REMERCIEMENT

Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur D^r **A.AZZOUZ**, qui a accepté sans de diriger ce mémoire.

Je le remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt pour ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude en vers Monsieur **F.Hathout** d'avoir accepter d'être le président de ce Jury.

Je remercie aussi Messieur **H. M. Dida** et **H.Abbas** d'avoir accepter de faire partir de ce jury.

Table des matières

Introduction Générale

En mathématiques, l'opérateur de Fredholm est un concept d'analyse fonctionnelle qui porte le nom du mathématicien suédois Ivar Fredholm (1866-1927). Il s'agit d'un opérateur borné L entre deux espaces de Banach X et Y ayant un noyau de dimension finie et une image de codimension finie. On peut alors définir l'indice de l'opérateur comme :

$$\mathrm{ind}L = \dim(\ker L) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}L)$$

Sous ces hypothèses, l'espace image de L est fermé (il admet même un supplémentaire topologique).

Les opérateurs fermés forment une classe d'opérateurs linéaires sur les espaces vectoriels normés plus vaste que celle des opérateurs bornés. Ils ne sont donc pas nécessairement continus, mais il leur reste suffisamment de bonnes propriétés pour qu'on puisse définir pour eux le spectre et (sous certaines hypothèses) un calcul fonctionnel. Beaucoup d'opérateurs linéaires importants qui ne sont pas bornés sont fermés, comme l'opérateur de dérivation et bon nombre d'opérateurs différentiels.

Les operateurs presque fermés sont des opérateurs non bornés sur H sur lesquels on impose une condition topologique, Cette condition rend ces opérateurs à graphes fermés sur un espace de Hilbert intermédiaire entre le domaine de l'opérateur et l'espace total H.

ce mémoire est constitué de trois chapitres : **le premier chapitre** est consacré au espaces normés étant avant tout munis d'une structure d'espace vectoriel, les flèches entre espaces normés qui nous intéressent plus particulièremnts sont les opérateurs linéaires. Nous donnont quelques résultats élémentaires et essentiels à la comprhé-hension de opérateur de Fredholm étant un opérateur borné à image fermée dont les dimensions du noyau et du conoyau sont finies.

Dans **le deuxième chapitre** on présente des nouvelles classes d'opérateurs linéaires, appelés opérateurs semi fermés définit par **Caradus 1973** et **Kaufmann 1979** et opérateurs presque fermés **Messirdi 2008**, On montre que ces classes sont notamment stable par rapport aux opérations usuelles : somme finie et infinie, produit, passage à l'adjoint et à la limite.

Dans le troisimeéme chapitre on fera une discussion sur les concepets présentés au chapitre 2. Bien qu'en apparence, les opérateurs presque fermés et semi fermés sont introduit différement, nous allons montrer qu'ils sont identiques. La définition des opérateurs semi fermé de Kaufmann donne utili'se une contraction qui nous servira beaucoup.

Chapitre 1

Opérateurs fermés sur un espaces de Hilbert

1.1 Généralités sur les opérateurs non bornés

Ce chapitre introduit les notions fondamentales des opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert H.
Ces notions qui sont fondamentales, telles que la fermeture, les propriétés de l'adjoint, opérateurs symétriques, essentiellement auto-adjoints, la densité ainsi que l'opérateurs de Fredholm seront les èlements clés de notre étude.

Définition 1.1.1. *[1](**Opérateures lineaires**)*
Soient E et F deux espaces vectoriel normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaire $u \mapsto Tu \in F$ définie sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}(T) \subset E$, nommé domaine de T.

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \ x \in E \ , \quad T \ \textit{est défini en} \ x \ \right\}$$

Définition 1.1.2. ***(Somme de deux opérateurs lineaires)***
Soient S et T deux opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur somme $S+T$ par :

$$(S+T)(x) = S(x) + T(x)$$

de domaine

$$\mathcal{D}(T+S) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(T+S)$

Définition 1.1.3. ***(Opérateur produit)***
Soient E, F *et* H *des espaces vectoriel, et soient* $T : E \to F$ *et* $S : F \to H$ *deux opérateurs linéaires de domaines* $\mathcal{D}(T) \subseteq E$ *et* $\mathcal{D}(S) \subseteq F$ *respectivement.*
On définit l'opérateur composition ST *(dit aussi opérateur produit) de* T *et* S *par :*

$$(ST)(x) = S(T(x))$$

de domaine

$$\mathcal{D}(ST) = \{x \in \mathcal{D}(T); T(x) \in \mathcal{D}(S)\}$$

- *Si* R *est un opérateur de* H *dans un quatrième espace vectorièl normé* G*, alors* $(RS)T = R(ST)$
- *Si* R *est un opérateur de* F *dans* H*, alors :* $(R+S)T = RT + ST$

Définition 1.1.4. ***(Opérateur inverse)***
Soient E *et* F *deux espaces vectoriel normés. Un opérateur* $T : E \to F$ *est dit inversible s'il existe un opérateur borné* $S : F \to E$ *de domaine* $\mathcal{D}(S) = F$*, tel que*

$$TS = I_F \quad et \quad ST = I_{\mathcal{D}(T)}$$

Définition 1.1.5. ***(Densité)***
Soient E *et* F *deux espace normés. Un opérateur* $T : E \to F$ *est dit densément défini si son domaine* $\mathcal{D}(T)$ *est dense dans* E *c'est-à-dire* $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$

Définition 1.1.6. ***(Opérateur non borné)***
Un opérateur non borné sur un espace Hilbert H *est un couple* $(\mathcal{D}(T), T)$ *où* $\mathcal{D}(T)$ *est un sous espace vectoriel de* H *et* T *est un opérateur linéare défini de* $\mathcal{D}(T)$ *dans* H*. On dit que* T *est un opérateur non borné de domaine* $\mathcal{D}(T)$*.*

Adjoint d'un opérateur non borné sur un espace de Hilbert

Définition 1.1.7. *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné sur* H *de domaine* $D(A)$ *dense dans* H *. Si l'application*

$$x \longrightarrow < Ax, y > \ \text{avec } x \in D(A)$$

est continue sur $D(A)$ muni de la topologie induite par celle de H , elle possède par le théorème de Hahn-Banch une extension continue à H.
il existe alors en vertu du théorème de représentation de Riesz un vecteur unique $a(y)$ dans H tel que :

$$\forall x \in D(A)\ ,\ < Ax, y >=< x, a(y) > \ \textit{avec}\ a(y) = A^*y$$

L'opérateur $A^* \in L(H)$ est appelé ***adjoint*** *de A dans H , qui vérifie la relation suivante :*
pour tous $x, y \in H$

$$< Ax, y >=< x, A^*y >$$

Proposition 1.1.1. *Soient $A, B \in L(H)$ et $\alpha \in K$. Si $D(A)$,$D(B)$ sont denses dans H alors on a :*

1. $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$
2. $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$
3. $(A^*)^* = A$
4. *si A est inversible d'inverse A^{-1} . Alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*
5. $(AB)^* = B^*A^*$
6. $R(A) = \ker A^*$; $\overline{R(A)} = (\ker A^*)^\perp$.

Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Définition 1.1.8. *Un opérateur A dans un espace de Hilbert est dit* ***symétriques*** *si $A \subset A^*$ c'est-a-dire :*

$$D(A) \subset D(A^*)\ \textit{et}\ Au = A^*u\ \textit{pour}\ u \in D(A).$$

Autrement dit :

$$\forall x \in D(A)\ ,\ \forall y \in D(A)\ :\ (Ax, y) = (x, Ay).$$

Définition 1.1.9. *On dit qu'un opérateur T à domaine dense est auto-adjoint si $T^* = T$, i.e :*

$$D(T) = D(T^*) \text{ et } Tx = T^*x \ , \ \forall x \in D(T)$$

Propriété 1.1.1.

1. *Un opérateur symétrique T est toujours fermable puisque $D(T) \subset D(T^*)$ est dense .*
2. *Si T est un opérateur symétrique alors T^* et T^{**} sont deux extensions fermées de T et on $T \subset T^* \subset T^{**}$*
3. *Si T est un opérateur symétrique fermé alors $T = T^* \subset T^{**}$*
4. *Si T est un opérateur auto-adjoint alors $T = T^* = T^{**}$*

Théorème 1.1.1. *[2] Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur symétrique dans $\mathcal{H}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est auto-adjoint.*

(ii) *T est fermé et $Ker(T^* \pm iI) = \{0\}$.*

(iii) *$Im(T \pm iI) = \mathcal{H}$*

Définition 1.1.10. ***(Essentiellement auto-adjoint)***

Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné symétrique à domaine $\mathcal{D}(T)$ dense dans H. T est dit essentiellement auto-adjoint si $\overline{T}$ est auto-adjoint ou bien $(\overline{T})^* = \overline{T} = T^*$

Lemme 1.1.1. *Si T est essentiellement auto-adjoint, alors T a une unique extension auto-adjointe.*

Preuve. S est une extension auto-adjointe de T, comme S est fermé alors $\overline{T} \subset S$ donc $S^* \subset (\overline{T})^*$ et $S = \overline{T}$, $S^* = S$ est $(\overline{T})^* = \overline{T}$, et on a $\overline{T} \subset S$. Montrons que $S \subset \overline{T}$

$$S^* \ \ est \ \ auto-adjoint \ \ \Rightarrow S^* = S \tag{1.1}$$

$$S \ \ est \ \ ferme \ \ \Rightarrow \ \ S^* = S = \overline{S}$$

Dautre part :

$$S^* \subset (\overline{T})^*, \tag{1.2}$$

et comme T est essentiellement auto-adjoint alors

$$\overline{S} = (\overline{T})^* \tag{1.3}$$

et donc

$$\begin{aligned}(1.2)\ et\ (1.3) &\Rightarrow S^* \subset \overline{T}\ est\ de \\ (1.1)\ et\ (1.3) &\Rightarrow S = S^* \\ &\Rightarrow S \subset \overline{T}\end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.1. *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.*

Exemple 1.1.1. *Soit $A = -\Delta = -\Sigma_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine $D(A) = S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ àdécroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.*
En intégrant deux fois par parties, il est facile de voir que A est symétrique sur $S(\mathbb{R}^n)$. Alors A est fermable et $A \subset \overline{A} = A^{**} \subset A^*$. En fait

$$D(\overline{A}) = H^2(\mathbb{R}^n)$$

Soit $\Psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ par densité de $S(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $S(\mathbb{R}^n)$ convergente vers Ψ pour la topologie de $H^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|D^\alpha\Psi_n - D^\alpha\Psi\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = 0,\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq 2$$

Or

$$(\Psi_n, -\Delta\Psi_n) \in G(A),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\Psi_n, -\Delta\Psi_n) = (\Psi, -\Delta\Psi)$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire

$$(\Psi, -\Delta\Psi) \in G(\overline{A})$$

ou bien

$$\Psi \in D(\overline{A}) \text{ et } \overline{A}\Psi = -\Delta\Psi$$

Réciproquement, si $\Psi \in D(\overline{A})$ *alors*

$$(\Psi, -\Delta\Psi) \in G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$$

il existe alors une suite $(\Psi_n, -\Delta\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $G(A)$ *telle que* $(\Psi_n, -\Delta\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(\Psi, -\Delta\Psi)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$*, c'est à dire* $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* Ψ *et* $(-\Delta\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $-\Delta\Psi$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, donc* Ψ *et* $\Delta\Psi$ *sont dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *par conséquent* $\Psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.
Nous savons que $D(A^*) = H^2(\mathbb{R}^n)$*. Alors* $\overline{A} = A^*$ *et* $\overline{A}^* = A^{**} = \overline{A}$ *donc* $\overline{A}$ *est auto-adjoint ou bien* A *est essentiellement auto-adjoint à partir de* $S(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.1.2. *Si* T *est essentiellement auto-adjoint, alor* T^* *est la plus petite extension fermé de* T.

