



N Attribué par la bibliothèque



"Année:2015"



# Ensemble Nodaux pour des Fonctions propres du Laplacien

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

**Freha Habchi**<sup>1</sup>

Sous la direction de

**Encadreur : Mr K.Djerfi**

Soutenue le Juin 2015 devant le jury composé de

<b>D. Djebbouri</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
<b>K. Djerfi</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
<b>S. Ouakkas</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
<b>R. Nasri</b>	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

---

1. freha.habchi32@yahoo.com

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; A mon adorable maman fatima qui j'adore.

A mes frères : Salah, Abd Elkader, Mohamed, Brahim.

A mes chères sœurs : Souad, Fatiha.

Spécialement A me petit fils : Aness Abd El Elleh.

A tout mes amis : Amina, Fatima, Dhiba, Nora, Oum aameur, Aicha, Soumia, Hanan, Zohra, Rahmania, Sara, Fadhila, Massouda, Sihem, khadra, samira, nadjat, kheira, hala.

A mon amie : Fatima.

A mes tantes et mes ancles.

Enfin à tout ma promotion du mathématique d'université Saida.

# Remerciements

Il est naturel de remercier à la fin d'un tel travail tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible.

Un remerciement très particulier va à Monsieur "Djerfi Kouider" pour l'attention qu'il a porté à mon travail. Ces conseils et idées ont été précieux et ont guidé ma recherche au cours de mon travail. Je souhaite tout d'abord lui exprimer ma profonde gratitude.

Je remercie sincèrement Monsieur "Djebbouri Djelloul" pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury et pour son aide et les services qu'il m'a rendus. Il m'a toujours encouragé et précieusement conseillé.

Je remercie vivement Monsieur "Ouakkas Seddik" pour la confiance dont il me fait preuve en faisant parties de ce jury.

Je voudrais aussi remercier et Monsieur "Nasri R" pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mon travail en acceptant de participer au jury.

Je tiens à exprimer aussi ma reconnaissance à tous mes enseignants.

Je remercie très amicalement tous mes amis et d'ailleurs de leurs sympathie et leurs aides de près ou de loin.

Enfin, j'adresse mes remerciements à l'ensembles des personnes présentes à cette soutenance.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>8</b>
1.1 Rappels-définition du laplacien, décomposition du spectre et fonction de compte . . . . .	9
1.2 Séparation de variables, équation différentielle de Bessel, fonctions et valeurs propres du laplacien sur un domaine circulaire . . . . .	12
1.3 Développement asymptotique d'olver des zéros des fonction de Bessel . . .	18
<b>2 Les ensembles nodaux des fonctions propres</b>	<b>21</b>
2.1 Les ensembles nodaux des fonctions propres et leurs structures, cas du disque et du secteur en exemples . . . . .	22
2.2 La première ligne nodale de la deuxième fonction propre . . . . .	24
2.3 Algorithme pour ordonner les valeurs propres et déterminer la structure des ensembles nodaux . . . . .	30
2.3.1 Résultats comparatifs . . . . .	32
<b>3 Loi de Weyl pour le disque</b>	<b>38</b>
3.1 Approximation uniforme de la fonction de Bessel de premier type . . . . .	39
3.1.1 Calculs numériques des variations totales . . . . .	48
3.2 L'article de Kuznetsov et Fedosov, explications et corrections . . . . .	52
3.3 Algorithme pour calculer la fonction de compte $N(\lambda)$ . . . . .	65
3.3.1 Quelques résultats pour les valeurs de la fonction de compte $N(\lambda)$	68
<b>Conclusion</b>	<b>70</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>71</b>

# Introduction

Ce mémoire est un exemple de ce qu'il est possible d'étudier en géométrie spectrale. Puisqu'il est généralement difficile de définir et de délimiter exactement un domaine de la connaissance, on trouvera dans ce mémoire quelques exemples de ce qu'il est possible d'étudier en géométrie spectrale. Néanmoins, personne ne se trompe en affirmant que la géométrie spectrale est un domaine alliant la géométrie et l'analyse spectrale. Traditionnellement, l'analyse spectrale étudie le spectre des opérateurs comme les matrices ou encore des opérateurs différentiels comme l'opérateur  $\frac{d^2}{dx^2}$ . Généralement les opérateurs agissent sur des objets comme des vecteurs ou des fonctions. Les domaines sur lesquels ces objets sont définis sont plats généralement comme un carré en dimension 2 ou un cube en dimension 3. En changeant les domaines sur lesquels ces objets sont définis, par exemple en considérant des vecteurs sur la sphère en identifiant chaque point antipodal comme équivalent, les opérateurs agissant sur ces objets ont des «comportements» différents. Le spectre des opérateurs est entre autre différent d'une géométrie à une autre. La géométrie spectrale étudie le spectre des opérateurs agissant sur des objets définis sur des géométries non plates comme la sphère ou le tore.

Plusieurs problèmes peuvent être étudiés en théorie spectrale. Ces problèmes varient selon que les opérateurs possèdent certaines propriétés comme entre autres être compact, linéaire, auto-adjoint, non borné, etc. pour certains types d'opérateurs, comme le laplacien  $\Delta$  qui sera d'intérêt dans ce qui suit, il est possible de décomposer leur spectre au sens exposé au chapitre 1. De par la forme du domaine, il peut être possible de connaître explicitement la forme des fonctions propres.

De façon générale, lorsque les mathématiciens ont une fonction sous leurs yeux, ils aiment connaître où elle s'annule. C'est la même chose avec les fonctions propres. L'ensemble des zéros d'une fonction propre donnée est un ensemble fermé de la variété sur laquelle lesdites fonctions propres sont définies. Cet ensemble porte un nom particulier : il s'appelle le

domaine nodal de la fonction propre donnée. Le complément de l'ensemble des zéros est ouvert et «découpe»la variété en composantes connexes .

Également, lorsque l'ensemble des fonctions propres forment une base séparable et complète pour l'espace  $L^2$  sur le domaine en question (tel qu'il est le cas du laplacien) il est intéressant de s'intéresser aux problème asymptotique. Un de ces problèmes est relié à la distribution empirique des valeurs propres. Par conséquent, étant donné une valeur fixe positive, combien de valeurs propres sont plus petites que cette valeur fixée à priori en tenant compte de la multiplicité ? .

Dans ce mémoire, l'analyse spectrale se fera sur le disque  $D$  de rayon 1 ou sur un secteur  $S(\alpha)$  d'angle  $\alpha \in (0, 2\pi)$  de rayon 1.  $\partial D$  ou  $\partial S(\alpha)$  est le bord la frontière de  $S(\alpha)$ . l'opérateur d'intérêt sera évidemment le laplacien dénoté  $\Delta$  ou  $\nabla^2$ . connaître le spectre du laplacien permet de connatre dans ce cas, et dans bien d'autres cas, le spectre de l'opérateur des ondes, de la chaleur et de Schrödinger. L'espace sur lequel  $\Delta$  est défini se dénote  $H_0^1$  et il s'appelle l'espace de Sobolev. Les fonctions propres forment une base pour  $H_0^1(D)$ . Les fonctions propres formant une base pour  $H_0^1(S(\alpha))$  sont les fonctions de Bessel de premier type  $1, 2, \dots$ . Deux problèmes concernant l'opérateur  $\Delta$  sur  $D$  seront étudiés plus particulièrement. Le 1<sup>er</sup> problème consistera à étudier la configuration des ensembles nodaux des  $m$  premières fonctions propres  $u_j$  pour  $j = 1, \dots, m$ . Ce problème sera équivalent à calculer les  $m$  premières valeurs propres  $\lambda_j$  pour  $j = 1, \dots, m$ . Bref, c'est en voulant obtenir un algorithmme efficace pour obtenir les  $m$  premières valeurs propres qu'il sera évident comment obtenir la configuration des ensembles nodaux. Un théorème dû à Courant donnant une borne sur le nombre de composantes connexes de la  $m^e$  valeur propre sera l'outil principal afin d'établir les configurations. Les ensembles nodaux seront des lignes angulaires partant du centre du cercle et des series de cercles concentriques. De même, un autre problème relié à l'identification de la première ligne nodale de la deuxième fonction propre sur un secteur  $S(\alpha)$  sera étudié. On mentionnera la valeur critique de l'angle  $\alpha$  dans le cas du secteur  $S(\alpha)$  où la ligne décrite par l'équation en coordonnée polaire  $r = \text{const.}$  et préférée à la ligne décrite par l'équation  $\theta = \text{const.}$  Nous verrons que si l'angle du secteur est critique, alors la 1<sup>re</sup> ligne nodale n'est pas définie. De même nous verrons que la multiplicité de la 2<sup>e</sup> valeur propre  $\lambda_2$  est double pour ce secteur d'angle critique. Un autre problème étudié est relié à la distribution asymptotique des valeurs propres de  $\Delta$ . En d'autres termes, soit  $S_{P_D}(-\Delta) = \{\lambda_j\}_{j>0}$  le spectre de l'opérateur

$\Delta$  sur le disque  $D$  de rayon 1 avec les valeurs propres ordonnées naturellement c'est-à-dire  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  soit  $N(\lambda)$ , la fonction de compte des valeurs propres  $\lambda_j$  plus petites que  $\lambda$  c'est-à-dire soit

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$$

Pour des valeurs de  $\lambda$  très grandes,  $N(\lambda) = \frac{\lambda}{4} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + R(\lambda)$  (Loi de Weyl) où  $R(\lambda)$  est le terme d'erreur. Il sera d'abord réexpliqué clairement comment il a été démontré dans [KF] que  $R(\lambda) = O(\lambda^{\frac{1}{3}})$ . Enfin, un deuxième algorithme permettant d'évaluer  $N(\lambda)$  exactement et efficacement est donné. Cet algorithme n'utilise que la monotonie des zéros des fonctions de Bessel. Comme il y sera expliqué, l'algorithme fait une « marche » qui consiste à faire des retours en arrière et des montées en alternance sur des paires d'entiers bien déterminées par le problème en soit. Les coordonnées de ces paires sont l'ordre et l'index des zéros des fonctions de Bessel de premier type pouvant être les candidats possibles pour les valeurs propres.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Voici le plan pour ce chapitre. Les références sont données au début de chaque section. Dans la 1<sup>re</sup> section certaines propriétés d'intérêt pour ce mémoire de l'opérateur laplacien dénoté  $\Delta$  sur un ouvert régulier borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  sont mentionnées sans preuve. Plusieurs définitions sont données avant d'y arriver permettant de bien définir le domaine de  $\Delta$  et d'arriver à quelques théorèmes intéressants. La loi de Weyl (fonction de compte des valeurs propres) sera également présentée avec quelques théorèmes pour l'approximer asymptotiquement sur des domaines  $\Omega$  arbitraires.

Dans la 2<sup>e</sup> section, il sera montré que résoudre grâce à la séparation de variables le problème à valeur propre  $\Delta u + \lambda u = 0$  sur un domaine circulaire c'est-à-dire lorsque  $\Omega$  est un secteur ou un disque «engendre» l'équation de Bessel. Il sera montré quelles valeurs  $\lambda$  peut prendre engendrant ainsi la suite spectrale ou le spectre. Il sera montré que les valeurs de  $\lambda$  sont des carrés des zéros de fonctions de Bessel.

Dans la 3<sup>e</sup> section, les zéros des fonctions de Bessel seront approfondis. Plus spécifiquement, le développement asymptotique dû à Olver des zéros sera présenté sans preuve. Ce développement est important pour quiconque veut calculer les valeurs propres de  $\Delta$  sans avoir à résoudre les équations différentielles directement. Au chapitre 2, il sera montré comment en effet il est possible d'obtenir le spectre, les  $m$  premières valeurs propres pour  $m$  très grand, du Laplacien cette section introduira succinctement les fonctions d'Airy comme des solutions d'une équation différentielle du même nom. Les zéros de ces dernières et leurs relations aux fonctions de Bessel seront abordés brièvement pour nous permettre de comprendre le développement asymptotique d'Olver.

Dans la 4<sup>e</sup> section. Les ensembles des zéros des fonctions propres appelés communément les ensembles nodaux des fonctions propres seront étudiés. Un théorème dû à Courant sur



le nombre de domaines nodaux sera énoncé sans preuve. cette section avec la précédente seront utiles le chapitre 2.

## 1.1 Rappels-définition du laplacien, décomposition du spectre et fonction de compte

Le lecteur retrouvera les définitions suivantes et certains théorèmes sur les fonctions et les valeurs propres du laplacien dans l'ouvrage de référence [R<sub>a</sub>R<sub>a</sub>]et [w<sub>i</sub>].

Soit  $\Omega$ , un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathbf{c}^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions définies sur  $\Omega$  différentiables indéfiniment.

**Définition 1.1.1.** (Le laplacien  $\Delta$  ). Soit  $u \in \mathbf{c}^\infty(\Omega)$ . Alors le laplacien est l'opérateur  $\Delta : \mathbf{c}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbf{c}^\infty(\Omega)$  tel que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

.

**Définition 1.1.2.** (Fonction propre et valeur propre). Une fonction propre relative à la valeur propre  $\lambda$  est une solution non nulle du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le théorème suivant (page 115 de [Wi]) montre que les fonctions propres du Laplacien constituent une base de  $L^2(\Omega)$ .

**Théorème 1.1.1.** (Décomposition du spectre). Il existe une suite non bornée de valeurs propres de

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$$

et une suite de fonctions propres relatives  $\{\varphi_j\}_j^\infty$  qui est une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$  Les valeurs propres peuvent être exprimées comme dans la proposition suivante due Rayleigh (page 115 de [Wi]).

**Proposition 1.1.1.** (*Quotient de Rayleigh*). Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\lambda_n = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \middle/ \int_{\Omega} u^2 dx = 1 \text{ et } \int_{\Omega} u \varphi_j dx = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, n-1 \right\}$$

Pour les résultats qui suivent concernant la fonction de compte des valeurs propres  $N_{\Omega}(\lambda)$ , ils se retrouvent dans [Be].

Soit maintenant  $N_{\Omega}(\lambda)$  la fonction de compte des valeurs propres c'est-à-dire

$$N_{\Omega}(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1.$$

La fonction de compte est une fonction à valeurs entières définie sur les réels c'est-à-dire

$$N_{\Omega}(\lambda) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$$

qui est également continue à droite c'est-à-dire pour  $h > 0$

$$N_{\Omega}(\lambda) = \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda + h)$$

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre, alors sa multiplicité est donnée par

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (N_{\Omega}(\lambda + h) - N_{\Omega}(\lambda - h))$$

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  n'est pas une valeur propre, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (N_{\Omega}(\lambda + h) - N_{\Omega}(\lambda - h)) = 0$$

Par conséquent, si  $\lambda$  est une valeur propre, alors il existe  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda = \lambda_j$  et tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda - h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda_j - h) < j \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda + h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} N_{\Omega}(\lambda_j + h).$$

La connaissance de  $N_{\Omega}(\lambda)$  permet donc de retrouver les valeurs propres  $\lambda_j$  et vice-versa. Plusieurs résultats pour approximer  $N(\lambda)$  ont été obtenus. Voici certains d'entre eux. Le premier (voir p. 89de [Be]) est dû Weyl en 1911 qui a montré que

**Théorème 1.1.2.** (*Weyl*)

$$N_{\Omega}(\lambda) \sim \frac{V_n}{(2\pi)^n} \mu(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow \infty$$

où  $V_n$  est le volume de la sphère de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu(\Omega)$  la mesure de Lebesgue du domaine borné régulier  $\Omega$ .

En 1952, 1953 et 1955 Levitan écrivait une série d'articles où il démontrait le théorème suivant donnant une estimation du terme d'erreur. Les articles de Levitan sont respectivement [Le1], [Le2] et [Le3]. En 1956, Avakumovic montrait également le théorème suivant dans son article [Av]. Hörmander en donna également une autre preuve en 1968 dans son article [Ho].

