \quad : \quad \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto divX \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} divX &= tr_g(\nabla X) \\ (divX)(x) &= tr_g((\nabla X)_x) \qquad x \in M \end{aligned}$$

En coordonnées locales, on a :

$$\begin{aligned} divX &= dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) \end{aligned}$$

Si (e_i) *est une base orthonormée locale sur* M *on a :*

$$divX = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

De même, la divergence d'une 1*-forme* ω *sur* M *est définie par :*

$$\begin{aligned} div\,\omega &= tr_g(Z \longrightarrow \nabla_Z \omega) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} g^{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \omega)(\frac{\partial}{\partial x^j}) \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2. ***Première expression de la divergence en coordonnées locales.***
Soit (M, g) *une variété riemannienne de dimension* m $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ *on a :*

$$divX = \sum_{i,j=1}^{m} (\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma^i_{ij})$$

Preuve 2.2.3. *Sur une carte locale sur* M *nous avons,*

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

et

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^i_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k},$$

alors,

$$\begin{aligned} divX &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \Gamma^i_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}), \end{aligned}$$

d'où finalement, on déduit que :

$$divX = \sum_{i,j=1}^{m} (\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma^i_{ij})$$

propriétés 2.2.2. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne, pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, *on a :*

1. $div(X+Y) = divX + divY$

2. $div(fX) = f\,divX + X(f)$

Preuve 2.2.4. *Pour démontrer la propriété*(1), *on applique directement la définition de la divergence, soit* (e_i) *une base orthonormée locale sur* M *on a :*

$$\begin{aligned} div(X+Y) &= g(\nabla_{e_i}(X+Y), e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i}X, e_i) + g(\nabla_{e_i}Y, e_i) \\ &= divX + divY \end{aligned}$$

Pour la deuxième propriété, on a :

$$div(fX) = g(\nabla_{e_i} fX, e_i)$$

Or

$$\nabla_{e_i} fX = e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X,$$

il suit que

$$div(fX) = g(e_i(f)X, e_i) + fg(\nabla_{e_i}X, e_i)$$

On sait que

$$divX = g(\nabla_{e_i}X, e_i)$$

et

$$g(e_i(f)X, e_i) = g(X, grad\, f) = X(f).$$

On déduit que

$$div(fX) = X(f) + f\,divX$$

Voir le lemme suivant pour plus détails sur ces notions.

Lemme 2.2.1. *Sur une variété riemannienne* (M, g) *on a*

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{det(g_{ij})}) = \sqrt{det(g_{ij})}\sum_{i=1}^{m}\Gamma^{l}_{lk},$$

où $\|g\| = det(g_{ij})$. *En utilisant ce lemme, nous allons donner la deuxième expression de la divergence.*

Proposition 2.2.3. ***(Deuxième expression de la divergence en coordonnées locales.)***
Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m , pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

$$divX = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{det(g_{ij})}X^k)$$

Preuve 2.2.5. *Grâce à la première expression de la divergence en coordonnées locales, nous avons*

$$\begin{array}{rcl} divX & = & \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m X^j \Gamma_{ij}^i \\ & = & \sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m X^j \sum_{i=1}^m \Gamma_{ij}^i \end{array}$$

en utilisant le lemme 2.2.1, avec

$$\|g\| = det(g_{ij}),$$

alors un calcul direct donne,

$$\begin{array}{rcl} divX & = & \frac{1}{\sqrt{\|g\|}}\sqrt{\|g\|}\sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m X^j \sqrt{\|g\|}\sum_{i=1}^m \Gamma_{ij}^i \\ & = & \frac{1}{\sqrt{\|g\|}}\sqrt{\|g\|}\sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\|g\|}) \\ & = & \frac{1}{\sqrt{\|g\|}}\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\|g\|}X^i) \end{array}$$

en utilisant la convention d'Einstein on a :

$$div(X) = \frac{1}{\sqrt{\|g\|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{\|g\|}X^i).$$

2.3 L'opérateur Laplacien sur une variété riemannienne

2.3.1 Définitions et propriétés

Définition 2.3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien noté Δ sur M par :*

$$\begin{array}{rcccl} \Delta & : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & & f & \longmapsto & \Delta(f) = div(grad\, f) \end{array}$$

propriétés 2.3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, pour toutes $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on a :*

1. $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$

2. $\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta h + 2g(grad\, f, grad\, h)$

Preuve 2.3.1. *Soit $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, en utilisant les propriétés des opérateurs grad et div et le fait que*

$$X(f) = g(grad\, f, X),$$

on obtient :

1.

$$\begin{aligned}\Delta(f + h) &= div(grad(f + h)) \\ &= div(grad\, f + grad\, h) \\ &= div(grad\, f) + div(grad\, h) \\ &= \Delta(f) + \Delta(h)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= div(grad(fh)) \\ &= div f(grad\, h) + div(h\, grad\, f) \\ &= f\, div(grad\, h) + (grad\, h)(f) + hdiv(grad\, f) + (grad\, f)(h) \\ &= f\,\Delta h + h\Delta f + 2g(grad\, f, grad\, h).\end{aligned}$$

2.3.2 Expressions de l'opérateur laplacien en coordonnées locales

Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $f \in C^\infty(M)$,on a

$$\Delta f = g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k})$$

Preuve 2.3.2. *Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, alors*

$$\begin{aligned}\Delta(f) &= div(grad\, f) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} grad\, f, \frac{\partial}{\partial x^j})\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} grad\, f, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) &= \tfrac{\partial}{\partial x^i}(g(grad\, f, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) - g(grad\, f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^j})) \\ &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \tfrac{\partial f}{\partial x^k} \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$$

Remarque 2.3.1. *Grâce à la deuxième expression de l'opérateur divergence, il existe une deuxième écriture pour le Laplacien donnée par l'équation suivante :*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\sqrt{det(g_{ij})}\right).$$

Exemple 2.3.1. *Soit $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard g_0 , $(g_{ij} = \delta_{ij})$, alors pour tous fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^m$ et $X = (X^1, ..., X^m)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ on a :*

1.

$$\begin{aligned} grad\, f &= \textstyle\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(\tfrac{\partial f}{\partial x^1} + ... + \tfrac{\partial f}{\partial x^m}\right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} divX &= \textstyle\sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\ &= \tfrac{\partial X^1}{\partial x^1} + ... + \tfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{aligned}$$

3.

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Exemple 2.3.2. (***Laplacien sur la sphère S^2***) *Soit S^2 la sphére de dimension 2, sa métrique est donnée par :*

$$g_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

et $f : S^2\backslash\{(\pm 1, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Par exemple $f(\theta, \varphi) = \ln\tan(\frac{\theta}{2})$ alor :

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial \theta} &= \tfrac{\partial}{\partial \theta}\ln(\tan\tfrac{\theta}{2}) \\ &= \tfrac{\frac{\partial}{\partial\theta}(\tan\frac{\theta}{2})}{\tan\frac{\theta}{2}} \\ &= \tfrac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})}{\tan\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{array}{rcl}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} & = & \frac{1}{2}\frac{(1+\tan^2\frac{\theta}{2})\tan^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}} \\ & = & \frac{1}{4}(\tan^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}})\end{array}.$$

On déduit :

$$\Delta f = \frac{1}{4}(\tan^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}-\tan\frac{\theta}{2})(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}-\tan\frac{\theta}{2}) = 0$$

2.3.3 Quelques règles de calcul pour le laplacien.

Proposition 2.3.1. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$, (x, y) sont les coordonnées cartésiennes (x, y) et (r, θ) sont coordonnées polaires avec*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

et on a :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Preuve 2.3.3. *On a $f(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, il suit que :*

$$\begin{array}{rcl}\frac{\partial f}{\partial r} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ & = & \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \quad (EQ_1).\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} & = & \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial r} \\ & = & \cos^2\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad (EQ_2).\end{array}$$

De même, on a :

$$\begin{array}{rcl}\frac{\partial f}{\partial\theta} & = & \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} \\ & = & -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} & = & -r(-r\sin\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}) + r(r\cos\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}) \\ & = & r^2\sin\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}) \\ & = & r^2((1-\cos\theta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (1-\sin\theta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) - r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}) \quad (EQ_3)\end{array}$$

En remplaçant (EQ_1) *et* (EQ_2) *dans* (EQ_3)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= r^2(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \cos\theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \sin\theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) - r(\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}) \\
&= r^2 \Delta f(x,y) - r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - r\frac{\partial f}{\partial r}
\end{aligned}$$

on déduit que :

$$\Delta f(x,y) = \frac{1}{r^2}\left(r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

Ce qui donne finalement :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Proposition 2.3.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction stictement positive de classe* $\mathcal{C}^2$*. Alors :*

$$\Delta(f^p) = pf^{p-2}(f\Delta f + (p-1)\|grad\, f\|^2) \tag{2.1}$$

Preuve 2.3.4. *D'aprés la définition on a :*

$$\Delta(f^p) \;=\; e_i(e_i(f^p)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f^p) \quad (E)$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ *est une base orthonormée sur* $\mathbb{R}^m$*. On a pour* $X \in \Gamma(TM)$*,*

$$X(f^p) = pf^{p-1}X(f).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
X(X(f^p)) &= pX(f^{p-1}X(f)) \\
&= p(f^{p-1}X(X(f))) + X(f^{p-1})X(f)X(f) \\
&= p(f^{p-1}X(X(f)) + (p-1)f^{p-2}X(f)).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
e_i(e_i(f^p)) &= p(f^{p-1}e_i(e_i(f)) + (p-1)f^{p-2}e_i(f)e_i(f) \\
&= pf^{p-2}(fe_i(e_i(f)) + (p-1)\|grad\, f\|^2) \qquad (E_1)
\end{aligned}$$

et

$$(\nabla_{e_i} e_i)(f^p) \;=\; pf^{p-1}(\nabla_{e_i} e_i)(f). \quad (E_2)$$

En remplaçant (E_1) *et* (E_2) *dans* (E)*, on obtient :*

$$\Delta f^p = pf^{p-2}(fe_i(e_i(f)) + (p-1)\|grad\, f\|^2 - f(\nabla_{e_i} e_i(f))$$

