République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année: 2015

Théorème de Riemann-Roch et applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

Ouda Belkhir [1]

Sous la direction de

Encadreur : Mr K. Djerfi

Soutenue le 16 Juin 2015 devant le jury composé de

R. Nasri	MCA	UniV-Saïda	Président
K. Djerfi	MAA	Univ-Saïda	Rapporteur
S. Ouakkas	MCA	Univ-Saïda	Examinateur
D. Djebbouri	MAA	Univ-Saïda	Examinateur

1. ouda.math@gmail.com

Dedicace

Avec une grande modestie et respect je dédie ce travail à :

La fleur de ma vie, a la femme qui ma mise au monde, à celle qui ma donnée la joie de vivre, à celle qui ma accompagnée nuit et jour depuis mes premiers pas par son amour et son âme pur, A mon adorable **maman**.

Le personne le plus chers à mon coeur, tout ma vie, à celui qui donné leur confiance et ma encouragé beaucoup pour suivre le chemin de scienre, à mon cher **père**.

Ma cher soeur Halima qui ma soutenue beacoup.

Mes frères Mohamed, Hamza, Abdelkader, Tayeb, Smail, et les petits (Imadaddine maddah, Ramzi).

Mes soeurs : Fatima, le petite jihane, et Nourhan.

Tous mes amis : Fatima, Fatna, Zohra.

Mon encadreur K.Djerfi, le docteur S.Ouakkas.

Tout qui prend une place dans mon coeur.

Ouda

Remerciments

Tout d'abord, je remercie dieu tout puissant de m' avoir donnés le courage et la force pour réaliser ce modeste travail.

Je tient avant tout à remercier très vivement la personne sans la quelle tout ceci n'existerait pas ; il m'importe en effet d'exprimer toute mes gratitudes à mon Encadreur Djerfi. K non seulement pour avoir accepté de m'encadré et avoir supporté mes humeurs, mais surtout pour m'avoir insufflé le désir et la passion de la recherche.

je remercie vivement les membres jurys : Docteur Nasri.R, D.Djebbouri et Docteur Ouakas.S d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail.
Et pour tous les enseignants de la promotion Math spécialité Analyse, Géometrie et Aplications surtout Docteur Ouakas. S qui ma aide beaucoup dans ce travail.
Mes remerciement vont aussi à toute ma promotion Math et je leurs souhaite bon courage
Enfin, je remercie tous ceux qui ont eu à participer de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

O. Belkir

Table des matières

Introduction

Le lecteur est prié de goûter à cette introduction avec sagesse. Il ne doit pas s'attendre à en digérer le contenu d'un seul coup et doit être réceptif à l'idée de n'en découvrir que la saveur. Il restera ensuite suffisamment de pages à ce mémoire pour la digestion.

Une surface de Riemann est un espace topologique localement homéomorphe au plan complexe via ce qu'on appelle des cartes. Lorsque deux cartes s'entrecoupent, on veut que les changements de cartes soient holomorphes.

Un diviseur sur une surface de Riemann X est une combinaison linéaire formelle de points

$$D = \sum_{p \in X} D(p)p$$

à coefficients entiers localement finie, c'est-à-dire telle que tout compact $K \subset X$ ne contient q'un nombre fini de points p tels que $D(p) \neq 0$.

Si f est une fonction méromorphe $X \to \mathbb{C}$, on note $\mathfrak{D}(f)$ le diviseur qui contient l'information sur l'ordre des zéros et des pôles de f. On dira que deux diviseurs D et D' sont équivalents si $D' - D = \mathfrak{D}(f)$ pour une fonction méromorphe f sur X.

Un problème qui intéressait Bernhard Riemann $(1826 - 1866)$ était de trouver tous les diviseurs positifs équivalents à un diviseur D sur une surface compacte. Pour y arriver, il cherchait à calculer la dimension de l'espace vectoriel complexe

$$L(D) = \{f / f \text{ méromorphe sur} X \text{ et } \mathfrak{D}(f) + D \geq 0\},$$

la relation $\geq$ se vérifiant point par point. Riemann prouva que, pour X compact,

$$\dim L(D) \geq deg(D) + 1 - g$$

où g est le genre de la surface X et $deg(D) = \sum D(p)$. Son étudiant Gustav Roch $(1839 - 1866)$ compléta le théorème q'on nomme maintenant le théorème de Riemann-Roch pour les courbes algébriques :

$$\dim L(D) - \dim L(K-D) = deg(D) + 1 - g$$

où K est un certain diviseur appelé diviseur canonique.

À la suite de Riemann et Roch, plusieurs géomètres tentèrent de généraliser cette égalité.

Les diverses tentatives furent infécondes.

En 1949, André Weil (1906 – 1998) fait découvrir à la communauté mathématique qu'on peut interpréter le concept classique de diviseur en étudiant les fibrés en droites holomorphes.

À chaque diviseur D sur X, on associe un fibré en droites holomorphes sur une surface de Riemann un diviseur sur cette même surface. La correspondance entre diviseurs et fibrés en droites est très riche car $L(D) \cong \mathcal{L}_D(X)$, où $\mathcal{L}_D(X)$ représente l'espace des sections du fibré L_D.

C'est grâce aux fibrés en droite qu'on saura généraliser le théorème de Riemann-Roch. Le rythme de l'histoire commence à s'accélérer.

En 1950−1951, Henri Cartan prend conscience que la notion de faisceau, qui sera expliquée dans le deuxièmme chapitre de ce mémoire, est très utile pour exprimer élégamment certains résultas de géométrie analytique obtenus dans les vingt années qui venaient de s'écouler. Poussé par Jean-Pierre Serre, il montre que la cohomologie des faisceaux peut mener à des généralisations et des simplifications.

Les calculs se simplifient effectivement, le faisceau $\mathcal{L}_D$ des sections de L_D est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_D$ où

$$\mathcal{O}_D(U) = \{f |\, f \text{ méromorphe sur } U \quad \text{et} \quad \forall p \in U \quad \mathrm{ord}_p f + D(p) \geq 0\},$$

C'est Pierre Dolbeaut qui met le feu aux poudres en janvier 1953 avec son « Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes» publié dans les Compte-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

Dans ces notes, Dolbeaut utilise un complexe de formes différentielles $\mathbb{C}^\infty$ qu'il sépare en parties holomorphes et anti-holomorphe.

Une spécialisation de ses résultas en dimension 1 complexe nous mène au Lemme de Dolbeaut qui nous permettra de montrer que $H^q(X, \mathcal{O}_D) = 0$ pour $q \geq 2$.

Serre, guidé par ses résultats et ceux de Cartan sur les variétés de Stein et par le fait que $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}_D)$ s'est mis en quête d'appliquer la cohomologie des faisceaux au problème Riemann-Roch.

On écrira donc en langage moderme

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = deg(D) + 1 - g$$

Serre montre aussi quelques moins plus tard son fameux théorème de dualité qui stipule, en quelque sorte, que l'pparition du diviseur canonique K dans les travaux de Roch n'est pas fortuite.

Au printemps 1953, René Thom publie quatre notes dans les Comptes-Rendus où il résume les résultats d'un papier qu'il publiera l'année suivante.

Friedrich Hirzebruch, passant alors l'année à l'Institute for Advanced Studies à Princeton, prit connaissance de ces résultats et fut convaincu que ça lui permettrait de résoudre une certaine conjecture due à Todd.

Il parvint à montrer ce qu'il voulait en décembre de cette même année et avec sa généralisation de la notion de genre, il déduisit un théorème de Riemann-Roch généralisé pour les variétés algébriques.

Le théorème de Riemann-Roch sous toutes ses formes se retrouve encore aujourd'hui au coeur des mathématiques. Dans presque tous les exposés, la formule de Riemann-Roch jouait un rôle clef. Jaimerais donner l'occasion aux lecteurs de ce mémoire d'apercevoir au moins une fois dans leur vie la pointe de l'iceberg.

Ce mémoire expliquera donc le théorème de Riemann-Roch classique sous une forme faisceautique. Nous verrons ensuite comment les fibrés en droites apparaissent dans cette histoire.

Chapitre 1

Généralités sur les surfaces de Riemann

1.1 Définitions et propriètés

Pour lire ce mémoire, il est fort probable qu'un premier cours d'analyse complexe et un premier cours de topologie, ou au moins une idée claire du concept d'espace topologique, soient suffisants. Ce bref chapitre fixe certaines définitions avec lesquelles nous allons travailler tout au long ce mémoire. Il ne s'agit que d'un survol rapide d'éléments essentiels à la compréhension.

1.1.1 Surfaces de Riemann

Définition 1.1.1. *Une surface de Riemann est un espace topologique connexe séparé X muni d'un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ vérifiant :*

1. *U_i est un ouvert de X.*
2. *$\bigcup_{i \in I} U_i = X$.*
3. *$\varphi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{C}$ est un homéomorphisme, avec V_i un ouvert de $\mathbb{C}$,*
4. *$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est une application biholomorphe.*

Remarque 1.1.1. *Une application $\varphi : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ est dite biholomorphe si elle est bijective, holomorphe et l'application inverse φ^{-1} est aussi holomorphe.*

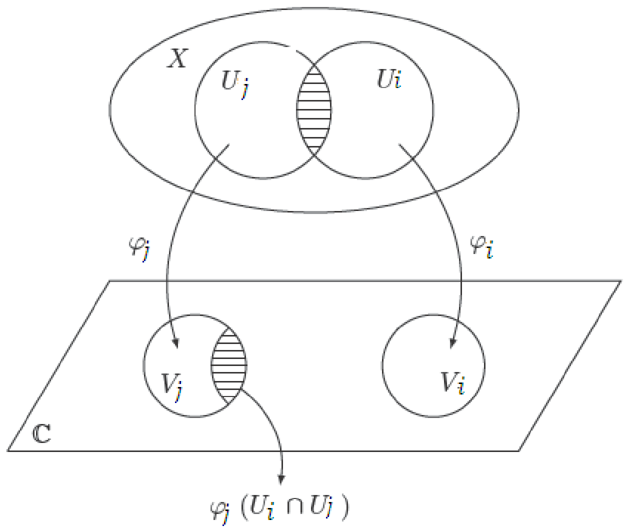

FIGURE 1.1 –

Exemples

1. $X = \mathbb{C}$ est une surface de Riemann, on l'appellera droite complexe, ou droite complexe affine, l'atlas défini par $A = \{\mathbb{C}, Id_{\mathbb{C}}\}$.
2. X un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $A = \{X, Id\}$. Deux cas particulièrement intéressant :
   - Disque unité $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$,
   - Demi-plan supérieur (ou de Poincaré, ou hyperbolique, ou de Lobatchevsky)
   $$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; Imz > 0\}.$$
3. $X = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x^2 + y^2 + z^2 = 1\ \}$ est une surface de Riemann et si on note $N(0, 0, 1)$ le pôle nord et $S(0, 0, -1)$ le pôle sud, alors l'atlas sur $X = S^2$ est défini par : $\mathrm{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ où $\quad U_1 = X\backslash\{N\}, \quad U_2 = X\backslash\{S\}$ et
$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \varphi_1(x, y, z) = \dfrac{x}{1 - z} + i\dfrac{y}{1 - z}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \varphi_2(x,y,z) = \dfrac{x}{1+z} - i\dfrac{y}{1+z}. \end{array}$$