**Théorème 1.1.3.** (*Levitan*).

$$N_{\Omega}(\lambda) = \frac{V_n}{(2\pi)^n} \mu(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$$

Lorsque Weyl a fait la conjecture suivante qui est vraie pour tout domaine  $\Omega$  convexe et qui a été prouvée par Ivrič dans [IV] et, indépendamment par Melrose, dans [Melr] pour d'autres variétés riemanniennes satisfaisant des hypothèses plus générales.

**Théorème 1.1.4.**

$$N_{\Omega}(\lambda) = \frac{V_n}{(2\pi)^n} \mu(\Omega) \lambda^{\frac{n}{2}} - \frac{V_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} \mu(\partial\Omega) \lambda^{\frac{n-1}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}})$$

**Remarque 1.1.1.** ( $\Delta u + \lambda u = 0$  ou  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ ). Si au lieu d'étudier l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$ , l'équation  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$  est étudiée, alors il faut substituer  $\lambda$  par  $\lambda^2$  dans les résultats qui précèdent.

Comme le disque sera objet géométrique d'intérêt dans ce mémoire, si  $\Omega = D$  où  $D$  le disque de rayon  $r$  alors, dans [KF], il est montré le théorème suivant spécialisé au cas du disque. Notons que [KF] étudie le problème  $\Delta u + \lambda u = 0$  plutôt que le problème  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ . Le théorème est cité presque tel qu'il est dans l'article afin de faciliter son explication au chapitre 3.2 qui lui est consacré entièrement. Nous comprenons bien ici que  $k=\lambda$  dans le théorème suivant.

**Théorème 1.1.5.** (Kuznetsov et Fedosov, cas du disque  $D$  de rayon  $r$ ). Soit le problème à valeur propre  $-\Delta u = k^2 u$  avec  $u|_{\partial D} = 0$ . Soit la fonction de compte  $N_D(k)$  des valeurs  $\{K_n\}_{n=1}^\infty$  ordonnées en ordre croissant c'est-à-dire soit

$$N_D(k) = \sum_{k_n < k} 1$$

alors

$$N_D(k) = \frac{s}{4\pi} k^2 - \frac{l}{4\pi} k + o(k^{\frac{2}{3}})$$

où  $s = \pi r^2$  et où  $l = 2\pi r$

## 1.2 Séparation de variables, équation différentielle de Bessel, fonctions et valeurs propres du laplacien sur un domaine circulaire

Soit  $S(\alpha)$ , le secteur du disque de rayon 1 d'angle  $\alpha \in (0, 2\pi)$  ou soit  $D$  le disque de rayon 1. Cette section montre comment la séparation de variables lors de la résolution de l'équation  $\Delta u + \lambda u = 0$  sur  $S(\alpha)$  ou sur  $D$  « engendre » l'équation différentielle de Bessel. Les fonctions de Bessel qui sont les solutions de l'équation en question représentent la partie radiale des fonctions propres du Laplacien sur un domaine circulaire. Il sera montré que dans le cas du disque  $D$  les fonctions de Bessel impliquées dans la résolution du problème à valeurs propres  $\Delta u + \lambda u = 0$  ont des ordres entiers. De même pour le secteur  $S(\alpha)$  il sera montré que les ordres des fonctions de Bessel impliqués ont des ordres réels de la forme  $\frac{n\pi}{\alpha}$  pour  $n=1, 2, \dots$

Pour un exposé plus détaillé de ce qui va suivre dans cette partie, le lecteur peut se référer entre autres à [HiCo]. En ce qui concerne les fonctions de Bessel plus spécifiquement, le lecteur peut lire [Wa].

Le cas du secteur  $S(\alpha)$  de rayon 1 et d'angle  $\alpha \in (0, 2\pi)$  est étudié plus en profondeur dans les lignes qui suivent. Le cas du disque est presque similaire à celui du secteur. Soit donc un secteur  $S(\alpha)$  du disque de rayon 1 et d'angle  $\alpha$ . Soit l'équation  $(\Delta + \lambda)u = 0$  avec la condition de Dirichlet aux frontières c'est-à-dire  $u(\partial S(\alpha)) = 0$ . En coordonnées polaires,

l'équation est

$$(\Delta + \lambda)u(r, \theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u = 0$$

En utilisant la séparation de variables avec  $u(r, \theta) = R(r)M(\theta)$  et en substituant,

$$\frac{r^2 \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda R \right)}{R} = \frac{d^2 M}{d\theta^2} = \text{constante} = c$$

Il faut donc résoudre

$$M''(\theta) + cM(\theta) = 0$$

où la solution de l'équation précédente est

$$M(\theta) = A_c \cos(\sqrt{c}\theta) + B_c \sin(\sqrt{c}\theta)$$

Comme il faut que la fonction M soit périodique c'est-à-dire  $M(0) = M(\alpha)$ , alors

$$\sqrt{c} = \frac{\pi n}{\alpha} :=: \sqrt{c_n}$$

Puisque c ne dépend que de n, il est commode de dénoter par  $M_{c_n}$  la solution de l'équation correspondante. Généralement,

$$M_{c_n}(\theta) = A_{c_n} \cos(\sqrt{c_n}\theta) + B_{c_n} \sin(\sqrt{c_n}\theta)$$

mais

$$M(0) = M(\alpha)$$

$$A_{c_n} 1 + B_{c_n} 0 = A_{c_n} \cos(n\pi) + B_{c_n} 0$$

⇓

$$A_{c_n} = 0$$

et, par conséquent,

$$M_{c_n}(\theta) = B_{c_n} \sin(\sqrt{c_n}\theta)$$

Maintenant, en fixant la valeur n et en dénotant par  $R(r) = R_n(r)$  la solution de l'équation

$$\frac{r^2 \left( \frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \lambda_n R_n \right)}{R_n} = c_n$$

Il est démontré que l'équation précédente possède des solutions que pour un nombre dénombrable de valeurs de  $\lambda_n$  (voir [HiCo]). En dénotant ces valeurs par  $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$  et leurs solutions correspondantes par  $R_{n,k}(r)$ , alors

$$\frac{r^2 \left( \frac{d^2 R_{n,k}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{n,k}}{dr} + \lambda_{n,k} R_{n,k} \right)}{R_{n,k}} = c_n$$

**Remarque 1.2.1.** (*Fonction de Bessel et zéros des fonctions de Bessel*). La solution  $R_{n,k}$  porte le nom de fonction de Bessel de premier type d'ordre  $\frac{n\pi}{\alpha}$ . L'ordre sera évident par ce qui suit. Les valeurs  $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$  seront les valeurs propres de l'équation originale  $\Delta u + \lambda u = 0$  avec les conditions de Dirichlet aux frontières. Les valeurs  $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$  correspondent aux carrés des zéros des fonctions de Bessel qui sont en quantité dénombrable. Les fonctions de Bessel sont analytiques, ce qui a du sens puisque toutes les fonctions propres du Laplacien doivent être au moins lisses.

Pour plus d'information sur les fonctions de Bessel, nous pouvons lire [Wa]. De façon générale, la fonction de Bessel de premier type est analytique. C'est la solution en série de l'équation différentielle portant son nom et elle possède le développement que voici

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \left( \frac{1}{2} z \right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left( \frac{z}{2} \right)^s}{s!(n+s)!} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin(\theta)) d\theta \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z} \text{ et } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  est remplacé  $\nu \in \mathbb{C}$ , alors  $J_{\nu}(z)$  est définie par la série suivante

$$J_{\nu}(z) = \left( \frac{1}{2} z \right)^{\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left( \frac{z}{2} \right)^s}{s!(\nu + s + 1)!} \quad \text{pour } \nu \in \mathbb{C} \text{ et } z \in \mathbb{C}$$

Soit donc  $J_{\nu}(z)$  la fonction de Bessel de premier type d'ordre réel (l'ordre comme l'argument peuvent être complexes de façon générale) et d'argument réel  $z$ . Soit également le

$k^e$  zéros de  $J_\nu(z)$  noté par  $j_k(\nu)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} R_{n,k}(r) &= J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \\ &= J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(j_k\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)r\right) \\ &\Downarrow \\ u_{n,k}(r, \theta) &= J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Pour vérifier que  $u_{n,k}(r, \theta)$  est bien la bonne solution, il est commode pour l'instant seulement de réécrire

$$\begin{aligned} \lambda_{n,k} &::= \lambda \\ \frac{n\pi}{\alpha} &::= \nu \end{aligned}$$

Voici deux faits concernant les fonctions de Bessel de premier type :

$$J'_\nu(z) = \frac{\nu}{z}J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z) \quad (1.2.1)$$

$$J_{\nu+2}(z) = \left( \frac{2(\nu+1)}{z}J_{\nu+1}(z) - J_\nu(z) \right) \quad (1.2.2)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (J_\nu(\sqrt{\lambda}r))' &= J'_\nu(\sqrt{\lambda}r)(\sqrt{\lambda}r)' \\ &= \sqrt{\lambda}J'_\nu(\sqrt{\lambda}r) \\ &= \sqrt{\lambda} \left( \frac{\nu}{\sqrt{\lambda}r}J_\nu(\sqrt{\lambda}r) - J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \right) \\ &= \frac{\nu}{r}J_\nu(\sqrt{\lambda}r) - \sqrt{\lambda}J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
 (J_\nu(\sqrt{\lambda}r))'' &= (J'_\nu(\sqrt{\lambda}r))' \\
 &= \left( \frac{\nu}{r} J_\nu(\sqrt{\lambda}r) - \sqrt{\lambda} J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \right)' \\
 &= \nu \left( \frac{r J'_\nu(\sqrt{\lambda}r) - J_\nu(\sqrt{\lambda}r)}{r^2} \right) - \sqrt{\lambda} (J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r))' \\
 &= \left( \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \dots \\
 &\quad - \sqrt{\lambda} \left( \frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) + \lambda J_{\nu+2}(\sqrt{\lambda}r)
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \lambda) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) &= \sin(\nu\theta) \left( \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \\
 &\quad - \sqrt{\lambda} \sin(\nu\theta) \left( \frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} + \frac{1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \\
 &\quad + \sin(\nu\theta) \lambda J_{\nu+2}(\sqrt{\lambda}r) \\
 &\quad - \frac{\nu^2}{r^2} \sin(\nu\theta) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \\
 &\quad + \lambda \sin(\nu\theta) J_\nu(\sqrt{\lambda}r)
 \end{aligned}$$



qui implique que

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) &= \left( \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + \lambda \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
 &\quad - \sqrt{\lambda} \left( \frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} + \frac{1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
 &\quad + \lambda J_{\nu+2}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
 &\quad \left( \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + \lambda \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
 &\quad - \sqrt{\lambda} \left( \frac{\nu}{r} + \frac{\nu+1}{r} + \frac{1}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
 &\quad + \lambda \left( \frac{2(\nu+1)}{\sqrt{\lambda}r} J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) - J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \right) \sin(\nu\theta)
 \end{aligned}$$

qui implique que

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) &= \left( \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu}{r^2} - \frac{\nu^2}{r^2} + \lambda - \lambda \right) J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) \\
 &\quad + \left( \frac{2\nu\sqrt{\lambda}}{r} + \frac{2\sqrt{\lambda}}{r} - \frac{\sqrt{\lambda}\nu}{r} \dots \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{\lambda}}{r}\nu - \frac{2\sqrt{\lambda}}{r} \right) J_{\nu+1}(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta)
 \end{aligned}$$

et ainsi

$$(\Delta + \lambda)J_\nu(\sqrt{\lambda}r) \sin(\nu\theta) = 0$$

**Remarque 1.2.2.** (*Multiplicité des valeurs propres pour un secteur*). Dans ce cas, toutes les valeurs propres  $\lambda_{n,k}$  pour  $n \geq 1$  et  $k \geq 1$  du Laplacien sur un secteur du disque sont simples en général sauf pour des angles critiques (voir entre autres la remarque 2.2.2. Les fonctions de Bessel d'ordre 0 ne sont jamais des fonctions propres du Laplacien sur un secteur.

**Remarque 1.2.3.** (*Multiplicité des valeurs propres pour le disque*). Soit  $D$ , le disque de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^2$ . Les fonctions propres sont encore des fonctions de Bessel. Cependant les fonctions de Bessel d'ordre 0 sont admises. De façon générale

$$\begin{aligned} u_{0,k}(r, \theta) &= J_0(\sqrt{\lambda_{0,k}}r) & k \geq 1 \\ u_{n,k}(r, \theta) &= J_n(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \sin(n, \theta) & \text{ou} \\ u_{n,k}(r, \theta) &= J_n(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \cos(n, \theta) & \text{pour } n \geq 1 \text{ et } k \geq 1 \end{aligned}$$

La multiplicité du cas correspondant à l'ordre  $n = 0$  est ainsi simple et celles correspondant aux ordres  $n \geq 1$  sont doubles.

### 1.3 Développement asymptotique d'Olver des zéros des fonction de Bessel

Les zéros de fonctions de Bessel sont les valeurs propres du Laplacien  $\Delta$  sur un domaine circulaire, le disque ou un secteur du disque, comme il a été discuté précédemment. Plusieurs développements asymptotiques des zéros des fonctions de Bessel et des zéros des dérivées des fonctions de Bessel existent. Par exemples, les développements d'Olver, de McMahon ou de Meissel (pour  $J_n(n)$ ) pour ne citer que ces développements les plus connus. Ces développements sont utiles selon que l'ordre ou l'argument sont dans une certaine région du plan complexe. Ils existent par exemple des développement de Taylor pour les zéros de fonctions de Bessel d'ordre  $\frac{2k+1}{2}$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots$  ou simplement pour les ordres entiers. Le lecteur peut lire [Ro] en ce qui concerne les développements de Taylor reliés aux zéros des fonctions de Bessel où une liste de problèmes ouverts est également présentée. Le développement qui est sans doute le plus utile est celui fourni par F.W.J. Olver durant les années 50. Le développement asymptotique d'Olver a permis en autre une implémentation numérique stable dans plusieurs logiciels. Tout lecteur intéressé peut lire les nombreux articles d'Olver cités dans les références comme [Ol1], [Ol2], [Ol5], [Ol8] et [FaLoOl]. Avant de donner le développement asymptotique d'Olver, une brève introduction aux fonctions d'Airy s'impose. Le lecteur peut se référer à [Ol8], ce dernier ouvrage traite des fonctions « spéciales » comme les fonctions d'Airy et de Bessel. Une fonction d'Airy

est une fonction qui est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2w}{dt^2} - tw = 0$$

L'équation précédente a deux solutions dénotées par Ai et Bi qui sont nommées respectivement fonction d'Airy de premier type et fonction d'Airy de deuxième type.