Proposition 1.1.2. *Si* T *et* S *sont deux opérateurs auto-adjoints et* $T \subset S$ *alors* $T = S$

Définition 1.1.11. ***(Opérateurs transposés)***

Soit $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux espaces de Banach et* T *un opérateur densément défini de* $\mathcal{B}_1$ *dans* $\mathcal{B}_2$ *; on définit le transposé de* T*, qui est un opérateur de* $\mathcal{B}_2^*$ *dans* $\mathcal{B}_1^*$*, de la façon suivante : le domaine de* ${}^tT$ *est l'ensemble des* $y^* \in \mathcal{B}_2^*$ *tel que la forme linèaire* $x \in \mathcal{D}(T) \to y^*(T(x))$ *soit continue.*

Dans le cas où $y^* \in \mathcal{D}({}^tT)$*, cette forme linéaire continue, définie sur le sous-espace dense* $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_1$*, se prolonge de façon unique en une forme linéaire* $x^* \in \mathcal{B}_1^*$ *continue sur* $\mathcal{B}_1$*. On pose alors* ${}^tT(y^*) = x^*$*. On a donc*

$${}^tT(y^*)(x) = y^*(T(x))$$

pour tous $x \in \mathcal{D}(T)$ *et* $y^* \in \mathcal{D}({}^tT)$.

Remarque 1.1.3. *Lorsque H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert et T un opérateur densément défini de H_1 dans H_2, on définit un opérateur T^* de H_2 dans H_1 de la façon suivante : on définit $T^* = x$ si la forme linéaire l_y associée à $y \in H$ est dans $\mathcal{D}(^tT)$, et si $l_x = x^* =^t T(l_y)$.*

Remarque 1.1.4. *Le vecteur $y \in \mathcal{D}(T^*)$ si et seulement si la forme linéaire $l : u \in \mathcal{D}(T) \to \langle T(u), y\rangle$ est continue sur $\mathcal{D}(T)$ (muni de la norme de H_1), et le couple $(y; x) \in H_1 \times H_2$ est dans le graphe de T^* si et seulement si :*

$$\langle T(u), y\rangle = \langle u, x\rangle \tag{1.4}$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(T)$, ce qui signifie que x représente la forme linéaire l (et son prolongement continu à H_1). On a donc

$$G(T^*) = \{f(y; x) \in H_2 \times H_1 : \forall z \in \mathcal{D}(T); \langle x, z\rangle = \langle y, T(z)\rangle\}$$

En effet, la forme linéaire $u \to \langle T(u), y\rangle$ est alors continue puisqu'elle est égale à $u \to \langle u, x\rangle$ et dans ce cas on a $x = T^*(y)$ par définition de l'adjoint. Il est clair que la condition (1.4) définit un ensemble fermé de couples $(y; x)$, ce qui montre que T^* est toujours un opérateur fermé.

Définition 1.1.12. ***(Opérateur de projéction)***
Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert H. On dit que :

(i) *T est une projection (respectivement projection orthogonale) si $T^2 = T$ (respectivement $T^2 = T$ et $T = T^*$).*

(ii) *T est normal (respectivement auto-adjoint) si $TT^* = T^*T$ (respectivement $T^* = T$).*

(iii) *T est isométrique (respectivement unitaire) si $\|T^*\| = 1$ (respectivement $T^*T = TT^* = 1_H$).*

Opérateurs de Fredholm

Définition 1.1.13. ***(Opérateurs de Fredholm)***
*Soit X et Y deux espace de Hilbert . Un opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est appelé un opérateur de **Fredholm** si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$R(T)$ est fermée dans Y .*
2. $\dim(\ker T)$ *est finie.*
3. $\dim(Y/R(T)) = \dim(Co\ker T)$

Nous noterons $n(T) := \dim(\ker T)$, $d(T) := \dim(Co\ker T)$.

Définition 1.1.14. *L'indice d'un opérateur de Fredholm est la fonction à valeur entières suivante :*

$$\begin{array}{rccl} ind: & \mathcal{F}(X,Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & T & \longrightarrow & ind(T) := \dim(\ker T) - \dim(Co\ker T) \end{array}$$

Exemple 1.1.2. *Considérons deux espaces de Hilbert X et Y de dimension finie. (Par exemple $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.) Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire continu.*
Supposons que, $\dim(\ker T)$ *et* $\dim(Co\ker T)$ *sont finies et $R(T)$ est fermée, étant de dimension finie. Alors,*

$$\begin{aligned} ind(T) &= \dim(\ker T) - \dim(Co\ker T) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y/R(T)) \\ &= \dim(\ker T) - (\dim(Y) - \dim(R(T))) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y) + \dim(R(T)) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Définition 1.1.15. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H')$.*
*A est dit un opérateur **semi-Ferdholm** à **droite** (respectivement à gauche) s'il existe un opérateur borné $B \in \mathcal{L}(H, H')$ et un opérateur K compact sur H' (respectivement sur H) tel que $AB = 1_{H'} + K$ (respectivement $BA = 1 + K$)*

Proposition 1.1.3. *Si $A \in \mathcal{L}(H, H')$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$, Alors $R(A - \lambda)$ est fermé dans H' et* $\dim\ker(A-\lambda) = \dim\ker(A-\lambda)^* < \infty$.

Proposition 1.1.4. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H')$.*
*A est **semi-Ferdholm** à **gauche** si $R(A)$ est fermé dans H' et* $\dim\ker A < +\infty$

Proposition 1.1.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H')$, Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est semi-Fredholm à gauche .*
2. *$R(A)$ est fermé dans H' et $\dim \ker A < +\infty$.*
3. *il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(H, H')$ et un opérateur F de rang fini sur H tel que $BA = 1 + F$*

Notation :
On note l'ensemble des opérateurs de Fredholm bornés de H dans H' par $\mathcal{F}(H, H')$.
On peut définir les opérateurs de Fredholm d'une autre manière équivalente en utilisant les sous-espace de codimension finie .

Définition 1.1.16. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H')$ avec $(X, \|.\|_x)$ et $(Y, \|.\|_y)$ des espaces de Banach .*
A est dit un presque plongement de X dans Y s'il existe un sous-espace X_1 de X de codimention finie et une constante $K > 0$ tel que :

$$\|Ax\|_Y \geq K\|x\|_X; \ \forall \ x \in X_1$$

Remarque 1.1.5. *Si A est un presque plongement et $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ est assez proche de A , Alors $(A + B)$ est presque plongement de X dans Y.*
En effet :

$$\|(A+B)x\|_Y = \|Ax+Bx\|_Y \geq \|Ax\|_Y - \|Bx\|_Y \geq K\|x\|_X - \|B\|\|x\|_X \geq (K - \|B\|)\|x\|_X$$

Si $\|B\| < K$, on a le résultat .

Proposition 1.1.6. *Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un opérateur presque plongement alors le noyau de A est de dimension finie.*

Preuve.
Comme A est un presque plongement , il vérifie la condition (1) sur le sous-espace X_1 de X de codimension finie.
Cherchons maintenant $\ker(A) \cap X_1$.
Si $x \in \ker(A) \cap X_1$ alors :

$$\begin{cases} x \in \ker A \\ x \in X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax = 0 \\ x \in X \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x = 0$$

Alors A est injective sur X_1 ailleurs qu'en 0. Donc on a $\ker A \cap X_1 = \{0\}$, et alors :

$$\ker A \subset (X/X_1) \cup \{0\}$$

D'où :

$$\dim \ker A \leq co \dim X_1 < +\infty$$

■

Proposition 1.1.7. *Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est un opérateur presque plongement alors l'image par A de tout sous-espace fermé de X est fermé dans Y.*

Remarque 1.1.6. *Si A est presque plongement de X dans Y et Z est un sous-espace fermé quelconque de X, on écrit $Z = (Z \cap X_1) \oplus F$ avec F de dimension finie, alors $A(Z) = A(Z \cap X_1) + A(F)$ est fermé comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie.*

Proposition 1.1.8. *Soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ alors A est Fredholm de X dans Y si A est presque plongement dont l'image est de codimention finie.*

Lemme 1.1.2. *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, est un presque plongement si et selement si son noyau est de dimension finie dans X et son image est fermé dans Y.*

Remarque 1.1.7. *Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est de Fredholm , Alors A est presque plongement grâce au lemme précedent.*

Proposition 1.1.9. *Si A est bijectif alors A est de Fredholm d'indice est nul .*

Preuve. Comme A est bijectif , Alors $\ker A = \{0\}$, par conséquent $\dim \ker A < +\infty$.
De plus $R(A) = H'$ est un fermé et $co \dim R(A) = 0$.
donc l'opérateur A est de Fredholm .

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim \ker A - co \dim R(A) \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.10. *Si* $\dim H < +\infty$, *et* $\dim H' < +\infty$, *alors* A *est de Fredholm .* *Dans ce cas*

$$ind(A) = \dim H - \dim H'$$

Preuve. Comme $\dim H < +\infty$, et $\dim H' < +\infty$ alors $\dim \ker A < +\infty$, $co \dim R(A) < +\infty$ et $R(A)$ est fermé donc A est de Fredholm .

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim \ker A - co \dim R(A) \\ &= \dim \ker A - \dim H' + \dim R(A) \\ &= \dim H - \dim H' \end{aligned}$$

■

Théorème 1.1.2. *Soit* $A \in \mathcal{L}(H, H')$.
A est de Freholm si et selement si A^* *est Fredholm.*
Dans ce cas

$$ind(A) = -ind(A^*).$$

la preuve du théorème décuoule directement des deux lemmes suivants.

Lemme 1.1.3. *Soit* M *un sous espace fermé d'un espace de Banach* X *, alors ona :*

$$\begin{aligned} M^* &\simeq X^*/M^{\perp} \\ (X/M) &\simeq M^{\perp} \end{aligned}$$

Lemme 1.1.4. *Soit* A *un opérateur borné défini de* X *dans* Y *avec* X *et* Y *deux espaces de Banach, Alors* $R(A)$ *est fermé dans* Y *si et semlement si :*

$$R(A^*) \ est \ fermè \ dans \ X^*$$

Preuve. Si A est de Ferdholm , montrons que A^* l'est aussi Comme $R(A)$ est fermé. en vertu de lemme précedent que $R(A^*)$ est fermé .
Calculons $\dim \ker A^*$ et $co \dim R(A)$.
Appliquons le premier de deux lemme précedent avec $M = R(A)$.

$$\dim \ker A^* = \dim(R(A))^{\perp} = \dim(H/R(A))^* = co \dim R(A) < +\infty.$$

$$\begin{aligned} co\dim R(A^*) &= \dim(H/R(A^*)) = \dim(H/(\ker A)^{\perp}) \\ &= \dim(\ker A)^* = \dim\ker A < +\infty \end{aligned}$$

par conséquent A^* est un opérateur de Fredholm.

$$\begin{aligned} ind(A^*) &= \dim\ker A^* - co\dim R(A^*) \\ &= co\dim R(A) - \dim\ker A \\ &= -ind(A) \end{aligned}$$

L'implication est vraie en vertu de la relation $A^{**} = A$. ■

1.2 Opérateurs fermés

Les opérateurs engendrant des problémes importants de la physique mathématique sont, en général des opérateurs différentiels partiellement définis sur un espace de Hilbert de type L^2 et non continus sur leurs domaines de définitions pour la topologie induite, ils sont dits non bornés.

Le théoréme de Hellinger-Toeplitz affirme qu'un opérateur linéaire A complétement défini sur un espace de Hilbert H vérifiant :

$$< Ax, y >=< x, Ay > \quad , \quad \forall\, x, y \in H$$

est nécessairement borné.

Les symboles $D(A)$, $kerA$ et ImA désignent par la suite respectivement le domaine, le noyau et l'image d'un opérateur linéaire A défini sur un espace de Hilbert H, ils constituent evidemment des sous-espaces vectoriels de H, un opérateur non borné A, sur un espace de Hilbert de domaine $D(A)$ est souvent noté $(A, D(A))$.

$\mathcal{L}(H)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés (continus) de H dans H, c'est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme naturelle.

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x\in H\setminus\{0\}} \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \\ &= \inf\{c > 0; \quad \|Ax\| \le c\|x\|,\ \forall x\ \in H\}, \quad \mathrm{A} \in \mathcal{L}(H) \qquad (2) \end{aligned}$$

La notion du graphe d'une transformation linéaire, introduite par J.Von Neumann, s'avère trés utile dans l'étude des opérateurs linéaires non bornés, elle permet de définir une classe d'opérateurs non bornés appelés opérateurs fermés qui occupe une place importante dans le domaine de la théorie spectrale et de l'analyse fonctionnelle de manière générale. En fait, souvent les opérateurs rencontrés dans la littérateure mathématique sont des opérateurs fermés à domaines denses ou ayant des propriétés similaires.