$\varphi_1(z) = \frac{1}{\varphi_2(z)}$

4. La sphère de Riemann, ou droite projective complexe, notée $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{CP}^1$ ou $\bar{\mathbb{C}}$. Comme ensemble, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
   La structure d'atlas est donnée par les deux cartes $\{(U_1, \varphi_1)\}$ et $\{(U_2, \varphi_2)\}$ où
   • $U_1 = \mathbb{C}$ et $\varphi_1 = Id_{\mathbb{C}}$
   • $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \varphi_2(z) = \frac{1}{z} \quad si \quad z \neq 0 \quad et \quad \varphi_2(\infty) = 0.$
   On a $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$ et $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ est biholomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

1.2 Topologie des surfaces

Dans ce chapitre, les surfaces considérés sont connexes, compactes, orientables.
On montre qu'on peut les classer à homéomorphisme prés en définissant :

Définition 1.2.1. *Une surface X est dite orientable s'il existe un atlas $(f_\alpha : U_\alpha \tilde{\to} \mathrm{R}^2)_\alpha$ tel que les $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ préservent l'orientation de* R^2.

Proposition 1.2.1. *Toute surface de Riemann est orientable.*

Preuve Voir [7]

Définition 1.2.2. *(Homotopie)*
Soit f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace E dans un espace F. L'application f_0 est dite homotope à l'application f_1 s'il existe une application continue $f : E \times [0,1] \longrightarrow F$ telle que

$$\forall x \in E \quad f(x,0) = f_0(x) \quad et \quad f(x,1) = f_1(x).$$

Propriètés

1. La relation "f_0 est homotope à f_1" est une relation d'équivalence dans l'ensemble des applications continues de E dans F.
2. Deux applications sont dites homotopes si elles ont la même classe d'homotopie.

3. Si $f_0, f_1 : E \longrightarrow F$ sont deux applications continues et homotopes et si $g_0, g_1 : F \longrightarrow G$ sont deux applications continues et homotopes, alors
   $g_0 \circ f_0$ et $g_1 \circ f_1 : E \longrightarrow G$ sont homotopes.

Définition 1.2.3. *Deux espaces E et F ont même type d'homotopie s'il existe deux applications continues $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ telles que les deux applications $g \circ f : E \longrightarrow E$ et $f \circ g : F \longrightarrow F$ soient respectivement homotopes aux applications Id_E et Id_F*

Définition 1.2.4. *(Chemin) Un chemin d'un espace E est une application continue*

$$\gamma : I = [0,1] \longrightarrow E$$

où $\gamma(0)$ est l'origine du chemin γ et $\gamma(1)$ est l'extrémité du chemin γ.
Deux chemins γ_1 et γ_2 ayant même origine x et même extrémité y sont dits homotopes s'il existe une application continue $h : I \times I \longrightarrow E$ telle que :

i) $h(t,0) = \gamma_1(t)$ *et* $h(t,1) = \gamma_2(t), \quad \forall t \in I,$

ii) $h(0,s) = x$ *et* $h(1,s) = y, \quad \forall s \in I.$

Définition 1.2.5. *(genre) le genre d'une surface de Riemann est "le nombre de trou de cette surface".*
On définit le trou pour une surface en utilisant la notion de "classe d'homotopie" dans cette surface.
-Pour une surface sans trou S^2 un chemin fermé est homotope a un point donc il existe une seule classe d'homotopie des chemins fermés.
-Pour une surface avec un trou, " comme le tore umidimentionnel" il existe deux classes d'homotopie des chemins fermés.
Donc par recurrence le genre $g =$ le nombre de classes d'homotopie -1.

Définition 1.2.6. *(Pôle) Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $U \setminus \{p\}$ d'une surface de Riemann et s'il existe une carte (V, z) centrée en p (c'est-à-dire $z(p) = 0$) telle que $f(z) = \sum_{n \geq k_p} a_n z^n$ pour un entier $k_p < O$ avec $a_{k_p} \neq 0$, on dit que p est un pôle d'ordre k_p de f*

1.3 Fonctions holomorphes sur les surfaces de Riemann

Définition 1.3.1. *Soient X une surface de Riemann, W un ouvert de X et $p \in W$. Une fonction $f : W \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $p \in W$ s'il existe une carte (U, φ) où $p \in U$, telle*

que $f \circ \varphi^{-1}$ *soit holomorphe en* $\varphi(p)$.
f *est dite holomorphe sur* W *si elle est holomorphe en tout point de* W.

Notation
L'ensemble des fonctions holomorphes sur $W \subset X$ est noté par $O(W)$ ou bien $O_X(W)$.

Théorème 1.3.1. *Soit* X *une surface de Riemann compacte, et soit* $f : X \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe. Alors* f *est constante.*

Démonstration. voir[1]

Définition 1.3.2. *Soient* X *et* Y *deux surfaces de Riemann et* $p \in X$. *Une application continue* $f : X \to Y$ *est dite holomorphe en* p *s'il existe une carte* (U, φ) *de* X *avec* $p \in U$, *et une carte* (V, ψ) *de* Y *avec* $f(p) \in V$, *telle que* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *sont holomorphe en* $\varphi(p)$.

- $f : X \longrightarrow Y$ est dite holomorphe sur $W \subset X$ si elle est holomorphe en tout point de W.
- $f : X \to Y$ est biholomorphe si elle est bijective et si f, f^{-1} sont holomorphes.
- Deux surfaces de Riemann X et Y sont dites isomorphes s'il existe une fonction biholomorphe $f : X \longrightarrow Y$

Théorème 1.3.2. *(d'uniformisation) Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à* $\mathbb{C}, \bar{\mathbb{C}}$ *ou* $\mathbb{D}$.

Démonstration. Voir [7]

Remarque

. Toute surface de Riemann simplement connexe compacte est biholomorphe à $\bar{\mathbb{C}}$.

Théorème 1.3.3. *Soient* X, Y *deux surfaces de Riemann. Soit* $f : X \to Y$ *une fonction holomorphe non constante.*
Si X *est compacte, alors* f *est une surjection et* Y *est aussi comapacte.*

Preuve
Comme f est une fonction holomorphe et X est un ouvert, alors $f(X)$ est un ouvert, (Théorème de l'application ouverte de banach).
D'autre part, en utilisant le fait que X est compacte, on déduit que $f(X)$ est compacte d'où

$f(X)$ est fermé.
Donc $f(X)$ est à la fois une partie ouverte et fermeé de Y or Y est connexe, ce qui nous donne $f(X) = Y$, il suit que f est surjective et $Y = f(X)$ est compacte.

Proposition 1.3.1. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante.*

i) *Si $p \in X$, il existe un entier $d \in N^*$ et φ une carte holomorphe centrée en p, telle que $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, soit $f = \varphi^d$.*
L'entier $d = deg_p(f)$ ne dépend que de f et de p, et s'appelle le degré de f en p.
-On l'appelle aussi multiplicité de f en p.
- On a $deg_p(f) = 1$ si seulement si $Df(p) \neq 0$.

ii) *Pour tout $q \in f(X) \backslash \{f(p)\}$ assez proche de p, on a $card((f)^{-1}(\{q\} \cap U)) = deg_p(f)$. En particulier, f est ouverte.*

iii) *Un point $p \in X$ tel que $Df(p) = 0$ ou de façon équivalente $deg_p(f) \geq 2$ est un point critique, ou point de ramification, leur ensemble est noté $Crit(f)$ ou $R(f)$.*
Cet ensemble est discret et fermé, ou de façon équivalente localement fini c'est-à-dire qu'il rencontre tout compact en un ensemble fini.

Démonstration.

i) Soit φ une carte holomorphe centrée en p. Alors $g = f \circ \varphi^{-1}$ est une fonction holomorphe définie au voisinage de 0 et telle que $g(0) = 0$. Donc

(1) g est identiquement nulle.

(2) il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $g(z) = z^d h(z)$ avec h holomorphe et $h(0) \neq 0$.

Dans le cas (1), f est localement constante en p, et dans le cas (2), f n'est canstante dans aucun ouvert contenu dans U.
Soit E l'ensemble des points vérifiant le cas (1). C'est un ouvert, et si $q \in \bar{E}, q$ tout voisinage de q contient un ouvert où f est egale à $f(p)$, donc q ne vérifie pas le cas (2), donc $q \in E$, alors E est fermé.
Par connexité, $E = \emptyset$ ou X, et dans le second cas f est canstante. Comme f n'est pas canstante, $E = \emptyset$.
On est donc toujours dans le cas (2). La fonction holomorphe h, qui est non nulle en 0, a une racine d-ième holomorphe k au voisinage de 0, on a $g(z) = G(z)^d$, où $G(z) = zk(z)$ est holomorphe.

De plus $G'(0) = k(0) \neq 0$, donc G est localement un biholomorphisme, donc $\psi = G^{-1} \circ \psi_0$ est une carte holomorphe centrée en $f(p)$.
Finalement, on a $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, donc d a la propriété annoncée.
Pour montrer que d est unique, on observe que c'est le plus petit entier tel que $(f \circ \varphi^{-1})^{(d)}(0) \neq 0$, et que cette propriètè est indépendante du choix des cartes holomorphes centrées φ et ψ. En particulier, $d = 1$ si seulement si $(\psi \circ f\varphi^{-1})' \neq 0$, soit $Df(p) \neq 0$. L'unicité résultera aussi de (ii).

(ii) Ces propriètés sont évidentes pour l'application $z \mapsto z^d$ au voisinage de 0, donc elles sont aussi vraies pour f.

(iii) Si $p \in R(f)$ et U est un voisinage sur lequel on a $\psi \circ f = \varphi^d$, on a $R(f) \cap U = \{p\}$ puisque la dérivée de z^d est non nulle hors de 0 donc $R(f)$ est discret. De plus, la caractérisation $D(f)(p) = 0$ montre qu'il est fermé. Points de ramification, points de branchement.
Les points p tels que $deg_p(f) > 1$ sont d'habitude appelés points de ramification. Leurs image sont les points de branchement (branch points), on notera leur ensemble $B(f)$.