Les fonctions d'Airy Ai et Bi sont reliées aux fonctions de Bessel de premier type  $J_\nu$  avec l'ordre  $\nu = \frac{1}{3}$  comme suit

$$A_i(t) = \frac{1}{3}\sqrt{x} \left( J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right) - J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right) \right) \quad t > 0$$

$$B_i(t) = \sqrt{\frac{x}{3}} \left( J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right) + J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} \right) \right) \quad t > 0$$

Les relations précédentes sont connues sous le nom de « connection formulas ». Les zéros de Ai seront dénotés par  $a_k$  avec  $k = 1, 2, \dots$  et  $0 > a_1 > a_2 > \dots$ . Seule la fonction Ai sera utile pour développer les zéros de la fonction de Bessel  $J_\nu$  d'ordre  $\nu > 0$ . Il est à noter que les zéros de Ai et de Bi sont tous négatifs.  $a_k$  possède également un développement asymptotique d'Olver (*voir*[Ol8]). Il est possible de démontrer en utilisant le développement asymptotique que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-a_k}{\left(\frac{3}{8}\pi(4k-1)\right)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

Pour la suite, nous nous concentrerons sur les zéros de la fonction de Bessel de premier type  $J_\nu$  pour  $\nu > 0$ . En dénotant par  $J_\nu(k)$  le  $k^e$  le zéro de  $J_\nu(z)$  pour  $z > 0$  et en dénotant par  $\gamma_k = -a_k 2^{-\frac{3}{2}}$  alors

$$j_k(\nu) = \nu + \gamma_k \nu^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{10} \gamma_k^2 \nu^{\frac{-1}{3}} + \frac{5 - \gamma_k^3}{350} \nu^{-1} - \frac{479\gamma_k^4 + 20\gamma_k}{63000} \nu^{-\frac{5}{3}} + \frac{20231\gamma_k^5 - 27550\gamma_k^2}{8085000} \nu^{-\frac{7}{3}} + O(\nu^{-3}).$$

La preuve de ce résultat est longue et complexe. Les idées de base se retrouvent principalement dans les deux longs articles [Ol1] et [Ol2]. Il est possible de constater grâce entres autres au développement ci-dessus de  $j_\nu(k)$  que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{j_\nu(k)}{\nu} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.3.1)$$

Il est même prouvé pour  $\nu > 0$  dans [QuWo] que

$$\nu - \frac{a_k}{2^{\frac{1}{3}}}\nu^{\frac{1}{3}} < j_k(\nu) < \nu - \frac{a_k}{2^{\frac{1}{3}}}\nu^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{20}a_k^2\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\nu^{\frac{1}{3}}} \quad (1.3.2)$$

Grâce à (1.3.1) et à (1.3.2), il est possible d'évaluer l'ordre de grandeur des zéros. Ceci sera utile ultérieurement (voir les remarques A.5.1 et 3.3.4) afin de connaître le degré de précision requis pour évaluer numériquement les zéros des fonctions de Bessel.

## Chapitre 2

# Les ensembles nodaux des fonctions propres

Soit  $D$  ou  $S(\alpha)$ , le disque de rayon 1 ou un secteur de rayon 1 et d'angle  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Soit  $\Delta$  l'opérateur différentiel de Laplace. Soit  $\lambda$ , une valeur propre  $\Delta$  telle que  $(\Delta + \lambda)u = 0$  avec  $u \in \mathbb{C}^\infty$  étant la fonction propre associée à  $\lambda$ .

Dans un premier temps, une conjecture concernant la 1<sup>re</sup> ligne nodale du problème de Dirichlet sur un domaine bidimensionnel est étudiée. La conjecture en question a été soulevée par Payne et affirme que pour tout domaine bidimensionnel, la 1<sup>re</sup> ligne nodale touche toujours la frontière. Deux cas extrêmes s'offrent à la conjecture, le rectangle et le secteur circulaire. Le cas du rectangle étant très simple puisqu'il est facile d'identifier où se trouve exactement la première ligne nodale comme il sera montré plus loin. Le cas du secteur étant un peu plus intéressant, cela motivant en soi la prochaine partie. À la fin de la 1<sup>re</sup> section, le lecteur trouvera une proposition donnant l'angle critique  $\alpha_0$  pour lequel tout secteur d'angle  $\alpha < \alpha_0$  a une ligne nodale en coordonnées polaires de la forme  $r = \text{const}$  et pour lequel tout secteur d'angle  $\alpha > \alpha_0$  a une ligne nodale en coordonnées polaires de la forme  $\theta = \text{const}$ . De même, lorsque  $\alpha = \alpha_0$ , nous verrons que la ligne nodale est indéterminée. Dans un deuxième temps, soit un entier  $m > 1$  généralement très grand comme  $m = 1.10^6$  par exemple. Comment construire la suite des valeurs propres  $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$  en ordre croissant de l'opérateur  $\Delta$  sur  $D$  ou  $S(\alpha)$ ? En d'autres termes, il faut établir un algorithme efficace pour déterminer le spectre jusqu'au rang  $m$ . Par efficace, cela veut dire ne pas résoudre l'équation différentielle avec des méthodes comme les éléments finis qui ne permettraient pas de construire la suite spectrale pour des valeurs très grandes comme

$m = 1.10^6$  et ni même d'identifier les ensembles nodaux de façon exacte. Par efficace, il faut se servir de toute la théorie décrite jusqu'à maintenant et du fait que dans certains logiciels, en l'occurrence Maple, il existe des routines très stables permettant de trouver les zéros des fonctions de Bessel.

La construction de la suite spectrale jusqu'à  $m$  est équivalente à dénombrer le nombre de composantes connexes disjointes obtenues pour chaque  $u_j$  en enlevant du domaine original les ensembles nodaux des fonctions propres  $u_j$  pour  $j = 1, 2, \dots, m$ . Les valeurs propres sont données en fonction de deux paramètres  $n$  et  $k$  entiers non-négatifs et connaître le spectre jusqu'à l'entier  $m$ , consistera à établir une bijection entre  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{N}$ .

## 2.1 Les ensembles nodaux des fonctions propres et leurs structures, cas du disque et du secteur en exemples

Le théorème principal de cette section concerne le nombre de domaines nodaux qu'une fonction propre peut avoir. Il est énoncé entre autres dans [Sh]. Avant d'arriver au théorème, un rappel de ce qu'est l'ensemble nodal d'une fonction propre s'impose. De même, les exemples pour le secteur du disque  $S(\alpha)$  de rayon 1 et d'angle  $\alpha \in (0, 2\pi)$  et le disque  $D$  de rayon 1 sont donnés.

L'ensemble nodal d'une fonction propre est son ensemble de zéro. Si la dimension du domaine est  $d$ , alors la dimension des ensembles nodaux est  $d - 1$ . En d'autres termes, pour la  $j^e$  fonction propre  $\varphi_j$  défini sur un domaine ouvert assez régulier  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , si  $Z_j$  est l'ensemble des zéros, alors

$$Z_j = \{\varphi_j(x) = 0, \quad x \in \Omega\}$$

$Z_j$  est un ensemble fermé. Dans le cas d'un secteur  $S(\alpha)$  de rayon 1 et d'angle  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , une fonction propre typique est donnée par

$$u_{n,k}(r, \theta) = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right)$$

par conséquent

$$u_{n,k}(r, \theta) = 0 \iff J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right) &= 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{n\pi\theta}{\alpha} &= d\pi \quad \text{pour } d = 0, 1, \dots, n \\ &\Downarrow \\ \theta &= \frac{d\alpha}{n} \end{aligned}$$

lequel cas donne une suite de lignes angulaires décrites par les multiples entiers pour  $d = 0, 1, \dots, n$  de l'angle  $\frac{\alpha}{n}$  le cas où

$$\begin{aligned} J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\sqrt{\lambda_{n,k}}r) &= 0 \\ &\Downarrow \\ r &= \frac{\sqrt{\lambda_{n,j}}}{\sqrt{\lambda_{n,k}}} \quad \text{pour } j = 1, \dots, k \end{aligned}$$

donne une suite de cercles concentriques avec le cas correspondant à la frontière lorsque  $j = k$ , c'est-à-dire lorsque  $r = 1$ .

L'ensemble des zéros d'une fonction propre découpe le domaine de définition des fonctions propres en composantes connexes où la fonction propre alterne de signe. Dans le cas du disque ou d'un secteur circulaire, les composantes connexes ont la forme de secteurs circulaires comme il est possible de le voir sur les figures de la section 2.2.1. Une image vaut mille mots.

**Remarque 2.1.1.** (*Nombre de composantes connexes*).

(*cas d'un secteur*)

Pour une fonction propre donnée  $u_{n,k}(r, \theta)$ , le nombre de composantes connexes sur lesquelles la fonction propre alterne de signe est donnée par  $nk$ .

(*cas du disque*)

Pour les fonctions propres sur le disque de multiplicité 1 c'est-à-dire pour celles de la forme  $u_{0,k}(r, \theta)$ , le nombre de composantes connexes est  $k$ . Pour les fonctions propres

de multiplicité 2c'est-à-dire celles de la forme  $u_{n,k}(r, \theta)$  avec  $n = 1, 2, \dots$ , le nombre de composantes connexes est  $2nk$ .

Avant de conclure cette section, voici un théorème célèbre dû à Courant qui sera très utile pour la prochaine section qui peut être retrouvé entre autres dans [Sh].

**Théorème 2.1.1.** (théorème de Courant sur les ensembles nodaux).

Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , un domaine tel que  $\partial\Omega$  est suffisamment régulier par morceaux. Soit  $\lambda_m$ , la  $m^e$  valeur propre. Alors pour une fonction propre  $u_m$  correspondant à  $\lambda_m$ , le nombre de domaines nodaux est au plus  $m$ .

## 2.2 La première ligne nodale de la deuxième fonction propre

Dans cette partie, la première ligne nodale de la deuxième fonction propre de  $\Delta$  sur un domaine convexe du plan est étudiée. Cette ligne est l'ensemble des zéros de la deuxième fonction propre  $u_2$  du Laplacien d'un domaine convexe du plan, avec des conditions de Dirichlet sur la frontière.

Pour la première fonction propre,  $u_1$ , elle ne possède qu'une seule ligne nodale qui s'annule sur la frontière du domaine en question et qui, par conséquent, est triviale. Quant à  $u_2$ , par le théorème de Courant sur les ensembles nodaux, elle possède au plus 2 lignes; la première étant toujours triviale et s'annulant sur la frontière et quant à la deuxième ligne, non t'intérieur du domaine.

Mathématiquement parlant, soit  $\Omega$  un domaine convexe du plan.

Soit  $u_2$ , la deuxième fonction propre de  $\Delta$ , c'est-à-dire  $\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = 0$  et  $u_2(\partial\Omega) = 0$ .

Soit  $\Gamma = \{z \in \Omega, u_2(z) = 0\}$ , alors deux possibilités s'imposent :  $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega = \emptyset$  ou  $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ .

Dans le cas où  $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$ , alors  $\bar{\Gamma} \subseteq \Omega$ .

L.E. Payne a conjecturé que  $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  pour tout domaine du plan. S.-T. Yau a conjecturé que  $\bar{\Gamma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  pour tout domaine convexe du plan.

Pour un domaine borné convexe  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , Melas en 1992 dans [Mela] a montré le théorème suivant.



**Théorème 2.2.1.** (Melas). Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine borné convexe avec des frontières  $\mathbb{C}^\infty$ , alors la ligne nodale de la deuxième fonction propre  $u_2$  doit intersecter la frontière  $\partial\Omega$  exactement en deux points.

Pour un secteur  $S(\alpha)$  de rayon 1 qui est un domaine borné convexe du plan, la ligne nodale de la deuxième fonction propre peut donc toucher  $S(\alpha)$  de deux façons.

La ligne nodale intersecte la partie de  $\partial S(\alpha)$  décrite par  $r = 1$  ou les deux parties décrites par  $\theta = 0$  et  $\theta = \alpha$ .

**Question.** Quelle doit être la valeur de  $\alpha$  faisant en sorte que nous avons une situation plutôt qu'une autre ?

**Remarque 2.2.1.** (Deux possibilités pour  $u_2$ ).  $u_2$  a donc deux sous domaines simplement connexes disjoints séparés par une ligne nodale, radiale ou angulaire. Les seuls zéros admis des fonctions de Bessel sont  $j_1\left(\frac{\pi}{\alpha}\right), j_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right), j_2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$ .

Puisque  $\lambda_1 = j_1\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$  nécessairement, alors les deux seules autres possibilités sont  $j_1\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)$  et  $j_2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$  chacun donnant respectivement une ligne nodale angulaire et une ligne nodale radiale et, dans chaque cas, deux sous domaines simplement connexes où  $u_2$  alterne de signe.

La fonction  $j_k(\nu)$  avec  $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$  étant lisse et croissante avec l'ordre  $\nu$ , alors la ligne nodale radiale se produit si et seulement si

$$j_2^2(\nu) < j_1^2(2\nu) \iff j_2(\nu) < j_1(2\nu)$$

et l'équation de la ligne radiale est donnée par

$$r = \frac{j_1^2(\nu)}{j_2^2(\nu)} = \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_2(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\pi}{\alpha}$$

Quant à la ligne nodale angulaire, elle se produit si et seulement si

$$j_2^2(\nu) > j_1^2(2\nu) \iff j_2(\nu) > j_1(2\nu)$$

et l'équation de la ligne angulaire est donnée par

$$\theta = \frac{\alpha}{2}$$

lorsque  $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$  satisfait l'équation  $j_1(2\nu) = j_2(\nu)$ , alors l'angle  $\alpha$  est critique et la deuxième valeur propre a une multiplicité double. Si nous résolvons l'équation  $j_2(\nu) - j_1(2\nu) = 0$  alors la solution est

$$\nu \approx 2.823823 \iff \alpha \approx 1.112531 \approx 63.743334 \text{ degrés}$$

et la 1<sup>re</sup> ligne nodale n'est donc pas définie. En effet, soit

$$u_{1,2} = J_{\frac{\pi}{\alpha_0}} \left( j_2 \left( \frac{\pi}{\alpha_0} \right) r \right) \sin \left( \frac{\pi\theta}{\alpha_0} \right) \quad (2.2.1)$$

$$u_{2,1} = J_{\frac{2\pi}{\alpha_0}} \left( j_1 \left( \frac{2\pi}{\alpha_0} \right) r \right) \sin \left( \frac{2\pi\theta}{\alpha_0} \right) \quad (2.2.2)$$

les deux fonctions propres associées respectivement aux zéros  $j_2 \left( \frac{\pi}{\alpha_0} \right)$  et  $j_1 \left( \frac{2\pi}{\alpha_0} \right)$  comme

$$\lambda_2 = j_2^2 \left( \frac{\pi}{\alpha_0} \right) = j_1^2 \left( \frac{2\pi}{\alpha_0} \right)$$

alors n'importe quelles combinaisons linéaires des fonctions propres (2.2.1) et (2.2.2) est une solution de l'équation  $\Delta(u) + \lambda u = 0$  sur  $S(\alpha_0)$

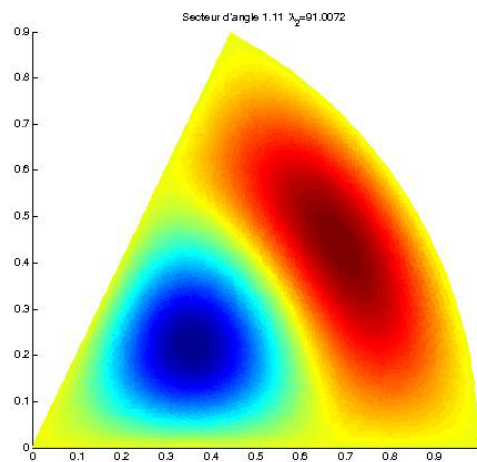
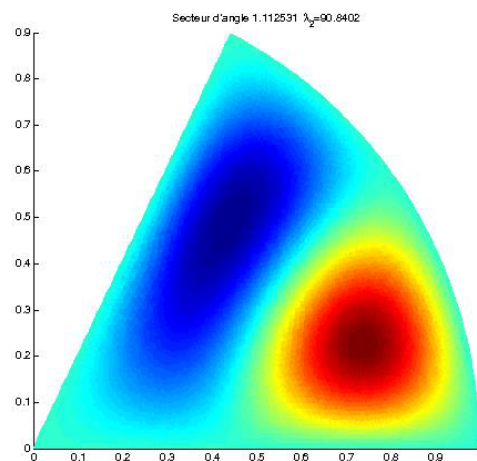
**Remarque 2.2.2.** (*1<sup>re</sup> ligne nodale et secteur critique*).