Or :

$$\Delta f = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f),$$

il suit que

$$\Delta(f^p) = p f^{p-2}(f\Delta f + (p-1)\|grad\, f\|^2).$$

Comme cas particulier de la proposition 2.3.2, on a

Proposition 2.3.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ on a*

$$\Delta(\|x\|^p) = p(p+m-2)\|x\|^{p-2}.$$

Preuve 2.3.5. *Posons $f(x) = \|x\|$ dans l'équation 2.1, on obtient :*

$$\Delta(\|x\|^p) = p\|x\|^{p-2}(\|x\|\Delta\|x\| + (p-1)|grad\|x\||^2),$$

où :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}.$$

et

$$\begin{aligned} grad\|x\| &= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}\tfrac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \tfrac{x_i}{\|x\|}\tfrac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

De même

$$\|grad\|x\|\|^2 = g(\frac{x_i}{\|x\|}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{x_i}{\|x\|}\frac{\partial}{\partial x_i}) = 1$$

et

$$\Delta|x| = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2\|x\|}{\partial x_i^2}.$$

Où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|) = \frac{x_i}{\|x\|},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Delta f &= \tfrac{\partial^2|x|}{\partial x_i^2} &&= \tfrac{\partial}{\partial x_i}(\tfrac{x_i}{\|x\|}) \\ &= \tfrac{1}{\|x\|}(m\|x\| - \|x\|) &&= \tfrac{(m-1)}{\|x\|} \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta(\|x\|^p) = p\|x\|^{p-2}((m-1) + p - 1)$$

on déduit que :

$$\Delta(\|x\|^p) = p(m+p-2)\|x\|^{p-2}.$$

Proposition 2.3.4. *Soient $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors*

$$\Delta(g \circ f) = (g' \circ f)\Delta f + (g'' \circ f)\|grad\, f\|^2$$

Preuve 2.3.6. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} g \circ f & : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x = (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & (g \circ f)(x). \end{array}$$

Par définition du Laplacien, on a :

$$\Delta(g \circ f)(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((g \circ f)(x))$$

Un simple calcul donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}((g \circ f)(x)) = g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

il suite que

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((g \circ f)(x)) & = & \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x)\right) \\ & = & \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i}\right). \end{array}$$

On obtient donc :

$$\Delta(g \circ f)(x) = g'(f(x))\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + g''(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

d'où finalement

$$\Delta(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x)\Delta f + (g'' \circ f)(x)\|grad\, f\|^2,$$

car

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 = \|grad\, f\|^2.$$

Proposition 2.3.5. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M, g)$, on a*

$$\Delta e^f = e^f(\Delta f + \|grad\, f\|^2)$$

Preuve 2.3.7. *Par définition, on a :*

$$\Delta e^f = e_i(e_i(e^f) - (\nabla_{e_i} e_i)(e^f)).$$

Or

$$e_i(e^f) = e^f . e_i(f),$$

d'où

$$\begin{aligned} e_i(e_i(e^f)) &= e_i(e^f e_i(f)) \\ &= e^f e_i(e_i(f)) + e^f e_i(f) e_i(f) \\ &= e^f (e_i(e_i(f)) + \|grad\, f\|^2) \end{aligned}$$

et

$$(\nabla_{e_i} e_i(e^f)) = e^f(\nabla_{e_i} e_i(f)),$$

donc

$$\Delta e^f = e^f(\Delta f + \|grad\, f\|^2).$$

Définition 2.3.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m. On appelle forme volume sur (M, g), notée v^M ou v^g, la forme définie localement dans un repère par*

$$v^M = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$$

Exemple 2.3.3. *On considére la variété $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y) on a*

$$g_0 = dx^2 + dy^2,$$

et

$$v^{g_0} = \sqrt{det(g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy.$$

On considére la sphére S^2 muni de la métrique

$$g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

alors

$$v^g = \sqrt{det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |\sin\theta| d\theta \wedge d\varphi.$$

Proposition 2.3.6. ***(Théorème de divergence)*** *Soit D un domaine compact à bord dans une variété riemannienne (M, g). Soit ω une 1-forme et X un champ de vecteur, définis sur un voisinage inclue dans D. Alors*

$$\int_D (div\omega)v^M = \int_{\partial D} \omega(\boldsymbol{n})v^{\partial D}$$

et

$$\int_D (divX\omega)v^M = \int_{\partial D} g(X, \boldsymbol{n})v^{\partial D},$$

où ∂D est le bord de D et $\boldsymbol{n}$= ***n(x)****est le vecteur unitaire normal à ∂D.*

Corollaire 2.3.1. *Pour tout ω une 1-forme et X un cham de vecteurs à supports compact dans un domaine D, alors*

$$\int_D (div\omega)v^M = 0$$

et

$$\int_D (divX)v^M = 0.$$

2.4 Produit tordu des variétés riemanniennes

Définition 2.4.1. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes , le produit tordu de ses deux variété est une variété riemannienne notée $M \times_{f^2} N$ et munie de la métrique G_{f^2} , où $f \in \mathcal{C}^\infty$ une fonction positive telle que :*

$$G_{f^2} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \eta^* h$$

où

$$\pi : M \times N \longrightarrow M$$

et

$$\eta : M \times N \longrightarrow N$$

désignent les projection canoniques . Si $X, Y \in \Gamma(T(M \times N))$ on a :

$$G_{f^2}(X, Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + (f \circ \pi)^2 h(d\eta(X), d\eta(Y)).$$

Remarque 2.4.1. *relativement à des cartes locales (U, x^i) sur M et (V, y^i) sur N. la matrice associée à G_{f^2} est définie par :*

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2.h_{lk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse est donnée par

$$\begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2}.h^{lk} \end{pmatrix}$$

La connexion de Levi-Civita de $M \times_{f^2} N$ peut être maintenant rapprochée à celle de M et de N comme suit.

2.4.1 Connexion de Levi-Civita de la variété produit tordu

Proposition 2.4.1. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variété riemannienne, Si ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ associée à la variété produit tordu $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ est définie par :*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2} X_1(f^2)(0, Y_2) + \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2)(0, X_2) - \frac{1}{2} h(X_2, Y_2)(grad(f^2), 0)$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$ avec :

$$X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2).$$

2.4.2 L'opérateur Laplacien sur le produit tordu

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, est notons Δ^M le laplacien sur (M, g) et Δ^N le laplacien sur (N, h). Le laplacien sur $M \times N$ sera noté par $\tilde{\Delta}$, notre but est de calculer l'opérateur $\tilde{\Delta}$ en fonction de Δ^M, Δ^N et la fonction f. Pour cela, considérons $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur (M, g), et $\{f_1, ..., f_n\}$ une base orthonormée sur (N, h), la base orthonormée sur $(M \times_f N, G_f)$ est donnée par :

$$\{(e_1, 0), (e_2, 0), ..., (e_m, 0), (0, \frac{1}{f} f_1), ..., (0, \frac{1}{f} f_n)\}.$$

Proposition 2.4.2. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes, Δ^M , Δ^N désignent les opérateurs Laplaciens sur M et N. Si*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & M \times_{f^2} N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$$

est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors :

$$\tilde{\Delta}\varphi = (\Delta^M \varphi, 0) + \frac{1}{f^2}(0, \Delta^N) + n(grad \ln f(\varphi), 0). \tag{2.2}$$

Preuve 2.4.1. *Par définition du Laplacien $\tilde{\Delta}$ sur $(M \times_f N, G_f)$ on a*

$$\tilde{\Delta} = \underbrace{(e_i,0)((e_i,0)(\varphi))}_{A_1} - \underbrace{\tilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0))(\varphi))}_{A_2} + \underbrace{(0,\frac{1}{f}f_j)(0,\frac{1}{f}f_j)(\varphi))}_{A_3} - \underbrace{\tilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_j)}(0,\frac{1}{f}f_j))(\varphi)}_{A_4} \quad (E^*)$$

Pour calculer $\tilde{\Delta}\varphi$, on calcule tous les termes A_1 , A_2 , A_3 et A_4, on a :

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & (e_i,0)((e_i,0)(\varphi)) \\ & = & (e_i,0)(e_i(\varphi),0) \\ & = & (e_i(e_i(\varphi)),0) \end{array}$$

Or grâce à l'équation (E^*) on a :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0) & = & \nabla_{(e_i,0)}(e_i,0) \\ & = & (\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0),0) \end{array}$$

donc

$$A_2 = ((\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0))(\varphi),0)$$

Et pour A_3 , on a

$$(0,\frac{1}{f}f_i)(\varphi) = \frac{1}{f}(0,f_j(\varphi))$$

d'où

$$A_3 = \frac{1}{f}(0,f_j)(\frac{1}{f}(0,f_j(\varphi)))$$

Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on déduit que :

$$A_3 = \frac{1}{f^2}(0,f_j(f_j(\varphi))).$$

Enfin, pour le terme A_4*, en utilisant l'équation* (E^*)*, on a :*

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_j)}(0,\tfrac{1}{f}f_j) &= \tfrac{1}{f^2}\tilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j) \\
&= \tfrac{1}{f^2}(\nabla_{(0,f_j)}(0,f_j) - \tfrac{1}{2}h(f_j,f_j)(grad\, f^2,0) \\
&= \tfrac{1}{f^2}(0,\nabla_{f_j}f_j) - \tfrac{n}{2f^2}(grad\, f^2,0)
\end{aligned}$$