Définition 1.3.3. *(Points de ramification, points de branchement).*
Les points p tels que $deg_p(f) > 1$ sont appelés points de ramification. Leur image sont les points de branchement (branch points), on notera leur ensemble $B(f)$.

1.3.1 Applications holomorphes

Définition 1.3.4. *Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une application $f : X \to Y$ est holomorphe si elle est continue et si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe pour tout couple (φ, ψ) de cartes holomorphes de X et de Y.*
Il est clair qu'il suffit que ce soit vrai pour φ et ψ dans des atlas holomorphes, pas forcément maximaux.
L'application f est biholomorphe si elle est holomorphe, bijective et d'inverse holomorphe.

Proposition 1.3.2. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann.*

i) Soit $p \in X$, et soit ψ une carte holomorphe centrée en $f(p)$. Il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et une carte holomorphe centrée φ en p, tels que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, soit $\psi \circ f = \varphi^d$.
L'entier $d = deg_p(f)$ ne dépend que de f et de p, et s'appelle le degré de f en p.

On l'appelle aussi multiplicité de f en p.
On a $deg_p(f) = 1$ si et seulement si $Df(p) \neq 0$.

ii) Pour tout $q \in X \setminus \{f(p)\}$ assez proche de p, on a $car(f^{-1}(\{q\}) \cup U) = deg_p(f)$. En particulier, f est ouverte.

iii) L'ensemble des points de ramification

$$R(f) = \{p \in X \mid deg_p(f) \geq 2\} = \{p \in X \mid Df(p) = 0\}$$

est discret et fermé, ou de façon équivalente localement fini. Son image $B(f)$ est l'ensemble des points de branchement.

Preuve. Voir[10]

1.3.2 Fonctions méromorphes

Définition 1.3.5. *Soit X une surface de Riemann. Une fonction méromorphe sur X est une fonction holomorphe f définie sur $X \backslash P$ où P est un sous-ensemble localement fini, et qui a un pôle au voisinage de chaque point de P.*

Remarque 1.3.1. *Soit $f : X \backslash P \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe, à f on associe une application holomorphe*

$$\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

en prolongeant f par ∞ sur P.
L'application $f \mapsto \tilde{f}$ est une bijection entre les fonctions méromorphes sur X et les applications holomorphes de $X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non identiquement égale à ∞.

Fibré tangent

Rappels : Soit X une surface différentiable.
Si $p \in X$, un vecteur tangent en p est une classe d'equivalence d'objets de la forme (p, φ, v) où $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ est une carte définie au voisinage de p et $v \in \mathbb{R}^2$, avec

$$(p, \varphi_1, v_1) \sim (p, \varphi_2, v_2) \Leftrightarrow v_2 = D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)).v_1$$

On note T_pX l'ensemble de ces vecteurs tangents, appelé espace tangent en p.
Il est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux (plan réel)

en posant

$$\lambda[(p,\varphi,v)]+\mu[(p,\varphi,\omega)]=[(p,\varphi,\lambda v+\mu\omega)]. \tag{1.1}$$

Le fibré tangent est la réunion disjointe $TX=\bigcup_{p\in X}T_pX$.
Il est muni de la projection naturelle $\pi : TX \to X$ et d'un atlas $(\Phi : \pi^{-1}(U)\to V\times\mathbb{R}^2)$ tel que $pr_1\circ\Phi=\varphi\circ\pi$ où φ est une carte, $pr_2\circ\Phi : T_pX\to\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-linéaire, et

$$\Phi_2\circ\Phi_1^{-1}(z,v)=(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1})(z),D(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(z)).v.$$

Si X est orientée, on se restreint aux cartes orientées et T_pX est alors un plan réel orienté.

Cas d'une surface de Riemann

. Suppossons maintenant que X est une surface de Riemann.
On définit alors T_pX comme l'ensemble des classes d'équivalence $[\varphi,v]$, où cette fois φ est une carte holomorphe définie au voisinage de $p, v\in\mathbb{C}$, avec

$$(p,\varphi_1,v_1)\sim(p,\varphi_2,v_2)\Leftrightarrow v_2=(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1})'(\varphi_1(p)).v_1$$

La formule (1.1) où cette fois λ et μ sont dans $\mathbb{C}$ le munit naturelement d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension un ou droite complexe.
Le fibré tangent est défini de la même façon, il est muni de la projection π et d'un atlas $(\Phi : \pi^{-1}(U)\to V\times\mathbb{C})$ tel que $pr_1\circ\Phi=\varphi\circ\pi$ où φ est une carte holomorphe, $pr_2\circ\Phi : T_pX\to\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}-$linéaire, et

$$\Phi_2\circ\Phi_1^{-1}(z,v)=(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1})(z),(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1})'(z)).v$$

Structure presque complexe.
Identifant $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ on a une application naturelle de T_pX avec cette définition «complexe» sur T_pX avec la définition «réelle», qui est une bijection.
La multiplication par i dans T_pX apparaît alors comme une structure complexe sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel T_pX, c'est-à-dire un élément $J_p\in End_R(T_pX)$ tel que $J_p^2=-Id_{T_pX}$.
De plus, J_p dépend de façon C^∞ de p c'est-à-dire que l'application $(p,v)\mapsto(p,J_pv)$ est C^∞. Une telle application $p\mapsto J_p$ est appelée structure presque complexe sur la surface différentiable X.
On peut aussi la voir comme un difféomorphisme J de TX qui préserve chaque fibre, est linéaire et vérifie $J^2=-Id$.

Expression dans une carte holomorphe.

Soit $z = x + iy$ une carte holomorphe, on a dans la base$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de T_pX :

$$J(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}, J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

On en déduit

$$dx \circ J = -dy,\, dy \circ J = dx.$$

1.4 Formes différentielles

Rappels. Si X est une surface différentiable, on peut définir l'algèbre différentielle $\Omega^*(X,\mathbb{R}) = \Omega^0(X,\mathbb{R}) \oplus \Omega^1(X,\mathbb{R}) \oplus \Omega^2(X,\mathbb{R})$ des formes différentielles de classe C^∞.

Rappelons q'une k-forme différentielle est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $k-$linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p c'est-à-dire que si φ est une carte C^∞, $(p, v_1, \cdots, v_k \mapsto \alpha_p(T\varphi)^{-1}(v_1), \cdots, (T\varphi)^{-1}(v_k))$ est C^∞.

Pour $k = 1$, on peut aussi la considérer comme une fonction C^∞ de TX dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire sur chaque fibre T_pX.

Les formes à support compact seront notées $\Omega^*_c(X,\mathbb{R})$.

Puisqu'on est sur une surface, k prend les valeurs $0, 1$ et 2. Concrètement :

• une 0-forme $f \in \Omega^0(X,\mathbb{R})$ n'est autre qu'une fonction C^∞ de X dans $\mathbb{R}$

• une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(X,\mathbb{R})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}-$linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p

• une 2-forme $\omega \in \Omega^2(X,\mathbb{R})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antysymétrique $\omega_p : T_pX \to \mathbb{R}$, dépendant de façon C^∞ de p

Dans une carte de classe C^∞

$\varphi = (x, y) : U \to \mathbb{R}^2)$, on peut écrire

$\alpha = g(x, y)dx + h(x, y)dy$, $\omega = k(x, y)dx \wedge dy$ où g, h et k sont des fonctions C^∞ sur $\varphi(U)$.

Noter que le signe de k (élément de $\{-1, 0, 1\}$) en tout point ne dépend pas de la carte holomorphe, on l'appele signe de ω.

On a de plus le produit extérieur $\wedge : \Omega^1(X,\mathbb{R}) \times \Omega^1(X,\mathbb{R}) \to \Omega^2(X,\mathbb{R})$, et la différentielle d qui envoie $\Omega^0(X,\mathbb{R})$ dans $\Omega^1(X,\mathbb{R})$ et $\Omega^1(X,\mathbb{R})$ dans $\Omega^2(X,\mathbb{R})$ et vérifie $d \circ d = 0$.

En coordonnées locales $[g(x, y) = g \circ \varphi, etc]$:

$$(g(x,y)dx+h(x,y)dy)\wedge(g^{'}(x,y)dx+h^{'}(x,y)dy) = (g(x,y)h'(x,y)-h(x,y)g^{'}(x,y)dx\wedge dy \quad (1.2)$$

$$d(f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, d(g(x,y)dx + h(x,y)dy) = (\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y})dx \wedge dy. \tag{1.3}$$

Supposons maintenant que X est une surface de Riemann.

En complexifiant, on obtient l'algèbre différentielle des formes différentielles complexes, une $k-$forme complexe étant la dommée pour tout $p \in X$ d'une forme $k - \mathbb{R}$-linéaire

$$\alpha_p : T_pX \to \mathbb{C},$$

dépendant de façon C^∞ de p.

On obtient $\Omega^*(X,\mathbb{C}) = \Omega^0(X,\mathbb{C}) \oplus \Omega^1(X,\mathbb{C}) \oplus \Omega^2(X,\mathbb{C})$, où

• une 0-forme $f \in \Omega^0(X,\mathbb{C})$ n'est autre qu'une fonction C^∞ de X dans $\mathbb{C}$

• une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}-$linéaire $\alpha_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p

• une 2-forme $\omega \in \Omega^2(X,\mathbb{C})$ est la donnée pour tout $p \in X$ d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antysymétrique $\omega_p : T_pX \to \mathbb{C}$, dépendant de façon C^∞ de p

Les formes complexes à support compact seront notées $\Omega^*_{\mathbb{C},c}(X)$.

Dans une carte holomorphe

$$\varphi = z = x + iy : U \to \mathbb{C},$$

on a $\alpha = gdx + hdy$ et $\omega = kdx \wedge dy$, où cette fois g, h et k sont dans $C^\infty(U,\mathbb{C})$, et les formules (1.2) et (1.3) restent valables.

Nous allons exprimer tout cela en remplaçant x, y par z et $\bar{z}$.

On a d'abord

$$\begin{aligned} dx = &\ Re\, dz \\ = &\ \tfrac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \\ dy = &\ Im\, dz \\ = &\ \tfrac{i}{2}(-dz + d\bar{z}), \end{aligned}$$

Donc la $1-$forme $\alpha = g(x,y)dx + h(x,y)dy$ s'ecrit

$$\begin{aligned} \alpha = &\ \tfrac{g(z)-ih(z)}{2}dz + \tfrac{g(z)+ih(z)}{2}d\bar{z} \\ = &\ \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}. \end{aligned}$$

Le terme $\alpha^{1,0}$ est la composante $\mathbb{C}$-linéaire de α et $\alpha^{0,1}$ est la composante anti-$\mathbb{C}$-linéaire.