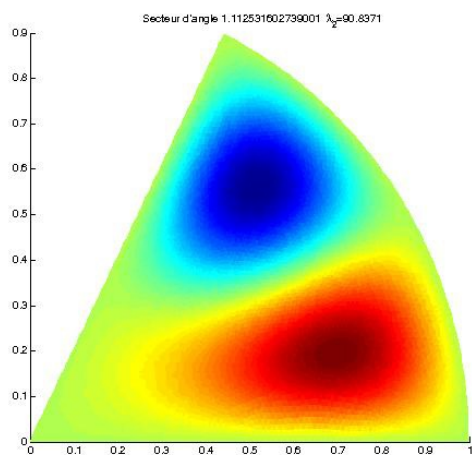
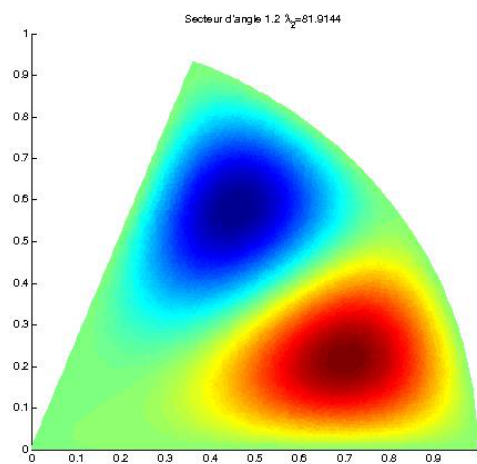
*Étant donné un angle  $\alpha$  et le secteur du disque correspondant d'angle  $\alpha$ , les valeurs propres sont généralement de multiplicité 1. Soit l'angle critique  $\alpha_0$  et l'ordre associé  $\nu_0 = \frac{\pi}{\alpha_0}$  tel que  $j_2(\nu_0) - j_1(2\nu_0) = 0$ .*

*Lorsque l'angle  $\alpha = \alpha_0$ , la deuxième valeur propre a une multiplicité de 2. La première ligne nodale n'est donc pas définie pour cette valeur critique*

$\alpha$  puisque n'importe quelles combinaisons linéaires des fonctions propres (2.2.1) et (2.2.2) est une solution du problème  $\Delta(u) + \lambda u = 0$  sur  $S(\alpha_0)$ .

Il est intéressant de visualiser les ensembles nodaux de la 2<sup>e</sup> valeur propre pour quelques valeurs  $\alpha$  ou, en d'autres termes, la 1<sup>re</sup> ligne nodale. Nous voyons en effet que lorsque  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ , la ligne nodale est indéterminée, en effet, Matlab prend au « hasard » une combinaison linéaire des deux fonctions propres. Les angles mentionnés en-dessous de chaque graphique sont exactes et ne sont pas approximatives. Le but étant de donner à Matlab des angles se rapprochant de plus en plus près de  $\alpha_0$ .

FIGURE 2.1 – 1<sup>er</sup> ligne nodale  $\alpha = 1.11$ ,  $\lambda_2 \approx 91.0072$ FIGURE 2.2 – 1<sup>re</sup> ligne nodale,  $\alpha = 1.112531$ ,  $\lambda_2 \approx 90.8402$

FIGURE 2.3 – 1<sup>re</sup> ligne nodale,  $\alpha = 1.112531602739001$ ,  $\lambda_2 \approx 90.8371$ FIGURE 2.4 – 1<sup>re</sup> ligne nodale,  $\alpha = 1.2$ ,  $\lambda_2 \approx 81.9144$

Voici donc à la lumière de ce qui précède la petite proposition suivante concernant l'« emplacement » de la première ligne nodale de la deuxième fonction propre.

**Proposition 2.2.1.** (*« Emplacement » de la première ligne nodale*).

Soit  $S(\alpha)$  un secteur du disque de rayon 1 et d'angle  $\alpha$ . Soit  $\alpha_0$  la solution de l'équation

$$j_2\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right) = j_1\left(\frac{2\pi}{\alpha_0}\right)$$

où  $j_k(\nu)$  est le  $k^{\text{e}}$  zéro de la fonction de Bessel de premier type d'ordre  $\nu > 0$ . Alors si l'angle  $\alpha$  du secteur  $S(\alpha)$  est supérieur à  $\alpha_0$ , alors la première ligne nodale de la deuxième fonction propre est de la forme  $\theta = \frac{\alpha}{2}$  sinon elle de la forme  $r = \frac{j_1^2 \nu}{j_2^2 \nu}$  avec  $\nu = \frac{\pi}{\alpha}$

□

## 2.3 Algorithme pour ordonner les valeurs propres et déterminer la structure des ensembles nodaux

**Question.** Supposons donné un entier  $m > 1$ . Est-il possible de déterminer efficacement le spectre du Laplacien sur le disque  $D$  ou un secteur  $S(\alpha)$  de rayon 1 jusqu'à l'entier  $m$ ? En d'autres termes, comment obtenir toutes les valeurs propres  $\lambda_j$  pour  $j = 1, \dots, m$  telles que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$$

**Réponse.** Répondre à la question précédente, c'est connaître la bijection entre  $j_k^2(\nu)$  et  $\lambda_m$  où  $\nu = n$  pour le disque  $D$  et où  $\nu = \frac{n\pi}{\alpha}$  pour le secteur  $S(\alpha)$ . Nous avons donc un problème de classification des valeurs  $j_\nu^2(k)$ . Étant donné  $m$ , quelles valeurs de  $n$  et  $k$  sont admissibles en fonctions de  $m$ ? Dans

ce qui suit, nous écrivons  $\nu = \nu(n)$ .

**Idée de l'algorithme.** Par le théorème de Courant, il faut trouver toutes les paires  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  telles que  $nk \leq m$ , ce sont les paires admissibles. De même, la connaissance de toutes ces paires  $(n, k)$  implique la connaissance des paires  $(n', k')$  telles que  $n'k' \leq m'$  pour  $m' \leq m$ . Par conséquent, évaluer  $j_{\nu(n)}^2(k)$  pour toutes les paires  $(n, k)$  telles que  $nk \leq m$  assure d'obtenir

$$\{\lambda_j\}_{j=1}^m \subsetneq \{j_{\nu(n)}^2(k)\}_{nk \leq m}$$

Il ne reste donc qu'à ordonner et à prendre en compte la multiplicité dans le cas du disque. Dans le cas de  $S(\alpha)$ , il ne faut qu'ordonner linéairement  $\{j_{\nu(n)}^2(k)\}_{nk \leq m}$  et prendre les  $m$  premières valeurs, ce qui donne

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m.$$

Dans le cas du disque, il faut regarder les valeurs où  $n = 0$  et celles  $n \neq 0$  et extraire les valeurs de  $\{j_{\nu(n)}^2(k)\}_{nk \leq m}$  en répétant deux fois celles où  $n \neq 0$  pour obtenir

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m.$$

**Remarque 2.3.1.** (*Améliorations possibles*). Comme à n'importe quelle programme informatique, plusieurs améliorations peuvent être apportées.

1) La première, pour ceux dont les ressources le permettent, seraient de paralléliser le code avec MPI.

2) Afin de réduire la taille en mémoire utilisée et également de permettre de sauvegarder en mode binaire (car Maple ne fait pas la distinction entre le mode binaire et ascii sur les stations Unix), reprogrammer en C++ avec par exemple la librairie NTL (Number Theory Library) compilée avec GMP (Gnu Multiple Precision arithmetic) procureait sans aucun doute des économies de temps et d'espace. Cela implique cependant d'implémenter une fonction pour

le calcul des zéros de fonctions Bessel de premier type qui serait stable, ce qui n'est pas nécessairement évident à faire efficacement.

**Remarque 2.3.2.** (*Avantages de l'algorithme*). À la connaissance de l'auteur, l'algorithme donné ici est un des plus efficace pour déterminer les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur  $\Delta$  sur le disque. Il ne requiert aucunement de résoudre l'équation différentielle  $\Delta u + \lambda u = 0$  sur le disque. Calculer les zéros des fonctions de Bessel étant beaucoup plus rapide et stable que de résoudre l'équation différentielle, l'algorithme est d'autant plus rapide et efficace. Également plusieurs des méthodes numériques pour résoudre l'équation différentielle requiert l'utilisation de matrices donc le nombre d'entrées est proportionnel au carré du nombre de valeurs propres désirées et, par conséquent, il serait inutile d'essayer de calculer par exemple les  $1.10^6$  premières valeurs propres en résolvant l'équation différentielle avec ces méthodes numériques, ce qui par contre a été fait raisonnablement avec l'algorithme.

### 2.3.1 Résultats comparatifs

Le spectre du disque pour les valeurs propres  $\{\lambda_j\}_{j=1}^{10^6}$  a été calculé environ en 114576.4710 secondes de calcul soit environ 31 heures 50 minutes sur un simple PC à deux processeurs avec 2GB de RAM. La liste d'une taille de 30 MB est disponible auprès de l'uteur. Dans ce fichier texte, la 1<sup>re</sup> colonne indique le rang de la fonction/valeur propre, la 2<sup>e</sup> colonne indique la valeur propre, la 3<sup>e</sup> indique l'ordre de la fonction de Bessel et la 4<sup>e</sup> indique l'index du zéro de fonction Bessel. Dans ce qui suit, pour chacune des valeurs propres listées dans les tableaux, la représentation en courbes de niveaux de la fonction propre correspondante est montrée plus loin sur les graphiques. Grâce aux courbes de niveaux, il est facile d'y compter le nombre de domaine nodaux et de comparer avec les valeurs de  $k$  (index) et  $n$  (ordre) dans les tableaux.



Les courbes de niveaux des fonctions propres ont été obtenues à l'aide de Matlab en solutionnant les équations différentielles à l'aide de la méthode des éléments finis. Par exemple, à des fins comparatives, les 100 premières valeurs propres et leurs fonctions propres associées ont été obtenues en près de 3 jours de calcul en Matlab. En plus de prendre un temps excessivement long, la visualisation des courbes à niveau devient très difficile lorsque le rang des fonctions propres est élevé.

Des programmes en Matlab sont également donnés en annexe. Ces programmes permettent de résoudre les problèmes de valeurs propres de même que de visualiser les ensembles nodaux des fonctions propres.

m=rang	$\lambda_m$ (Matlab)	$j_k^2$ (Maple)	n=ordre	k=index
3	149.4956	149.4529	2	1
6	278.9782	278.8316	3	1
7	310.5226	310.3223	1	4
16	646.8263	646.0310	5	1
25	991.8437	989.7291	3	5
27	1088.4330	1085.9440	4	4
30	1157.8175	1155.2319	5	3

TAB .2.1 Résultats pour le secteur  $S(\alpha)$  avec  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  de rayon 1

m=rang	$\lambda_m$ (Matlab)	$j_k^2$ (Maple)	n=ordre	k=index
3	23.0006	22.9968	3	1
9	58.4266	58.4019	7	1
11	69.3865	69.3521	8	1
19	108.3025	108.2183	2	3
26	152.1173	151.9596	14	1
29	165.6505	165.4521	5	3

Table 2.2. Résultats pour le secteur  $S(\alpha)$  avec  $\alpha = 2exp(1) \simeq 5.4366$  de rayon 1

---

Les figures 2.5 représentent les domaines nodaux des fonctions propres correspondantes aux valeurs propres du tableau, le nombre de composantes connexes est donné par  $n_k$ .

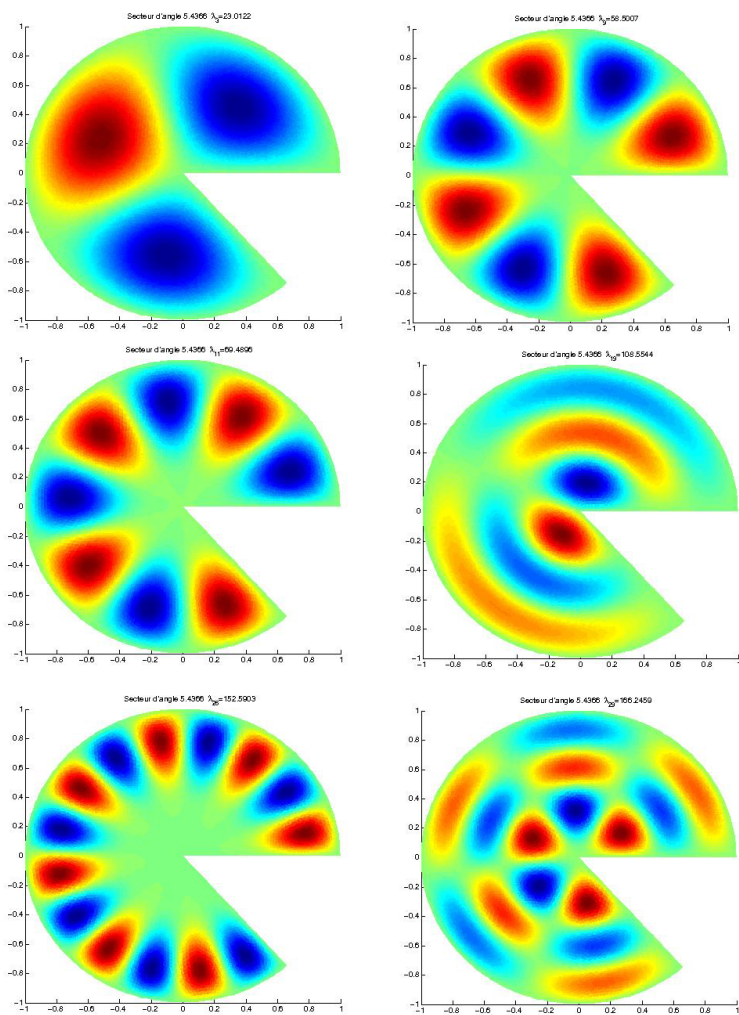


FIGURE 2.5 – Domaines nodaux de la 5<sup>e</sup>, 9<sup>e</sup>, 11<sup>e</sup>, 19<sup>e</sup>, 26<sup>e</sup> et 29<sup>e</sup> fonction propre pour le secteur  $S(\alpha)$  avec  $\alpha \approx 5.4366$  de rayon 1

m=rang	$j_k^2(n)(Maple)$	n=ordre	k=index
1	5.783186	0	1
4	26.374616	2	1
5	26.374616	2	1
6	30.471262	0	2
7	40.706466	3	1
8	40.706466	3	1
28	135.020709	2	3
29	135.020709	2	3
30	139.040284	0	4
31	149.452881	8	1
32	149.452881	8	1
33	152.241154	5	2
34	152.241154	5	2
...			
1000000	4004017.840283	1533	69
2000000	8005695.299643	391	714
3000000	12006894.927313	305	955
4000000	16008031.629743	1820	498
5000000	20008771.752617	1624	707
6000000	24009692.370612	713	1220
7000000	28010694.266301	3663	276
7912680	31685063.008767	0	1792

Table 2.3. Résultats pour le disque

Les figures 2.6 représentent les domaines nodaux des fonctions propres correspondantes aux valeurs propres du tableau, le nombre de composantes connexes est donné par  $2nk$  si  $n \geq 1$  (multiplicité 2) et par  $k$  si  $n = 0$  (multiplicité 1)

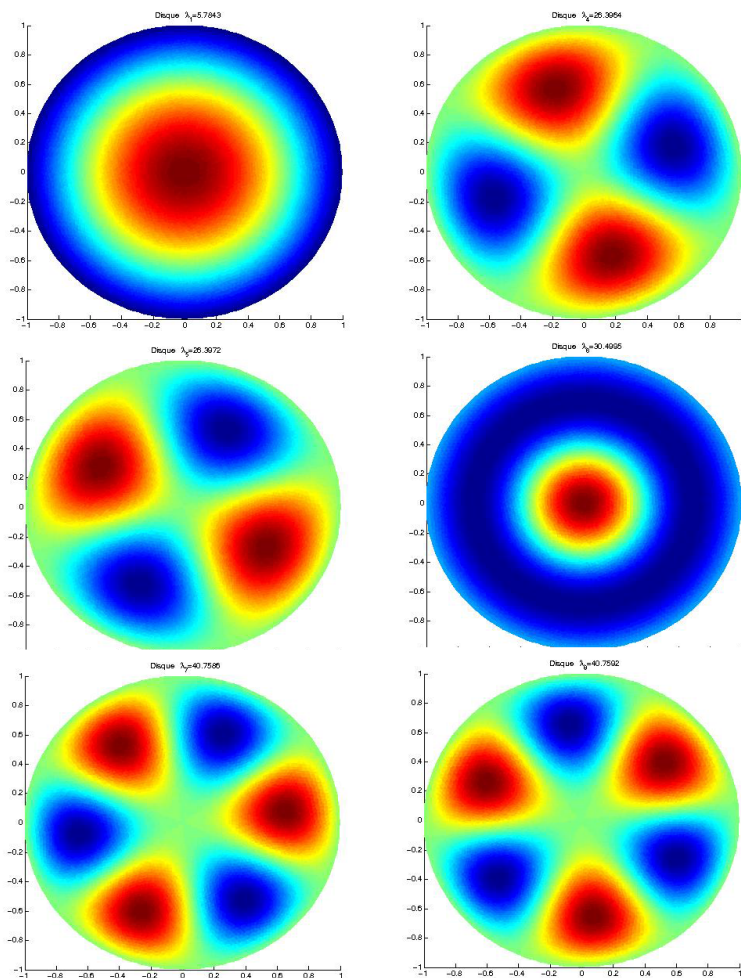


FIGURE 2.6 – Domaines nodaux de la 1<sup>re</sup>, 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 6<sup>e</sup>, 7<sup>e</sup> et 8<sup>e</sup> fonction propre pour le disque D de rayon 1

## Chapitre 3

### Loi de Weyl pour le disque

Dans cette section, une explication approfondie de l'article [KF] est donnée. C'est dans cet article qu'il a été montré comment la loi de Weyl pour le disque  $D$  de rayon  $r$  est dans l'ordre  $2/3$ . les multiples points très obscures de l'article.