Comme $grad\, f^2 = 2f^2 grad\, \ln f$*. On déduit que :*

$$A_4 = \frac{1}{f^2}(0,\nabla_{f_j}f_j(\varphi)) - n(grad \ln f(\varphi),0)$$

En remplaçant les termes A_1 *,* A_2 *,* A_3 *,* A_4 *dans l'équation 2.2, on obtient :*

$$\tilde{\Delta}\varphi = (\Delta^M\varphi,0) + \frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi) + n(grad \ln f(\varphi),0).$$

Cas particulier *Si* $\varphi(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$*, on obtient donc :*

$$\tilde{\Delta}\varphi = \beta(\Delta^M\alpha,0) + \frac{1}{f^2}(0,\alpha\Delta^N\beta) + n\beta(g(grad\, \ln f, grad\alpha),0).$$

On peut distinguer le cas où $\alpha(x) = 1$ *et le cas où* $\beta(x) = 1$*. Pour* $\alpha(x) = 1$*, il suit que :*

$$\tilde{\Delta}\varphi = \frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\beta),$$

Pour $\beta(x) = 1$ *, on obtient l'équation suivante :*

$$\tilde{\Delta}\varphi = \beta(\Delta^M\alpha,0) + n\beta(g(grad\, \ln f, grad\, \alpha),0).$$

Chapitre 3

Spectre d'une variété riemannienne.

3.1 Spectre d'un espace produit.

3.1.1 Laplacien d'une variété riemannienne

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et notons ∇ sa connexion de Lévi civita.

Définition 3.1.1. *le laplacien, noté Δ, est un opérateur de $C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ défini par $\Delta f = div(df)$ $f \in C^\infty(M)$.*
où en un point $m \in M$: $\delta(\alpha) = \sum_{i\leq n} \nabla_{e_i}\alpha(e_i)$, avec $(e_i)_{i\leq n}$ est un repère local orthonormé. $\Delta f = div(df) = \sum_{i\leq n} \nabla_{e_i} df(e_i) = \sum_{i\leq n} e_i df(e_i) + df \nabla_{e_i} e_i$ $= \sum_{i\leq n} e_i e_i f + (\nabla_{e_i} e_i) f$.
Une autre formulation est : $\Delta f = trace(\nabla df)$.
i.e $\Delta f = \sum_{i\leq n} Hessf(e_i, e_i) = \sum_{i\leq n} \nabla df(e_i, e_i) = \sum_{i\leq n} \nabla_{e_i} df(e_i)$
$= \sum_{i\leq n} e_i df(e_i) - df(\nabla_{e_i} e_i) = \sum_{i\leq n} e_i e_i f - (\nabla_{e_i} e_i) f$
$= \sum_{i\leq n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} f - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} f$.
Considérons, maintenant au voisinage d'un point m la carte exponentielle, le repére local $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i\leq n}$ associé vérifie : (un tel repère local est dit normal)
$g_{ii}(m) = 1$
$g_{ij}(m) = 0$ $i \neq j$ et $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_m = 0$
Nous avons donc, dans cette carte, une expression trés simple du laplacien au point

m : $\Delta f(m) = \sum_{i \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} f + (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}) \mid_m f = \sum_{i \leq n} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} f$.
Chaque vecteur e_i définissant une géodésique γ_i tel que :

$$\Delta f = \sum_i \frac{d^2(f \circ \gamma_i)}{dt^2}.$$

Cette expression du laplacien nous sera utile par la suite.

3.1.2 Le spectre d'une variété riemannienne.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, et on considére sur $C^\infty(M)$ l'opérateur laplacien Δ.

Définition 3.1.2. *On appelle spectre de la variété riemannienne (M, g) et on note $Spec(M, g)$ l'ensemble des $\lambda \in R$ tel qu'il existe $f \in C^\infty(M), f \neq 0$ vérifiant $\Delta f = \lambda f$. Toute $f \in C^\infty$ tel que $\Delta f = \lambda f$ avec $\lambda \in Spec(M, g)$ est dite fonction propre associée à λ.*
Le sous espace de $C^\infty(M)$ formé des fonctions propres associées à λ est appelé sous espace propre associé à λ et se note $P_\lambda(M, g)$.
Nous aurons besoin du résultat essentielde la théorie spectral suivant (pour une preuve, on peut consulter Agmon,[1],th.14.- et la section 16.)

Lemme 3.1.1. ***(théorème spectrale)***
Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, ona :

(1) *$Spec(M, g)$ forme une suite $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...\}$ discrète, tendant vers ∞.*

(2) *Pour tout $\lambda \in Spec(M, g)$, $P_\lambda(M, g)$ est de dimension finie.*

(3) *$P(M, g) = \sum_{\lambda \in Spec(M,g)} P_\lambda(M, g)$ est dense dans $C^\infty(M)$ au sens de la topologie de la convergence uniforme, et a fortiori au sens de la topologie $L^2(M, g)$.*

Lemme 3.1.2. ***H.brezis analyse fonctionelle***
Si $g \in H^s(M)$ et $\Delta f = g$ au sens des distributions , alors $f \in H^{s+2}(M)$

Preuve 3.1.1. ***preuve du théorème.***
Les propriétés spectrales vont se déduire du fait que le laplacien d'une variété riemannienne compacte se comporte essentiellement comme l'inverse d'un opérateur compact, l'idée de la démonstration consiste à appliquer les resultats de la théorie spectrale

des opérateurs compacts à $(I+\Delta)^{-1}$*, où* I *est l'opérateur identité sur* $L^2(M)$.
Soit $\phi \in L^2(M)$*, la forme linéaire sur* $H^2(M)$ *définie par* $\eta \longmapsto \langle \phi, \eta \rangle_{L^2(M)}$ *est continue pour la norme de* $L^2(M)$ *donc à fortiori pour la norme de* $H^2(M)$*, car d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :*

$$|\langle \phi, \eta \rangle|_{L^2(M)} \leq \|\phi\|_{L^2(M)} \|\eta\|_{L^2(M)} \leq \|\phi\|_{L^2(M)} \|\eta\|_{H^2(M)},$$

donc d'aprés le théorème de Riesz il existe $\psi \in H^1(M)$ *unique tel que*
$\langle \phi, \eta \rangle_{L^2(M)} = \langle \psi, \eta \rangle_{H^2(M)} = \langle \psi, \eta \rangle_{L^2(M)} + \langle \Delta\psi, \Delta\eta \rangle_{L^2(M)} \quad \forall \eta \in H^2(M)$. *En particulier, pour* $\eta \in L^2(M)$ *:*

$$\langle \phi, \eta \rangle_{L^2(M)} = \langle \psi, (I+\Delta)\eta \rangle_{L^2(M)} = \langle (I+\Delta)\phi, \eta \rangle_{L^2(M)},$$

donc on a $\phi = (I+\Delta)\psi$ *et* $\Delta\psi = \phi - \psi$ *au sens des distributions, or* $\phi - \psi \in L^2(M)$ *et d'aprés le lemme de régularisation on en déduit que* $\psi \in H^2(M)$.
On note $\psi = T(\phi)$*, ce qui définit un opérateur*

$$T \ : \ L^2(M) \ \longrightarrow \ H^2(M)$$

tel que :

$$(I+\Delta)T = I$$

T *est bien défini et linéaire (unicité de* ψ*).*
Montrons que T *est un opérateur compact :*
Si $\phi \in L^2(M)$ *on a :*

$$\begin{aligned} \|T\phi\|^2_{H^2(M)} &= \langle \psi, \psi \rangle_{H^2(M)} \\ &= \langle \psi, \psi \rangle_{L^2(M)} + \langle \Delta\psi, \Delta\psi \rangle_{L^2(M)} \\ &= \langle (I+\Delta)\psi, \psi \rangle_{L^2(M)} \\ &= \langle \phi, \psi \rangle_{L^2(M)} \\ &\leq \|\phi\|_{L^2(M)} \|\psi\|_{L^2(M)} \end{aligned}$$

donc

$$\|T\phi\|^2_{H^2(M)} \leq \|\phi\|_{L^2(M)} \|T(\phi)\|_{L^2(M)} \leq \|\phi\|_{L^2(M)} \|T(\phi)\|_{H^2(M)}$$

et alors

$$\|T\phi\|_{H^2(M)} \leq \|\phi\|_{L^2(M)}.$$

Ainsi T *est un opérateur continu de* $(L^2(M), \|\cdot\|_{L^2(M)})$ *dans* $(H^2(M), \|\cdot\|_{H^2(M)})$, *comme de plus l'injection de* $(H^2(M), \|\cdot\|_{H^2(M)})$ *dans* $(L^2(M), \|\cdot\|_{L^2(M)})$ *est compacte (théoréme de Réllich-Kondrashov) alors* T *est compact de* $L^2(M)$ *dans lui même.*
De plus, l'opérateur T *a les propriétés suivantes :*

1- *T est injectif car* $(I+\Delta)T = I$

2- *T est auto-adjoint car* $\langle Tf, g\rangle = \langle Tf, (I+\Delta)Tg\rangle = \langle (I+\Delta)Tf, Tg\rangle = \langle f, Tg\rangle$, $\forall f, g \in L^2(M)$

3- *T est positif car :* $\langle Tf, f\rangle = \langle Tf, (I+\Delta)Tf\rangle = \|Tf\|^2 + \|\Delta Tf\|^2 \geq 0$, $\forall f \in L^2(M)$