Ils sont définis de façon intrinsèque :

$$\begin{aligned}\alpha^{1,0} &= \tfrac{1}{2}(\alpha + i\alpha \circ J),\\ \alpha^{0,1} &= \tfrac{1}{2}(\alpha - i\alpha \circ J),\end{aligned}$$

où J est la structure presque complexe, vue comme un difféomorphisme de TX, et α est considérée comme une fonction de TX dans $\mathbb{C}$.
En particulier, si $f(z) \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ on a

$$\begin{aligned}d(f(z)) &= \tfrac{\partial f}{\partial z}\, dz + \tfrac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z\\ &= df^{1,0} + df^{0,1},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial f}{\partial z} &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial f}{\partial x} - i\tfrac{\partial f}{\partial y}),\\ \tfrac{\partial f}{\partial \bar z} &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial f}{\partial x} + i\tfrac{\partial f}{\partial y})\end{aligned}$$

On notera $\Omega^{1,0}(X)$ et $\Omega^{0,1}(X)$ les espaces de formes $\mathbb{C}$-linéaires, et anti-$\mathbb{C}$-linéaires, c'est-à-dire dans une carte holomorphe gdz et $hd\bar z$ respectivement.
Une forme $\alpha \in \Omega^{1,0}(X)(resp. \Omega^{0,1}(X))$ est dite de type $(1,0)(resp(0,1))$.
On a donc une décomposition naturelle

$$\Omega^1(X, \mathbb{C}) = \Omega^{1,0}(X) \oplus \Omega^{0,1}(X)$$

en deux sous-espaces vectoriels complexes, le second étant le conjugué du premier.
En particulier, si $f \in \Omega^0(X, \mathbb{C})$, on note

$$(df)^{1,0} = \partial f, (df)^{0,1} = \bar\partial f$$

.

Dans une carte holomorphe, on a

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$$

$$\bar\partial f = \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z, \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$$

Donc f est holomrphe si et seulement si $\bar\partial f = 0$.
Ensuite, $dz \wedge dz = 0 = d\bar z \wedge d\bar z$ et $dz \wedge d\bar z = -2idx \wedge dy = -d\bar z \wedge dz$, d'où

$$\begin{aligned}d(g(z)dz + h(z)\, d\bar z) &= dg \wedge dz + dh \wedge d\bar z\\ &= (\tfrac{\partial g}{\partial z}\, dz + \tfrac{\partial g}{\partial \bar z}\, d\bar z) \wedge dz + (\tfrac{\partial h}{\partial z} dz + \tfrac{\partial h}{\partial \bar z} d\bar z) \wedge d\bar z\end{aligned}$$

$$= (\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \bar z}) dz \wedge d\bar z.$$

Proposition 1.4.1. *Soit $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$. Alors ω est holomorphe si et seulement si $d\omega = 0$*

Preuve. Voir[10]

Définition 1.4.1. *Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$. Sur une surface de Riemann X une 1-forme holomorphe (resp.méromorphe) sur V est une expresion de la forme $f(z)dz$ avec $f : V \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (resp. méromorphe).*

Remarque 1.4.1. *Il suffit parfois de définir ω dans une seule carte, mais pas toujours. Par exemple, sur $X = \bar{\mathbb{C}}, (U, \varphi) = (\mathbb{C}, Id), \omega_\varphi = e^z dz$ ne se prolomge pas.*
En revanche pour $(U, \varphi) = (\mathbb{C}, Id), \omega_\varphi = dz$ se prolonge sur $\bar{\mathbb{C}}$.

Intégration. Soit X une surface de Riemann.

Définition 1.4.2. *Un chemin sur X est une fonction continue de classe (C^∞ par morceaux $\gamma : [a, b] \to X$).*
Reparamétrisation *Soit $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ continue,C^∞ par morceaux, tel que $\alpha(c) = a$ et $\alpha(d) = b$.*
On obtient un nouveau chemin $\gamma \circ \alpha : [c, d] \to X$: c'est une reparamétrisation de γ.
Soit $\gamma : [a, b] \to X$ un chemin.
On définit $-\gamma : t \mapsto \gamma(a + b - t)$.
Si $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to X$ avec $\gamma_1(1) = \gamma_2(2)$, on définit la concaténation γ de γ_1 et γ_2 par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On peut également couper γ en plusieurs chemins γ_i tels que les γ_i soient de classe C^∞ et chacum dans une carte de X.
Soient X une surface de Riemann, ω une 1-forme holomorphe (méromorphe), γ un chemin sur X, $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_i, \gamma_i \subset U_i, (U_i, \varphi_i)$ carte,
$\gamma_i : [a_{i-1}, a_i] \to U_i.Z(t) = \varphi_i(\gamma_i(t))$.

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(z(t))z^{'}(t)dt$$

Proposition 1.4.2. *L'ntégrale est :*
- *indépendante de la paramétrisation ;*

- $\mathbb{C}-$*linéaire ;*
-

$$\int_{-\gamma}\omega = -\int_{\gamma}\omega;$$

- *si* X, Y *sont deux surfaces de Riemann et* $F : X \to Y, \gamma$ *un chemin sur* $X, F_{*\gamma}$ *est un chemin sur* Y, ω *une* 1*-forme sur* Y*,*

$$\int_{F*\gamma}\omega = \int_{\gamma}F^{*}\omega$$

Résidus d'une 1-forme méromorphe

Définition 1.4.3. *Soit* X *une surface de Riemann, soit* ω *une* 1*-forme méromorphe sur* X *et soit* $p \in X$*. Soit* (U, φ) *une carte centrée en* p*.*

$$\omega = f(z)dz = (\sum_{n=-M}^{+\infty} c_n z^n)dz.$$

$Res_p(\omega) = c_{-1}$.
le résidu est bien défini, c'est-à-dire indépendant de la carte choisie.
En fait,

$$Res_p(\omega) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\omega,$$

où γ *est un chemin simple et fermé autour de* p *dans* X*.*

Définition 1.4.4. $D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est un diviseur sur* X *si support*$(D) = \{p \in X; D(p) \neq 0\}$ *est discret et fermé. On écrit*

$$D = \sum_{p\in X} D(p)p.$$

On note $Div(X)$ *l'ensemble des diviseurs sur* X*.*

Remarque 1.4.2. *En particulier, lorsque* X *est compacte, alors le support d'un diviseur est fini.*

1.4.1 Formes harmoniques

Etoile de Hodge et produit scalaire sur les 1-formes réelles

Définition 1.4.5. *Si X est une surface de Riemann, l'étoile de Hodge $*$ est l'automorphisme de $\Omega^1(X,\mathbb{C})$ défini par $*\alpha = -\alpha \circ J$.*
Dans une carte holomorphe $\varphi = z = x + iy$, on a

$$*dx = dy, *dy = -dx$$

$$\begin{aligned} *dz = & \ dy - idx \\ = & \ -idz \\ , *d\bar{z} = & \ dy + idx \\ = & \ id\bar{z}. \end{aligned}$$

En effet, dans la base $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ de T_pX, on a

$$*dx(\frac{\partial}{\partial x}) = -dx(J\frac{\partial}{\partial x}) = -dx(\frac{\partial}{\partial y}) = 0$$
$$*dx(\frac{\partial}{\partial y}) = dx(J\frac{\partial}{\partial y}) = -dx(\frac{\partial}{\partial x}) = 1.$$

Donc $*dx = dy$,
D'où $*dy = -dx$ puisque $*^2 = -Id$

Définition 1.4.6. *Une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ est dite cofermée si $d(*\alpha) = 0$.*
Si $\alpha = fdx + gdy$ avec $dy = *dx$, cela s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Produit scalaire sur $\Omega^1_c(X)$.
Si α, β sont deux 1-formes réelles sur X à support compact, on définit

$$< \alpha, \beta >= \alpha \wedge *\beta \in \Omega^2(X).$$

On notera $< \alpha, \alpha >= \|\alpha\|^2$ ($\|\alpha\|$ n'a pas de sens).
Dans une carte holomorphe :

$$\begin{aligned} (gdx + hdy, g^{'}dx + h^{'}dy) = & \ (gdx + hdy) \wedge (-h^{'}dx + g^{'}dy) \\ = & \ (gg^{'} + hh^{'})dx \wedge dy. \end{aligned}$$

En particulier, $\|gdx + hdy\|^2 = (g^2 + h^2)dx \wedge dy$: ceci justifie le signe moins dans la définition $*$.

Si α et β sont à support compact, puisque X est une surface orientée on en déduit un produit scalaire sur $\Omega^1_C(X)$:

$$< \alpha, \beta >_{L^2(X)} = \int\int_X (\alpha, \beta) = \int\int_X \alpha \wedge *\beta.$$

La norme associée sera notée

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^2} &= \; < \alpha, \alpha >_{L_2}^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int\int_X \|\alpha\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int\int_X \alpha \wedge *\alpha)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Théorème de Riemann-Roch

2.1 Existence de fonctions méromorphes

Soit X une surface de Riemann.

On peut construire des fonctions méromorphes sur X comme quotient de différentielles méromorphes : Soient ω_1 et ω_2 deux 1-formes méromorphes sur X. Dans une coordonnée locale z, on écrit :

$$\omega_1 = g_1(z)dz \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = g_2(z)dz.$$

Le rapport $g_1(z)/g_2(z)$ est indépendant de la coordonnée locale z ; on note $f = \omega_1/\omega_2$ la fonction méromorphe (globale) sur X ainsi définie.

Théorème 2.1.1. *Sur toute surface de Riemann (compacte), il existe une fonction méromorphe non constante.*

Demonstration. Il suffit de construire deux 1-formes méromorphes non proportionnelles. Soient z_0, z_1, z_2 trois points. On construit :

-Une 1-forme méromorphe ω_1 avec résidu 1 en z_1 et résidu -1 en z_0 et holomorphe partout ailleurs.

-Une 1-forme méromorphe ω_2 avec résidu 1 en z_2 et résidu -1 en z_0 et holomorphe partout ailleurs.

Le quotient ω_1/ω_2 a un pôle en z_1 (peut-être d'orde > 1) et un zéro en z_2 (peut-être d'ordre $>$ 1), il n'est donc pas constant.

Définition 2.1.1. *Soit $P_1, \cdots, P_m$ des points distincts d'une surface de Riemann X.*
On note par $\mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m)$ l'ensemble des fonctions méromorphes, "cette ensemble est un espace vectoriel complexe."

L'objet du théorème de Riemann-Roch est d'estimer sa dimension.
D'aprés le théorème $V.5.1$ (voir [5]) portant sur l'existence de $1-$formes méromorphes, on déduit que :

Théorème 2.1.2. *(Inégalité de Riemann). Soit X une surface de Riemann compacte de genre g.*
Alors :

$$dim\,\mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m) \geq m - g + 1$$

.