Définition 1.2.1. ***(Graphe d'un opérateur)***
Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné sur H, alors le graphe de A noté $G(A)$ est le sous-espace vectoriel de $H \times H$ défini par :

$$G(A) = \{(x, Ax);\ \forall x \in D(A)\}$$

$H \times H$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire naturel

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >_{H\times H} = < x_1, y_1 >_H + < x_2, y_2 >_H,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in H \quad (3)$$

En particulier, si A et B sont deux opérateurs linéaires sur H alors

$$A \subset B \Longleftrightarrow G(A) \subset G(B)$$

Lorsque $G(A)$ est fermé dans $H \times H$ pour la topologie induite par le produit sclaire (3), A est appelé un opérateur fermé sur H.

On note par $\mathcal{C}(H)$ l'espace des opérateurs fermés sur H. et $\mathcal{C}_1(H)$ l'espace des opérateurs fermés à domaines denses, $\mathcal{C}_1(H) \subset \mathcal{C}(H)$.
En vertu du théorème du graphe fermé on sait que tout opérateur borné complètement défini sur H est à graphe fermé, d'où l'inclusion $\mathcal{L}(H) \subset \mathcal{C}(H)$. On verra par la suite que cette inclusion est en général stricte.

Définition 1.2.2. *L'opérateur $(A, D(A))$ est fermé sur H si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(A)$ convergente vers x dans H telle que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans H alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

On peut laisser croire que la fermeture des oppérateurs ressemble à la continuité mais en réalité il s'agit de deux concepts différents. Puisqu'il existe des opérateurs partiellement définis qui sont fermés sans être bornés (donc non continus) et d'autres bornés sans être fermés, cela repose sur la structure topologique du domaine de l'opérateur car le théoréme du graphe fermé affirme que $A \in \mathcal{L}(H)$ si et seulement si $D(A) = H$ et A est fermé
On a alors directement à partir de la définion 1.2.2 le résultat suivant :

Proposition 1.2.1. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné sur H. Alors A est fermé si et seulement si $D(A)$ est fermé dans H.*

On peut aussi énoncer une autre forme équivalente de la définition de la fermeture d'un opérateur non borné $(A, D(A))$ en introduisant sur $D(A)$ le produit scalaire du graphe noté $<,>_A$ défini par :

$$< x, y >_A = < x, y > + < Ax, Ay >, \ x, y \in D(A)$$

et $\|x\|_A = (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{\frac{1}{2}}$ est la norme du graphe. Elle définit une topologie sur $D(A)$ moins finie que la topologie induite sur $D(A)$ par celle de H.
$D(A)$ muni du produit scalaire $<,>_A$ n'est pas en général un espace de Hilbert puisqu'il n'est pas complet relativement à $\| \cdot \|_A$ sauf si A est déja fermé sur H.

Proposition 1.2.2. *L'opérateur $(A, D(A))$ est fermé sur H si et seulement si $(D(A), <,>_A)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. Si A est fermé, soit $(x_n)_n$ une suite de cauchy dans $(D(A), <,>_A)$ alors $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont de Cauchy dans H, elle convergent donc respectivement vers x et y dans H, de plus $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

$$\|x_n - x\|_A^2 = \|x_n - x\|^2 + \|Ax_n - Ax\|^2_{n \longrightarrow +\infty} \longrightarrow 0$$

D'où $D(A)$ est complet pour $<,>_A$.
Réciporoquement, si $(D(A), <,>_A)$ est complet, $(x_n)_n$ une suite de $D(A)$ convergente

vers x et $(Ax_n)_n$ convergente vers y dans H, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(D(A), <, >_A)$ ainsi il existe z dans $D(A)$ tel que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - z\|_A = 0$$

Or,

$$\|x_n - z\|_A^2 = \|x_n - z\|^2 + \|Ax_n - Az\|^2$$

D'où, $(x_n)_n$ converge vers z et $(Ax_n)_n$ converge vers Az dans H, comme H est separé alors $x = z$ et $Ax = Az = y$. ■

Proposition 1.2.3.
1) Si $A \in \mathcal{C}(H)$, alors $\ker A$ *est fermé dans H.*
2) Si A est inversible alors $A \in \mathcal{C}(H)$ si et seulement si $A^{-1} \in \mathcal{C}(H)$.
En particulier, si $A \in \mathcal{C}(H)$ avec $ImA = H$ et A inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.
3) Si ImA est fermé dans H et il existe $C > 0$ tel que

$$\|Ax\| \geq C\|x\|, \; \forall \, x \in D(A) \qquad (5)$$

Alors $A \in \mathcal{C}(H)$.

Preuve.
1) est une conséquence immediate de la défintion 1.2.2. En effet, si $x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n$ Où $x_n \in \ker A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $(Ax_n)_n$ converge vers 0 dans H. Comme A est fermé, $x \in D(A)$ et $Ax = 0$ c'est à dire $x \in \ker A$.
2) A et A^{-1} ont simultanément des graphes fermés car

$$\begin{cases} G(A) = W(G(A^{-1})) \\ G(A^{-1}) = W(G(A)) \end{cases}$$

Où $W(x, y) = (x, y)$ est une isométrie surjective de $H \times H$.
3) l'inégalité (5), montre que A est injectif donc inversible de $D(A)$ dans ImA . $D(A^{-1}) = ImA$ est par hypothése fermé dans H de plus A^{-1} est borné de ImA dans $D(A)$ car $\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$, $\forall y \in ImA$.
D'ou, A^{-1} et aussi A sont fermés. ■

Lemme 1.2.1. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans $\mathcal{H}$, de domaine dense $D(A)$, alors*

1. *$V(x,y) = ((-y,x)$ est un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, tels que $V^2 = -I_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ et $V(E^{\perp}) = (V(E))^{\perp}$ pour tout sous espace E de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$.*
2. *$G(A^*) = (V(G(A)))^{\perp}$*
3. *Si A est fermé alors $\mathcal{H}\times\mathcal{H} = V(G(A)) \oplus G(A^*)$*

Proposition 1.2.4. *Si $A \in \mathcal{C}(H)$ tel que $\|Ax\| \geq C\|x\|$, $C > 0$, $\forall x \in D(A)$; alors ImA est fermé dans H.*
En effet, si $y = \lim_{n\longrightarrow+\infty} y_n$ où $y_n = Ax_n$, $x_n \in D(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
on a $\|y_n - y_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \geq C\|x_n - x_m\|$.
Or, $\lim_{n,m\longrightarrow+\infty} \|y_n - y_m\| = 0$, donc $(x_n)_n$ est de cauchy dans H et alors convergente vers $x \in H$.
comme A est fermé, alors $x \in D(A)$ et $Ax = y \in ImA$.

Un opérateur non fermé peut ou non avoir une extention fermée.
A sera dit fermable si l'adhérence de son graphe $G(A)$ dans $H \times H$ est le graphe d'un opérateur fermé que l'on notera $\overline{A}$ de domaine $D(\overline{A})$. $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ est appelé la fermeture de A.
En particulier, $\overline{A}$ est la plus petite extention fermé de l'opérateur A.
Donc si A est fermable alors :

$$D(\overline{A}) = \left\{ \begin{array}{l} x \in H,\ \textit{il existe une suite } (x_n)_n \in D(A) \textit{ telle que } (x_n)_n \textit{ converge vers } x \\ \textit{et } (Ax_n)_n \textit{ ait une limite dans } H \ \} \qquad (6) \end{array} \right.$$

et

$$\overline{A}x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} Ax_n,\ \textit{pour } x \in D(\overline{A})$$

En utilisant la linéarité de A on peut reformuler la définition de la fermeture $\overline{A}$ de A de la maniére suivante :

Définition 1.2.3. *A est fermable si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(A)$ convergente vers 0 dans H telle que la suite des images $(Ax_n)_n$ converge aussi dans H, alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} Ax_n = 0$.*

On remarque alors que fermer un opérateur c'est, en quelque sorte, le prolonger au maximum par des procédés purement toplogiques et que, pour aller plus loin, on doit utiliser des propriétés algébriques.

Proposition 1.2.5.
1) Tout opérateur $(A, D(A))$ borné est fermable, $D(\overline{A}) = \overline{D(A)}$ et $\overline{A}$ est borné sur $D(\overline{A})$
2) Si $(A, D(A))$ est fermable injectif, alors A^{-1} est fermable si et seulement si $\overline{A}$ est injectif, on a dans ce cas $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$.
Si de plus $\overline{A}^{-1}$ est borné alors $Im(\overline{A}) = \overline{ImA}$.

Preuve.
1) Soit $(x_n)_n$ une suite de $D(A)$ convergente vers 0 et $(Ax_n)_n$ convergente vers y dans H. Alors $\|Ax_n\| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H)}\|x_n\| \longrightarrow 0$. D'où, $y = 0 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} Ax_n$. Ainsi A est fermable.
Par définition, on a toujours

$$D(A) \subset D(\overline{A}) \subset \overline{D(A)} \qquad (7)$$

Inversement, si $x \in \overline{D(A)}$ alors $x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n$, $(x_n)_n \in D(A)$. Comme A est bornésur $D(A)$, $(Ax_n)_n$ devient de Cauchy donc convergente dans H, alors $x \in D(\overline{A})$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty Ax_n} = \overline{A}x$. $\overline{A}$ est bien borné sur $\overline{D(A)}$ en utilisant le lemme 1.2.2.
2) Si $\overline{A}$ est inectif, alors $\overline{A}^{-1}$ est une extension fermée de A^{-1} d'aprés lapropositon 1.2.3
Si A^{-1} est fermable, alors

$$W(G(\overline{A})) = \overline{W(G(A))} = \overline{G(A^{-1})} = G(\overline{A^{-1}}) \qquad (8)$$

Soient $y, z \in D(\overline{A})$ tel que $\overline{A}y = \overline{A}z$, alors $(\overline{A}y, y) \in G(\overline{A^{-1}})$ et $(\overline{A}z, z) \in G(\overline{A^{-1}})$ d'ou à fortiori $y = z$. $\overline{A}$ est injectif et on a $\overline{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
Si maintenant $\overline{A^{-1}}$ est borné sur son domaine, on a d'aprés 1),

$$Im(\overline{A}) = D(\overline{A}^{-1}) = D(\overline{A^{-1}}) = \overline{D(A^{-1})} = \overline{Im(A)}$$

Remarquons que tout opérateur fermable de rang fini est borné, Par conséquent, une forme linéaire non bornée n'est jamais fermable. ∎

Lemme 1.2.2. *Soit A un opérateur borné sur son domaine $D(A)$ d'un espace de Banach E dans un autre espace de Banach F. Alors il existe une unique extension bornée B de A définie sur $D(B) = \overline{D(A)}$ telle que $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \|B\|_{\mathcal{L}(H)}$.*

1.2.1 Somme des opérateurs fermés

Sur la somme de deux opérateurs fermés et de son adjoint

Dans cette section, on présente quelques travaux classiques et d'autres qui sont récémment établis à propos de la somme et du produit de deux opérateurs fermés.
Supposons l'existence de deux opérateurs A et B, les domaines $D(A)$ et $D(B)$ représentent physiquement l'ensemble des informations sur A et B. Si on considère les opérateurs $A+B$ et AB, les domaines $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ et $D(AB) = A^{-1}D(B)$ vont certainement se retricir (physiquement ceci est connu par la perte de données) ou encore se réduire à $\{0\}$. Le phénomème de trivialité du domaine de la somme (ou du produit) constitue à lui seul un problème assez délicat. Certes, cette situation peut arriver, mais la littérature ne présente que très peu d'exemples la montrant.

Pour ce qui est de la trivialité de la somme de deux opérateurs A et B, de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$, le domaine $D(A) \cap D(B))$ peut être réduit à zéro. Examinons l'unique exemple que introduit par Messirdi et Mortad dans [3] :
Sur $L^2(\mathbb{R})$, considèrons A l'opérateur de multiplication par x et B l'opérateur de multiplication par x^2.
A et B sont essentiellement auto-adjoints sur $D(A), D(B)$ respectivement avec

$$D(A) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \widehat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\}$$

$\widehat{f} = \mathfrak{F}f$ étant la transformée de Fourier de f.
On a

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) = \{f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}); \widehat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\} = \{0\}.$$

Puisque la transformée de Fourier d'une distribution à support compact n'est jamais à support compact sauf si elle est identiquement nulle en s'appuyant sur le théorème de PALEY-WIENER-SCHWARTZ[4] qui affirme bien le résultat suivant :

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{F}(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})) = \{0\}$$

Donnons d'abord quelques propriétés élémentaires de la somme de deux opérateurs non bornés :

Proposition 1.2.6. *Soient A, B deux opérateurs linéaires non bornés de domaines respectifs $D(A), D(B)$. Alors*

1. *Si A est borné et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.*
2. *Si $D(A), D(B), D(A) \cap D(B)$ sont denses dans $\mathcal{H}$ alors $A^* + B^* \subset (A + B)^*$, si de plus A est borné alors $A^* + B^* = (A + B)^*$*

Supposons à présent que le domaine n'est pas trivial, la deuxieme difficulté est une eventuelle perte du caractère (fermé, fermable, auto-adjoint et essentiellement auto-auto-adjoint..) des opérateurs par cette opération, et là aussi on introduira des exemples qui représentent ce changement de caractère.