L'article montre que la loi de Weyl, en débutant avec le problème  $\Delta u + k^2 u = 0$ , pour le disque  $D$  de rayon  $r$  est dans l'ordre  $2/3$ . En d'autres termes, soit le problème à valeur propre  $-\Delta u = k^2 u$  avec  $u|_{\partial D} = 0$ . Soit la fonction de compte,  $N_D(k)$ , des valeurs propres  $\{k_n\}_{n=1}^\infty$  ordonnées en ordre croissant c'est-à-dire soit

$$N_D(k) = \sum_{k_n < k} 1$$

alors il est montré que

$$N_D(k) = \frac{S}{4\pi} k^2 - \frac{L}{4\pi} k + O(k^{2/3})$$

où  $S = \pi r^2$  et  $L = 2\pi r$

**Afin d'alléger la notation, nous écrirons simplement  $N(\lambda)$  au lieu de  $N_D(\lambda)$ . Seulement pour l'explication du théorème de Kuznetsov et Fedosov, nous utiliserons  $k$  au lieu de  $\lambda$  afin de conserver la notation identique à celle de l'article facilitant ainsi les références.**

Avant de commencer à expliquer l'article, je tiens à faire un « détour » théorique sur l'approximation uniforme de la fonction de Bessel de premier type,  $J_n(x)$  pour  $x > n > 0$ . Les fonctions de Bessel de premier type d'ordre  $n = 0, 1, 2, \dots$  sont au coeur de l'étude du spectre du Laplacien sur le disque. Ce « détour » se justifie d'une part parce que les auteurs donne une formule asymptotique pour  $J_n(x)$  pour laquelle il faut travailler quelque peu avant d'y arriver et, d'autre part, parce que la formule donnée n'est pas effective tandis que je montre comment obtenir une expansion uniforme asymptotique effective c'est-à-dire sans terme  $O$ . La théorie sur les expansions uniformes des fonctions a été principalement développée par F.W.J. Olver dans les années 1950.

À la fin de ce chapitre, je donne un algorithme permettant de calculer efficacement et exactement  $N(\lambda)$ . En utilisant la monotonie des zéros des fonctions de Bessel ainsi qu'un principe de « marche » qui consiste à faire des retours en arrière et des montées en alternance sur des paires d'entiers bien déterminés par le problème, nous verrons qu'il est possible d'évaluer  $N(\lambda)$  efficacement sans avoir à calculer naïvement toutes les valeurs propres telles que  $\lambda_j \leq \lambda$ . Par méthode naïve, je veux signifier l'utilisation de l'algorithme de la section 2.2 afin de déterminer la valeur du rang maximale de la valeur propre correspondant à la valeur de  $N(\lambda)$ .

### 3.1 Approximation uniforme de la fonction de Bessel de premier type

Le lemme suivant découle de deux théorèmes qui seront exposés bientôt. La partie la plus difficile a été d'évaluer les variations totales de certaines fonctions qui apparaîtront bientôt. Il est à noter que les auteurs de [LaWo] affirment avoir analytiquement trouvé les points stationnaires des fonctions en question que vous pouvez consulter à la section 3.1.1 sans le montrer dans

leur article, ils ne se contentent que de donner les valeurs numériques de variations totales qui sont évidemment les mêmes que les miennes sans même donner explicitement les fonctions comme je l'ai fait. Certaines des fonctions impliquées permettant de borner l'approximation d'Olver avaient déjà été obtenues par Olver, je me suis contenté de les recalculer numériquement pour obtenir plus de décimales qu'Olver a pu le faire avec les ordinateurs des années 50. Les résultats utiles pour cette section se retrouvent dans [Ol3], [Ol4] et [Ol6].

**Remarque 3.1.1.** ( $n_x$ ). La valeur  $n_x$  peut être bien approximé en utilisant l'excellente approximation de  $\tilde{\eta}(y) = \sqrt{1-y^2} - y \arccos(y)$  pour  $y \in (0, 1)$  qu'est

$$1 < \frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{\tilde{\eta}(y)} < \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

En effet, de par l'inégalité de la remarque précédente, qui m'a été fournie par Igor Wigman, avec  $0 < y = \frac{n}{x} < 1$ ,

$$(1-y)^{\frac{3}{2}} < \frac{3\sqrt{2}}{4}\tilde{\eta}(y) \implies \frac{4x}{3\sqrt{2}}(1-\frac{n}{x})^{\frac{3}{2}} < x\tilde{\eta}(\frac{n}{x}) = \eta(n, x)$$

et, par conséquent,

$$1 < \frac{4x}{3\sqrt{2}}(1-\frac{n}{x})^{\frac{3}{2}} < \eta(x, n) \iff (\frac{3\sqrt{2}}{4x})^{\frac{2}{3}} < 1 - \frac{n}{x} \iff n < x - (\frac{3\sqrt{2}}{4})^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$$

Il est à noter que  $x - x^{\frac{4}{9}} < x - (\frac{3\sqrt{2}}{4})^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$  pour  $x > (\frac{3\sqrt{2}}{4})^6 \approx 1.423828$ . De façon équivalente **comme il en ressortira du théorème 3.1.1**

$$f_n(x) = \theta_1(\eta) + \theta_1(\eta)\frac{A_1(\varsigma)}{n^2} + \frac{1}{n}\theta_2(\eta)(-\varsigma)^{\frac{1}{2}}B_0(\varsigma) + \sqrt{\pi}\epsilon_3 \quad (3.1.1)$$



où

$$\theta_1(\eta) = \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{u_1}{\eta^1} + R_2$$

$$\theta_2(\eta) = \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) + \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{v_1}{\eta^1} + R_2'$$

alors

$$J_n(x) = \frac{1}{1 + \delta_3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x^2 - n^2)^{-\frac{1}{4}} f_n(x)$$

**Remarque 3.1.2.** (*Dénombrement des zéros de  $J_n(x)$* ). Seule la connaissance de  $f_n(x)$  est nécessaire au dénombrement des zéros de  $J_n(x)$ .

Avant de débiter la preuve, voici les deux théorèmes qui seront utilisés pour prouver le lemme et se retrouvant respectivement dans [Ol7] et [Fa-LoOl]. Avant d'énoncer les théorèmes, voici les définitions des fonctions qui apparaîtront dans les théorèmes. Dans ce qui suit,  $Ai(x)$  et  $Bi(x)$  dénotent respectivement la fonction d'Airy de premier type et deuxième type. Ainsi,

$$E(x) = \left(\frac{Bi(x)}{Ai(x)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } c \leq x \leq \infty$$

$$E(x) = 1 \quad \text{pour } -\infty \leq x \leq c$$

$$M(x) = (E^2(x)Ai^2(x) + E^{-2}(x)Bi^2(x))^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}} (\pi|x|^{\frac{1}{2}}M^2(x))$$

$$\approx 1.039522542988 \text{ à } x \approx 1.321915092767$$

où  $c$  est la plus grande valeur négative telle que  $Ai(x) = Bi(x)$ . **Nous nous entendons bien que  $\lambda$  n'a aucun lien avec les valeurs propres. C'est la lettre utilisée par Olver pour désigner le suprémum ci-dessus.** Quant au symbole  $V_{(a,b)}(g)$ , il dénote la variation totale d'une fonction  $g$  sur

un intervalle  $(a, b) \subseteq \text{dom}(g)$ . Pour plus d'information, voir le 1<sup>er</sup> chapitre de [Ol8].

**Théorème 3.1.1.** (*Approximation uniforme de  $J_n(nz)$* ). Soit  $J_n(nz)$  la fonction de Bessel de premier type d'ordre  $n \in \mathbb{R}$  et d'argument  $nz$  avec  $z \in \mathbb{C}$ , alors l'expansion uniforme de  $J_n(nz)$  est donné par

$$J_n(nz) = \frac{1}{1 + \delta_{2l+1}} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{4\zeta}{1 - z^2} \right)^{\frac{1}{4}} (Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) \sum_{s=0}^1 \frac{A_s(\zeta)}{n^{2s}}) \quad (3.1.2)$$

$$+ \frac{Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta)}{n^{\frac{4}{3}}} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{B_s(\zeta)}{n^{2s}} + \epsilon_{2l+1}) \quad (3.1.3)$$

où les termes d'erreur  $\delta_{2l+1}$  et  $\epsilon_{2l+1}$  sont donnés comme suit

$$|\delta_{2l+1}| \leq \frac{2}{n^{2l+1}} \exp \left( 2\lambda \frac{1}{n} \nu_{-\infty, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)) \right) \nu_{-\infty, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta)) \quad (3.1.4)$$

$$|\epsilon_{2l+1}| \leq \frac{2}{n^{2l+1}} \exp \left( 2\lambda \frac{1}{n} \nu_{\zeta, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)) \right) \nu_{\zeta, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_1(\zeta)) \frac{M(n^{\frac{2}{3}}\zeta)}{E(n^{\frac{2}{3}}\zeta)} \quad (3.1.5)$$

où

$$\nu_{\zeta, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_l(\zeta)) \leq \nu_{-\infty, \infty}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_l(\zeta)).$$

Le lecteur intéressé à connaître les récurrences permettant de calculer  $A_s(\zeta)$  et  $B_s(\zeta)$  dans le théorème qui suit peuvent consulter [Ol4]. J'ai trouvé  $A_1(\zeta)$  et  $B_1(\zeta)$  en résolvant les récurrences, mais cela ne requiert qu'une bonne dose de patience et je me suis contenté de les donner à la section 3.1.1.  $\zeta$  est donné plus loin à l'équation 3.1.15

**Remarque 3.1.3.** ( *$n$  et  $z$* ). Dans ce qui suit, seuls les cas où  $n \in \mathbb{N}$  et  $z \in \mathbb{R}^+$  seront utiles.

**Théorème 3.1.2.** (*Approximations uniformes de  $Ai$  et  $Ai'$* ). Soit  $Ai$  la fonction de Airy de premier type sa dérivé  $Ai'$ . Soit  $x > 0$  et  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \xi$ . Alors

$$Ai(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{4}}} \left( \cos \left( \xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}]} (-1)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} \right. \quad (3.1.6)$$

$$\left. + \sin \left( \xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}S-1]} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} + R_S \right) \quad (3.1.7)$$

où

$$|R_s| \leq 2 \exp \left( \frac{5}{36\xi} \right) \frac{u_s}{\xi_s}$$

et

$$Ai'(-x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left( \sin \left( \xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}]} (-1)^s \frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} \right. \quad (3.1.8)$$

$$\left. - \cos \left( \xi - \frac{1}{4}\pi \right) \sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}S-1]} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}} + R'_S \right) \quad (3.1.9)$$

où

$$|R'_s| \leq 2 \exp \left( \frac{7}{36\xi} \right) \frac{|v_s|}{\xi^s}$$

avec

$$u_s = \frac{2^s \Gamma(3s + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} 3^{3s} \Gamma(2s + 1)} \quad s > 0 \quad (3.1.10)$$

$$v_s = -\frac{(6s + 1)}{(6s - 1)} u_s \quad s > 0 \quad (3.1.11)$$

$$u_0 = 1 \quad (3.1.12)$$

Voici maintenant la preuve du lemme ??

### Preuve

À partir des équations (3.1.2), (3.1.4) et (3.1.5) du théorème 3.1.1 avec  $l = 1$  dans l'approximation de  $J_n(nz)$ , nous avons que

$$J_n(nz) = \frac{1}{1 + \delta_3} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{4\zeta}{1 - z^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left( Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) \left( 1 + \frac{A_1(\zeta)}{n^2} \right) + \frac{Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta)}{n^{\frac{4}{3}}} B_0(\zeta) + \epsilon_3 \right)$$

avec

$$|\delta_3| \leq \frac{0.013227}{n^3} \exp\left(\frac{0.218423}{n}\right) \quad (3.1.13)$$

$$|\epsilon_3| \leq \frac{0.008352}{n^3} \exp\left(\frac{0.218423}{n}\right). \quad (3.1.14)$$

Nous reviendrons à la section 3.1.1 sur les évaluations numériques de  $\delta_3$  et  $\epsilon_3$ . Maintenant, un changement de variable qui « défait » l'homothétie  $nz$  est donné par  $x = nz$ . En se concentrant seulement sur  $z > 1$  c'est-à-dire sur  $z \in (1, \infty)$ , alors (voir [Ol6])

$$\zeta = - \left( \frac{3}{2} \int_1^z \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z} dz \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.1.15)$$

$$= - \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \quad x > n > 0 \quad (3.1.16)$$

où

$$\eta = \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos\left(\frac{n}{x}\right) \quad x > n > 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) &= Ai(-(n^{\frac{2}{3}}(-\zeta))) \\ Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta) &= Ai'(-(n^{\frac{2}{3}}(-\zeta))) \\ \xi &= \eta \end{aligned}$$

En substituant  $S = 2$  dans les approximations de  $Ai$  et  $Ai'$  données respectivement par (3.1.6) et (3.1.8), et en dénotant pour des raisons de commodité  $\theta_1(\eta)$  et  $\theta_2(\eta)$  par

$$\theta_1(\eta) = \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) + \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{u_1}{\eta^1} + R_2 \quad (3.1.17)$$

$$\theta_2(\eta) = \sin\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) - \cos\left(\eta - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{v_1}{\eta^1} + R'_2 \quad (3.1.18)$$

$$|R_2| \leq \exp\left(\frac{5}{36\eta}\right) \frac{45}{74} \frac{1}{\eta^2} \quad (3.1.19)$$

$$|R'_2| \leq \exp\left(\frac{7}{36\eta}\right) \frac{65}{74} \frac{1}{\eta^2} \quad (3.1.20)$$

alors

$$\begin{aligned} Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \frac{1}{(-\zeta)^{\frac{1}{4}}} \theta_1(\eta) \\ Ai'(n^{\frac{2}{3}}\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{6}} (-\zeta)^{\frac{1}{4}} \theta_2(\eta) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour  $z > 1$  ou bien  $\zeta < 0$ ,

$$\begin{aligned} J_n(nz) &= \frac{1}{1 + \delta_3} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{4}{z^2 - 1}\right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \theta_1(\eta) \left(1 + \frac{A_1(\zeta)}{n^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{n^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{4}{3}}} \theta_2(\eta) (-\zeta)^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta) + \epsilon_3 \right) \end{aligned}$$

et donc pour  $x > n > 0$  avec  $\zeta < 0$ ,

$$J_n(x) = \frac{1}{1 + \delta_3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x^2 - n^2)^{-\frac{1}{4}} \left( \theta_1(\eta) + \theta_1(\eta) \frac{A_1(\zeta)}{n^2} + \frac{1}{n} \theta_2(\eta) (-\zeta)^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta) + \sqrt{\pi} \epsilon_3 \right)$$