Démonstration. Fixons un choix de coordonnée locale z autour de chacun des points P_k, $k = 1, \cdots, m$ et $2g$ courbes simples fermées $\gamma_1, \cdots, \gamma_2$ qui découpent X en un domaine simplement connexe et ne passent pas par les P_k.
Soit alors $\omega_k (k = 1, \cdots, m)$ l'unique $1-$forme méromorphe de partie principale dz/z^2 en P_k, holomorphe partout ailleurs et dont les parties réelles de ses $2g$ périodes sont nulles.
Considérons le sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^m$ constitué des m-uplets $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ tels qu'il existe une 1-forme holomorphe η telle que

$$\eta + \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m$$

soit exacte. Si $f \in \mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m)$, alors sa différentielle df est combinaison linéaire de différentielles de formes méromorphes avec un pôle en P_i et de différentielles holomorphes :

$$df = \eta + \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m.$$

Puisqu'une forme holomorphe exacte est nulle, l'application $df \mapsto (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ est injective (elle est surjective par définition). On en déduit que

$$dim\,\mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m) = dim \quad V + 1$$

Remarque. En prenant des primitives (multiformes), il ne faut pas oublier de compter $+\ 1$ dans les calculs de dimension, à cause de la constante d'intégration.
Soit $\Gamma = (Im(\int_{\gamma_1} \omega_k))_{l,k} \in M_{2g\times m}(\mathbb{R})$.

Lemme 2.1.1. *Un m-uplets* $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ *de nombres complexes appartient au sous-espace* V *si*

$$\Gamma \begin{pmatrix} Re(\alpha_1) \\ . \\ . \\ . \\ Re(\alpha_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \Gamma \begin{pmatrix} Im(\alpha_1) \\ . \\ . \\ . \\ Im(\alpha_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Cela résulte du fait que $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in V$ si et seulement si

$$\alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m$$

a les même périodes qu'une $1-$forme holomorphe. Or la condition implique que toutes les parties réelles des périodes de $\alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m$ sont nulles.
Les parties réelles d'une $1-$forme holomorphe sont toutes nulles si et seulement si cette forme est nulle (et donc ses périodes sont nulle).
Ainsi, $\alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m$ a ses périodes nulles, elle est donc exacte.
Le théorème du rang implque donc que la dimension réelle de V est $\geq 2m - 2g$

Corollaire 2.1.1. *(Riemann) Une surface de Riemann compacte possède une infinité de fonctions méromorphes linéairement indépendantes sur* $\mathbb{C}$.

Le théorème suivant interpréte la différence entre la dimension de l'éspace vectoriel complexe $\mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m)$ et l'expression $m - g + 1$.

Théorème 2.1.3. *(Riemann-Roch) Soient* X *une surface de Riemann compacte de genre* g *et* $P_1, \cdots, P_m$ *des points distincts sur la surface* X.
Alors :

$$dim\, \mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m) = m - g + 1 + dim\, \Omega(P_1, \cdots, P_m)$$

où $\Omega(P_1, \cdots, P_m)$ *est l'espace vectoriel des formes holomorphes qui s'annulement en chacun des* P_k.

Nous démontrons ce théorème dans les paragraphes qui suivent, mais avant on donne une première application du théorème de Riemann-Roch à l'uniformisation des courbes en genre 0 et 1.

Applications à l'uniformisation des courbes en genre 0 **et** 1.

Il est difficile de surestimer l'importance du théorème de Riemann-Roch dans l'approche moderne de la théorie des courbes algébriques. En particulier, c'est ce théorème que l'on utilise régulièrement pour démontrer que toute surface de Riemann compacte simplement connexe est isomorphe à la sphère de Riemann.

Théorème 2.1.4. *Une surface de Riemann compacte de genre nul est biholomorphe à la sphère de Riemann.*

Démonstration. Une application directe du théorème de Riemann-Roch donne en effet l'existence sur une telle surface X d'une fonction méromorphe n'ayant qu'un pôle simple, c'est-à-dire d 'une application holomorphe : $X \to \bar{\mathbb{C}}$ de degré 1.

Puisque X est de genre nul, le théorème de Riemann-Hurwitz entraîne que cette application ne présente pas de point de ramification, et est donc un isomorphisme.

De manière semblable, le théorème de Riemann-Roch permet d'uniformiser les courbes de genre 1.

Théorème 2.1.5. *Une surface de Riemann compacte de genre* 1 *est biholomorphe au quotient de* $\mathbb{C}$ *par un réseau de translations.*

Démonstration . Le théorème de Riemann-Roch appliqué au cas où $m = 0$, $g = 1$ fournit, sur une surface X de genre 1, l'existence d'une forme holomorphe ω non-nulle. Or pour tout point P de X, l'éspace $\mathcal{E}(P)$ est réduit au constante :X ne possède pas de fonction méromorphe avec un unique pôle simple ; sinon, comme dans la preuve précédente, X serait isomorphe à la sphère de Riemann, de genre 0.

En appliquant le théorème de Riemann-Roch avec $m = 1$ et $g = 1$, on en déduit qu'une forme holomorphe non nulle sur X ne s'annule jamais.

Construisons alors son champ dual, c'est-à-dire le champ de vecteurs holomorphe non singulier S tel que $\omega(S) = 1$.

L'intégration de ce champ fournit une action de $\mathbb{C}$ sur la surface X. Puisque S non singulier, toutes les courbes (complexes) intégrales de S, c'est-à-dire les orbites de notre action sont ouvertes. Comme le complémentaire d'une orbite est une réunion d'orbites, ces dernières sont aussi fermées et, par connexité de X, l'action de $\mathbb{C}$ est transitive, ce qui identifie X à $\mathbb{C}/\Lambda$, où Λ est le stabilisateur d'un point, un sous groupe fermé de $\mathbb{C}$.

Puisque X est compacte et de même dimension que $\mathbb{C}, \Lambda$ est nécessairement un réseau de $\mathbb{C}$

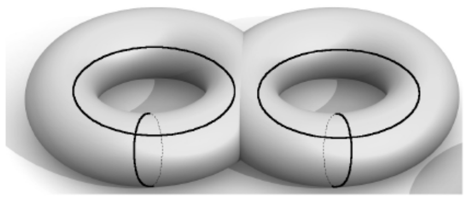

FIGURE 2.1 – Une base symplectique de l'homologie

2.2 Relations bilinéaires de Riemann

2.2.1 Une proposition de nature topologique

Soit X une surface (lisse) compacte, connexe et orientable. On sait que

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g} \quad et \quad H^1_{dR}(X,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g},$$

où g est le genre de X. L'accouplement

$$\int : H_1(X;\mathbb{Z}) \times H^1_{dR}(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

met ces deux espaces en dualité : pour toute base $(\gamma_1, ..., \gamma_{2g})$ de $H_1(X;\mathbb{Z})$ il existe une base duale $(\omega_1, \cdots, \omega_{2g})$ de $H^1_{dR}(X;\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i, j = 1, ..., 2g$,

$$\int_{\gamma_i} \omega_j = \delta_{ij}.$$

Le produit d'intersection

$$\begin{array}{rcl} H_1(X,\mathbb{Z})\times H_1(X,\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{Z} \\ (\gamma_1,\gamma_2) & \mapsto & \gamma_1\sharp\gamma_2 \end{array}$$

définie une forme bilinéaire antisymmétrique sur $H_1(X,\mathbb{Z})$ qui possède des bases symplectiques relativement à ce produit.

Proposition 2.2.1. *Pour toute base symplectique* $(a_1,\cdots,a_g,b_1,\cdots,b_g)$ *de* $H_1(X,\mathbb{Z})$ *et pour toute* $1-$*formes fermées* η *et* η' *sur* X*, on a :*

$$\int_X \eta\wedge\eta' = \sum_{i=1}^{g}\left(\int_{a_i}\eta.\int_{b_i}\eta' - \int_{a_i}\eta'.\int_{b_i}\eta\right)$$

Démonstration. La base symplectique $(a_1,\cdots,a_g,b_1,\cdots,b_g)$ de $H_1(X,\mathbb{Z})$ est associée à un découpage de X un $4g$-gône Δ de cotés $A_1,B_1,A_1',B_1',\cdots,A_g,B_g,A_g',B_g'$ où A_i et A_i' sont identifiés par l'application φ_i et B_i et B_i' par l'application ψ_i. On peut voir les formes différentielles η et η' comme des formes sur Δ.
Puisque Δ est simplement connexe, il existe une fonction f telle que $df=\eta$.
Alors pour tout $x\in A_i$ et pour tout $y\in B_i$ on a (voir figure 2.2)

$$f\circ\varphi_i(x) - f(x) = \int_{b_i(x)} df = \int_{b_i}\eta \tag{2.1}$$

et

$$f(y) - f\circ\psi_i(y) = \int_{a_i(y)} df = \int_{a_i}\eta. \tag{2.2}$$

La formule de Stockes implique :

$$\begin{array}{rcl} \int_X \eta\wedge\eta' & = & \int_\Delta \eta\wedge\eta' \\ & = & \int_D d(f\eta') \\ & = & \int_{\partial\Delta} f\eta' \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{g}\int_{A_i+B_i-A_i'-B_i'} f\eta' \end{array}$$

et il découle donc de (2.1) et (2.2) que

$$\begin{array}{rcl} \int_{A_i-A_i'} f\eta' & = & \int_{A_i}(f-f\circ\varphi_i)\eta' \\ & = & -\int_{b_i}\eta.\int_{a_i}\eta' \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{B_i - B_i'} f\eta' &= \int_{B_i} (f - f \circ \psi_i)\eta' \\ &= \int_{a_i} \eta . \int_{b_i} \eta' \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité annoncée.