Pour la somme de deux opérateurs non bornés, on fera une synthèse de la théorie de perturbations fondée par KATO et enrichi plus tard par FRIEDREICH et VON NEUMANN. Pour le produit, la théorie n'est pas trop avancée, en fait son utilité majeure pour la physique mathématique reste encore à découvrir et la littérature ne parle que du produit dans le contexte de l'analyse non linéaire.

Perturbations des opérateurs non bornés et adjoints

On se propose dans cette section de voir, pour différents caratères des opérateurs A et B, la nature de l'opérateur $A + B$ de domaine $D(A) \cap D(B)$ supposé dès maintenant non nul. Un premier pas dans la théorie des perturbations, consiste à étudier le caractère de l'opérateur $A + B$ lorsqu'on perturbe A par un autre opérateur B assez petit mais non borné appelé relativement borné.

Définition 1.2.4. *B est dit relativement borné à A ou simplement A-borné si et seulement si, $D(A) \subset D(B)$ et il existe deux constantes positives a et b telles que :*

$$\|Bx\|_{\mathcal{H}} \leq a\|Ax\|_{\mathcal{H}} + b\|x\|_{\mathcal{H}} \qquad \forall x \in D(A)$$

L'infimum de a vérifiant cette inégalité est appelé la borne relative de A. En particulier, si B est borné, la borne relative de A est égale à 0.
Cette définition est plus utilisée, dans le cadre des espaces de Hilbert, sous la forme :

Théorème 1.2.1. *B est relativement borné à A de borne relative a si et seulement si*

$$\inf_{b>0} \sup_{x\in D(A)\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Bx\|^2}{\|Ax\|^2 + b\,\|x\|^2} \right)^{1/2} < \infty$$

L'un des premiers théorèmes de la théorie des perturbations des opérateurs fermés est donné par Hess et Kato dans [5].

Théorème 1.2.2. *Soit A un opérateur fermé de domaine dense $D(A)$, et B un opérateur A-borné tel que B^* est A^*-borné dont les bornes relatives sont strictement infèrieures à 1. Alors $A+B$ est fermé et $(A+B)^* = A^* + B^*$.*

Ce résultat, important dans la théorie des perturbations, ne subsiste plus si la borne relative est égale à 1. En effet, si on considère $B = -A$, la borne relative est égale à 1, mais l'opérateur nul n'est jamais fermé s'il est défini sur un sous espace non fermé de $\mathcal{H}$. Ce théorème constitue, par ailleurs, un premier résultat de la stabilité des opérateurs fermés sous des perturbations non bornées et de l'adjoint. Remarquons aussi que les hypothèses ne sont pas symétriques pour A et B.
Le théorème suivant constitue une version plus intéréssante pour connaître le caractère d'un opérateur à partir d'un autre :

Théorème 1.2.3. *Supposons A, B deux opérateurs non bornés ayant le même domaine $D(A) = D(B) = D$ vérifiant :*

$$\|(A-B)x\| \leq a(\|Ax\| + \|Bx\|) + b\,\|x\|$$

pour certain $a > 0$. Alors :

1. *A est fermé sur D si et seulement si B l'est aussi*
2. *A est fermable sur D si et seulement si B est fermable et on a $D(\overline{A}) = D(\overline{B})$*

Définition 1.2.5. ***(Métrique du gap g)***
Soient M et N deux sous-espace fermés de H. On pose

$$g(M,N) = \|P_M - P_N\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$$

Où, P_M et P_N sont respectivement les projections orthogonales de H sur M et N. posons également :

$$\delta(M,N) = \|(I - P_N)P_M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$$

Proposition 1.2.7.

1. $0 \leq \delta(M,N) \leq 1$
2. $\delta(M,N) = 0 \Longleftrightarrow M \subset N$
3. $\delta(M,N) = \delta(M^\perp, N^\perp)$
4. $g(M,N) = \max(\delta(M,N), \delta(M,N))$
5. $M \cap N^\perp = M^\perp = N = \{0\} \Longrightarrow \delta(M,N) = \delta(N,M) = g(M,N)$

Proposition 1.2.8. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $g(M,N) < 1$
2. $M + N^\perp = H,\ M + N^\perp = \{0\}$
3. *Il existe une projection Q de H sur M telle que $(I - Q)$ soit une projection sur $N^\perp$.*

La littérature affirme que les opérateurs intérférant avec la physique ou les équations différentielles abstraites ne sont pas toujours fermés. Ils sont intéréssants et utiles lorsqu'ils sont auto-adjoint ou essentiellement auto-adjoint. On peut établir que si un opérateur est proche d'un opérateur auto-adjoint alors lui aussi sera auto-adjoint. En effet on a :

Théorème 1.2.4. *Soit T un opérateur auto-adjoint. S'il existe $\delta > 0$ tel que : Pour chaque opérateur symétrique et fermé A vérifiant $g(A,T) < \delta$ est nécessairement auto-adjoint, g désigne la métrique du gap.*

L'importance de ce théorème n'est pas à discuter, mais le calcul de l'écart entre T et A par la métrique g constitue parfois une difficulté importante.
Les opérateurs auto-adjoints constituent, de leur côté, une classe importante des opérateurs linéaires non bornés. En fait, les opérateurs rencontrès dans la physique quantique sont souvent auto-adjoints ou essentiellement auto-adjoints. En partciulier, les opérateurs de SCHRÖDINGER sont considérés comme une perturbation par un champ de potentiel de l'opérateur de LAPLACE sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour ces raisons on préfère, parfois, utiliser la stabilité du caractère auto-adjoint des opérateurs à travers le théorème de KATO- RELLICH [6] :

Théorème 1.2.5. *Soit T un opérateur auto-adjoint. Si A est symétrique et $T-$borné de borne relative strictement inférieure à 1, alors $T + A$ est aussi auto-adjoint. En particulier, $T + A$ est auto-adjoint si A est borné et symétrique avec $D(T) \subset D(A)$*

ou encore le théorème de Wüst pour les opérateurs essentiellement auto-adjoints (Voir par exemple [7]) :

Théorème 1.2.6. *Si A est un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$. Si B, de domaine $D(B)$, est un opérateur symétrique A-borné de borne relative égale à 1, alors l'opérateur $A + B$ de domaine $D(A)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(A)$.*

On se limite dans cette section aux théorèmes (HESS-KATO, KATO-RELLICH et WÜST) bien que d'autres résultats de stabilité sous des perturbations compactes ou d'autres existent. Pour ne pas déborder le cadre de notre travail, Ceux qui souhaitent une lecture plus approfondie dans ce domaine sont invités à consulter les références ([8],[9],[10],...).

On a vu jusqu'à présent que la somme $A + B$ de deux opérateurs possède le même caractère de l'opérateur A si B est correctement choisi . Mais qu'en est -il de la somme des opérateurs fermés ou auto-adjoints sans contrôle de la perturbation ?
La réponse est en général décévante : la somme $A + B$ de deux opérateurs fermés n'est pas en géréral fermée. En effet, si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable avec une base orthonormale (ξ_n).

Posons $D = \left\{ x \in H; \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \left| \langle x, y_n \rangle \right|^2 < \infty \right\}, z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} y_n$ et définissons les opérateurs S et T de domaine D, qui est dense dans $\mathcal{H}$, par :

$$Sx = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \langle x, y_n \rangle y_n \quad , \quad Tx = Sx + \langle Sx, z \rangle y_1 \quad x \in D$$

Alors l'opérateur T aussi bien que S sont fermés à domaines denses mais $T - S$ n'est pas fermable donc non fermé.

Pour terminer ce paragraphe, on notera la présence du seul travail, à notre connaissance, qui rentre dans le cadre de la stabilité la somme de deux opérateurs fermés initié pricipalement par Grisvard et Da Prato dans [11].

L'objectif est d'étudier le problème différentiel abstrait :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \quad ; \quad 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

où A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique dans un espace donné $\mathfrak{X}$. le problème peut s'écrire en posant $Lu = Au + Bu$ avec $u \in D(L) = D(A) \cap D(B)$ et $Bu(t) = u'(t)$ sous la forme :

$$\begin{cases} L(u) = f \qquad 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Si $\mathfrak{X}$ est un espace de Hilbert, Da Prato et Grisavard montrent dans [11], que sous certaines conditions, l'opérateur L est fermé et la solution du problème (1.5) est une solution stricte. Par ailleurs, si $\mathfrak{X}$ est seulement un espace de Banach, les résultats s'affaiblissent et l'opérateur L est seulement fermable, ainsi la solution obtenue est forte (la notion forte ici est équivalente à dire que c'est une solution distribution).

Plus tard, Dore et Venni [12] établissent des résulats plus intéréssants qui consistent à montrer que sur un espace de Banach donné $\mathfrak{X}$ l'opérateur somme L est fermé et parsuite la solution du système (1.5) est forte ceci est réalisé à partir d'hypoyhèses d'analyticité sectorielle. Ces deux travaux semblent être le point de départ vers de nouvelles avancées dans le domaine des équations différentielles stochastiques [13].

Dans un contexte différent de celui des problèmes différentiels abstraits, Lennon [14] a repris les matrices caractéristiques introduites par stone [15] pour intoduire les matrices bicaractéristiques du produit et de la somme de deux opérateurs fermés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et leurs bigraphes associés. Il établissa des conditions nécessaires et suffisantes pour que les domaines de la somme et du produit de ces deux opérateurs soient denses dans $\mathcal{H}$.

1.2.2 Produit des opérateurs fermés

Sur le produit des opérateurs fermés et de son adjoint

Comme nous l'avons mentionné auparavant, la trivialité d'une opération algébrique sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ constitue un problème sans remède et toutes les conditions mathématiques réunies ne peuvent changer cette situation. Bien evidemment, si l'on se place dans le cadre auto-adjoint, on garantit la non trivialité du carré d'un opérateur (grâce au théorème spectral voir [8]) mais pas la stabilité malheureseusemnt. NAIMARK [16] était le premier à traiter ce problème, il donna une méthode implicite pour la construction d'un opérateur symétrique A de telle sorte à avoir $D(A^2) = \{0\}$. CHERNOFF [17] plus tard, donna une approche plus explicite pour la construction de tels opérateurs qui peuvent aussi être des opérateurs semi-bornés dans ce cas (voir chapitre suivant). C'est au tour de DIXMIER à la fin de son papier [18] qu'il donna une approche plus explicite, cette fois, d'un opérateur A fermé à domaine dense tels que $D(A^2) = D(A^{*2}) = \{0\}$. Hormis ces deux travaux, il n'existe pas de travaux ou d'exemples qui montrent la trivialité du produit.

Supposons dès à présent que le domaine du produit est non réduit au vecteur nul, le produit de deux opérateurs fermés n'est pas en général fermé. Considérons en effet sur $L^2(\mathbb{R})$, les opérateurs

$$A = -i\frac{d}{dx}, \qquad B = |x|$$

A et B sont clairement auto-adjoints (par suite fermés) sur leurs domaines respectifs

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \quad \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

et

$$D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Alors l'opérateur défini par

$$ABx = -i(|x|f)'$$

de domaine

$$D(AB) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : |x|f \in L^2(\mathbb{R}), -i(|x|f)' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

où la dérivée est considérée au sens des distributions [19]. $D(AB)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ mais AB ne peut être fermé (voir [20]).
On voit que le caractère auto-adjoint des deux opérateurs n'est pas suffisant pour garantir la fermeture du produit. Par ailleurs, le produit AB est par exemple fermé si A est fermé et B est borné. Par contre, si A est borné et B est fermé on se retrouvera avec un opérateur semi fermé qui n'est pas nécéssairement fermé([21], [22]). La littérature montre aussi la fermeture de AB, dans cet ordre, si A est un opérateur inversible à inverse borné sur $\mathcal{H}$ ([23], [7]).

Les opérateurs de Fredholm, qui sont des opérateurs fermés vérifiant des conditions supplémentaires (voir [24]) permettent de montrer que le produit AB est Fredhlom si A et B le sont aussi.