Maintenant soit (voir [Ol6])

$$s_1 = \sup_{\zeta < 0} |A_1(\zeta)| = \frac{1}{225} \quad (3.1.21)$$

$$s_2 = |\zeta(z_1)|^{\frac{1}{2}} |B_0(z_1)| \quad (3.1.22)$$

$$\approx 0.010862854400 \quad (3.1.23)$$

et où  $z_1$  est le seul point stationnaire de  $|\zeta(z)|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta(z))$  pour  $z > 1 \iff \zeta < 0$  tel que

$$z_1 = 1.979495483061 \quad \text{avec} \quad \zeta(z_1) = -1.000459796360$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} |\theta_1(\eta) A_1(\zeta)| &\leq |\theta_1(\eta) s_1| \\ &= \frac{s_1}{n^2} + \frac{u_1 s_1}{n^2 \eta} + \frac{|R_2| s_1}{n^2} \\ \frac{1}{n} |\theta_2(\eta) (-\zeta)^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)| &\leq \frac{1}{n} |\theta_2(\eta)| s_2 \\ &\leq \frac{s_2}{n} + \frac{|v_1| s_2}{n \eta} + \frac{|R'_2| s_2}{n} \end{aligned}$$

En dénotant par

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (1 + \delta_3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} (x^2 - n^2)^{\frac{1}{4}} J_n(x) \\ &= \theta_1(\eta) + \theta_1(\eta) \frac{A_1(\zeta)}{n^2} + \frac{1}{n} \theta_2(\eta) (-\zeta)^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta) + \sqrt{\pi} \epsilon_3 \end{aligned}$$

alors pour  $x > n > 0$ , l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} \left| f_n(x) - \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) \right| &\leq \frac{u_1}{\eta} + \frac{s_2}{n} \\ &+ \left( |R_2| + \frac{s_1}{n^2} + \frac{u_1 s_1}{n^2 \eta} + \frac{|R_2| s_1}{n^2} + \frac{|v_1| s_2}{n \eta} + \frac{|R_2'| s_2}{n} + \sqrt{\pi} |\epsilon_3| \right) \end{aligned}$$

**Ceci termine la preuve de la première inégalité. Pour la deuxième partie du lemme, procédons comme ce qui suit.** Soit la fonction  $f_n(x)$  donnée par l'équation (3.1.2), il est possible de regarder à  $\eta(x, n)$  pour  $x > n > 0$  de deux façons. La première façon est lorsque  $n$  est fixe et  $x$  varie, lequel cas la fonction  $g_1(x) := \eta(x, n)$  est croissante en  $x > n$ . La deuxième façon, ce qui sera utile, est lorsque  $x$  est fixe et  $n$  varie, dans ce cas la fonction  $g_2(n) := \eta(x, n)$  est décroissante pour tout  $n \in (0, x)$ . Ainsi pour une valeur fixe arbitraire  $x > 0$ , il existe  $n_x < x$  telle que pour tout  $n$  avec  $n \leq n_x$ , la fonction  $\eta^{-1}(x, n) < 1$ . Par conséquent,

$$\frac{1}{\eta^2} \leq \frac{1}{\eta} \leq 1 \quad \text{pour } n \leq n_x$$

De même, pour toute constante  $k$ ,

$$\exp\left(\frac{k}{\eta}\right) \leq \exp(k) \quad \text{pour } n \leq n_x$$

De par la remarque ?? et les équations (3.1.10), (3.1.11), (3.1.21) et (3.1.22), alors  $u_1 = \frac{5}{72}, v_1 = \frac{-7}{72}, s_1 = \frac{1}{225}, s_2 \approx 0.010862854400$  et ,en plus ,

$n \leq n_x$ , et, en posant les constantes

$$\begin{aligned}
 A &\approx s_2 + s_1 + u_1 s_1 + \exp\left(\frac{5}{36}\right) \frac{45}{74} s_1 + |v_1| s_2 + \exp\left(\frac{7}{36}\right) \frac{65}{74} s_2 \\
 &\quad + 0.008352 \sqrt{\pi} \exp(0.218423) \\
 &\approx 0.049784723505 \\
 B &= u_1 + \exp\left(\frac{5}{36}\right) \frac{45}{74} \\
 &\approx 0.768158487672
 \end{aligned}$$

Alors

$$\left| f_n(x) - \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta}$$

et

$$f_n(x) = \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

□

### 3.1.1 Calculs numériques des variations totales

Pour plus de détails concernant ce qui suit, se référer principalement à [Ol6]. La valeur de  $\nu_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta))$  est calculée en trouvant les points stationnaires de et en utilisant la formule de la variation totale. L'unique point stationnaire de  $|\zeta|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta)$  et en utilisant autre que  $\zeta = 0$  se situe à  $\zeta = \zeta(z_1) \approx -1.000459796360$  où  $z_1 \approx 1.979495483061$ . Par conséquent, en dénotant par

$$g(z) = |\zeta(z)|^{\frac{1}{2}} B_0(\zeta(z))$$



Alore

$$\begin{aligned}
 \nu_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta)) &= \lim_{z \rightarrow 0} g(z) - 2g(z=1) + 2g(z=z_1) + \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\
 &\approx \frac{1}{12} - 0 + 2(0.010862854400) + 0 \\
 &\approx 0.105059042134
 \end{aligned}$$

Ègalement

$$\begin{aligned}
 \lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left( -\frac{3}{24} + \frac{5}{24} - \frac{5}{48\zeta^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( -\frac{3}{24} + \frac{5}{24} - \frac{5}{48\zeta(z)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= \left( -\frac{3}{24} + \frac{5}{24} - 0 \right) \\
 &= \frac{1}{12} \\
 \lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta) &= \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur numérique de  $V_R(|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta))$ , il faut les points stationnaires de  $|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta)$  En dénotant par

$$g(z) = |\zeta(z)|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta(z))$$

alors ses points stationnaires autres que  $z = 1$  sont

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 0.138560281581 \\
 z_2 &= 1.418538099456
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la variation totale est

$$\begin{aligned}
\nu_{\mathbb{R}}|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta) &= \lim_{z \rightarrow 0} g(z) - 2g(z_1) + 2g(z = 1) - 2g(z = z_2) + \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\
&\approx -0.002681327160 - 2(-0.004008186698) \\
&\quad + 2(0) - 2(-0.000639161111) + 0 \\
&\approx 0.006613368457
\end{aligned}$$

avec les valeurs des limites suivantes

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta) &= \lim_{z \rightarrow 0} g(z) \\
&= -\frac{139}{51840} \\
\lim_{\zeta \rightarrow \infty} |\zeta|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta) &= \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maintenant, je donne les coefficients  $A_s(\zeta)$  et  $B_s(\zeta)$  qui n'ont pas été faciles à trouver pour  $s = 1$ . Les coefficients  $A_s(\zeta)$  et  $B_s(\zeta)$  pour  $s = 0, 1$  suivent et, dans ce qui suit,  $t = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}, t = -it_1$  avec  $t_1 = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$  et

$$\zeta_1 = -\zeta.$$

$$B_0(\zeta) = -\frac{3t - 5t^3}{24\zeta^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{48\zeta^2} \quad \zeta > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$B_0(\zeta) = \frac{3t_1 + 5t_1^3}{24\zeta_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{48\zeta_1^2} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1$$

$$B_1(\zeta) = \frac{-(30375t^3 - 369603t^5 + 765765t^7 - 425425t^9)}{414720\zeta^{\frac{1}{2}}} - \frac{(405t^2 - 2310t^4 + 1925t^6)}{55296\zeta^2} - \frac{(1155t - 1925t^3)}{110592\zeta^{\frac{7}{2}}} - \frac{85085}{663552\zeta^5} \quad \zeta > 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$B_1(\zeta) = \frac{(30375t_1^3 + 369603t_1^5 + 765765t_1^7 + 425425t_1^9)}{414720\zeta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{(405t_1^2 + 2310t_1^4 + 1925t_1^6)}{55296\zeta_1^2} + \frac{(1155t_1 + 1925t_1^3)}{110592\zeta_1^{\frac{7}{2}}} + \frac{85085}{663552\zeta_1^5} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1$$

$$A_1(\zeta) = \frac{81t^2 - 462t^4 + 385t^8}{1152} - \frac{7(3t - 5t^3)}{1152\zeta^{\frac{3}{2}}} - \frac{455}{4608\zeta^3} \quad \zeta > 0 \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$A_1(\zeta) = -\frac{81t_1^2 + 462t_1^4 + 385t_1^8}{1152} - \frac{7(3t_1 + 5t_1^3)}{1152\zeta_1^{\frac{3}{2}}} + \frac{455}{4608\zeta_1^3} \quad \zeta < 0 \quad \text{ou} \quad z \geq 1$$

Les valeurs de  $A_s(0)$  et de  $B_s(0)$  peuvent être calculées en utilisant les développements de Meissel de  $J_n(n)$  que nous pouvons retrouver dans [Wa]. Ces

valeurs se retrouvent également dans [Ol6] et, par conséquent,

$$\begin{aligned} A_1(0) &= -\frac{1}{225} \\ B_0(0) &= \frac{2^{\frac{4}{3}}}{140} \\ B_1(0) &= \frac{-(1213.2)^{\frac{4}{3}}}{2047500} \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.4.** (*comparaisons des calculs*). Les coefficients mentionnés précédemment sont ceux qui ont été codés avec Maple pour pouvoir trouver les points stationnaires et, par suite, les variations totales. Pour la variation totale de  $\nu_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_0(\zeta))$ , il est possible de la retrouver avec moins de décimales dans de nombreux documents dont [Ol6]. Quant à  $\nu_{\mathbb{R}}(|\zeta|^{\frac{1}{2}}B_1(\zeta))$ , elle peut être retrouvée à la page 315 dans [LaWo] où les auteurs ne donnent pas cependant la fonction  $B_1(\zeta)$ .

## 3.2 L'article de Kuznetsov et Fedosov, explications et corrections

Ayant maintenant une meilleure idée concernant l'expansion uniforme de  $J_n(x)$ , alors voici, avec un peu plus de détails que l'article original [KF], où il est montré que la loi de Weyl pour le disque  $D$  de rayon  $r$  est dans l'ordre  $2/3$ .

Sans perte de généralité, le rayon du disque est fixé à  $r = 1$ . Il est bien connu que les valeurs propres du problème de Dirichlet sur le disque de rayon 1 sont les zéros positifs des fonctions de Bessel  $J_n(x)$  d'ordre  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Les valeurs propres correspondant aux ordres  $n = 1, 2, \dots$  ont une multiplicité double et celle correspondant à l'ordre  $n = 0$  sont simples.

Voici une expansion uniforme de la fonction de Bessel de premier type obtenue

précédemment qui sera utile pour la suite. Soit  $x > n > 0$ ,  $J_n(x)$  la fonction de Bessel de premier type et soit

$$f_n(x) = (1 + \delta_3) \sqrt{\frac{\pi}{2}} (x^2 - n^2)^{\frac{1}{4}} J_n(x) \quad (3.2.1)$$

avec

$$\eta(x, n) = \sqrt{x^2 - n^2} - n \arccos\left(\frac{n}{x}\right) \quad (3.2.2)$$

et  $\delta_3 > 0$ ,  $\delta_3$  ne dépend que de  $n$ ,  $|\delta_3| < 0.016456$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_3 = 0$ . Alors pour une valeur fixe de  $x$ , il existe  $n_x < x$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée

$$f_n(x) = \cos\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

comme il a été démontré précédemment.

**Remarque 3.2.1.** *Les nombres de zéros de la fonction  $f_n$  et  $J_n$  dans un intervalle donné sont les mêmes, car  $f_n$  n'est que  $J_n$  multiplié par une fonction strictement positive.*

**Remarque 3.2.2.** *L'approximation donnée de  $J_n$  donnée dans l'article est comme suit*

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (k^2 - n^2)^{-\frac{1}{4}} \left( \cos\left(\eta(k, n) - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\eta}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Ainsi, le problème consistant au dénombrement du nombre de zéros positifs des fonctions  $J_n(x)$  n'excédant pas  $k$  est transformé en un problème de dénombrement de points entiers dans un domaine bien précis d'où l'utilisation prochaine du théorème de Van der Corput.

Soit  $N_n(k)$  le nombre de zéros de la fonction  $J_n(x)$  dans l'intervalle  $n < x < k$ . Alors,

$$N(k) = N_0(k) + \sum_{n=1}^{|k|} N_n(k)$$

où  $[k]$  dénote la partie entière de  $k$ . En fixant les nombres  $\nu_0 = [k^{\frac{1}{3}}] + \frac{1}{2}$  et  $\nu_1 = [k - k^{\frac{4}{9}}] + \frac{1}{2}$ , la somme  $N(k) - N_0(k)$  est divisée en trois parties comme suit

$$\sum_{n=1}^{|k|} N_n(k) = \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} 1 + \sum_{n=\nu_0 + \frac{1}{2}}^{\nu_1 - \frac{1}{2}} 1 + \sum_{n=\nu_1 + \frac{1}{2}}^{|k|} 1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$$

Une estimation de  $\Sigma_2$  sera donnée en utilisant le théorème de Van der Corput. Quant à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_3$ , leurs estimations utiliseront la monotonie de  $N_n(k)$ .  $N_0(k)$  sera estimé à la toute fin.

En utilisant (3.2.2) pour  $n \in (\nu_0, \nu_1)$  qui est équivalent à affirmer qu'il existe A et B tels que

$$\left| f_n(x) - \cos\left(\eta(k, n) - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \frac{A}{n} + \frac{B}{n(k, n)}$$

et il s'ensuit que le nombre de zéros de  $J_n(x)$  pour  $x \in (n, k)$  est le même que le nombre de zéros de la fonction  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  dans l'intervalle  $0 < x \leq \eta(k, n) + \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta(k, n)}$ . Par conséquent,

$$N_n(k) = \left[ \frac{1}{\pi} \eta(k, n) + \frac{1}{4} + \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta(k, n)} \right]$$

**Remarque 3.2.3.** (*Justification du nombre de zéros*). Une justification de la formule pour  $N_n(k)$  a été donnée rigoureusement par Dominique Rabet. Ses résultats paraîtront ultérieurement dans ses publications.