En conclusion, T *est un opérateur compact de* $L^2(M)$ *vers lui même, de plus,* T *est auto-adjoint positif et injectif. Par application du théorème spectral des opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de Hilbert :*
1- *Le spectre* $\sigma(T) - \{0\}$ *de* T *est un ensemble discret infini de réels posititifs* $0 < \mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ...$, *convergeant vers* 0.
2- *Il existe une base hilbertienne* $(\phi_i)_{i\in N}$ *de* $L^2(M)$ *composée de fonctions propres associées aux valeurs propres* (μ_i), *c'est a dire :* $T\phi_i = \mu_i\phi_i$.
3- $\ker(T - \mu_i I)$ *est de dimension finie.*
Les fonctions ϕ_i *sont aussi des vecteurs propres pour le laplacien, En effet,*

$$\begin{aligned}\Delta\phi = \lambda\phi \iff & (I+\Delta)\phi = (1+\lambda)\phi \\ \iff & (1+\lambda)T\phi = T(I+\Delta)\phi \\ \iff & (1+\lambda)T\phi = \phi\end{aligned}$$

A nouveau par le lemme de régularisation, ϕ_i *sont dans* $H^s(M)$ *pour tout* $s \in N$, *et donc ils sont* C^∞ *en utilisant le lemme d'injection de Sobolev :*

$$H^{s+1+E(n/2)}(M) \subset C^s(M)$$

où n *est la dimension de* M, *ce qui achève la démonstration.*

Remarque 3.1.1. *Le spectre d'une variété riemannienne est un invariant important, pas facile à calculer en général.*

Exemples 3.1.1. ***1-*** *Le spectre du Tore unidimensionnel* $T = \mathcal{R}/2\pi rZ$ *est donnée par :*

$$Spec(\mathcal{R}/2\pi rZ) = \left\{0, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2}, \frac{4}{r^2}, \frac{4}{r^2}, \frac{9}{r^2}, ...\right\}$$

Chaque valeur propre non nul est de multiplicité 2.

2- *Le spectre de la sphère* (S^n, g_0) *est l'ensemble* $\{\lambda_k = k(n+k-1), k \geq 0.\}$

Chaque valeur propre λ_k *est de multiplicité* $m_k = \frac{n(n+1)........(n+k-2)}{k!}(n+2k-1)$.

Ce dernier exemple explique comment en général le calcul explicite du spectre est difficile, C'est la raison pour la quelle on s'intéresse naturellement à deux sujets :

Sujet 1 : *Les premières valeurs propres, majorations et minorations en fonction de paramétres géomètriques et aussi multiplicités.*

Sujet 2 : *Les dernières valeurs propres, Ici on s'intéresse au comportement asymptotiques de la suite* (λ_k, f_k) *quand* $k \longrightarrow +\infty$

La proposition suivante montre que le spectre est un invariant riemannien.

Proposition 3.1.1. *Soient* (M, g) *et* (M', g') *deux variétés riemannienes de dimension* n. *Si* (M, g) *et* (M', g') *sont isométriques alors* $Spec(M, g) = Spec(M', g')$. *(i.e Isométrique* $\Longrightarrow$ *Isospectrale).*

Preuve 3.1.2. *[1]*

Remarque 3.1.2. *La question inverse est : est-ce que deux variétés isospectrales (ie.ayant le même spectre) sont isométriques ?. Cette question est étudie dans le chapitre suivant.*

Nous nous intéressons, maintenant à étudier le laplacien et son spectre sur une variété riemannienne produit.

3.1.3 Le laplacien du produit de deux variétés riemanniennes.

On va s'intéresser au le laplacien du produit $(M \times N, g \times h)$ de deux variétés (M, g) et (N, h). Soient $\alpha \in C^\infty(M)$ et $b \in C^\infty(N)$, notons comme avant :

$(M \times N, g \times h) \xrightarrow{\pi} (M, g)$

$(M \times N, g \times h) \xrightarrow{\sigma} (N, h)$

Les projections π et σ sont des submersions riemanniennes.
Commençons d'abord par calculer le laplacien des fonctions $(a \circ \pi)$ et $(b \circ \sigma)$ respectivement dans $(M \times N, g \times h)$.

Lemme 3.1.3. *On a :*
$\Delta^{M\times N}(a \circ \pi) = \Delta^{M}(a) \circ \pi$ *et* $\Delta^{M\times N}(b \circ \sigma) = \Delta^{N}(b) \circ \sigma$.

Preuve 3.1.3. *On sait que l'espace tangent en un point (p, q) de $(M \times N, g \times h)$ se scinde canoniquement en deux sous espaces orthogonaux dont le second, dit horizontal se projette isométriquement sur $\top_p(M)$*
soit, donc , $\{(\frac{\partial x_i}{\partial x_i})_i, (\frac{\partial x_i}{\partial y_j})_j\}$ une base de $\top_{(p,q)}(M \times N)$
où $(\frac{\partial}{\partial x_i})_i$ est une base du sous espace horizontal
et $(\frac{\partial}{\partial y_j})_j$ est une base du sous espace vertical.
Les géodésiques correspondantes sont notés γ_i et δ_j respectivements.
On a : $\Delta^{M\times N}(f \circ \pi) = \sum_i \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \pi \circ \gamma_i) + \sum_j \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \pi \circ \delta_j)$.
Comme π est une submersion riemannienne, la projection est la géodésique attachée à la projection de x_i, d'où le premier terme est donc égale à $(\Delta^M(a)) \circ \pi$, et le second terme est nul, car γ_j est contenu dans le fibre de π en (p, q), donc $f \circ \pi \circ \gamma_j$ est constante.
D'où le résultat.
De la même façon on démontre $\Delta^{M\times N}(b \circ \sigma) = \Delta^{N}(b) \circ \sigma$.
Nous nous proposons, maintenant de calculer le laplacien de $(a \circ \pi) \times (b \circ \sigma)$ défini sur $M \times N$.
D'abord, à partir de la définition de laplacien, on a :
$\Delta^{M\times N}((a\circ\pi)\times(b\circ\sigma)) = \Delta^{M\times N}(a\times\pi)\times(b\circ\sigma)+2(d(a\times\pi), d(b\circ\sigma))+(a\circ\pi)\times\Delta^{M\times N}(b\circ\sigma)$.
Le deuxième terme est nul comme produit scalaire de deux formes orthogonales.
Donc, en utilisant le lemme 3.1.3, on obtient :
$\Delta^{M\times N}((a \times \pi) \times (b \circ \sigma)) = \Delta^{M}(a) \circ \pi \times (b \circ \sigma) + (a \times \pi) \times \Delta^{N}(b) \circ \sigma$.
Si a est une fonction propre de Δ^M pour la valeur propre λ (i.e $\Delta^M a = \lambda.a$)et b une fonction propre de Δ^N pour la valeur propre μ (i.e $\Delta^N b = \mu.b$).
On peut conclure que : $\Delta^{M\times N}(a \circ \pi \times b \circ \sigma) = (\lambda + \mu).(a \circ \pi) \times (b \circ \sigma)$.
D'où, on déduit que : $(a \circ \pi) \times (b \circ \sigma)$ est une fonction propre de $\Delta^{M\times N}$ sur $M \times N$ pour la valeur propre $(\lambda + \mu)$.

3.1.4 Spectre d'un espace produit.

Considérons deux variétés riemanniennes (M, g) , (N, h) compactes et leur produit $(M \times N, g \times h)$.
Notons par $\pi^* P(M)$ les relevés des fonctions propres de M à $M \times N$ et $\sigma^* P(N)$ les relevés des fonctions propres de N à $M \times N$.
π, σ désignent les projections respectivement de $M \times N$ à M et N respectivement.
En fait, ces espaces sont isomorphes à $P(M, g)$ et $P(N, h)$ respectivement.
Commençons, d'abord par un lemme qui nous sera utile pour comprendre le spectre de l'opérateur laplacien sur $(M \times N, g \times h)$.

Lemme 3.1.4. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et supposons donné pour tout $i \in N$ un sous-espace vectoriel non trivial V_i de $C^\infty(M)$ de manière que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*
1. *pour tout i, il existe $\lambda_i \in R$ tel que pour toute $\varphi \in V_i$ on ait $\Delta\varphi = \lambda_i \varphi$;*
2. *la somme $\sum_{i \in N} V_i$ est dense dans $C^\infty(M)$ pour la norme $L^2(M, g)$.*

Alors le spectre de (M, g) est l'ensemble des λ_i et, pour tout i , $V_i \in P_i(M, g)$

Preuve 3.1.4. *Il est clair que les λ_i appartiennent au spectre. Inversement, soit $\lambda \in Spec(M, g)$.*
Il existe une fonction f non nulle $\in C^\infty(M)$ tel que $\Delta^M f = \lambda f$.
Si λ était différent de tous les λ_i alors f serait orthogonale au sens de $L_2(M, g)$ à V_i pour tout i, ce qui est incompatible avec la densité de $\sum_{i \in N} V_i$.(vu que $f \neq 0$).
Démontrons, maintenant que , $V_i = P_i(M, g) \quad \forall i$.
Il est clair que $V_i \subset P_i(M, g)$; supposons que $V_i \neq P_i(M, g)$,
alors on pourrait trouver $\phi \in P_i(M, g)$ implique ϕ serait orthogonale à tous les V_j pour $j \neq i$
mais $\phi \notin V_i$ c.à.d ϕ orthogonale à V_i.
En définitive ϕ serait orthogonale à V_j pour tout j ce qui ne se pas.
D'où $V_i = P_i(M, g)$.
De même, on a bien besoin de théorème de Stone Weirstrass.