Définition 1.2.6. *Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, K sera dit un sous-espace paracomplet de $\mathcal{H}$ si K est un sous-espace hilbertisable de $\mathcal{H}$ tel que l'injection de K, muni de sa topologie propre, dans $\mathcal{H}$ est continue.*

Par cette définition, LABROUSSE [24] présente les opérateurs paracomplets dont les graphes associés sont paracomplets dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Il remarque alors que la famille des opérateurs paracomplets est la plus petite famille d'opérateurs fermés pour la somme et le produit d'opérateurs et contenant les opérateurs fermés, en d'autres termes, il montre :

Proposition 1.2.9. *AB est paracomplet si A et B sont paracomplets et tels que $N(AB)$ et $R(AB)$ sont fermés dans $\mathcal{H}$.*

il montre aussi que dans le même travail :

Théorème 1.2.7. *Si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

1. *A et B sont des opérateurs de Fredholm.*
2. *A et B sont des opérateurs quasi-Fredholm et AB est quasi- Fredholm à indice égal à* 0.
3. *B est un inverse généralisé de A et $R(A)$ est fermé dans $\mathcal{H}$, et inversement.*
4. *B est un inverse généralisé de A tel que $R(A) \oplus R(B) = \mathcal{H}$.*

Alors AB est fermé dans $\mathcal{H}$.

En ce qui concerne la relation de l'adjoint du produit de deux opérateurs fermés, il est connu que si A et B sont deux opérateurs fermés à domaines denses sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors $(AB)^* \supseteq B^*A^*$ avec une inclusion qui peut être stricte.
La question "*Sous quelles conditions à t-on l'égalité ?*" s'avère très importante. VON NEUMANN (voir [25]) commence par montrer cette égalité pour $B = A^*$. Concernant les opérateurs fermés, HOLLAND [26] montre :

Théorème 1.2.8. *Si A est un opérateur fermé à domaine dense sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et B est un opérateur borné partout défini dans $\mathcal{H}$ tels que $R(B)$ est fermé et de codimension finie dans $\mathcal{H}$, alors $(AB)^* = B^*A^*$.*

Les conditions $R(B)$ est fermé et de codimension finie dans $\mathcal{H}$ sont liés par la suite à la terminolgie des opérateurs semi Fredholm inférieurs (voir [27], [24]).
SCHECHTER [28] montre, un peu plus tard, que si A, B sont fermés sur un espace de Banach tel que $R(B)$ est de codimension finie, alors $(AB)^* = B^*A^*$, GUSTAFSON la montre pour le cas des espaces de Hilbert. Ces résultats ont permis de développer d'autres conditions pour l'établissement de la formule de l'adjoint du produit menée principalement par VAN CAASTAREN et GOLDBERG, ils montrent que la formule de l'adjoint de SCHECHTER peut être meilleure sous la forme (Voir [29]) :

Proposition 1.2.10. *Soit A un opérateur fermé, à domaine dense dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'adjoint $(AB)^* = B^*A^*$ pour tout opérateur fermé B à domaine dense si et seulement $R(A)$ est de codimension finie.*

Théorème 1.2.9. *L'égalité $(AB)^* = B^*A^*$ a lieu si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

– *B est fermé sur $R(B) \oplus N$ (N étant un sous espace fermé quelconque de $D(A)$) et $codim(R(B)) < \infty$, ici A n'est pas nécéssairement fermé.*
– *A, B sont fermés sur $\mathcal{H}$ avec $N = N(B^*) \cap D(A)$ est fermé, $N^\perp \cap N(B^*)$ est de dimension finie et $R(B)$ est fermé ($N(B^*) \subset D(A)$ et $R(B)$ est fermé ou $codim(R(B)) < \infty$)*
– *$D(AB)$ est dense, A injectif à inverse borné.*

Ils donnent aussi, un résultat concernant les opérateurs auto-adjoints :

Théorème 1.2.10. *si A, B sont des opérateurs auto-adjoints, tels que*
– *$D(AB)$ est dense*
– *$D(A) \subset R(B)$*
– *$R(B) \subset D(B)$*
Alors, $(AB)^* = B^*A^*$

1.3 Instabilité de la somme et du produit des opérateurs fermés

cette section est consacré à l'étude de la somme et le produit des opérateurs linéaires fermés sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, dont la somme et le produit n'est pas fermé sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

1.3.1 Trivialité de la somme et du produit

1- Construction d'un opérateur linéaire symétrique fermé A tel que $D(A^2) = \{0\}$

La théorie montre que bien evidemment, si l'on se place dans le cadre auto-adjoint, on garantit la non trivialité du carré d'un opérateur (grâce au théréme spectral voir [30]) mais pas la stabilité malheureseusemen. Naimark était le premier à traiter ce propléme, il donna une méthode implicite pour la construction d'un opérateur symétrique A de telle sorte à avoir $D(A^2) = \{0\}$. Chernoff plus tard, donna une approche plus explicite pour la construction de tels opérateurs qui peuvent aussi être des opérateurs semi-bornés dans ce cas. On utilise ici de la transformation de cayley. Rappelons

qui si M et$N$ sont deus sous-espace vectoriels d'un espace de Hilbert H et U est une isométrie de M dans N telle que $(U-I)M = D$ est dense dans H, alors $(U-I)$ est bijectif et $A = i$
$(U+I)(U-I)^{-1}$ est un opérateur symétrique fermé de domaine dense $D(A) = D$. Précisement, $D(A^2) = \{0\}$ dés que $Im(U+I) \cap Im(U-I) = \{0\}$ et à fortiori si $M \cap N = \{0\}$ car

$$A^2 = -[2(U-I)^{-1} + I](U+I)(U-I)^{-1} = i[2(U-I)^{-1} + I]A$$

On va alors construire selon **P.R**. Chernoff (voir [35]) M, N er U vérifiant ces condition. pour cela prenons $H = L^2(S)$,où S est le cercle unité,
$M = H^2(S) = \{f \; analytique \; sur \; ledisque \; unite \; ouvert \; telleque \; \sup(\frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta)\frac{1}{2} < +\infty\}$ et U l'opérateur de multiplication, défini $L^2(S)$, par la fonction $\alpha(\theta)$:

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} \exp(re^{\frac{-1}{\theta}}), 0 < \theta < \Pi; \\ -1, \Pi < \theta < 2\Pi. \end{cases}$$

Posons aussi

$$N = ImU = UM \; = \alpha H^2(S) = \{\alpha\varphi; \varphi \in H^2(S)\}$$

Alors
i-$|\alpha(\theta)| = 1, \forall\theta \in]0, 2\Pi]$ *et donc* $D(U) = L^2(S)$.
ii-$\alpha(\theta) = -1$ sur un ensemble de mesure non nulle.
iii- $\alpha(\theta) \neq 1, \forall\theta \in]0, 2\Pi]$
Mais

$$\int_0^{2\Pi} \log|\alpha(\theta) - 1| d\theta = -\infty$$

En effet,

$$\log|\alpha(\theta) - 1| = \begin{cases} \log|\exp(ie^{\frac{-1}{\theta}} - 1)| \; sur \;]0, \Pi[; \\ \log 2 \; sur \; [\Pi, 2\Pi]. \end{cases}$$

Si $\theta \in]o, \Pi[, \alpha(\theta) - 1 = \exp(ie^{\frac{-1}{\theta}}) - 1 = 2i\sin(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})e^{i}(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})$ et

$$\log|\alpha(\theta)-1| = \log 2|\sin(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})|$$

Comme $\lim_{\theta\longrightarrow 0}\theta\log 2(\sin(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})) = -\infty$; alors :

$$\forall C>0, \exists\eta>0, 0<\theta<\eta \Longrightarrow \log 2(\sin(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})) > -\frac{C}{\theta}$$

et

$$\int_0^{2\Pi}\log|\alpha(\theta)-1|d\theta = \int_0^{\eta}\log|\alpha(\theta)-1|d\theta + \int_{\eta}^{\Pi}\log|\alpha(\theta)-1|d\theta + \Pi\log 2 = -\infty$$

IV- $\forall\theta\in]0,2\Pi], Im\alpha(\theta\geq 0.$

le théorème de G.Sczego [35] affirmeque si f est une fonction non nulle de $H^2(S)$, alors

$$\int_0^{2\Pi}\log|f(\theta)|d\theta > -\infty$$

En particulier, f ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesuer non nulle.

Ainsi, grâce à ce résultat la propriété II, on remarque que $M\cap N=\{0\}$

En effet, si $f\in H^2(S)$ et $\alpha(\theta)f\in H^2(S)$ alors $(\alpha(\theta)+1)f\in H^2(S), or(\alpha(\theta)+1)f(\theta)$ s'annule sur un ensemble de mesure non nulle, de plus f est supportée dans $[\Pi,2\Pi]$ donc forcément f est indentiquement nulle sur $]0,2\Pi]$.

III- montre que $(U-I)M=(\alpha(\theta)-1)H^2(S)$ est dense dans $L^2(S)$ car si $g\in((\alpha(\theta)-1)H^2(S))^{\perp}$ alors

$$<(\overline{\alpha(\theta)}-1)g, f>_{L^2(S)}=0, \forall f\in H^2(S)$$

d'où$(\alpha(\theta)-1)\overline{g}(\theta)\in H^2(S)$ ..Or,puisque l'intégrale de $\log|(\alpha(\theta)-1)|$ diverge vers $-\infty$ sur $]0,2\Pi]$,on a :

$$\int_0^{2\Pi}\log|(\alpha(\theta)-1)\overline{g}(\theta)|d\theta = -\infty$$

donc en vertu du théoréme de G.Szego [35]$(\alpha(\theta)-1)\overline{g}(\theta)=0$, et alors $g(\theta)\equiv 0$ sur $]0,2\Pi]$.

2-Somme triviale de deux opérateurs linéaires non bornés

On se limite ici aux cas des opérateurs fermés , on considére sur $L^2(R)$ les opérateurs A et B de multiplication par la fonction x et x^2 de domaines respectifs $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $D(B) = \{f \in L^2(R); \tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$ où $\tilde{f} = \mathcal{F}f$ désigne la transformation de fourier de f.

On sait que A et B deux opérateurs non bornés symétrique, essentiellement autou-adjoint, car

$$D(\overline{A}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), xf \in L^2(\mathbb{R})\}$$

et

$$D(\overline{B}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), x^2 f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

(si $f \in D(B)$, alors $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ donc $D^2\tilde{f} = \widehat{-x^2 f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, par conséquent $x^2 f \in L^2(\mathbb{R})$. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont auto-adjoints respectivement sur $D(\overline{A})$ et $D(\overline{B})$.

$$\begin{aligned} D(A+B) &= D(A) \cap D(B) \\ &= \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}); \tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

puisque le théoréme de Paley-Wiener [35] effirme que l'image de Fourier d'une distribution non nule à support compact n'est jamais à support compact.

En effet , si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors f est prolongeable en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Or ,tout fonction analytique sur $\mathbb{R}$ nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ c'est identiquement nulle $\mathbb{R}$. Donc f ne peut être à support compact àmoins d'être identiquement nulle .

1.3.2 Somme non fermée de deux opérateurs fermés

Nous donnons ici des exemples d'opérateurs linéaires sur $L^2(\mathbb{R})$ dont la somme et le produit n'est pas fermé sur $L^2(\mathbb{R})$. D'afin éviter la trivailété de la some et du produit des deux opérateurs , on se place dans le contexte auto-adjoint.

Soient A et B définis sur $L^2(\mathbb{R})$ par $Af(x) = -\frac{df}{dx}(x)$ et $Bf(x) = f(x) + -\frac{df}{dx}(x)$ de domaines respectifs :

$$D(A) = D(B) = H^1(\mathbb{R}) = \left\{ \ f \in L^2(\mathbb{R}); \frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \ \right\}.$$

A et B sont auto-adjionts donc fermées sur $L^2(\mathbb{R})(M = \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}$ est l'opérateure de multiblication par la fonction réelle $(1 + x)$ il est auto-adjoint sur $D(M) = \{g \in L^2(\mathbb{R}); (1+x)g(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$ donc $B = \mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F}$ est aussi auto-adjoint sur $\mathcal{F}D(M) = H^1(\mathbb{R})$).