Dans cette partie, une estimation de  $\Sigma_2$  est donnée en détails. Il faut utiliser le théorème de Van der Corput mentionné dans [KF] que voici

**Théorème 3.2.1.** (Van der Corput). Soit les nombres  $\nu_0 - \frac{1}{2}, \nu_1 - \frac{1}{2}$  et  $x_0 - \frac{1}{2}$  entiers tel que  $\nu_0 < \nu_1$ . Soit la fonction à valeurs réelles  $f(\nu)$  telle que  $f \in \mathbb{C}(\nu_0, \nu_1)$  et telle que

$$0 < \sigma \leq f'(\tau) \leq r, f''(\nu) > \frac{1}{\mu}, \mu > 1, \mu > \sigma^{-3}$$

Soit  $N$  le nombre de points entiers à l'intérieur du domaine  $\nu_0 < \nu < \nu_1$  et  $x_0 \leq x \leq f(\nu)$  Soit  $A$  l'aire u domaine. Alors

$$N = A + O(\mu^{\frac{1}{3}}\tau)$$

Par ce qu'il a été accompli auparavant,  $\Sigma_2$  est donné par le nombre de points entiers dans le domaine que voici

$$\nu_0 < \nu < \nu_1, \frac{1}{2} < x < f(\nu) = \frac{1}{\pi}\eta(k, \nu) + \frac{1}{4} + \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\eta(k, \nu)}$$

Soit  $\delta = \max \left| \frac{A}{\nu} \right|$  et a telle que  $\left| \frac{B}{\eta(k, n)} \right| < \frac{a}{\pi\eta}$  pour  $\nu \in (\nu_0, \nu_1)$ . Soit

$$f_1(\nu) = \frac{1}{\pi}\eta + \frac{1}{4} - \frac{a}{\pi\eta} - \delta$$

$$f_2(\nu) = \frac{1}{\pi}\eta + \frac{1}{4} + \frac{a}{\pi\eta} + \delta$$

alors  $f_1(\nu) \leq f(\nu) \leq f_2(\nu)$ . Par conséquent, en dénotant  $N_1$  et  $N_2$  les nombres de points entiers donnés en remplaçant  $f$  respectivement par  $f_1$  et  $f_2$ , alors  $N_1 \leq \Sigma_2 \leq N_2$

Le théorème de Van der Corput sera utilisé sur  $f_1$  et  $f_2$ . Il faut montrer en détails que  $f_1$  et  $f_2$  satisfont aux hypothèses du théorème. Il est suffisant de

le faire pour  $f_1$ , le cas de  $f_2$  étant identique.

Pour montrer que  $f_1$  satisfait aux hypothèses du théorème, il faut d'abord évaluer les dérivées suivantes.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial \nu} &= \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \sqrt{k^2 - \nu^2} - \nu \arccos \left( \frac{\nu}{k} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} (-2\nu) - \arccos \left( \frac{\nu}{k} \right) + \nu \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\nu^2}{k^2}}} \frac{1}{k} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} - \arccos \left( \frac{\nu}{k} \right) + \frac{\nu}{k} \frac{k}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} \\
&= -\arccos \left( \frac{\nu}{k} \right) \\
\frac{\partial \eta^2}{\partial \nu^2} &= \frac{k}{\sqrt{k^2 - \nu^2}}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \nu} &= \frac{1}{\pi} \eta_\nu(k, \nu) + \frac{a \eta_\nu(k, \nu)}{\pi \eta^2(k, \nu)} \\
&= \frac{1}{\pi} \eta_\nu \left( 1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right) \\
&= -\frac{\arccos \left( \frac{\nu}{k} \right)}{\pi} \left( 1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2} &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{-k}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} \right) \left( 1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right) - \frac{\arccos \left( \frac{\nu}{k} \right)}{k} \left( 0 - \frac{2a \eta_\nu(k, \nu)}{\eta^3(k, \nu)} \right) \\
&= \frac{k}{\pi \sqrt{k^2 - \nu^2}} \left( 1 + \frac{a}{\eta^2(k, \nu)} \right) - \frac{\left( \arccos \left( \frac{\nu}{k} \right) \right)^2 2a}{\pi \eta^3(k, \nu)}
\end{aligned}$$



Comme  $\eta(k, \nu) \searrow$  lorsque  $\nu \nearrow$  avec  $k$  fixe et que  $\eta > 0$ , alors

$$\min \eta(k, \nu) = \eta(k, \nu_1) = \eta(k, k - k^{\frac{4}{9}})$$

pour  $\nu \leq \nu_1$ . L'inégalité  $\arccos(1 - \alpha) \geq \sqrt{\alpha}$  pour  $\alpha \in (0, 1)$  permet donc de déduire l'inégalité utile suivante non démontrée dans l'article [KF]

$$\begin{aligned} \eta(k, k - k^{\frac{4}{9}}) &= \sqrt{k^2 - (k^2 - 2kk^{\frac{4}{9}} + k^{\frac{8}{9}})} - (k - k^{\frac{4}{9}}) \arccos\left(\frac{k - k^{\frac{4}{9}}}{k}\right) \\ &\geq \sqrt{2k^{\frac{13}{9}} - k^{\frac{8}{9}}} - (k - k^{\frac{4}{9}}) \sqrt{k^{\frac{-5}{9}}} \\ &= \sqrt{2k^{\frac{26}{18}} - k^{\frac{10}{18}} - k^{\frac{3}{18}}(k^{\frac{10}{18}} - 1)} \\ &= \sqrt{2k^{\frac{6}{18}} \left(k^{\frac{20}{18}} - \frac{1}{2}k^{\frac{10}{18}}\right)} - \sqrt{2}k^{\frac{3}{18}}(k^{\frac{10}{18}} - 1) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2k^{\frac{3}{18}} \left(\sqrt{k^{\frac{20}{18}} - \frac{1}{2}k^{\frac{10}{18}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(k^{\frac{10}{18}} - 1)\right)} \\ &\geq \sqrt{2}k^{\frac{1}{6}} \\ &\geq k^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\eta(k, k - k^{\frac{3}{5}}) \geq \sqrt{2}k^{\frac{3}{5}} \geq k^{\frac{3}{5}}$$

Ègalement, l'approximation suivante pour  $\tilde{\eta}(z) = \sqrt{1 - z^2} - z \arccos(z)$  est utile

$$1 \leq \frac{(1 - z)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - z^2} - z \arccos(z)} < \frac{3}{4}\sqrt{2} \quad z \in (0, 1)$$

Par exemple, avec  $0 < z = \frac{\nu}{k} < 1$ , l'inégalité suivante est vérifiée

$$\frac{1}{\eta(k, \nu)} = \frac{1}{k(\sqrt{1 - z^2} - z \arccos(z))} \leq \frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k}(1 - z)^{\frac{-3}{2}}$$

Puisque  $\arccos\left(\frac{\nu_1}{k}\right) \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)$ , alors

$$k^{\frac{-5}{18}} = \sqrt{k^{\frac{-5}{9}}} \leq \arccos(1 - k^{\frac{-5}{9}}) = \arccos\left(\frac{\nu_1}{k}\right) \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)$$

Par conséquent,

$$0 < \frac{k^{\frac{-5}{18}}}{\pi} \leq \frac{k^{\frac{-5}{18}}}{\pi} \left(1 + \frac{a}{\eta^2}\right) \leq \frac{-\partial f_1}{\partial \nu}$$

De même, comme  $0 \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ , alors

$$\frac{-\partial f_1}{\partial \nu} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\eta^2}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{\eta^2(k, k - k^{\frac{4}{9}})} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{(k^{\frac{1}{6}})^2} = \frac{1}{2} + ak^{\frac{-1}{3}}$$

Il s'ensuit donc qu'avec  $C = \frac{1}{\pi}$

$$0 < Ck^{\frac{-5}{18}} < \frac{-\partial f_1}{\partial \nu} \leq \frac{1}{2} + O(k^{\frac{-1}{3}})$$

tel qu'écrit dans l'article [KF].

Pour estimer  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2}$ , il faut d'abord montrer que

$$\frac{(\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right))^2}{\pi \eta^3(k, \nu)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}}\right)$$

uniformément pour  $\nu \in (\nu_0, \nu_1)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . Pour ce faire, les auteurs séparent l'intervalle  $(\nu_0, \nu_1) = (\nu_0, \nu') \cup (\nu', \nu_1)$  où  $\nu' = k - k^{\frac{3}{5}}$ . Dans l'intervalle  $(\nu_0, \nu')$ , comme  $\eta(k, \nu)$  est toujours décroissante, alors

$$\begin{aligned} \frac{(\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right))^2}{\eta^3} &\leq \frac{(\arccos\left(\frac{\nu_0}{k}\right))^2}{\eta^3} \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\eta^3(k, \nu')} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{k^{\frac{2}{5}}}\right)^3 = \frac{\pi}{4} \frac{1}{k^{\frac{6}{5}}} \dots \\ &\dots \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{k} \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}} \end{aligned}$$

et, dans l'intervalle  $(\nu', \nu_1)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)\right)^2}{\eta^3} &\leq \frac{\left(\arccos\left(\frac{\nu'}{k}\right)\right)^2}{\eta^3(k, \nu_1)} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{k\tilde{\eta}\left(\frac{\nu}{k}\right)}\right)^3 \leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k} \left(1 - \frac{\nu}{k}\right)^{\frac{-3}{2}}\right)^3 \dots \\ &\leq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k} \left(1 - \frac{\nu'}{k}\right)^{\frac{-3}{2}}\right)^3 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{1}{k} \left(k^{\frac{-2}{5}}\right)^{\frac{-3}{2}}\right)^3 = (\text{const.})k^{\frac{-6}{5}} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2} = \frac{1}{\pi\sqrt{k^2 - \nu^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - \nu^2}}\right) > \frac{D}{k}$$

**Remarque 3.2.4.** (*Satisfaction des hypothèses du théorème de Van der Corput*). Comme

$$0 < CK^{\frac{-5}{18}} < \frac{-\partial f_1}{\partial \nu} \leq \frac{1}{2} + O(k^{\frac{-1}{3}})$$

et que

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \nu^2} > \frac{D}{k}$$

alors  $f_1$  satisfait aux hypothèses du théorème de Van der Corput avec

$$\begin{aligned} \sigma &= Ck^{\frac{-5}{18}} \\ \tau &= \frac{1}{2} + O(k^{\frac{-1}{3}}) \\ \mu &= \frac{k}{D} \end{aligned}$$

En dénotant ainsi par  $N_1$  et  $A_1$  respectivement le nombre de points entiers et l'aire du domaine délimité par  $\nu_0 < \nu < \nu_1$  et  $x_0 \leq x \leq f_1(\nu)$  et en

applicant le théorème de Van der Corput,

$$N_1 = A_1 + O(\mu^{\frac{2}{3}}\tau) = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left( f_1(\nu) - \frac{1}{2} \right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}})$$

comme  $\delta = \max\left(\frac{A}{\nu}\right)$ , alors

$$\int_{\nu_0}^{\nu_1} \delta d\nu \leq (\nu_1 - \nu_0) \frac{A}{\nu_0} \leq \frac{\nu_1}{\nu_0} = O(k^{\frac{2}{3}})$$

Aussi, puisque  $\eta_\nu = -\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)$ , que  $k^{\frac{5}{18}} \leq \arccos\left(\frac{\nu}{k}\right)$  pour  $\nu \in (\nu_0, \nu_1)$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{1}{\eta} d\nu &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{1}{\eta} \frac{\eta_\nu}{\eta_\nu} d\nu = \int_{\eta(k, \nu_0)}^{\eta(k, \nu_1)} \frac{d\eta}{\eta \eta_\nu} = \int_{\eta(k, \nu_0)}^{\eta(k, \nu_1)} \frac{d\eta}{-\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right) \eta} = \dots \\ &= \int_{\eta(k, \nu_1)}^{\eta(k, \nu_0)} \frac{d\eta}{\arccos\left(\frac{\nu}{k}\right) \eta} \leq \frac{1}{k^{\frac{5}{18}}} \log\left(\frac{\eta(k, \nu_0)}{\eta(k, \nu_1)}\right) = O(k^{\frac{5}{18}} \log k). \end{aligned}$$

**Remarque 3.2.5.** (correction). Dans l'article, une erreur typographique s'est produite. En effet, il est écrit que  $N_1 = O(k^{\frac{5}{18}} \log k)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left( f_1(\nu) - \frac{1}{2} \right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\ &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left( \frac{\eta}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{a}{\pi\eta} - \delta - \frac{1}{2} \right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\ &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left( \frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4} \right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) + O(k^{\frac{5}{18}} \log k) + O(k^{\frac{2}{3}}) \\ &= \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left( \frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4} \right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \end{aligned}$$

Il est de même pour  $N_2$  en montrant de la même façon que  $f_2$  satisfait aux hypothèses du théorème de Van der Corput. Par conséquent,  $N_1 \leq \Sigma_2 \leq N_2$

et

$$\Sigma_2 = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left( \frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4} \right) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}})$$

Maintenant pour estimer  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , il faut utiliser la monotonicité de  $N_n(k)$ . De façon générale,

$$N_n(k) \leq N_{n-1}(k) \quad \text{pour tout } n, k$$

pour  $\Sigma_3$  comme

$$\Sigma_3 = \sum_{n=\nu_1+\frac{1}{2}}^{[k]} N_n(k) = \sum_{[k-k^{\frac{4}{9}}]+1}^{[k]} N_n(k) \leq \sum_{[k-k^{\frac{4}{9}}]+1}^{[k]} N_{\nu_1-\frac{1}{2}}(k) \leq k^{\frac{4}{9}} N_{\nu_1-\frac{1}{2}}(k)$$

que

$$N_{\nu_1-\frac{1}{2}}(k) = \left[ \frac{\eta(k, k - k^{\frac{4}{9}})}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{A}{n} + \frac{B}{\eta} \right] = O(\eta(k, k - k^{\frac{4}{9}})) = O(k^{\frac{1}{6}})$$

que  $\eta(k, k - k^{\frac{4}{9}}) = k\tilde{\eta}(1 - k^{\frac{-5}{9}})$  et que

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(1 - k^{\frac{-5}{9}}) &< \left( 1 - (1 - k^{\frac{-5}{9}}) \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= k^{\frac{-5}{6}} \\ &\Downarrow \\ \eta(k, k - k^{\frac{4}{9}}) &= k\tilde{\eta}(1 - k^{\frac{-5}{9}}) \\ &< k^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

alors

$$\Sigma_3 = O(k^{\frac{4}{9}} k^{\frac{1}{6}}) = O(k^{\frac{11}{18}})$$

pour  $\Sigma_1$ , il faut télescoper la somme d'abord comme suit

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} N_n(k) \\
&= \left( \nu_0 - \frac{1}{2} \right) N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) + \left( N_1(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) \right) \\
&= \qquad \qquad \qquad + \left( N_2(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) \right) \\
&\qquad \qquad \qquad \cdot \\
&\qquad \qquad \qquad \cdot \\
&\qquad \qquad \qquad \cdot \\
&= \qquad \qquad \qquad + \left( N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) \right) \\
&= \left( \nu_0 - \frac{1}{2} \right) N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) + \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left( N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) \right)
\end{aligned}$$

Maintenant il faut estimer  $N_0(k)$  et  $N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k)$ . Dans le cas de  $N_0(k)$ , comme  $J_0(k) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$ , alors  $N_0(k) = \frac{k}{\pi} + O(1)$  et  $N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) = \frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{1}{3}})$ . par la monotonie de  $N_n(k)$ ,

$$\begin{aligned}
N_n(k) &< N_0(k) \\
&\Downarrow \\
N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) &< N_0(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) \\
&= \frac{k}{\pi} + O(1) - \frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{1}{3}}) \\
&= O(k^{\frac{1}{3}})
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k) + \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k)\right) \\
&= \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{1}{3}})\right) + \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) O(k^{\frac{1}{3}}) \\
&= \frac{k}{\pi} \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) + O(k^{\frac{2}{3}})
\end{aligned}$$

**Remarque 3.2.6.** (*correction*). Des erreurs typographiques pour l'expression de  $\Sigma_1$  se sont produites dans l'article. En effet, il est écrit que

$$\sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} N_n(k) = N_{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k)\right)$$

qui devrait s'écrire

$$\sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} N_n(k) = \left(\nu_0 - \frac{1}{2}\right) N_{\nu_0 - \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\nu_0 - \frac{1}{2}} \left(N_n(k) - N_{\nu_0 - \frac{1}{2}}(k)\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
N(k) &= N_0(k) + 2(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3) \\
&= \frac{k}{\pi} + O(1) + 2 \left( \left( \nu_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{k}{\pi} + O(k^{\frac{2}{3}}) + \int_{\nu_0}^{\nu_1} \left( \frac{\eta}{\pi} - \frac{1}{4} \right) d\nu + \Sigma_3 \right) \\
&= \frac{k}{\pi} + 2\nu_0 \frac{k}{\pi} - \frac{k}{\pi} + 2 \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{\eta}{\pi} d\nu - \frac{2}{4}(\nu_1 - \nu_0) + 2\Sigma_3 + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi} \nu_0 k + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\nu_1} \eta(k, \nu) d\nu - \frac{k}{2} + 2\Sigma_3 + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi} (k\nu_0 + \nu_0 O(k^{\frac{1}{3}})) + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\nu_1} \eta(k, \nu) d\nu - \frac{k}{2} + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_1}^k \eta(k, \nu) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\nu_0} \eta(k, \nu) d\nu + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\nu_1} \eta(k, \nu) d\nu - \frac{k}{2} + \frac{2}{\pi} \int_{\nu_1}^k \eta(k, \nu) d\nu + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^k \eta(k, \nu) d\nu - \frac{k}{2} + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi k^2}{8} \right) - \frac{k}{2} + O(k^{\frac{2}{3}}) \\
&= \frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + O(k^{\frac{2}{3}})
\end{aligned}$$

Ce qui termine l'explication de [KF].