Lemme 3.1.5. ***(théorème de Stone Weirstrass)***

Soit M une variété C^∞ compacte, et soit A une sous-algèbrede $C^\infty(M)$.
Si A sépare les points et contient les constantes, alors elle est dense dans $C^0(M)$- a fortiori dans $C^\infty(M)$- au sens de la convergence uniforme.

Théorème 3.1.1. *on a les égalités :*

$$\pi^* P(M,g) \otimes \sigma^* P(N,h) = P(M \times N, g \times h).$$

$Spec(M \times N, g \times h)$ est l'ensemble de $\lambda + \mu$ avec $\lambda \in Spec(M,g)$ et $\mu \in Spec(N,h)$. Si $\sigma \in Spec(M \times N, g \times h)$ on a $P_\sigma(M \times N, g \times h) = \sum_{(\lambda+\mu=\sigma, \lambda \in Spec(M,g), \mu \in Spec(N,h))} \pi^* P_\lambda(M,g) \otimes \sigma^* P_\mu(N,h)$.

Preuve 3.1.5. *D'abord il est clair d'aprés ce qu'on a fait qu'on a la décomposition $\pi^* P(M,g) \otimes \sigma^* P(N,h) = \sum_\sigma W_\sigma$ est la somme d'une valeur propre de (M,g) et une valeur propre de (N,h).*
et $W_\sigma = \sum_{\lambda+\mu} \pi^* P_\lambda(M,g) \otimes \sigma^* P_\mu(N,h)$.
Démontrons d'abord $W_\sigma \subset P_\sigma(M \times N, g \times h)$:
soient $f \in P_\lambda(M,g)$ et $f' \in P_\mu(N,h)$.
On a déja démontrer $\Delta^{M \times N}(f \circ \pi)(f' \circ \sigma) = (\lambda + \mu)(f \circ \pi)(f' \circ \sigma)$
implique $(f \circ \pi)(f' \circ \sigma)$ est une fonction propre de $\Delta^{M \times N}$ pour la valeur propre $(\lambda + \mu) = \sigma$, d'où $W_\sigma \subset P_\sigma(M \times N, g \times h)$. Appliquons le lemme 3.1.4 avec $[\lambda_i = \sigma et V_i = \{\pi^* P_\lambda(M,g) \otimes \sigma^* P_\mu(N,h) \quad tel \quad que \quad \lambda + \mu = \sigma\}]$.
En effet, la première condition de lemme est facile à voir.
Quant à la deuxième, il faut démontré que $\sum_\sigma W_\sigma$ dense dans $C^\infty(M \times N)$
i.e $\pi^* P(M,g) \otimes \sigma^* P(N,h)$ dense dans $C^\infty(M \times N)$.
Comme $P(M,g)$ dense dans $C^\infty(M)$ et $P(N,h)$ dense dans $C^\infty(N)$ (voir lemme 3.1.1), alors $\pi^* P(M,g) \otimes \sigma^* P(N,h)$ dense dans $\pi^* C^\infty(M) \otimes \sigma^* C^\infty(N)$.
Appliquons le théorème de Weirstrass avec $[A = \pi^* C^\infty(M) \otimes \sigma^* C^\infty(N)]$
A est bien un sous algèbre de $C^\infty(M \times N)$, contient les constantes (qui sont les constantes de $C^\infty(M)$ et $C^\infty(N)$, sépare les points :
soient $(p,q), (m,n) \in M \times N$ tel que $(p,q) \neq (m,n)$.
Suposons $p \neq m$.il faut trouver deux fonctions $f \in C^\infty(M)$ et $f' \in C^\infty(N)$ tel que :
$(f \circ \pi)(f' \circ \sigma)(p,q) \neq (f \circ \pi)[(f' \circ \sigma)(m,n)]$
i.e $f(p).f'(q) \neq f(m).f'(n)$

On prend f n'importe quelle fonction C^{∞} telle que $f(p)=0$ mais $f(m)\neq 0$.
avec f' une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
D'où le théorème donne : $\pi^{*}C^{\infty}(M)\otimes\sigma^{*}C^{\infty}(N)$ dense dans $C^{\infty}(M\times N)$.
Par conséquent, le lemme 3.1.4 est vérifiée, et donc on a les résultats :
$Spec(M\times N, g\times h)$ est l'ensemble de $\sigma=\lambda+\mu$ où $\lambda\in Spec(M,g)$ et $\sigma\in Spec(N,h)$ avec $P_{\sigma}(M\times N, g\times h)=\sum_{\sigma} W_{\sigma}$.

Lemme 3.1.6. *Le laplacien dans l'espace produit s'écrit : $\Delta^{B\times F}=\Delta^{B}+\Delta^{F}$.*

Preuve 3.1.6. *Fixant $(X_1,...,X_m)($ resp $(V_1,...,V_n))$ un repère orthonormal de B (resp F).*
Alors $(X_1,...,X_m,V_1,...,V_n)$ est le repère g-orthonormal de $B\times F$ associé à la métrique : $g=\pi^{*}.g_B+\sigma^{*}g_F$.
Par conséquence, le laplacien dans ce base s'écrit de la forme suivante :
$\Delta^{B\times F}=[\sum_{i=1}^{m}\nabla_{X_i}\nabla_{X_i}-\sum_{i=1}^{m}\nabla_{\nabla_{X_i}X_i}]+[\sum_{i=1}^{n}\nabla_{V_i}\nabla_{V_i}-\sum_{i=1}^{n}\nabla_{\nabla_{V_i}V_i}]=\Delta^{B}+\Delta^{F}$.
d'où le résultat.
Comme Δ^{M} est un opérateur symétrique, ils existent une suite réelle $(\lambda_l)_{l\in N}$ et une base orthonormal $(u_l)_{l\in N}$ de $L_2(M)$ tel que $\Delta^{M}(u_l)=\lambda_l u_l$.
de même Δ^{N} est un opérateur symétrique, donne l'existence d'une suite réelle $(\mu_i)_{i\in N}$ et une base orthonormal $(w_i)i\in N$ de $L_2(N)$ tel que $\Delta^{N}(w_i)=\mu_i w_i$.
le fait que le laplacien de $M\times N$ est la somme de deux laplaciens de M et de N, on obtient que $\Delta^{M\times N}$ est un opérateur symétrique.
ainsi l'existence d'une suite réelle de la forme $(\lambda_i+\mu_l)$ et d'une base orthonormal de l'espace $L_2(M\times N)$ sous forme $u_i.w_l$ (résultat directement du théorème 3.1.1). Par conséquent, on a : $\{u_i.w_l \quad i,j=0,1,...\}$ est une base de $L_2(M\times N)$.

3.2 Le spectre d'un espace produit tordu de deux variétés riemanniennes.

3.2.1 Laplacien d'un espace produit tordu.

Soient (B,g_B) , (F,g_F) deux variétés riemanniennes compactes de dimension m et n respectivement, et f une fonction $\in C^{\infty}(B)$.

Notons que Δ^F, Δ^B , $\Delta^{B\times F}$ et $\Delta^{B\times_f F}$ les laplaciens correspondants aux espaces indiqués. Commençons d'abord, par un lemme qui nous permet de bien voir l'opérateur laplacien au niveau d'un espace produit tordus.

Lemme 3.2.1. *Le laplacien dans l'espace produit tordu s'écrit :*

$$\Delta^{B\times_f F} = \Delta^B + (n/f)\nabla_{grad\, f} + (1/f)^2\Delta^F.$$

Preuve 3.2.1. *En reprenant les repères locales orthonormaux définient, dans le chapitre 2 sur B (i.e$X_1, ..., X_m$) et sur F (i.e $V_1, ..., V_n$).*
Leur relevés à $B\times_f F$ (notés de la même façon) donnent un repère orthonormal dans cet espace de la forme : $X_1, ..., X_m$, $V_1/f, ..., V_n/f$.
d'où $\Delta^{B\times F} = \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i}\nabla_{X_i} - \sum_{i=1}^m \nabla_{\nabla_{X_i}X_i} + \sum_{j=1}^n \nabla_{V_j/f}\nabla_{V_j/f} - \sum_{j=1}^n \nabla_{\nabla_{V_j/f}V_j/f}$.
Or $1/f$ est constante sur les fibres on a $\nabla_{V_i/f} V_i/f = (1/f)^2\nabla_{V_i} V_i$
$= (1/f)^2[D_{V_i} V_i - g(V_i, V_i)/f)grad\, f] = (1/f)^2[D_{V_i} V_i - fg^F(V_i, V_i)grad\, f]$.
Vu que $g^F(V_i, V_i) = 1$ *on a* $\sum_{i=1}^n g^F(V_i, V_i) = n$, *et donc la formule sera :*
$\Delta^B\times F = \Delta^B + (1/f)^2[\sum_{i=1}^n \nabla_{V_i} V_i - \sum_{i=1}^n \nabla_{D_{V_i} V_i}] + (n/f)\nabla_{grad\, f} = \Delta^B + (1/f)^2\Delta^F + (n/f)\nabla_{grad\, f}$ *d'où le résultat.*

3.2.2 Spectre d'un espace tordu

Essayons de savoir certaines propriétés sur l'espace produit tordus qui
nous seront utiles pour trouver le spectre :

Lemme 3.2.2. *En rappelant :* $*1_{B\times F} = \mathcal{W}_{g_{B\times F}}$ *(élément volume riemannienne sur $B\times F$) et $*1_B \times_f F$ (élément volume riemanienne sur $B\times_f F$)*
On a pour tout $(b, p) \in B\times F$:
$*1_{B\times_f F}(b, p) = f^n(b) * 1_{B\times F}(b, p)$.