Remarque 2.2.1. *Si X est munie d'une structure de surface de Riemann et si η et η' sont holomorphe on a de plus :*

$$\int_X \eta \wedge \eta' = 0 \quad (car\ dz \wedge dz = 0)$$

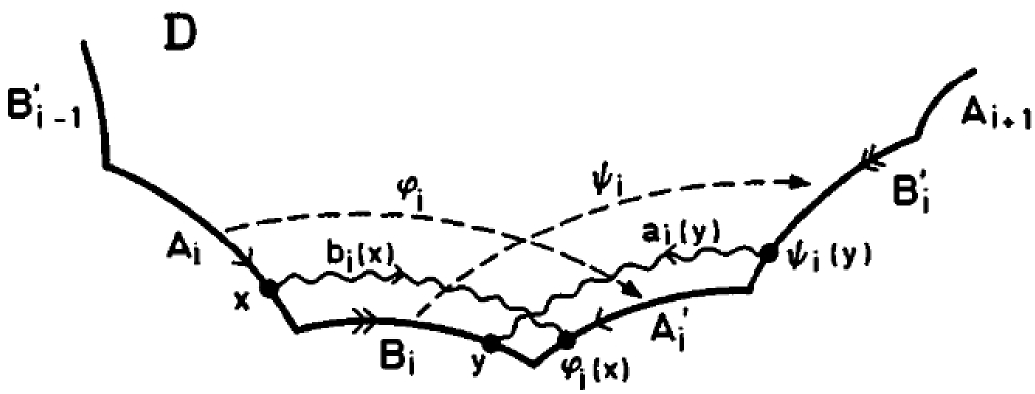

FIGURE 2.2 – Relations de périodes

et si $\eta \neq 0$,

$$i \int_S \eta \wedge \bar{\eta} > 0 \qquad (car\ dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy).$$

Il découle alors de la proposition 2.2.1 *que l'application* $\omega \mapsto (\int_{a_i} \omega)_{i=1,\ldots,g}$ *est injective.*
En particulier que l'espace vectoriel des $1-$*forme holomorphes est de dimension* $\leq g$ *; le théorème suivant montre que l'on a en fait égalité.*
Soit X *une surface de Riemann compacte avec* m *points marqués* $P_1, \cdots, P_m$ *et dont on fixe* $2g$ *courbes simples fermées* $(a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g)$ *qui ne passent pas par les* P_i *et forment une base symplectique de* $H_1(X; \mathbb{Z})$*. En conservant les notions (parties principales* A_i *en chaque* P_i*) du théorème* $V5.1$ *(voir*[5]*) on montre la variante suivante :*

Théorème 2.2.1. *(Existence de* $1-$*formes méromorphes)*
On suppose que la somme des résidus $\sum_i A_i = 0$*. Alors, pour chaque système de* g *nombres complexes, il existe une unique forme méromorphe sur* X *qui possède des pôles uniquement aux points* P_i *avec les parties principales données et dont les périodes évaluées sur les* g *courbes* $a_1, \cdots, a_g$ *sont les* g *nombres donnés.*

Démonstration. C'est une conséquence de la remarque précédente et du théorème $V5.1$[5] : en vertu de ce dernier, l'espace recherché est un espace affine sur l'espace des formes holomorphes, qui est de dimension (réelle) $2g$.
Or l'application $\omega \mapsto (\int_{a_i} \omega)_{i=1,\cdots,g}$ est injective. Elle est donc bijective : une forme holomorphe est uniquement déterminée par ses périodes sur les a_i.
La même application $\omega \mapsto (\int_{a_i} \omega)i = 1, \cdots, g$ est une application affine injective sur l'espace recherché.
Ce dernier est de dimension complexe g (comme son espace directeur, celui des formes holomorphes). C'est donc une bijection.
Pour démontrer le théorème de Riemann-Roch nous aurons enfin besoin d'une version raffinée de la proposition 2.2.1 que nous énonçons ci-dessous. La démonstration est essentiellement la même, nous ne fait sont que l'ésquisser.

Proposition 2.2.2. *Soit* X *une surface de Riemann compacte dont on fixe* $2g$ *courbes simples fermées* $(a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g)$ *qui forment une base symplectique de* $H_1(X; \mathbb{Z})$*.*
Soient ω_1 *une* $1-$*forme holomorphe sur* X *et* ω_2 *une* $1-$*forme méromorphe (non singulière le long des* a_j, b_j*).*
Ètant donné un point $z_0 \in X - \{a_j, b_j\}$ *on pose* $u(z) = \int_{z_0}^{z} \omega_1$*. Alors :*

$$2i\pi \sum Res(u\,\omega_2) = \sum_{i=1}^{g} \left(\int_{a_i} \omega_1 . \int_{b_i} \omega_2 - \int_{a_i} \omega_2 . \int_{b_i} \omega_1 \right) \tag{2.3}$$

Démonstration. En conservant les notations de la proposition précédente, la proposition découle de la formule des résidus

$$2i\pi \sum Res(u\,\omega_2) = \int_{\partial\Delta} u\,\omega_2 \tag{2.4}$$

et des equations (2.1) et (2.2).

2.2.2 Relations bilinéaires de Riemann

Soit X une surface de Riemann compacte dont on fixe $2g$ courbes simples fermées $(a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g)$ qui forment une base symplectique de $H_1(X;\mathbb{Z})$.
On fixe une base $(\omega_1, \cdots, \omega_g)$ de l'espace des $1-$formes holomorphes sur X.

Définition 2.2.1. *On appelle matrices des périodes les matrices A et $B \in M_g(\mathbb{C})$ définies par*

$$A_{ij} = \int_{a_j} \omega_i \quad et \quad B_{ij} = \int_{b_j} \omega_i$$

Théorème 2.2.2. *(Relations bilinéaires de Riemann)*

1. *La matrice A est inversible.*
2. *La matrice $\Omega = A^{-1}B$ est symétrique et sa partie imaginaire $Im\,\Omega = (Im\,\Omega_{ij})_{1\leq i,\, j\leq g}$ est défiinie positive.*

Démonstration.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_g) \in \mathbb{C}^g$ tel que

$$\sum_{i=1}^{g} \lambda_i A_{ij} = 0 \qquad\qquad (j = 1, \cdots, g).$$

Considérons alors la 1-forme holomorphe

$$\omega = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i \omega_i$$

Par définition de A, on a :

$$\int_{a_j} \omega = 0 \qquad\qquad (j = 1, \cdots, g)$$

et donc aussi
$$\int_{a_j} \bar{\omega} = 0 \qquad\qquad (j = 1, \cdots, g).$$
Il découle donc de la proposition 2.2.1 que $\int_X \omega \wedge \bar{\omega} = 0$, de sorte que $\omega = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_g = 0$.

La matrice A est donc inversible.

Montrons maintenant le deuxième point du théorème. On vérifie facilement que la matrice Ω est indépendante du choix de la base $(\omega_1, \cdots, \omega_g)$. Puisque A est inversible, quitte à changer de base on peut supposer que $A = I$, c'est-à-dire que
$$\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}.$$
On a alors $\Omega_{ij} = B_{ij} = \int_{b_j} \omega_i$ mais il découle encore de la proposition 2.2.1 que
$$\begin{aligned} 0 = & \int_X \omega_i \wedge \omega_j \\ = & \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} \omega_i . \int_{b_k} \omega_j - \int_{a_k} \omega_j . \int_{b_k} \omega_i \right) \\ = & \int_{b_i} \omega_j - \int_{b_j} \omega_i \end{aligned}$$
de sorte que Ω est symétrique.

Finalement si $v = (v_1, \cdots, v_g) \in \mathbb{R}^g - \{0\}$, il découle encore de la proposition 2.2.1 que
$${}^t v . Im\, \Omega . v = \frac{i}{2} \int_X \eta \wedge \bar{\eta} > 0,$$
Où $\eta = \sum_{i=1}^{g} v_i \omega_i$.

Démonstration du théorème 2.1.3

On procède comme pour la démonstration de l'inégalité de Riemann.

Cependant, grâce à la variante du théorème d'existence donnée dans le théorème 2.2.1 , on se place dans un cadre plus naturel où les applications définies sont linéaires sur $\mathbb{C}$.

Ca permet d'analyser plus simplement ces applications. Fixons donc un choix de coordonnée locale z autour de chacun des points $P_k, k = 1, \cdots, m$, et $2g$ courbes simples fermées $(a_1, \cdots, a_g, b_1, \cdots, b_g)$ qui formet une base symplectique de $H_1(X; \mathbb{Z})$ et ne passent pas par les P_k. D'après la théorème 2.2.1 il existe une unique $1-$forme méromorphe $\omega_k (k = 1, ..., m)$ de partie principale dz/z^2 en P_k, holomorphe partout ailleurs et dont les g périodes selon les courbes $a_i (i = 1, ..., g)$ sont nulles.

Considérons maintenant le sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^m$ constitué des $m-$uplets $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ tels qu'il existe une $1-$forme holomorphe η telle que

$$\eta + \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m$$

soit exacte. Comme dans la démonstration de l'inégalité de Riemann, on a

$$dim\, \mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m) = dim V + 1$$

Soit

$$H = \left(\int_{b_i} \omega_j\right) \in M_{g\times m}(\mathbb{C}).$$

Lemme 2.2.1. *Un élément* $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ *appartient à* V *si et seulement si il appartient à* $\ker(H)$. *De plus, la forme* η *apparaissant dans la définition de* V *est toujours nulle.*

Démonstration. Si $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in V$ alors la forme $\omega = \alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m$ a les mêmes périodes que $1-$forme holomorphe $-\eta$. Mais, par définition des ω_j, toutes les $\alpha-$périodes de $\alpha_1\omega_1 + \cdots + \alpha_m\omega_m$ sont nulles.
Donc c'est aussi vrai pour $-\eta$ qui est donc nulle. Les $b-$périodes de ω sont donc également nulles.
On en déduit :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{b_i}\left(\sum_j \alpha_j\omega_j\right) \\ = & \sum_j \alpha_j \left(\int_{b_i} \omega_j\right) \qquad\qquad (i = 1, ..., g), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \ker H$.
Si, réciproquement, on suppose que

$$H \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors les $a-$périodes et les $b-$périodes de $\alpha_1\omega_1 + \cdots \alpha_m\omega_m$ sont nulles donc $\alpha_1\omega_1 + \cdots \alpha_m\omega_m$ est exacte (sans avoir besoin de la corriger par une forme holomorphe η).

Il découle du lemme précédent que $V = \ker H$, où H est vue comme application linéaire $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^g$.

Le théorème du rang implique donc :

$$\dim \mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m) = m - rang(H) + 1. \tag{2.5}$$

On retrouve en particulier l'inégalité de Riemann : $\dim \mathcal{E}(P_1, \cdots, P_m) \geq m - g + 1$.

Il nous reste à déterminer le rang de H.

On l'interprète en termes de $1-$formes holomorphes, en passant à l'application duale.