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) = H^1(\mathbb{R})$$

Mais $(A+B)f = f$ est une restriction de l'identité à $H^1(\mathbb{R})$, donc A+B ne peut être fermé

1.3.3 Produit non fermé de deux opérateurs fermés

Considérons sur $L^2(\mathbb{R})$ les opérateurs $A = -i\frac{d}{dx}$ et B l'opérateur de multiplication par la fonction $|x|$. A et B sont auto-adjoints (donc fermés) sur leur domaines respectifs :

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

et

$$D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

L'opérateur produit AB est défini sur son domaine :

$$D(AB) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R}), -i\frac{d(|x|f)}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

par

$$ABf = -i\frac{d(|x|f)}{dx}$$

$D(AB)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car il contient $C_0^\infty(\mathbb{R})$, néanmoins on montre que AB n'est certainement pas fermé.
En effet, définissons l'opérateur M sur $L^2(\mathbb{R})$ par $Mf = -i|x|\frac{df}{dx} \pm if$ de domaine

$$D(M) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); |x|\frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

où $|x|\frac{df}{dx}$ est une distribution sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Soit $(f_n, Mf_n)_n$ est une suite dont $G(M)$ est un graphe de l'opérateur M convergente dans $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ vers (f, g), alors $(f_n)_n$ converge vers f et $\left(-i|x|\frac{df_n}{dx}\right)$ converge vers $g \pm if$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi $\left(\frac{df_n}{dx}\right)_n$ converge vers $\frac{df}{dx}$ au sens des distribution et à

fortiori sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\left(|x|\left(\frac{df_n}{dx}\right)_n\right)$ converge aussi vers $|x|\frac{df}{dx}$. par unicité de la limite on a $g \pm if = |x|\frac{df}{dx}$ presque pour tout x, d'où l'égalité dans $L^2(\mathbb{R})$.
Alors M est fermé sur domaine $D(M)$, de plus M est bien une extension fermée de l'opérateur AB, en fait il est montré que M est la fermeteure de AB , $M = \overline{AB}$, ce qui prouve bien que M n'est pas fermé mais seulement fermable.
Le caratére auto-adjoint de deux opérateurs ne suffit pas pour garantir la fermeture du produit ou de la somme de ces opérateurs.

Chapitre 2

Opérateurs semi fermés

2.1 Opérateurs semi fermés, Caradus (1973)

Beaucoup d'exemples montrent que la somme de deux opérateurs fermés n'a même pas une extension fermée, il est de même pour le produit. En prenant la composition de l'application $f \longrightarrow f'$ et $f \longrightarrow f(0)$ dans cet ordre est à domaine trivial dans $C[0,1]$. Caradus, est le premier à montrer que le produit des opérateurs fermés donne lieu à une classe d'opérateurs dite semin fermés. Il montra d'abord :

Lemme 2.1.1. *(Décomposition canonique)*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire semi fermé. Alors il existe un espace de Banach Z et deux opérateurs fermés $U : Z \longrightarrow Y$ et $V : X \longrightarrow Y$ vérifiant :
(a) : $T = UV$
(b) : U est défini et continu sur tout Z et $R(U) = R(T)$
(c) : $D(V)$ est égal au domaine à $D(T)$ et T envoie injectivement $D(T)$ sur Z

Preuve.
Puisque T est semi fermé, il existe une certaine décomposition $T = PQ$ où $P : W \longrightarrow Y$ et $Q : X \longrightarrow W$ sont des opérateurs fermés et W est un espace de Banach. On définit

$$Z = \{(x, Qx, PQx) \; ; \; x \in D(T)\}$$

où $D(T)$ désigne le domaine de T et Z est considéré comme un sous-espace de $X \times W \times Y$. Considérons :

$$V = x \longmapsto (x, Qx, PQx)$$

et

$$U = (x, Qx, PQx) \longmapsto PQx$$

avec $D(V) = D(T)$ et $D(U) = Z$. alors des propriétés (a) , (b) et (c) sont facilement vérifiées. ∎

Nous conservons dans la suite la notation $T = UV(Z)$ pour représenter la décomposition décrite dans le lemme précédent. Il est clair que, pour un T donné, l'espace Z est unique à isomorphisme prés. Lorsque T est un opérateur borné tel que $D(T) = X$, on a $T = TI(X)$. Lorsque T est fermé, on peut écrire $T = PG(G(T))$ où $G(T)$ désigne le graphe de T , G est l'application $x \longmapsto (x, Tx)$ et P est la projection telle que $(x, Tx) \longmapsto Tx$. Une autre conséquence, immédiate, du lemme 2.1.1 est que l'opérateur semi fermé à domaine fermé est continu.

Rappelons qu'un opérateur linéaire fermé n'est pas nécéssairement continu, cependant on peut le rendre continu en renormant son domaine avec une autre norme dite norme du graphe :

$$|x|_T = |x| + |Tx|$$

Le lemme précedent assure l'existence d'une telle procédure, en effet :

Corollaire 2.1.1. *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire quelconque, Alors T est semi fermé si et seulement si il existe une norme $x \longmapsto |X|_T$ sur $D(T)$ tels que*
(a) l'espace muni de la norme $X_T = (D(T), |.|_T)$ est complet
(b) l'opérateur induit par $\widetilde{T} : X_T \longrightarrow Y$ est continu.

Preuve. Si T est semi fermé et $T = UV(Z)$, alors on définit $|x|_T = |Vx|$. Réciproquement, si $|.|_T$ existe et vérifie les propriétés (a) et (b), alors on peut définir $T = UV(X_T)$ avec $Vx = x$ et $Ux = Tx$. ∎

Nous pouvons maintenant établir la stabilité de la classe des opérateurs semi fermés par les opérations algébriques élémentaires :

Théorème 2.1.1. *Si T_1 et T_2 sont des opérateurs semi fermés, alors $T_1 + T_2$ et T_1T_2 le sont aussi (lorsque ceux-ci sont définis)*

Preuve. Supposons qu'on a $T_i = U_iV_i(Z_i)$, $i = 1, 2$. On peut simplement construire la décompistion souhaitée.
(i) Soit $W = \{(x, V_1x, V_2x) : x \in D(T_1 + T_2)\} \subseteq X \times Z_1 \times Z_2$;
$V = X \longrightarrow W$, $D(V) = D(T_1 + T_2)$, $Vx = (x, V_1x, V_2x)$; $D(U) = W$,
$U(x, V_1x, V_2x) = (T_1 + T_2)x$. Alors $T_1 + T_2 = UV(W)$.
(ii) Soit $\hat{W} = \{(x, V_2x, V_1T_2x) : x \in D(T_1T_2)\} \subseteq X \times Z_2 \times Z_1$;
$\hat{V} : X \longrightarrow \hat{W}$, $D(\hat{V}) = D(T_1T_2)$, $\hat{V}x = (x, V_2x, V_1T_2x)$; $D(\hat{U}) = \hat{W}$,
$\hat{U}(x, V_2X, V_1T_2x) = T_1T_2x$. Alors $T_1T_2 = \hat{U}\hat{V}(\hat{W})$. ■
Le théorème précedent subsiste dans une autre forme.

Théorème 2.1.2. *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur semi fermé. Alors*
(i) si X est séparable (plus généralement admet des quasi compléments) alors T admet une extension semi fermée à domaine dense.
(ii)si X_0 est un sous-espace de X et X_0 est le domaine d'un certain opérateur fermé, alors T_0 la restriction de T sur X_0 est un opérateur semi fermé.

Preuve.
(i) Supposons que $D(T)$ n'est pas dense dans X et posons $D = \overline{D(T)}$. Alors si $\hat{D}$ est un quasi complément de D, on peut définir l'application projection $\pi : D \oplus \hat{D} \longrightarrow D$. On peut vérifier que π est fermé et donc $T\pi$ est une extension semi fermée de T et des arguments directes montrent que $T\pi$ est densement défini.
(ii) si X_0 est le domaine d'un opérateur fermé, alors X_0 est également l'image d'un opérateur fermé $S : Z \longrightarrow X$ pour certain espace Z. Donc X_0 est également l'image d'un opérateur fermé et injectif $\hat{S} : Z/N(S) \longrightarrow X$. Maintenant, $\hat{S}\hat{S}^{-1}$ est semi fermé et est la restriction I_0 de l'opérateur identité de X_0, ce qui donne $TI_0 = T_0$ est semi fermée. ■

Remarque 2.1.1. *Il est connu qu'il existe des sous espaces qui ne sont domaines d'aucun opérateur fermé. Kaashoek[31] a attiré l'attention sur ce point en donnant une construction simple sur un espace de Banach d'un sous-espace dense de codimension finie. Un célèbre théorème [8] montre qu'un tel sous-espace ne peut être l'image* *d'opérateur fermé et ne peut frocément être le domaine d'un opérateur fermé.*

2.2 Opérateurs Semi fermés. Kaufmann (1979)

Introduction

Soit $(H, <.,.>)$ un espace de Hilbert et soit $(H \times H, <.,.>^{\frown})$ l'espace produit usuel. Dire que S est un sous-espace semi fermé de H veut dire que S est sous-espace de H linéaire non nécessairement fermé sur lequel on définit un produit scalaire $<.,.>'$ tel que $(S, <.,.>')$ est complet et s'injecte continument dans H, c'est à dire qu'il existe un nombre positif b tel que $< x, x > \leqslant b^2 < x, x >'$ pour tous x dans S.

Définition 2.2.1. *A opérateur est semi-fermé dans H si son graphe est un sous-espace semi fermé de $H \times H$.*

Bien entendu, tout opérateur fermé dans H est semi-fermé, puisque tout sous-espace fermé est semi-fermé. Cependant, il existe des opérateurs semi fermés dans H dont la fermeture est $H \times H$ tout entier (On reviendra sur ce point plus tard).
Notons par $\mathcal{SC}(H)$ l'ensemble des opérateurs semi fermés dans H, Kaufmann [32] montre que $\mathcal{SC}(H)$ est stable par la somme, le produit, l'inverse, à la restriction aux sous espaces fermés dans H et par passage à la limite simple sur de tels espaces. De plus il montre :

Théorème 2.2.1. *Soit H un espace vectoriel et C un opérateur semi fermé défini sur un sous espace vectoriel S de H. On a alors :*

1. *C est la somme de deux opérateurs fermés et injectif dans H ayant le domaine S et à image fermée (donc à inverse continu).*
2. *C est le produit d'un opérateur continu sur H par un opérateur positif fermé dans H ayant le domaine S et à image fermée.*
3. *C est une combinaison algébrique d'opérateurs fermés dans H .*

4. *S est un sous-espace semi fermé de H et C est la limite forte dans H sur S d'une suite d'opérateurs continus sur H.*

5. *S est un sous-espace semi fermé de H et C est continu de S avec sa topologie naturelle dans H*

Il vient de ce qui précède que les opérateurs semi fermés dans H constituent la plus petite famille d'opérateurs dans H contenant les opérateurs fermés et est lui-même fermé sous l'addition, la multiplication et le passage à la limite sur les sous espaces semi fermés.
L'expression "topologie naturelle" dans (5) vient du fait que, si S est sous-espace semi fermé de H alors tous les produits scalaire $<,.,>'$ générent la même topologie sur S. Les normes relatives aux produits scalaires $<,.,>$, $<.,.>^{\frown}$, $<,.,>_0$, etc ...seront notées $\|.\|$, $\|.\|^{\frown}$, $\|.\|_0$, etc ., sauf que, si A est dans $\mathfrak{B}(H)$ alors $\|A\|$ dénote la norme de l'opérateur de A dans $(H, <.,.>)$. Si A est dans $\mathfrak{B}(H)$ donc A^{-1} indique l'inverse de la restriction de A pour le complément orthogonal du noyau de A.
Notons que A^{-1} envoie $A(H)$ sur la fermeture de $A^*(H)$ et $A^{-1}A$ est la projection orthogonale de H sur ladite fermeture.

Lemme 2.2.1. *Un sous espace S de H est semi fermé dans H dans le seul cas où S est l'image d'un élément de $\mathfrak{B}(H)$. Dans ce cas, pour tout produit scalaire $<,.,>'$ pour S tel que $(S, <,.,>')$ est complet et s'injecte continument dans H, il existe un unique opérateur borné non négatif A de $\mathfrak{B}(H)$ tels que $A(H) \subset S$ et $< x, Az >' = < x, z >$ pour tous (x, y) dans $S \times H$. De plus, si B est dans $\mathfrak{B}(H)$ et $BB^* = A$ alors $B(H) = S$ et $< x, y >' = < B^{-1}x, B^{-1}y >$ pour tous (x, y) dans $S \times S$.*

Il peut être vu grace au lemme 2.2.1 que si S et S' sont deux sous espaces semi fermés de H et $S \subset S'$ alors S s'injecte continument dans S', ainsi la notion de sous espace semi fermé, dans un certain sens, ne dépend pas du choix du produit scalaire ni de l'espace contenant.