Preuve 3.2.2. *En reprenant le repère orthonormal sur $B\times_f F$.*
Calculons d'abord $(V_i/f)^\flat$ pour $\forall 1 \leq i \leq n$.
Soit $Y \in L(F)$.
$(V_i)^b(Y) = g(V_i/f, Y) = (1/f)g(V_i, Y) = (1/f).f^2g^F(V_i, Y) = f.(V_i)^b(Y)$,
d'où $(V_i/f)^\flat = f(V_i)^\flat$.

Donc $*1_{g_{B\times_f F}}(b,p) = \mathcal{W}_{gB\times_f F}(b,p) = X_1^\flat \wedge ... \wedge X_m^\flat \wedge (V_1/f)^\flat \wedge ... \wedge (V_n/f)^\flat(b,p)$
$= X_1^\flat \wedge ... \wedge X_m^\flat \wedge f(b)(V_1)^\flat \wedge ... \wedge f(b)(V_n)^\flat(b,p)$
$= f^n(b)X_1^\flat \wedge ... \wedge X_m^\flat \wedge (V_1)^\flat \wedge ... \wedge (V_n)^\flat(b,p) = f^n(b).\mathcal{W}_{g_{B\times F}} = f^n(b) * 1_{B\times F}$.

Lemme 3.2.3. *Si B compact et $f > 0$, on peut identifier $L_2(B\times F)$ avec $L_2(B\times_f F)$.*

Preuve 3.2.3. *Soit $u \in L_2(B\times F)$.*
$\int_{B\times F} u^2 * 1_{g_{B\times_f F}} = \int_{B\times F} u^2 f^n * 1_{g_{B\times F}}$ *(lemme 3.2.2).*
Vu que B compact et f continue sur B, ainsi le fait que $u \in L_2(B\times F)$.
donnent : $\int_{B\times_f F} u^2 * 1_{g_{B\times_f F}} \leq \sup_{(b\in B)} f^n(b) \int_{B\times_f F} u^2 * 1_{g_{B\times F}} < +\infty$, *donc* $u \in L_2(B\times_f F)$. *Démontrons l'inverse, soit $u \in L_2(B\times_f F)$*
$\int_{B\times_f F} u^2 * 1_{g_{B\times_f F}} = \int_{B\times F} < +\infty$. *Vu que f continue et B compact alors :*
$\inf_B f^n \int_{B\times F} u^2 * 1_{g_{B\times F}} \leq \int_{B\times F} u^2 f^n * 1_{B\times F} < +\infty$.
Donc $\int_{B\times F} u^2 * 1_{B\times F} < +\infty$.
D'où $u \in L_2(B\times F)$.
L'opérateur $\Delta^F : L_2(F) \longrightarrow L_2(F)$ est symétrique, donc il existe une suite réelle $\lambda_i(\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...)$ de Δ^F des valeurs propres et une base hilbertienne orthonormale ψ_i tel que $\Delta^F\psi_i = \lambda_i\psi_i$ (théorie spectrale).
à chaque valeur propre λ de Δ^F, on définit un opérateur différentiel L_λ sur B défini par :

$$L_\lambda = \Delta^B + (n/f)\nabla_{grad\, f} - \lambda/f^2.$$

On note par $\bar{B}$ la variété riemannienne B muni de la métrique $f^{(2n/m)}g$.

Lemme 3.2.4. *L_λ est un opérateur auto-adjoint sur $\bar{B}$.*

Preuve 3.2.4. *Calculons d'abord $*1_{\bar{B}}$ en fonction de $*1_B$.*
En effet, soient $\{X_1, ..., X_m\}$ un repère local g_B orthonormal de B,
il donne un repère orthonormal sur $\bar{B}$ de la forme $\{X_1/(f^{n/m}), ..., X_m/(f^{n/m})\}$.
On a $*1_{\bar{B}} = \mathcal{W}_{\bar{g}} = (X_1/f^{n/m})^\flat \wedge ... \wedge (X_m/f^{n/m})^\flat$
$= f^{n/m} \times ... \times f^{n/m}.X_1^\flat \wedge ... \wedge X_m^\flat$ *(le même type d'argument de lemme 3.2.2)*
$= f^{m.n/m} X_1^\flat \wedge ... \wedge X_m^\flat = f^n \mathcal{W}_g = f^n * 1_B$.
donc on déduit : $*1_{\bar{B}} = f^n * 1_B$.
Soient maintenant $u, v \in C^\infty(B)$.On a :

(a) $f^n(\Delta^B u)v = (\Delta^B u)f^n v = g^B(\Delta^B u, f^n v) = g^B(\delta du, f^n v) = g^B(du, d(f^n v)) = g^B(du^\#, d(f^n v)^\#) = g^B(grad\, u, grad\, f^n v) = grad(f^n v)u = -\nabla_{grad(f^n v)}u$ *d'où* $f^n(\Delta^B u)v = -\nabla_{grad(f^n v)}u$

(b) *Soit* $X \in \Gamma(B)$. *On a* $g^B(grad(f^n v), X) = X(f^n v) = nf^{n-1}x.f.v + f^n.x.v = nf^{n-1}g^B(grad\, f, x)v + f^n g^B(grad\, v, x) = g^B(nf^{n-1}.grad\, f.v + f^n.grad\, v, X)$. *donc* $grad(f^n v) = nf^{n-1}.grad\, f.v + f^n.grad\, v$.

(a) et (b)donnent $f^n(\Delta^B u)v = -\nabla_{grad(f^n v)}u = nf^{n-1}v\nabla_{grad\, f}u + f^n\nabla_{grad\, v}u$.
D'où $\langle L_{\lambda u}u, v\rangle_{L_2(\bar{g})} - \langle u, L_\lambda v\rangle_{L_2(\bar{g})}$
$= \int_{\bar{B}} L_\lambda u.v * 1_{\bar{B}} - \int_{\bar{B}} u.L_\lambda v * 1_{\bar{B}}$
$= \int_B .[\Delta^B u + (n/f)\nabla_{grad\, f}u + \lambda u/f^2]f^n.v * 1_B - \int_B .u[\Delta^B v + (n/f)\nabla_{grad\, f}v + \lambda v/f^2]f^n * 1_B$
$= \int_B [f^n(\Delta^B u)v - f^n u(\Delta^B v) + nf^{n-1}v(\nabla_{grad\, f}u) - nf^{n-1}u(\nabla_{grad\, f}v)] * 1_B$
$= \int_B [-(\nabla_{grad(f^n v)}u) + (\nabla_{grad(f^n u)}v) + nf^{n-1}v(\nabla_{grad\, f}u) - nf^{n-1}u(\nabla_{grad\, f}v)] * 1_B$
d'aprés (a).
$= \int_B [-nf^{n-1}v(\nabla_{grad\, f}u) - f^n(\nabla_{grad\, v}u) + nf^{n-1}u(\nabla_{grad\, f}v) + f^n(\nabla_{grad\, u}u) + nf^{n-1}v(\nabla_{grad\, f}u) - nf^{n-1}u(\nabla_{grad\, f}v)] * 1_B$
d'aprés (b)
$= \int_B f^n[\nabla_{grad\, u}v - \nabla_{grad\, v}u] * 1_{(B)}$
$= \int_B f^n[(\Delta^B u)v - (\Delta^B v)u] = 0$ *car* Δ^B *est symétrique sur* B. *D'où le résultat.*
Comme L_λ *est un opérateur symétrique alors il existe une suite réelle* $\mu_j^\lambda(0 = \mu_0^\lambda < \mu_1^\lambda \leq \mu_2^\lambda \leq ...)$ *de valeurs propres et une base orthonormale* $(\phi_j^\lambda)_j$ *de fonctions propres sur* $L_2(\bar{B})$ *telles que* $L_\lambda\phi_j^\lambda = \mu_j^\lambda\phi_j^\lambda, j = 0, 1, 2, ...$
d'où, en utilisant le lemme 3.2.1, on obtient :

$$\Delta^{B\times_f F}\phi_j^{\lambda_i}\psi_i = L_{\lambda_i}\phi_j^{\lambda_i}\psi_i = \mu_j^{\lambda_i}\phi_j^{\lambda_i}\psi_i.$$

Nous allons, maintenant démontrer que la famille $\{\phi_j^{\lambda_i}\psi_i : i, j = 0, 1, 2...\}$ *forment bien une base de* $L_2(B \times_f F)$.
Commençons par la remarque suivante :

Remarque 3.2.1. 1) *On a l'inclusion :* $L_2(B) \subset L_2(\bar{B})$.

2) *Si* $u \in L_2(B)$ *et* $v \in L_2(F)$ *on a* $\|u, v\|_{L_2(B\times_f F)} = \|u\|_{L_2(\bar{B})}.\|v\|_{L_2(F)}$

Preuve 3.2.5. **1)** *Soit* $u \in L_2(B)$, *Le fait que* f *soit continue et que* B *soit compacte donne* $\int_{\bar{B}} u^2 * 1_{\bar{B}} = \int_B f^n u^2 * 1_B < \sup_B f^n \int_B u^2 * 1_B < +\infty$. *et donc* $u \in L_2(\bar{B})$.

2) *Calculons* $\|u, v\|^2_{L_2(B\times_f F)} = \int_{B\times_f F} u^2v^2 * 1_{B\times_f F} = \int_{B\times_f F} u^2v^2f^n * 1_B * 1_F = \int_{B\times F} f^n u^2 * 1_B \int_{B\times F} v^2 * 1_F = \int_{\bar{B}} u^2 * 1_{\bar{B}} \int_F v^2 * 1_F = \|u\|^2_{L_2(\bar{B})}.\|v\|^2_{L_2(F)}$

Théorème 3.2.1. $\{\phi_j^{\lambda_i}\psi_i : i, j = 0, 1, 2...\}$ *est une base de* $L_2(B \times_f F)$.