Soit φ_l la $1-$forme holomorphe déterminée par ses $a-$périodes :

$$\int_{a_k} \varphi_l = \delta_{kl}.$$

Lemme 2.2.2. *Un $g-$uplet de nombres complexes $(\beta_1, \cdots, \beta_g)$ appartient au noyau de ${}^tH : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^m$ si et seulement si la $1-$forme holomorphe $\beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_g\varphi_g$ s'annule en les points $P_1, \cdots, P_m$.*

Démonstration. Dans les coordonées locales z autour des points P_k on a :

$$\varphi_l = (\lambda_l^k + \cdots)dz.$$

La proposition 2.2.2 appliquée à $\omega_1 = \varphi_l$ et $\omega_2 = \omega_k$ implique alors :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{b_l} \omega_k = & \textstyle\int_{a_l} \varphi_l . \int_{b_l} \omega_k \\ = & 2i\pi Res_{P_k} \underbrace{\left(\left(\int \varphi_l\right) \omega_k\right)}_{=\frac{\lambda_l^k}{z}dz+\cdots} \\ = & 2i\pi\lambda_l^k. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{2i\pi} H = (\varphi_l(P_k))_{l=1,\cdots,g,\, k=1,\cdots,m}$$

et $(\beta_1, \cdots, \beta_g)H = 0$ si et seulement si la $1-$ forme holomorphe $\beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_g\varphi_g$ s'annule en les points $P_1, \cdots, P_m$.

D'après le théorème du rang

$$g = rang({}^tH) + \dim \ker({}^tH)$$

et, d'après le lemme précédent,

$$\dim \ker({}^t H) = \dim \Omega(P_1, \cdots, P_m).$$

On a donc :

$$\dim \Omega(P_1, \cdots, P_m) = g - rang({}^t H). \tag{2.6}$$

Puisque H et H^t ont le même rang, le théorème de Riemann-Roch découle de 2.5 et 2.6.

2.3 Vision faisceautique du théorème de Riemann-Roch

Nous présentons ici la vision moderne du théorème de Riemann-Roch via la notion de faisceau qui permet de mieux comprendre le passage du local au global.

2.3.1 Faisceaux

Définition 2.3.1. *(Faisceaux) Soit Y un espace topologique. Un faisceaux $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur Y est une famille de groupes abéliens $\mathcal{F}(U)$ paramétrés par les ouverts $U \in Y$ (les sections au-dessus de U) et une familles de morphismes de groupes $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (applications de restriction), où $V \subset U \subset Y$ sont des ouverts, astreints aux propriétés suivantes :*

1. *$\mathcal{F}(\emptyset)$ est le groupe trivial, ρ_V^U est toujours l'identité et $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ dès que $W \subset V \subset U$ (on dit alors que $\mathcal{F}$ est un préfaisceau) ;*
2. *si $U = \bigcup U_i$ (recouvrement ouvert) et si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ et $\rho_{U_i}^U(f) = \rho_{U_i}^U(g)$ pour tout i, alors $f = g$,*
3. *si $U = \bigcup U_i$ (recouvrement ouvert) et si on se donne des $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(f_j)$, alors il existe un élément $f \in \mathcal{F}(U)$ tel que $\rho_{U_i}^U(f) = f_i$.*

Exemples.

1 . Soit Y un espace topologique. Pour tout ouvert $U \subset Y$ soit $\mathcal{C}(U)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues $f : U \to \mathbb{C}$.
Pour $V \subset U$ soit $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$ l'application de restriction usuelle. Alors $\mathcal{C}(U)$ est un faisceau.

2 . Si X est une surface de Riemann, les algèbres $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes sur U et les applications de restrictions standard définissent un faisceau $\mathcal{O}$.
On prendra garde au fait que l'algèbre $\mathcal{B}(U)$ des fonctions holomorphes bornées sur $U \subset X$ définit bien un préfaisceau mais pas un faisceau.

3 . On définit de même le faisceau Ω^1 des $1-$formes holomorphes sur une surface de Riemann ainsi que le faisceau $\mathcal{E}$ des fonctions lisses, le faisceau $\mathcal{E}^1$ des $1-$formes lisses, le faisceau $\mathcal{E}^{1,0}$, *resp.*$\mathcal{E}^{0,1}$, des $1-$formes de type $(1,0)$, resp.$(0,1)$, c'est-à-dire localement de type fdz, resp. $fd\bar{z}$, avec f lisse.

Définition 2.3.2. *Soient $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique Y et $x \in Y$ un point.*
On définit la relation $\simeq_x$ sur l'union disjointe

$$\bigcup_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

par : $f \in \mathcal{F}(U)$ et $g \in \mathcal{F}(V)$ sont équivalent $f \simeq_x g$ si et seulement s'il existe un ouvert $W \subset U \cap V$ contenant x tel que $f_{|W} = g_{|W}$.
On note

$$\mathcal{F}_x = \left(\bigcup_{x \in U} \mathcal{F}(U) \right) / \simeq_x;$$

c'est un groupe abélien. Pour tout voisinage ouvert U de x dans X, soit

$$\rho_x : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$$

L'application qui à un élément $f \in \mathcal{F}(U)$ associe sa classe d'équivalence modulo $\simeq_x$.
On appelle $\rho_x(f)$ le germe de f.

2.3.2 Cohomologie

Soit Y un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur Y.

Définition 2.3.3. *On note $H^0(Y; \mathcal{F}) = \mathcal{F}(Y)$ le groupe des sections globales du faisceau $\mathcal{F}$.*
C'est l'objet qui nous intéresse ; il s'inscrit dans une famille de groupes de cohomologie mais nous ne considèrons ici que le suivant $H^1(Y; \mathcal{F})$.
Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement ouvert de Y.
On note

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, \cdots, i_q)} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q})$$

avec sa structure naturelle de groupe. Le groupe $H^0(Y;\mathcal{F})$ est aussi le noyau du morphisme

$$\delta : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

qui à (c_i) associe (c_{ij}) où $c_{ij} = c_i - c_j$ est défini sur $U_i \cap U_j$. On définit de la même manière

$$\delta : C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

par $\delta((c_{ij})) = (c_{ijk})$, où $c_{ijk} = c_{jk} - c_{ik} + c_{ij}$ est défini sur $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Définition 2.3.4. *L'espace des $1-$cocycles est*

$$Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \ker(\delta : C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}))$$

et celui des 1-cobord est

$$B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Im(\delta : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}))$$

On a $B^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \subset Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ et on pose :

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

L'espace $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(Y)$ est indépendant du recouvrement $\mathcal{U}$.
En général si $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert de Y plus fin que $\mathcal{U}$, il n'est pas difficile de montrer (cf. par exemple [5]) qu'il existe une injection canonique

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$$

de sorte que les groupes $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ forme un système directe indexé par les recouvrements $\mathcal{U}$. On pose alors :

Définition 2.3.5. *Le premier groupe de cohomologie de Y à coefficients dans $\mathcal{F}$ est la limite directe du système $(H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}))_{\mathcal{U}}$:*

$$H^1(Y,\mathcal{F}) = \left(\bigcup_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\right) / \simeq,$$

où $\xi \in H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ et $\eta \in H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$ sont equivalente, $\xi \simeq \eta$, si et seulement s'il existe un recouvrement plus fin $\mathcal{W}$ tel que les images de ξ et η dans $H^1(\mathcal{W},\mathcal{F})$ coïncident.
Noter que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ l'application canonique

$$H^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(Y,\mathcal{F})$$

est injective. En particulier $H^1(Y,\mathcal{F})$ est trivial si et seulement si tous les $H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ sont triviaux.

Théorème 2.3.1. *Soit X une surface de Riemann et $\mathcal{F}$ l'un des faisceau $\mathcal{E},\mathcal{E}^1,\mathcal{E}^{1,0}$ ou $\mathcal{E}^{0,1}$. Alors :*

$$H^1(X,\mathcal{F})=0.$$

Démonstration. *Nous ne considérons que le cas $\mathcal{F}=\mathcal{E}$; les autres cas se traitent de la même manière.*
Soit $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert quelconque de X.
Nous allons montrer que $H^1(\mathcal{U},\mathcal{E})=0$. Considérons donc un cocylcle $(f_{ij})\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{E})$. Il s'agit de montrer qu'il existe des fonctions $g_i\in\mathcal{E}(U_i)$ telles que pour $i,j\in I$ on ait

$$g_i-g_j=f_{ij}$$

sur $U_i\cap U_j$.
Soit $(\psi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$. On pose

$$g_i=\sum_{j\in I}\psi_j f_{ij}.$$

Alors, en utilisant la relation de cocycle pour f, on a :

$$\begin{aligned} g_i-g_j &= \sum_{k\in I}\psi_k f_{ik}-\sum_{k\in I}\psi_k f_{jk}\\ &= \sum_k \psi_k(f_{ik}-f_{jk})\\ &= \sum_k \psi_k f_{ij}=f_{ij}. \end{aligned}$$

Le théorème suivant n'est pas difficile mais fondamental en pratique pour calculer le premier groupe de cohomologie.

Théorème 2.3.2. *(Leray) Si pour tout U_i du recouvrement $\mathcal{U}$ on a $H^1(U_i,\mathcal{F})=0$ alors*

$$H^1(U_i,\mathcal{F})\cong H^1(X;\mathcal{F}).$$

Démonstration. On renvoie à [5] pour sa démonstration.
Les définitions et résultas suivants nous servirons à calculer des groupes de cohomologie en changeant le faisceau.

Définition 2.3.6. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{C}$ des faisceaux de groupes abéliens au-dessus d'un espace topologique Y. Un morphisme de faisceaux α :*
$\mathcal{F} \to \mathfrak{C}$ est une famille de morphismes de groupes

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathfrak{C}(U), \quad U\, ouvert\, dans\, Y,$$

qui est compatible aux morphismes des restrictions, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathfrak{C}(U) \\ restr. \downarrow & & \downarrow restr. \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathfrak{C}(V) \end{array}$$

est commutatif.
Pour tout ouvert $U \subset Y$ on définit

$$\mathcal{K}(U) = \ker(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathfrak{C}(U))$$

La famille de groupes abéliens $\mathcal{K}(U)$ définit un faisceau que l'on appelle le noyau de α ; on le note $\mathcal{K} = \ker \alpha$.
Si $x \in Y$, un morphisme de faisceau $\alpha : \mathcal{F} \to \mathfrak{C}$ induit un morphisme de groupe

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathfrak{C}_x$$

Une suite de morphismes de faisceau $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{C} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ est dite exacte si la suite

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathfrak{C}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

est exacte.

Le théorème suivant est essentiellement formel (voir[5])

Théorème 2.3.3. *Soit $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{C} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur un espace topologique Y tel que $H^1(Y, \mathfrak{C}) = 0$. Alors :*

$$H^1(Y, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(Y)/\beta\mathfrak{C}(X)$$

2.3.3 Retour aux surfaces de Riemann

Soit X une surface de Riemann. On note $d^{''}$ "l'operateur différentiel sur les fonctions lisse sur X" défini par

$$d^{''}f = df^{0,1}$$

Dans un ouvert de coordonnée (U, z) on a donc :

$$d^{''}f = \frac{\partial f}{\partial z}.d\bar{z}.$$

Lemme 2.3.1. *La suite de faisceaux*

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d^{''}} \mathcal{E}^{0,1} \to 0$$

est exacte.