Nous rappelons les lecteurs que spécialement pour la section 3.2 qui s'achève ici, nous avons utilisé  $k$  au lieu de  $\lambda$  et étudier le problème  $\Delta u + k^2 u = 0$  plutôt que  $\Delta u + k u = 0$  et cela dans le but de faciliter les références à l'article [KF]. Pour la section 3.3 qui suit, nous revenons à notre lettre habituelle  $\lambda$  au problème des valeurs propres exprimé sous la forme  $\Delta u + \lambda u = 0$ .



### 3.3 Algorithme pour calculer la fonction de compte $N(\lambda)$

Cette section est très courte et comporte une idée que j'ai eue permettant de calculer la fonction de compte

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$$

efficacement sans avoir à calculer toutes les valeurs propres  $\lambda_j$  telles que  $\lambda_j \leq \lambda$ .

**Remarque 3.3.1.** (*Façon naïve de calculer  $N(\lambda)$* ). Étant donné l'algorithme de la section 2.2 qui détermine la suite  $\{\lambda_j\}_{j=1}^l$  pour un entier  $l$  donné. La façon la plus simple de calculer  $N(\lambda)$  est de calculer  $\{\lambda_j\}_{j=1}^l$  pour un  $l$  suffisamment grand et par la suite de compter combien de valeurs propres  $\lambda_j$  sont inférieures à  $\lambda$ .

#### «Buts» des algorithmes

tant donné un entier strictement positif  $l$ , l'algorithme de la section 2.2 donne  $\{\lambda_j\}_{j=1}^l$ . Étant donné un nombre réel strictement positif  $\lambda$ , l'algorithme de la présente section donne l'entier positif  $N(\lambda)$ . Toutefois de par les remarques précédentes, nous pouvons voir qu'il est possible d'utiliser l'algorithme de la section 2.2 pour évaluer  $N(\lambda)$  et cela a un sens en se rappelant les rappels théoriques de la section 1.1 concernant  $N(\lambda)$ .

**Remarque 3.3.2.** *Les deux algorithmes, celui de la présente section et celui de la section 2.2, ... et  $k = 1, 2, \dots$  où  $n$  et  $k$  sont les paramètres pour les zéros. Les paramètres sont l'ordre ( $n$ ) de la fonction de Bessel et le rang ( $k$ ) du zéro. Dans le cas de l'algorithme de la section 2.2, un ensemble fini PA contenant SOL est déterminé à l'aide du théorème de Courant et SOL est*

obtenu en ordonnant les zéros correspondant aux paires dans PA. Dans le cas de l'algorithme de la présente section, seul la frontière de SOL est évaluée et il n'est pas nécessaire de trouver tous les zéros qui sont plus petits que pour évaluer  $N(\lambda)$ .

L'idée utilise la monotonie des zéros des fonctions de Bessel  $J_\nu(x)$  pour  $x \geq 0$  et  $\nu \geq 0$ . Si  $j_k(\nu)$  dénote le  $k$ e zéro de la fonction de Bessel de  $J_\nu(x)$ , alors ( voir [Wa] ),

$$\begin{aligned} j_k(\nu) &< j_{k+1}(\nu) \\ j_k(\nu) &< j_k(\nu + \nu') \quad \text{pour } \nu' > 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $\Delta$  sur le disque D de rayon 1 correspondent aux carrés des zéros  $j_k(n)$  avec  $k = 1, 2, \dots$  et  $n = 0, 1, \dots$ . En fixant une valeur de  $\lambda$  et en dénotant par  $k_{n,\lambda}$  la valeur entière telle que

$$j_{k_{n,\lambda}}(n) \leq \sqrt{\lambda} \quad \text{et} \quad j_{k_{n,\lambda}+1}(n) > \sqrt{\lambda}$$

alors, par la monotonie des zéros,

$$j_{k_{n,\lambda}}(n) < j_{k_{n+1,\lambda}}(n+1)$$

Il s'agit donc pour chaque ordre  $n$  et  $\lambda$  choisi a priori d'évaluer  $k_{n,\lambda}$  et ainsi en tenant compte de la multiplicité

$$N(\lambda) = k_{0,\lambda} + 2 \sum_{n=1}^N k_{n,\lambda}$$

où

$$N = \max\{n; \text{ telque } k_{n,\lambda} = 1\}$$

**Remarque 3.3.3.** L'ensemble des paires  $(n, k)$  solution du problème dénoté auparavant par SOL est ainsi donc donné par

$$SOL = \{(n, k), k = 1, \dots, k_{n,\lambda}, n = 0, 1, \dots, N\}$$

et

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= 2 \cdot \text{card}(SOL)\{(n, k), n = 1, 2, \dots, N, k = 1, 2, \dots, k_{n,\lambda}\} \\ &\quad + \text{card}(\{(0, k), k = 1, 2, \dots, k_{0,\lambda}\}) \\ &= k_{0,\lambda} + 2 \sum_{n=1}^N k_{n,\lambda} \end{aligned}$$

Dans le présent algorithme qui calcule  $N(\lambda)$ , il n'est donc pas nécessaire d'évaluer tous les zéros associés aux paires dans  $SOL$ , mais seulement les valeurs  $k_{n,\lambda}$  qui déterminent la frontière de  $SOL$ . Ce n'est pas le cas pour l'algorithme de la section 2.2 où il faut tous les évaluer afin de créer  $\lambda_{j=1}^l$  et cela s'explique parce que les buts poursuivis par les deux algorithmes sont différents quoique mathématiquement équivalents par les rappels théoriques de la section 1.1.

### L'algorithme en mots

Les valeurs  $N$  et  $k_{0,\lambda}$  peuvent être trouvées par une méthode quelconque. Soit  $n = 0, 1, \dots$ , alors  $k_{n,\lambda} - k_{n+1,\lambda} \in \{0, 1\}$ . Donc pour trouver  $k_{n+1,\lambda}$  en possédant  $k_{n,\lambda}$  il suffit de tester la validité de l'inégalité suivante

$$jk_{n,\lambda}(n+1) \leq \sqrt{\lambda}$$

Si l'inégalité est vraie, alors  $k_{n+1,\lambda} = k_{n,\lambda}$  sinon  $k_{n+1,\lambda} = k_{n,\lambda} - 1$ , etc. L'algorithme est initialisé avec  $k_{0,\lambda}$  et l'algorithme procède en reculant et montant jusqu'à  $N$ . L'algorithme en Maple est annexé à la fin de ce mémoire.

**Remarque 3.3.4.** (*Précision requise dans l'algorithme*). Si nous voulons calculer  $N(\lambda)$ , alors nous voulons trouver tous les zéros  $j_k(n) \leq \lambda$ . Donc par la remarque A.5.1 avec  $\lambda = 9.00 \cdot 10^{08}$  qui est la valeur maximale de  $\lambda$  apparaissant dans le tableau 3.1, il faut demander  $\lceil \log(9.00 \cdot 10^{08}) \rceil + 1 = 10$  décimales de précision. Également, le lecteur peut se référer à l'annexe A.5 pour plus d'information.

### 3.3.1 Quelques résultats pour les valeurs de la fonction de compte $N(\lambda)$

Voici quelques résultats pour les valeurs de la fonction de compte. Il est intéressant de constater que pour les valeurs de  $\lambda = 1.10^2, \dots, 4.10^6$  dans le tableau qui suit, les valeurs de  $N(\lambda)$  coïncident avec les valeurs retrouvées dans la liste des valeurs propres calculées par le premier algorithme. Par exemple à l'aide de la liste donnée à l'hyperlien précédent, la valeur propre  $\lambda_{998978}$  est la dernière valeur propre plus petite que  $4.00.10^6$  et le rang correspond également à la valeur apparaissant dans le tableau qui suit.

Voici donc quelques valeurs de la fonction de compte

$\lambda$	$N(\lambda)$	$\lambda$	$N(\lambda)$	$\lambda$	$N(\lambda)$
1.00E+02	21	4.00E+04	9905	7.00E+06	1748690
2.00E+02	42	5.00E+04	12387	8.00E+06	1998600
3.00E+02	67	6.00E+04	14876	9.00E+06	2248481
4.00E+02	92	7.00E+04	17360	1.00E+07	2498404
5.00E+02	115	8.00E+04	19852	2.00E+07	4997783
6.00E+02	142	9.00E+04	22345	3.00E+07	7497255
7.00E+02	160	1.00E+05	24842	4.00E+07	9996841
8.00E+02	187	2.00E+05	49872	5.00E+07	12496477
9.00E+02	209	3.00E+05	74722	6.00E+7	14996075
1.00E+03	232	4.00E+05	99679	7.00E+07	17495807
2.00E+03	478	5.00E+05	124633	8.00E+07	19995483
3.00E+03	725	6.00E+05	149606	9.00E+07	22495362
4.00E+03	972	7.00E+05	174588	1.00E+08	24994959
5.00E+03	1214	8.00E+05	199546	2.00E+08	49992941
6.00E+03	1458	9.00E+05	224520	3.00E+08	74991365
7.00E+03	1706	1.00E+06	249494	4.00E+08	99989990
8.00E+03	1952	2.00E+06	499298	5.00E+08	124988741
9.00E+03	2206	3.00E+06	749151	6.00E+08	149987791
1.00E+04	2456	4.00E+06	998978	7.00E+08	174986827
2.00E+04	4925	5.00E+06	1248914	8.00E+08	199985791
3.00E+04	7415	6.00E+06	1498757	9.00E+08	224984997

Table 3.1. Valeurs de  $N(\lambda)$  pour  $d \cdot 10^p$  avec  $d = 1, \dots, 9$  et  $p = 2, \dots, 8$ .

# Conclusion

En vue de la difficulté des calculs liés aux valeurs propres du laplacien et aux fonctions propres associées, l'étude asymptotique sert à :

1. Estimer les grandes valeurs propres (les valeurs propres ou voisinage de  $+\infty$ ). exemple loi de Weyl.
2. Distribution des valeurs propres sur des intervalles donnés.
3. Comportement des fonctions propres (croissances, zéros des fonctions propres), bornes supérieures et inférieures de ces fonctions.

# Bibliographie

- [Av] V. Avakumovic, Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Math. Z., **65**, 1956
- [Be] M. Berger, A Panoramic View of Riemannian Geometry, Springer-Verlag, 2003
- [FaLoOl] B.R. Fabijonas, D.W. Lozier, and F.W.J. Olver, Computation of Complex Airy Function and Their Zeros Using Asymptotics and the Differential Equation, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. **30**, No. **4**, Pages **471-490**, 2004
- [HiCo] D. Hilbert and R. Courant, Methods of mathematical physics, Vol. **1**, Interscience Publishers Inc., 1953
- [Ho] L. Hormander, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., **121**, Pages **193-218**, 1968
- [Iv] V.Ya. Ivrii The second term of the spectral asymptotics for a Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary, Functional Anal. Appl., **14**, no. **2**, Pages **98-106**, 1980
- [KF] N.V. Kuznetsow and B.V. Fedosov, An asymptotic formula for the eigenvalues of a circular membrane, Differentsial'nye Uravneniya, Vol.

1, No. 12, Pages 1682-1685, 1965

[LaWo] T. Lang and R. Wong, "Best possible" upper bounds for the first two positive zeros of the Bessel function  $J_\nu(x)$  : The infinite case, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 71, Pages 311-329, 1996

[Le1] B.M. Levitan, On the asymptotic behavior of the spectral function of a selfadjoint differential equation of the second order, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 16, Pages 325-352, 1952

[Le2] B.M. Levitan, On the asymptotic behavior of the spectral function of a selfadjoint differential equation of the second order and on expansion in eigenfunctions, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 17, Pages 331-364, 1953

[Le3] B.M. Levitan, On the asymptotic behavior of the spectral function and on expansion in eigenfunctions of a self-adjoint differential equation of the second order II, Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 19, Pages 33-58, 1955

[Li] M.M. Lipschutz, Differential geometry, Schaum's Outlines Series, McGraw- Hill, 1969

[Mela] A.D. Melas, On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in  $\mathbb{R}^2$ , Journal of Differential Geometry, 35, Pages 255-263, 1992

[Melr] R.B. Melrose, Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary, Geometry of the Laplace operator, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., Pages 257-274, 1980



- [Ol1] F.W.J. Olver, A further method for the evaluation of zeros of Bessel functions, and some new asymptotic expansions for zeros of functions of large order, Proc. Cambridge Philos. Soc., **47**, Pages **699-712**, 1951
- [Ol2] F.W.J. Olver, Some new asymptotic expansions for Bessel functions of large orders, Proc. Cambridge Philos. Soc., **48**, Pages **414-427**, 1952
- [Ol3] F.W.J. Olver, The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter, Phil. Trans. Roy. Soc., **A247**, no. **930**, Pages **307-327**, 1954
- [Ol4] F.W.J. Olver, The asymptotic expansion of Bessel functions of large order, Phil. Trans. Roy. Soc., **A247**, no. **930**, Pages **328-368**, 1954
- [Ol5] F.W.J. Olver, Bessel functions III, Zeros and associated values, Royal Society mathematical Tables, Vol. **7**, The Royal Society, Cambridge, 1960
- [Ol6] F.W.J. Olver, Tables of Bessel functions of moderate or large orders Mathematical Tables of National Physical Laboratory, Vol. 6, Her Majesty's Stationnery Office, London, 1962
- [Ol7] F.W.J. Olver, Error bounds for asymptotic expansions in turning-point problems, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. **12**, No. **1**, Pages **200-214**, 1964
- [Ol8] F.W.J. Olver, Asymptotics and special functions, Academic Press, New York, 1974

- [Po] G. Polya, On the eigenvalues of vibrating membranes, Proc. London Math. Soc. (3) **11**, Pages **419-433**, 1961
- [QuWo] C. K. Qu et R.Wong, "Best possible" upper and lower bounds for the zeros of the Bessel function  $J_\nu(x)$ , Transactions of the American Mathematical Society, Vol. **351**, No. **7**, Pages **2833-2859**, 1999
- [RaRa] J.-E. Rakotoson et J.-M. Rakotoson, Analyse fonctionnelle appliquee aux equations aux derivees partielles, Presses Universitaires de France, Paris, 1999
- [Ro] M.D. Rogers, Partial fractions expansions and identities for products of Bessel functions, Journal of Mathematical Physics, **46**, **043509**, 2005
- [Sa] S. Saks, Theory of the integral, English translation of the second revised edition by L.C. Young. Two additional notes from Prof S. Banach. Bibliography. Index. Notations. xv+**343**pp. Dover Publications Inc., New York, 1964
- [Sh] M. Shubin, Partial differential equations, a paraitre
- [Wa] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1944
- [Wi] M. Willem, Analyse fonctionnelle elementaire, Cassini, Paris, 2003