Preuve 3.2.6. Δ^B *est un opérateur symétrique, donc il existe une suite des valeurs propres* $(\alpha_l)_l$ *et une base orthonormal* $(u_l)_l$ *dans* $L_2(B)$ *tel que* $\Delta^B u_l = \alpha_l.u_l$.
Comme $\{\phi_j^{\lambda_i} : i, j = 0, 1, 2...\}$ *forment une base de* $L_2(\bar{B})$, *(la remarque 3.2.1), il existe une suite* $a_{l,k}^{\lambda_i} \in \mathbb{R}; k = 0, 1, 2...$ *telle que* $\lim_{p\longrightarrow+\infty} \|u_l - \sum_{k=0}^p a_{l,k}^{\lambda_i}\phi_k^{\lambda_i}\|_{\overline{B}} = 0$.
En utilisant 2) *de la remarque 3.2.1, on a :*
$\|u_l\psi_i - \sum_{k=0}^p a_{l,k}^{\lambda_i}\phi_k^{\lambda_i}\psi_i\|_{B\times_f F} = \|(u_l - \sum_{k=0}^p a_{l,k}^{\lambda_i}\phi_k^{\lambda_i})\psi_i\|_{B\times_f F}$
$= \|u_l - \sum_{k=0}^p a_{l,k}^{\lambda_i}\phi_k^{\lambda_i}\|_{\overline{B}}.\|\psi_i\|_F$
en faisant tendre $p \longrightarrow \infty$, *on obtient* $\lim \|u_l\psi_i - \sum_{k=0}^p a_{l,k}^{\lambda_i}\phi_k^{\lambda_i}\psi_i\|_{B\times_f F} = 0$.
Comme $\{u_l \quad \psi_i i, l = 0, 1...\}$ *est une base de* $L_2(B \times F)$ *alors le lemme 3.2.3 et le fait que* $u_l\psi_i$ *est une combinaison de* $(\phi_j^{\lambda_i}\psi_i)_{i,j}$
montrent bien que $\{\phi_j^{\lambda_i} \quad \psi_i; i, j = 0, 1...\}$ *est une base de* $L_2(B \times_f F)$.
d'où le résultat.

Théorème 3.2.2. *Soient* B , M , N *des variétés riemanniennes compacts et* $f \in C^\infty(B)$ *strictement positive.*
Si $Spec(M) = Spec(N)$ *alors* $Spect(B \times_f M) = Spect(B \times_f N)$.

Preuve 3.2.7. *On remarque que les valeurs propres* $(\mu_j^{\lambda_i})_{i,j}$ *ainsi trouvés de* $\Delta^{B\times_f F}$ *dépendent des* λ_i *et non des* ψ_i.
Vu que $Spec(M) = Spec(N)$, *on a* $Spect(B \times_f M) = \{\mu_j^{\lambda_i}, j = 0, 1, 2...$ *avec* λ_i *valeurs propres de* $M\}= \{\mu_j^{\lambda_i}, j = 0, 1, 2, ...$ *avec* λ_i *valeurs propres de* $N\} = Spect(B \times_f N)$
d'où le résultat.

Lemme 3.2.5. *rappelons le résultat suivant de géométrie riemannienne (cf [1])*
Soient M, N *deux variétés riemanniennes et* f *une application* C^∞ *de* M *dans* N.
Si M *est complète avec* $f^*g_N = g_M$ *alors* f *est surjective.*

Théorème 3.2.3. *soient B, M, N des variétés riemanniennes complétes et $f \in C^\infty(B)$ strictement positive tel que :*
(1) M , N *sont plates et* $\dim M$, $\dim N \geq \dim B + 2$.
(2) il existe un point $b_0 \in B$ *et un voisinage* U_0 *de* b_0 *tel que :*
$\|grad\, f\|^2(x)/f^2(x) \neq \|grad\, f\|^2(b_0)/f^2(b_0)$, $\forall x \in U_0 - \{b_0\}$.
Si $B \times_f M$ *est isométrique à* $B \times_f N$ *, alors* M *est homothéti à* N.

Preuve 3.2.8. *Soit* $X : B \times_f N \longrightarrow B \times_f M$. *une isométrie.*
$b_0 \in B$, *donc il existe un point* $(b_1, n_1) \in B \times_f N$ *tel que :* $(\pi \circ X)(b_1, n_1) = b_0$.
On définit le sous-espace linéaire $E(b_1, n)$ *de* $\top_{(b_1,n)}(\{b_1\} \times N)$ *pour* $\forall n \in N$ *tel que :*
$E(b_1, n) = \{X \in \top_{(b_1,n)}(\{b_1\} \times N) : (\pi \circ X)_* = 0\}$.

D'aprés (1) , *on a bien* $\dim E(b_1, n) \geq 2$.
En effet, la restriction de $(\pi \circ X)_*$ *sur* $\top_{(b_1,n)}(\{b_1\} \times N)$ *est une application linéaire, et donc :* $\dim \ker(\pi \circ X)_*|_{\{b_1\}\times_f N} + \dim\, Im(\pi \circ X)_*|_{\{b_1\}\times_f N}$
$= dim(\top_{(b_1,n)}(\{b_1\} \times N))$.
Le fait que $dim(\top_{(b_1,n)}(\{b_1\} \times N)) = dim\top_n(N) = dimN$
et $dim(\pi \circ X)_*|_{\{b_1\}\times_f N} \leq dim\top_n(B) = dimB$ *donnent*
dim $E(b_1, n) \geq \dim N - \dim B$.
D'aprés (1) , *on a* $\dim N - \dim B \geq 2$, *et donc* $\dim E(b_1, n) \geq 2$.
Ceci implique l'existence de deux vecteurs orthonormés $e_1(n)$, $e_2(n) \in E(b_1, n)$.
utilisons 5) *de la proposition 1.2.2 (prenons* $F = \{b_1\} \times N$, *avec les vecteurs* $e_1(n)$, $e_2(n)$ *), on obtient :*
$g(\mathcal{R}(e_1(n), e_2(n))e_1(n), e_2(n)) = g((^N\mathcal{R}(e_1(n), e_2(n))e_1(n)), e_2(n))$
$-\|grad\, f\|^2(b_1)/f^2(b_1)[g(e_1(n), e_1(n)).g(e_2(n), e_2(n)) - g(e_2(n), e_1(n))g(e_1(n), e_2(n))]$.
Or N *est plate, et donc* $^N\mathcal{R}(e_1(n), e_2(n))e_1(n) = 0$ *Mais l'orthonormalité de* $e_1(n)$ *et* $e_2(n)$ *donne que :*
$g(e_1(n), e_1(n)) = g(e_2(n), e_2(n)) = 1$;
$g(_1(n), e_2(n)) = g(e_2(n), e_1(n)) = 0$.
Et la formule devient : $g(\mathcal{R}(e_1(n), e_2(n))e_1(n), e_2(n)) + \|grad\, f\|^2(b_1)/f^2(b_1) = 0$.
De même, le sous espace $E(b_0, m) = \{x \in \top_{(b_0,m)}(\{b_0\} \times M)$ *tel que* $\pi_* x = 0\}$ *est de dimension* ≥ 2 *(avec le même type d'argument qu'on a fait pour* $E(b_1, n)$*).*

Ainsi $[\|grad\, f\|(b_1)/f(b_1)]^2 = g((\mathcal{R}(e_1(n), e_2(n)), e_2(n))$
$= X^* g((\mathcal{R}(e_1(n), e_2(n)), e_2(n))$
$= g(X_*(\mathcal{R}(e_1(n), e_2(n))e_1(n), X_*(e_2(n)))$
(*le fait que le tenseur de courbure est invariante par isométrie*)
$= g((\mathcal{R}(X_*(e_1(n)), X_*(e_2(n))), X_*(e_2(n)))$.
Mais, les vecteurs $X_*(e_1(n))$ *et* $X_*(e_2(n))$ *sont deux vecteurs orthonormés de* $E(b_0, m)$ [*puisque* $e_1(n)$ *et* $e_2(n)$ *sont orthonormés sur* $E(b_1, n)$], *donc en appliquant* 5 *de la proposition* 1.2.2 [*en prenant* $F = \{b_0\} \times M$, *avec les vecteurs* $X_*(e_1(n))$, $X_*(e_2(n))$].
On obtient :
$g((\mathcal{R}(X_* e_1(n), X_* e_2(n)), X_* e_2(n)) = [\|gradf\|(\pi \circ X(b_1, n))/f(\pi \circ X(b_1, n))]^2$. *D'où l'égalité :*
$[\|grad\, f\|(b_1) f(b_1)]^2 = [\|grad\, f\|(\pi \circ X(b_1, n))/f(\pi \circ (b_1, n))]^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Cette égalité est, en particulier, vraie pour n_1.
Le fait que $\pi \circ X(b_1, n_1) = b_0$ *donne*
$[\|grad\, f\|^2(b_1)/f^2(b_1)] = [\|grad\, f\|^2(b_0)/f^2(b_0)]$, *mais vu que*
$[\|grad\, f\|^2(b_1)/f^2(b_1)] = [\|grad\, f\|^2(\pi \circ X(b_1, n))/f^2(\pi \circ X(b_1, n))] \ \forall n \in \mathbb{N}$
on a : $(\pi \circ X)(b_1, n) = b_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
De plus, comme M *et* N *sont complètes, on a* $\{b_1\} \times N$ *est isométrique à* $\{b_0\} \times M$.
En effet, prenons la restriction de X *sur* $\{b_1\} \times N$, $[X : \{b_1\} \times N \longrightarrow \{b_0\} \times M]$.
Soient $V, W \in \top_{(b_1,n)}(\{b_1\} \times N)$. $g_{(b_1,n)}(V, W) = g_{X(b_1,n)}(X_* V, X_* W) = g_{(b_0,m)}(X_* V, X_* W) = (X^* g_{(b_0,m)})|_{(b_1,n)}(V, W)$.
D'où $g_{\{b_1\}\times N} = X^* g_{\{b_0\}\times M}$.
le fait que $\{b_1\} \times N$ *est complet, le lemme* 3.2.5 *donne que* X *est surjective, donc bijective.*
D'aprés l'isométrie $B \times_f N \longrightarrow B \times_f M$, *on a que* X *est homéomorphisme et donc finalement l'isométrie de* X.
par conséquent N *est homothétique à* M.
En effet, soient $V, W \in \top_{(b_1,n)}(\{b_1\} \times N)$
comme $\{b_1\} \times N$ *est isométrie à* $\{b_0\} \times M$ *alors* $g_(\{b_1\} \times N) = X^*(g_{\{b_0\}\times M})$ *et donc* $g_{(b_1,n)}(V, W) = g_{(b_0,m)}(X_* V, X_* W)$
$\Longleftrightarrow f^2(b_1) g_N(V, W) = f^2(b_0) g_M(X_* V, X_* W)$