Démonstration. La seule chose délicate à vérifier est que pour tout $x \in X$ le morphisme

$$\mathcal{E}_x \xrightarrow{d^{''}_x} \mathcal{E}^{0,1}_x$$

est surjectif. Mais cela découle des lemmes V.7.4, V.7.5 (voir [5]) en ne considérant que les formes de type $(0, 1)$

L'espace $H^0(\mathcal{O})$ s'interprète comme l'espace des fonctions holomorphes sur X et les théorèmes 2.3.1 et 2.3.3 permettent de déduire du lemme précédent le

Théorème 2.3.4. *(Dolbeault) On a :*

$$H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X)/d^{''}\mathcal{E}(X).$$

On veut étudier des fonctions méromorphes à pôle prescit. Cela motive la

Définition 2.3.7. *On interprète un système de multiplicités n_i attachées à des points P_i comme un diviseur $D := \sum n_i P_i$. La somme $\sum n_i$ est par définition le degré deg(D) de D.*
Un diviseur D est dit effectif si tous le n_i sont positifs.
On définit alors un ordre sur les diviseurs :$D_1 \geq D_2$ si $D_1 - D_2$ est effectif.
Les germes de fonctions ayant au plus un pôle d'ordre n_i au point P_i forment un faisceau, noté $\mathcal{O}(D)$.

Définition 2.3.8. *Un fibré en droites L est une famille $\{L_x\}_{x\in X}$ de droites complexes qui dépendant holomorphiquement de $x \in X$.*
Une section s de L est une application

$$\begin{aligned} X \to \quad & L \\ x \mapsto \quad & s(x) \in L_x. \end{aligned}$$

Soit $P \in X$ et t une trivialisation locale holomorphe de L au voisinage de P. Si s est une section méromorphe et non-nulle. Alors, au-voisinage de P. Si s est une section méromorphe et non-nulle. Alors, au-voisinage de P ona $s = ft$ avec f méromorphe et la valuation de f en P ne dépend pas de la trivialisation t, on la note $v_p(s)$. On pose alors

$$divs = \sum_{P\in X} v_p(s)R \quad (sommefinie).$$

Le diviseur divs est effectif si et seulement si s est holomorphe.

Proposition 2.3.1. *Soit $D = \sum n_i P_i$ un diviseur sur X, on peut lui associer un fibré en droites (complexes) L(D) et une section méromorphe telle que $divs = D$.*

Démonstration. On se fixe des cartes disjointes (U_i, z_i) autour de chacun des P_i telles que $z_i(P_i) = 0$. Soit $U_0 = X - \{P_1, \cdots, P_m\}$.
On définit L comme le fibré en droites de trivialisation $U_0, U_1, \cdots, U_m$ et de fonctions de transition

$$\varphi_{U_i U_0} = z_i^{n_i} \quad sur\, U_i \cap U_0.$$

Enfin la fonction s définie par $s(x) = z_i^{n_i}(x)$, pour $x \in U_i$, et $s(x) = 1$ pour $x \in U_0$ est une section méromorphe de L telle que $divs = D$.
Le faisceau $\mathcal{O}_D$ est aussi le faisceau des sections (locales) holomorphes de L. Les deux groupes de cohomologie $H^0(X; L(D)) := H^0(X, \mathcal{O}(D))$ et $H^1(X; L(D)) := H^1(X, \mathcal{O}(D))$ de ce faisceau sont naturellement des espaces vectoriels complexes.
Le premier espace $H^0(X, (O)(D))$ s'interprète comme l'espace recherché des fonctions méromorphes à pôles d'ordre au plus D et définies globalement sur X (ou encore que l'espace des section (globales) holomorphes de L(D)). Il est de dimension fini notée $h^0(\mathcal{O}(D))$.
Le second espace peut se réecrire comme dans le théorème de Dolbeaut : puisque l'on dispose d'un espace $C^\infty(X; L)$ de sections C^∞ du fibré $L = L(D)$, on a également un opérateur

$$d_L^{''} : C^\infty(X; L) \to C^\infty(X; L \otimes \bar{\omega}_X),$$

où ω_X est le fibré en droite dual du fibré tangent holomorphe. On a alors :

$$H^1(X, \mathcal{O}(D)) = C^\infty(X; L \otimes \bar{\omega}_X)/Imd_L''$$

IL découle de la théorie de Hodge que cet espace est lui aussi de dimension finie, notée $h^1(\mathcal{O}(D))$. La théorie de Hodge permet d'ailleurs d'iterpréter globalement cet espace comme l'espace vectoriel des formes harmoniques de type $(0, 1)$ ($\equiv$ formes anti-holomorphes) à valeurs dans L.

Chapitre 3

Application au spectre des surfaces

En genéral le calcul du spectre d'une variéte riemannienne n'est pas toujours façile à faire, même en dimension 2 " les surfaces," ce calcul n'est pas évident sauf dans le cas particuliers (sphère, espace projectif, tore $\cdots$).
A cause de cette difficulté on s'interesse â l'estimation des valeur propres " en particulier la première valeur propre λ_1 " par des bornes supéurieures et des bornes inférieures contenant des caractéristiques géométriques de la variètè " surface " telles que le volume, le diamètre, la courbure$\cdots$
A partir de la conjeucture de Polya, pour un domaine quelconque M de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\lambda_1(M) \simeq \frac{\mathcal{C}}{vol(M)^{\frac{n}{2}}}$$

et en particulier sur une surface X,

$$\lambda_1(X) \simeq \frac{\mathcal{C}}{Aire(X)}$$

c'est C.Zegö, en premier lieu qui a donné une réponse affirmative à cette question, il a montré que pour un domaine simplement connexe, borné $D \subseteq \mathbb{R}^2$, avec les conditions au bord de Newmann, la première valeur propre λ_1 satisfait :

$$\lambda_1(D) \leq \frac{\mathcal{C}}{Aire(D)}$$

où, $\mathcal{C}$ est une constante dépendant de du premier Zero d'une certaine fonction de Bessel, et l'egalité aura lien ssi D est un disque.
Dans le théorème suivant, J.Hersch généralise le résultat de Szegö sur la sphère S^2 munie d'une metrique quelconque.

Théorème 3.0.5. *(J. Hersch) Pour toute metrique sur S^2, on a*

$$\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{Aire(S^2)}$$

où, $Aire(S^2)$ est l'aire relativement à cette metrique.

Preuve Voir [7]

Remarque

Pour la métrique usuelle (standard) de S^2, on a

$$\begin{aligned} A_0(S^2) &= Aire(S^2) \\ &= 4\pi,\ \lambda_1 = 2 \end{aligned}$$

. Donc le théorème de Hersch peut-être exprimé :

$$\lambda_1 Aire(S^2) \leq \lambda_1\,(standard)\,A_0(S^2)$$

la sphère S^2 est une surface de genre 0.
Plus généralement, pour une surface compacte de genre g, le resultat généralisant le théorème de Hersch est le :

Théorème 3.0.6. *(P. Yang, S.T. Yau) soit X_g une surface riemanniene de genre g, alors pour toute métrique sur X_g, ona*

$$\lambda_1(X_g) \leq \frac{8\pi(1+g)}{A(X_g)}$$

la notion principale utilisée par Yang et Yau est la notion du volume conforme.
Soit (M, dS^2) une surface Riemannienne compacte, $\phi : M \to S^n$ une application conforme, si dS_0^2 est la métrique standard sur S^n, alors $\phi^* dS_0^2 = \alpha(x) ds^2$, où $\alpha(x)$ est une fonction positive sur M.
Soit G un groupe de transformations conformes de S^2, alors $\forall g \in G$:
$g \circ \phi : M \to S^n$ est une application conforme.
On note dV_g la forme volume de la métrique $(g \circ \phi)^* dS_0^2$ sur M, et on pose :

Définition 3.0.9. *Le volume conforme de M relativement à ϕ est défini par :*

$$V_c(n, \phi) = \sup_{g \in G} \int_M dV_g,$$

et le volume conforme de M est donné par :

$$V_c(n,M)=\inf_{\phi} V_c(n,\phi)$$

La proposition suivante montre que $V_c(n,\phi)$ est relié à la première valeur propre λ_1, donc sa défintion n'est pas triviale.

Proposition 3.0.2. *(Li-Yau) soit M une surface riemannienne compacte, s'il existe une application conforme $\phi : M \to S^n$, alors*

$$\lambda_1(M)Vol(M) \leq 2V_c(n,M)$$

de plus, l'egalité aura lieu si et seulement si M est une surface minimale de S^n.

Corollaire 3.0.1. *Si M est une surface riemannienne compacte, si M est isométrique à une surface minimale de S^n alors*

$$V_c(n,M)=Vol(M)$$

Exemple :

$$V_c(n,S^2)=4\pi, V_c(n,\mathbb{RP}^2)=6\pi.$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Yang-Yau
Preuve.
Par la proposition précedente on a :

$$\lambda_1 A(X_g) \leq 2V_c(2,X_g)$$

soit $\phi : X_g \to S^2 / deg\phi \leq 1+g$
l'existence de telle application ϕ est garantie par le théorème de Riemann-Roch, et on peut verifier que si $\psi : N \to M$ est conforme de degré d alors :

$$V_c(2,N) \leq dV_c(2,M)$$

Alors :

$$\begin{aligned}\lambda_1 A(X_g) &\leq 2V_c(2,X_g)\\ &\leq 2V_c(2,S^2).(1+g)\\ &= 8\pi(1+g).\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] R. Antonin, Surfaces de Riemann, novembre 2014

[2] N. Bergeron et Antonin Guilloux, Introduction aux surfaces de riemann

[3] K. Djerfi, Eigenvalue problems on surfaces (Preprint in preparation), University of Saïda, BP 138 "20000".

[4] G. Dloussky, Généralités sur les surfaces de Riemann, Unv. d'Aix-Marseille-CTES-M2-Géométrie $1 - 2012/13$, octobre 2012

[5] O.Forster-Riemannsche Flächen, Springer, Berlin, 1977. Traduction anglaise : lectures on Riemann surfaces, Grad. Texts in Math, springer, New York, 1981.

[6] J. Girand, Surfaces de Riemann compactes, Faculté des Sciences d'Orsay

[7] D. Lehmann, Géometrie et topologie des Surfaces, puf, Année 1992

[8] P. MARRY, INTRODUCTION AUX SURFACES DE RIEMANN, mars 2003

[9] J. Sauloy[1] INITIATION AUX SURFACES DE RIEMANN, (cours de M1, DEUXIÈME SEMESTRE 2010/2011)

[10] J. C. Sikorav, Surfaces de Riemann, M1 Mathématiques approfondies, second semestre $2011 - 2012$