2.2.1 Caractérisation et opérations élémentaires

Théorème 2.2.2. *Si C est un opérateur dans H alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *C est dans $\mathcal{S}C(H)$;*
2. *Le domaine S de C est un sous espace semi fermé de H tel que C appartient à $\mathfrak{B}(S,H)$;*
3. *Il existe une paire (A,B) de $\mathfrak{B}(H)\times\mathfrak{B}(H)$ tels que C est le quotient AB^{-1}*
4. *Il existe une paire (A,B) comme en (3) avec la propriété que A est non négatif et $A(B^{-1}B)=A$.*

Preuve. On note par S le domaine de C, supposons que (1) est vrai, et soit $<.,.>_0$ un produit scalaire sur C tel que $(C,<.,.>_0)$ est complet et s'injecte continument dans $H\times H$. Par définition, il eixte un nombre non négatif b tel que pour tout x dans S, $\|(x,Cx)\|^{\frown}\leqslant b\|(x,Cx)\|_0$.
Maintenant, pour chaque (x,y) dans $S\times S$, soit $<x,y>_1=<(x,Cx),(y,Cy)>_0$: clairement $<.,.>_1$ est un produit scalaire pour S telle que $(S,<.,.>_1)$ est complète pour chaque x dans S, $\|x\|^2+\|Cx\|^2\leq b^2\|x\|_1^2$ Ceci établit que (2) est vraie.
Nous montrons maintenant que (2) implique (4). Partons de (2), et soit $<.,.>_1$ un produit scalaire pour un sous espace semi fermé S de H comme dans la définition. Par le lemme 2.2.1, il existe un nombre non négatif B de $\mathfrak{B}(H)$ tel que $B(H)=S$ et, pour tous (x,y) dans $S\times S$, $<x,y>_1=<B^{-1}x,B^{-1}y>$. Soit $A=CB$; B est dans $\mathfrak{B}(H,S)$ et C est par hypothèse dans $\mathfrak{B}(S,H)$, donc A est dans $\mathfrak{B}(H)$.
Puisque BB^{-1} est l'identité sur S, $AB^{-1}=CBB^{-1}=C$ et $AB^{-1}B=CB=A$, Ainsi (4) est vrai.
Du fait que (4) est un cas particulier de (3), il ne reste plus qu'à montrer que (3) implique (1). Supposons, par conséquent, que (3) qui est vrai, pour tous (x,y) dans $H\times H$, posons $F(x,y)=(Bx,CBx)$. Il vient que F renvoie $H\times H$ sur C, puisque le dimaine de C est $B(H)$. On a aussi, F est linéaire, et si m désigne $\sup\{\|A\|,\|B\|\}$, donc pour tous (x,y) dans $H\times H$, nous avons

$$\|F(x,y)\|^{\frown 2}=\|Bx\|^2+\|AB^{-1}Bx\|^2\leq 2m^2\|x\|^2\leq 2m^2\|(x,y)\|^2$$

donc F est dans $\mathfrak{B}(H \times H)$, encore par l'application du lemme 2.2.1 dans $H \times H$ au lieu de H, on voit que l'image de F est un sous-espace semi fermé de $H \times H$.
Cette (1) est vrai, ce qui achève la preuve. ∎

Remarque 2.2.1. *Les hypothèses (2) et (4) du théorème 2.2.2 correspondent aux caractérisations (5) et (2) du théorème 2.2.1, respectivement. Notons aussi que (2) implique que chaque élément de $\mathcal{SC}(H)$ à domaine fermé est continu ; cela est connu sous le nom du "théorème du graphe semi- fermé"*

Théorème 2.2.3. *Supposons que C est dans $\mathcal{SC}(H)$, S est le domaine de C , et S' est un sous espace semi fermé de H, Alors chacun des assertions suivantes sont est vraie :*
(i) S et $C(S)$ sont des sous espaces semi fermés de H ;
(ii) Si $S' \subset S$ la restriction de C pour S' est dans $\mathcal{SC}(H)$;
(iii) Si $S' \subset S$ alors $C(S')$ est un sous espace semi fermé de H ;
(iv) Si $S' \subset C(S)$ alors $C^{-1}(S')$ est un sous espace semi fermé de H ;
(v) Si C est réversible alors C^{-1} est dans $\mathcal{SC}(H)$.

Nous allons voir maintenant, la stabilité de la classe des opérateurs semi fermés par les opérations algébriques.

Théorème 2.2.4. *Si chacun des opérateurs C_1 et C_2 est semi fermé dans H alors $C_1 + C_2$ et C_1C_2 le sont est également.*

Preuve. Soit S_1 et S_2 les domaines de C_1 et C_2 respectivement :
$S_1 \cap S_2$ est un sous espace semi fermé de H. D'après le théorème 2.2.2, chacune de ces restrictions est dans l'espace linéaire $\mathfrak{B}(S_1 \cap S_2, H)$. Donc $C_1 + C_2$ est dans $\mathfrak{B}(S_1 \cap S_2, H)$ et encore par théoréme 2.2.2 dans $\mathcal{SC}(H)$.
Notons par S_3 le sous espace $S_1 \cap C_2(S_2)$. Par (iv) de théoréme 2.2.3 , $C^{-1}(S_3)$ est un sous espace semi fermé de H, C_3 sera alors la restriction de C_2 sur ce sous espace. Alors $C_1C_2 = C_1C_3$, avec C_1 dans $\mathfrak{B}(S_1, H)$ et C_3 dans $\mathfrak{B}(C_2^{-1}(S_3), S_1)$. Il vient que C_1C_2 est dans $\mathfrak{B}(C_2^{-1}(S_3), H)$ et donc dans $\mathcal{SC}(H)$. ∎

Remarque 2.2.2. *Le théoréme 2.2.4 peut être utilisé pour montrer que chaque élément C de $\mathcal{SC}(H)$ a une extension dans $\mathcal{SC}(H)$ avec un domaine dense dans H.*

2.3 Opérateurs presque fermés. Messirdi (2008).

Cette section introduit une nouvelle classe d'opérateurs linéaires, contenant des opérateurs dits presque fermés. Cette classe est notamment stable par rapport aux opérations usuelles : somme finie et infinie, produit et passage à la limite. Les operateurs presque fermés sont des opérateurs non bornés sur H sur lesquels on impose une condition topologique inspirée de la proosition 1.2.2 : Cette condition rend ces opérateurs à graphes fermés sur un espace de Hilbert intermédiaire entre le domaine de l'opérateur et l'espace total H.

Définition 2.3.1. *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ définit sur un espace de Hilbert H est dite presque fermé s'il existe un espace de Hilbert auxilliaire H_A ($<,>_{H_A}$ et $\|.\|_{H_A}$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme de H_A) tel que :*

- $D(A) \subset H_A$ et H_A s'injecte continûement dans $H(H_A \hookrightarrow H)$.

- Si $(x_n)_n$ est une suite d'élémentes de D(A) convergente dans H_A vers x et $(Ax_n)_n$ convergente dans H vers y , alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Ainsi , (A,D(A)) est persque fermé si et seulement si il existe un espace de Hilbert H_A contenant D(A),$H_A \hookrightarrow H$, tel que le graphe $G(A)$ de A soit fermé dans $H_A \times H$. En vertu de proposition 1.2.2 , tout opérateur fermé est presque fermé où $H_A = D(A)$ muni du produit scalaire et de la norme du graphe $< x, y >_A=< x, y > + < Ax, Ay >$ et $\|A\|_A = \|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{\frac{1}{2}}$, $x, y \in D(A)$.

L'attention est portée une classe particulierement importante d'opérateurs presque fermés dérivant d'une somme ou d'un produit d'opérateurs fermés sur H [35].

Proposition 2.3.1. *Si $A, B \in C(H)$ alors $S = A+B$ et $C = BA$ sont des opérateurs presque fermés.*

Preuve. si on prend comme espace de Hilbert auxilliare $H_S = H_C = D(A)$ muni du produit scalaire du graphe $< ., . >_A$ noté H_A .

En effet , soient $(x_n)_n$ une suite de $D(S) = D(A) \cap D(B)$ et $(y_n)_n$ une suite de $D(C) = \{z \in D(A); Az \in D(B)\}$ convergentes respectivement dans H_A vers x et y

telles que $(Sx_n)_n$ ainsi que $(Cy_n)_n$ convergent dans H respectivement vers z et t .
Comme H_A est complet et A est fermé , alors $x, y \in D(A)$, $(Ax_n)_n$ converge vers Ax et $(\widetilde{y_n})_n = (Ay_n)_n$ converge vers Ay dans H .
Or , $(Bx_n)_n$ et $(B\widetilde{y_n})_n$ convergent respectivement dans H vers $(z - Ax)$ et t , de plus puisque B est fermé $z - Ax = Bx$ ou bien $z = Sx$ et $t = Cy$.
On remarque que si A et B ne sont pas fermés sur H , les opérateurs S et C peuvent $\hat{e}tre$ presque fermés sur H .
Considérons pour cela l'exemple de deux opérateurs non fermés A et B qui sont conjointement fermés , c'est à dire vérifiant la condition de la fermeture seulement sur la partie comme $D(A) \cap D(B)$ de $D(A)$ et D(B) ou bien si $(x_n)_n$ est une suite de $D(A) \cap D(B)$ convergente dans H vers x tell que les suites des images $(Ax_n)_n$ et $(Bx_n)_n$ convergent dans H respectivement vers y_1 et y_2 , alors $x \in D(A) \cap D(B)$, $Ax = y_1$ et $Bx = y_2$.
Posons :

$$H_S = D(A) \cap D(B)$$

muni du produit scalaire

$$< x, y >_s = < x, y > + < Ax, Ay > + < Bx, By >$$

H_S est un espace de Hilbert , $H_S \hookrightarrow H$ de plus il apparait facilement que $S = A + B$ est presque fermé . ■

Proposition 2.3.2. *Un opérateur non fermable sur H peut être preseque fermé sur H*

Exemple 2.3.1. *En effet , prenons $H = \mathbf{L^2}([0,1])$, $A = \frac{d}{dx}$ de domaine $D(A) = H^1([0,1])$ et $Bf(x) = f(0)g(x)$ de domaine $D(B) = H$ si $0 \neq g$ est fixé dans H .*
A est fermé et B est borné sur H donc leur produit $Cf = BAf = \frac{df}{dx}(0)g$ de domaine $D(C) = D(A)$ est presque fermé sur H .
Soit la suite $f_n(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$. Alors ,

- $f_n \in D(C)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)|^2 = \frac{e^{-2nx}}{n^2} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$

- $|f_n(x)|^2 \leq 1$,$\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Donc* $1 \in \mathbf{L^1}([0,1])$.
  En utilisant le théorréme de la convergence dominée de Lebesgne , on a :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow +\infty} |f_n(x)|^2 dx = 0$$
  D'où , $(f_n)_n$ *converge vers* 0 *dans* H *.*

- $Cf_n = \frac{df_n}{dx}(0)g = g \neq 0$
  Or , $(0,g)$ *ne peut pas appartenir au graphe d'un opérateur linéaire . D'où ,* C *ne peut pas être fermable .*

La majorité des opérateurs linéaires non bornés connus dans la litterature mathématique pure et appliquée sont presque fermés , seuls les opérateurs définis sur un domaine particulièrement "petit" s'avérent être non presque fermés .
Donnons quelques propriétés utiles des opérateurs presque fermés :

$(A, D(A))$ *est presque fermé sur* H *, on désignera par* H_A *son espace de Hilbert auxilliaire .*

Proposition 2.3.3. *Soit(A,D(A)) est un opérateur presque fermé sur un espace de Hilbert H . Alors {D(A)}=D(A) muni de produit scalaire*

$$\{x,y\} = < x,y >_{H_A} + < Ax, Ay > \qquad (1)$$

est un espace de Hilbert et $\{D(A)\} \hookrightarrow H_A \hookrightarrow H$. *(*$<,>_{H_A}$ *est un produit scalaire de l'espace auxilliaire* H_A *, on désigne* $\{\|x\|\}$ *la norme de { D(A)} associée à{.,.}).*
De plus , $A \in \mathcal{L}(\{D(A)\}, H)$.