$\Longleftrightarrow [f^2(b_1)/f^2(b_0)].g_N(V, W) = g_M(X_* V, X_* W)$
$\Longleftrightarrow [f^2(b_1)/f^2(b_0)].g_N = X^* g_M.$
prenons $C = f^2(b_1)/f^2(b_0) \in \mathbb{R}^{*+}$ *on a bien* $C.g_N = X^* g_M$, *d'où le résultat.*

Chapitre 4

Construction d'exemples de variétés compactes, isospectrales non isométriques.

4.1 Contre-exemple de Milnor

Proposition du problème : C'est en 1966 que M.Kac dans son article "est-ce qu'on peut entendre la forme d'un tambour ?" à posé la question suivante : deux variété isospectrales sont-elle isométriques ?. la réponse est en général non, le premier contre exemple est donné par : Milnor. un des cas où la réponse de cette question est affirmative est la :

Proposition 4.1.1. *Soient* (M, g) *et* (M', g') *deux variétés riemanniennes de dimension* 2 *à courbure nulle alors Si Spec* $(M, g) =$ *Spec*$(M', g') \Longrightarrow (M, g) \simeq (M', g')$

Pour la démonstration on a besoin le lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *Si* $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésique, alors, pour toute fonction* f *définie sur* $\mathbb{N}$ *on a :*

$$\Delta^M (f \circ \phi) = \Delta^N f \circ \phi.$$

Preuve 4.1.1. ***lemme***

On sait que l'espace tangent en un point m de (M, g) se scinde canoniquement en deux sous-espaces orthogonaux dont le second, dit horizontal, se projette isométriquement sur $T_{\phi(m)}N$; soit, donc, $\{x_i, y_j\}_{i,j}$ une base de T_mM, où $\{x_i\}$ est une base du sous-espace horizontal et $\{y_j\}$ une base du sous-espace vertical. Les géodésiques correspondantes sont notées γ_i et δ_j respectivement.et on a aussi :

$$\Delta^M(f \circ \phi) = -\sum_i \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \phi \circ \gamma_i) - \sum_j \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \phi \circ \delta_j).$$

Comme ϕ est une submersion riemannienne la projection de γ_i est la géodésique attachée à la projection de x_i. Le premier terme du second membre de est donc égale à $\Delta^N f \circ \phi$. Le second terme est nul, car δ_j est contenu, par hypothèse, dans la fibre de ϕ en m, donc $f \circ \phi \circ \delta_j$ est constante. L'égalité est donc vérifiée.

Preuve 4.1.2. ***proposition***

Voir le resultat de lemme précédent.

Théorème 4.1.1. ***Milnor***

il existe une paires de tores de dimension 16 isospectrales non isométriques.

preuve [1]

Dans la suite, on utilise le produit tordu pour construire un contre exemple de variétés isospectrales non isométriques.

Théorème 4.1.2. *soient B, M, N des variétés riemanniennes compactes et f une fonction C^∞ sur B.*
avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 3.2.3 précédent on a :
si $Spec(M) = Spec(N)$ et M n'est pas isométrique avec N alors
$Spec(B \times_f M) = Spec(B \times_f N)$ mais $B \times_f M$ n'est pas isométrique avec $B \times_f N$.

Preuve 4.1.3. *Comme $Spec(M) = Spec(N)$, alors le théorème 3.2.2 donne que $Spec(B \times_f M) = Spec(B \times_f N)$.*
Ainsi, $B \times_f M$ n'est pas isométrique à $B \times_f N$ car sinon, le théorème 3.2.3 implique

que Met N sont homothétiques, le fait qu'elles sont isospectrales entraine qu'elles sont isométriques (elles sont homothétiques et ont même volume donc sont isométriques). d'où le résultat.

Remarque 4.1.1. *Prenons maintenant B : le cercle S^1.*
Dans ce cas, ont peut remplaçer l'hypothèse (2) du théorème 3.2.3 par le fait que f n'est pas constante.

Preuve 4.1.4. *Il faut démontrer que si f n'est pas constante alors il existe $b_0 \in S^1$ et un voisinage U_0 de b_0 telque $\|grad\, f\|^2(x)/f^2(x) \neq \|grad\, f\|^2(b_0)/f^2(b_0)$ $\forall x \in U_0 - \{b_0\}$.*
En effet, dans le cas où $B = S^1$ $(\dim = 1)$, on a $\|grad\, f\|^2(x) = (f')^2(x)$, et on a bien à démontrer l'existence d'un point $b_0 \in S^1$ et d'un voisinage U_0 de b_0 tel que $(f')^2(x)/f^2(x) \neq (f')^2(b_0)/f^2(b_0)$ $\forall x \in U_0 - \{b_0\}$.
La fonction $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, étant de classe C^∞ strictement positive et S^1 étant compacte, on a l'existence d'un point $b_0 \in S^1$ et d'un voisinage U_0 de b_0 tels que b_0 soit un extrémum de f et pour $\forall x \in U_0 - \{b_0\}$ on a $f'(x) \neq 0$.
D'où le résultat.

Corollaire 4.1.1. *Soient M, N deux variétés riemanniennes compactes et une fonction f strictement positive non constante sur S^1.*
Supposons M et N plates et de $\dim \geq 3$.
Si Spec(M) = Spec(N) et M n'est pas isométrique à N, alors Spec($S^1 \times_f M$) = Spec($S^1 \times_f N$) mais $S^1 \times_f M$ n'est pas isométrique à $S^1 \times_f N$.
De plus $S^1 \times_f M$ et $S^1 \times_f N$ ne sont pas plates.

Preuve 4.1.5. *On a $\dim S^1 = 1$ et $\dim M$, $\dim N \geq 3$.*
Vu que f non constante, la remarque 4.1.1 donne la condition 2 du théorème 3.2.3, et donc on a : Spec($S^1 \times_f M$) = Spec($S^1 \times_f N$) et $S^1 \times_f M$ n'est pas isométrique avec $S^1 \times_f N$.
De plus, en prenant un 2-plant J tanjent à $S^1 \times_f M$ et en y choisissant une base orthonormale de la forme $\{X + V, V\}$ où X est un champ de vecteur sur S^1 et V, W sont des champs de vecteurs sur M.

Le calcul qu'on a déja fait dans le chapitre 1 (*Lemme 1.2.3*) *donne la courbure sectionnelle* K *de* $S^1 \times_f N$ *par la formule :*

$$K(J) = -(f''/f)\|X\|^2 + (1/f)^2[{}^M K(V,W) - (f')^2].\|V\|^2$$

avec ${}^M K$ *la courbure sectionnelle de* M.
Vu que M *est plate, on a* ${}^M K(V,W) = 0$, *et donc la formule devient* $K(J) = -(f''/f)\|X\|^2 - (f'/f)^2.\|V\|^2$
Comme $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue non constante et que* S^1 *est compacte, il existe* $b \in S^1$ *tel que* $f'(b) = 0$ *et* $f''(b) \neq 0$.
La courbure sectionnelle au point b *est non nulle, et donc* $S^1 \times_f M$ *n'est pas plate.*
De la même manière, on démontre que $S^1 \times_f N$ *n'est pas plate.*
Enfin, en résumant : ceci permet construire deux variétés riemanniennes compactes non plates qui ont mêmes spectres et qui ne sont pas isométriques ($S \times_f M$ *et* $S \times_f N$).

Bibliographie

[1] Agmon.S, Lectures on elliptic boundary value problems, van nostrand,1965.

[2] Berger.M.,Gauduchon P., Mazet E.,Le spectre d'une riemannienne lecteurs notes in Mathématics 194 Berlin-heidelberg-Newyork :sprig (1971).

[3] Berger M.F : Gostiaux R : Géométrie différentielle (P.U.F).

[4] Bishop R.L.,O'neil B. :Manifold of negative curvature Trans. Amer. Math.soc. $145.1-49(1969)$.

[5] Milnor J : Eigenvalues of the laplacien operator on certain manifolds Proc. nat. Acad. Sci. USA $51, 542(1964)$.

[6] Norio. ejiri : A contruction of non-plates, compat Riemannian manifolds Which are isospectral but not isometric Proc. Math.$186, 213-221(1979)$

[7] Spivah : Differential Geometrie publish or panish.

[8] Vignéras M.F : Théorie des nombres C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A$287, 47-49(1978)$

[9] Warner F. : foundations of differentiable manifold, Lie Groups (springer).