Preuve. $\{D(A)\}$ est un espace préhilbertien. soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\{D(A)\}$, alors $(x_n)_n$ converge dans H_A vers x et (Ax_n) converge dans H vers un certain y. Puisque A est presque fermé alors $x \in D(A)$, $Ax = y$ et $(x_n)_n$ converge dans $\{D(A)\}$ vers x. A est alors continu de $\{D(A)\}$ dans H, car en vertu de (1) on a :
$$\|Ax\| \leq \{\|Ax\|\}, \forall x D(A)$$

■

une conséquence mmédiate de ce résultat est la caractérisation suivante des opérateurs presque fermés :

Corollaire 2.3.1. *Un opérateur linéaire non borné (A,D(A)) est presque fermé sur H si et seulement si il existe un espace de Hilbert G tel que $D(A) \subset G \hookrightarrow H$ et $A \in \mathcal{L}(G, H)$.*

Proposition 2.3.4. *Soient (A,D(A)) un opérateur presque fermé sur H et G un espace de Hilbert tel que $G \hookrightarrow H$.*
i) Posons A_G la restriction de A à G dans H ($D(A_G) = D(A) \cap G$). Alors , $\{D(A_G)\} = D(A_G)$ muni du produit scalaire

$$\{x, y\}_G =< x, y >_{H_A} + < x, y >_G + < Ax, Ay > \qquad (2)$$

est un espace de Hilbert.
ii)Posons A^G la restriction de A dans $G(D(A^G) = \{x \in D(A); Ax \in G\})$. Alors , $\{D(A^G)\} = D(A^G)$ muni du produit scalaire

$$\{x, y\}^G =< x, y >_{H_A} + < Ax, Ay >_G \qquad (3)$$

est un espace de Hilbert et $\{D(A^G)\} \hookrightarrow H$. De plus , A^G est fermé de H_A dans G.

Preuve. i) est immédiat .
ii) Soit $(x_n)_n$ unr suite de cauchy $\{D(A^G)\}$. Alors $(x_n)_n$ converge dans H_A vers un x et $(A^G x_n)_n$ converge vers un y dans G et alors dans H. D'où $x \in (D(A))$ et $y = Ax \in G$. Par conséquent , $x \in \{D(A^G)\}$ et $(x_n)_n$ converge vers x dans $\{D(A^G)\}$
En particulier , si on prend $G = H_A$, on a : ■

Proposition 2.3.5. *Soit $(A, D(A))$ presque fermé sur H. Alors la restriction de A dans H_A est un opérateur fermé dans H_A.*

2.3.1 Stabilité des opérateurs linéaires presque fermés

On montre ici que la somme , le produit et le passage à la limite sur des opérateurs presque fermés sont aussi des opérateurs presque fermés .

Théorème 2.3.1. *Soient (A,D(A)) et (B,D(B)) deux opérateurs presque fermés sur H d'espaces de Hilbert auxilliaires respectifs H_A et H_B . Alors ,*
i) $S = A + B$ de domaine $D(S) = D(A) \cap D(B)$ est presque fermé sur H , où $H_S = \{D(A)\} \cap H_B$ est l'espace de Hilbert auxilliaire de S muni du produit scalaire

$$< x, y >_{H_s} =< x, y >_{H_A} + < x, y >_{H_B} + < Ax, Ay > \qquad (4)$$

ii) $C = BA$ de domaine $D(C) = \{x \in D(A); Ax \in D(B)\}$ est presque fermé sur H d'espace de Hilbert auxilliaire $H_C = \{D(A^{H_B})\}$ muni du produit scalaire

$$< x, y >_{H_C} =< x, y >_{H_A} + < Ax, Ay >_{H_B} \qquad (5)$$

Preuve. i) H_S muni du produit scalaire (4) est bien un espace de Hilbert .
Soit$(x_n)_n$ convergente vers x dans H_S telle que $(Sx_n)_n$ converge vers y dans H . Alors $(x_n)_n$ converge vers x dans H_A , $(Ax_n)_n$ converge vers Ax dans H et $(x_n)_n$ converge vers x dans H_B.
D'où , $(x_n)_n$ converge vers x dans H_B et $(Bx_n)_n = (Sx_n - Ax_n)_n$ converge dans H vers $(y - Ax)$. Comme B est presque fermé alors $x \in D(B)$ et $y - Ax = Bx$ ou bien $y = Ax + Bx = Sx$.
ii) H_C muni du produit scalaire (5) est aussi un espace de Hilbert .
Soit $(x_n)_n$ convergente vers x dans H_C et $(Cx_n)_n$ convergente vers z dans H . Alors $(x_n)_n$ converge vers x dans H_A et $(Ax_n)_n$ converge vers Ax dans H_B. Posons $y_n = Ax_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $y = Ax$.
Ainsi , $(y_n)_n$ converge vers y dans H_B et $(By_n)_n = (Cx_n)_n$ tend vers y dans H . Puisque B est presque fermé on en déduit que $y = Ax \in D(B) \subset H_B$ et $z = By = BAx = Cx$. ■

Cmme nous l'avons auparavant mentionné la structure Hilbertienne n'apparaît pas trop dans le concept des opérateurs presque fermés , seule la structure Banachique est utilisée , notamment au niveau de l'existence de l'espace auxilliaire .
Pour récuperer aussi , la stabilité de la convergence on a souvent beosoin de définir les opérateurs presque fermés avec des espaces auxilliaires qui sont généralement des espace de Banach . L'espace de base H peut être aussi considéré de Banach dont la

topologie ne provenant pas forcément d'un produit scalaire.

Théorème 2.3.2. *Soit* $\forall t \in [0,1]$ *,* A_t *un opérateur presque fermé sur* H *de domaine* $D(A_t)$ *et d'espace auxilliaire* H_t *un espace de Banach .* G *est un espace de Banach tel que* $G \hookrightarrow H_t$ *,* $\forall t \in [0,1]$ *. Alors ,*

$$\left\{ \begin{array}{ll} Ax = & \lim_{t \longrightarrow 0} A_t x \\ D(A) = & \left\{ x \in \bigcap_{t\in[0,1]} D(A_t) \cap G \ ; \ \lim_{t \longrightarrow 0} A_t x \ existe \right\} \end{array} \right\} \quad (6)$$

est un opérateur persque fermé sur H *, son espace de Banach auxilliaire* H_A *est donné par :*

$$H_A = \left\{ x \in \bigcap_{t\in[0,1]} D(A_t) \cap G \ ; \ \|x\|_G + \sup_{t\in[0,1]} \|A_t x\| < +\infty \right\} \quad (7)$$

Preuve. Vérifion que H_A est complet pour la norme

$$\|x\|_{H_A} = \|x\|_G + \sup_{t\in[0,1]} \|A_t x\| \quad (8)$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans H_A . Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy dans G (et à fortiori dans H et H_t , $\forall t \in [0,1]$) et $(A_t x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H , $\forall t \in [0,1]$. Il existe donc $x \in G$, $y_t \in H$ et $x_t \in H_t$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x \ dans \ G \ (et \ alors \ dans \ H \ et \ H_t, \ \forall \ t \in [0,1]) \\ \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_t x_n = y_t \ dans \ H \ , \forall t \in [0,1] \end{array} \right. \quad (9)$$

comme A_t est presque fermé pour tout t dans [0,1] , alors :

$$x \in \bigcap_{t\in[0,1]} D(A_t) \cap G \ et \ \lim_{n \longrightarrow +\infty} A_t x_n = A_t x = y_t$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H_A elle y est bornée , il existe donc $M > 0$ tel que :

$$\|x_n\|_{H_A} \leq M \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|x_n\|_{H_A} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n\|_G + \sup_{t\in[0,1]} \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A_t x_n\| \leq 2M \quad (10)$$

D'où , $x \in H_A$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, on ait :

$$\|x_n - x_m\|_{H_A} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi .

$$\begin{aligned} \|x - x_n\|_{H_A} &= \lim_{m \longrightarrow +\infty} \|x_m - x_n\|_G + \sup_{t \in [0,1]} \lim_{m \longrightarrow +\infty} \|A_t x_m - A_t x_n\| \\ &\leq 2 \sup_{t \in [0,1]} \ \lim \ \sup_{n,m \in \mathbb{N}} \|x_m - x_n\|_{H_A} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci montre bien que H_A est un espace de Banach pour la norme $\| - \|_{H_A}$.

On a aussi $D(A) \subset H_A \hookrightarrow H$. Soite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D(A)$ converge vers x dans H_A et $(Ax_n)_{n\mathbb{N}}$ convergente vers y dans H . Montrons que $\lim_{t \longrightarrow +\infty} A_t x = y$. Dans ce cas on aura $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

En effet , $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_n \in D(A)$ tel que :

$$\sup_{t \in [0,1]} \|A_t x_n - A_t x\| \leq \|x_n - x\|_{H_A} \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad (11)$$

Puisque $x_n \in D(A)$,il existe $\delta > 0$ tel que $\|A_{t_0} x_n - A_{t_1} x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour $0 < t_0 < t_1 < \delta$.

Alors on a d'aprés (11) si $0 < t_0 < t_1 < \delta$:

$$\|A_{t_0} x - A_{t_1} x\| \leq \|A_{t_0} x - A_{t_0} x_n\| + \|A_{t_0} x_n - A_{t_1} x_n\| + \|A_{t_1} x_n - A_{t_1} x\| \leq \varepsilon$$

Par conséquent , $\lim_{t \longrightarrow 0} A_t x = z$ existe dans H .

Choisissons maintenant $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que :

$$\begin{cases} \|Ax_{n_0} - y\| \leq & \frac{\varepsilon}{4} \\ \|x_{n_0} - x\|_{H_A} \leq & \frac{\varepsilon}{4} \end{cases} \qquad (12)$$

et $t_0 \in [0, 1]$ tel que :

$$\begin{cases} \|z - A_{t_0} x\| & \leq \frac{\varepsilon}{4} \\ \|A_{t_0} x_{n_0} - Ax_{n_0}\| & \leq \frac{\varepsilon}{4} \end{cases} \qquad (13)$$

il en découle alors de (12) et (13) :

$\|x - y\| \leq \|z - A_{t_0} x\| + \|A_{t_0} x - A_{t_0} x_{n_0}\| + \|A_{t_0} x_{n_0} - Ax_{n_0}\| + \|Ax_{n_0} - y\| \leq \varepsilon$

d'où $z = y = \lim_{t \longrightarrow 0} Ax$ dans H . ∎

Théorème 2.3.3. *Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n un opérateur presque fermé sur H de domaine $D(A_n)$ et d'espace auxilliaire H_n un espace de Banach . Si G est un espace de Banach tel que $G \longrightarrow H_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors ,*

$$\begin{cases} Ax &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x \\ D(A) &= \{x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A_n) \cap G \ ; \ \sum_{n=0}^{\infty} A_n x \ existe\} \end{cases} \tag{14}$$

est un opérateur presque fermé sur H , son espace de Banach auxilliaire est donné par :

$$H_A = \left\{ x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A_n) \cap G \ ; \ \|x\|_G + \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=0}^{n} A_i x \right\| < +\infty \right\} \tag{15}$$

Preuve. $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} A_n$ de domaine $D(S_N) = \bigcap_{n=0}^{N} D(A_n) \cap G$ est un opérateur presque fermé sur H en vertu du théoreme 2.3.1 , où

$$H_{S_N} = \left\{ x \in \bigcap_{n=0}^{N} D(A_n) \cap G ; \|x\|_{H_{S_N}} = \|x\|_G + \sum_{n=0}^{N-1} \|A_n x\| \right\}$$

est l'espace de Banach auxilliaire de S_N .
Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans H_A , alors $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans G et dans tous les espaces H_n , $n \in \mathbb{N}$. Il existe alors $x \in G$ tel que $\lim_{p\longrightarrow+\infty} x_p = x$ dans G et dans chacun des espaces H_n , $n \in \mathbb{N}$.

$$\|A_n x_p - A_n x_q\| \le \left\| \sum_{K=0}^{n} A_K(x_p - x_q) \right\| + \left\| \sum_{K=0}^{n-1} A_K(x_p - x_q) \right\| \le 2\|x_p - x_q\|_{H_A} \tag{16}$$

(16) implique que $(A_n x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par suite $x \in D(A_n)$ et $\lim_{p\longrightarrow+\infty} A_n x_p = A_n x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Puisque $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H_A , il existe $M > 0$ tel que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{K=0}^{n} A_K x_p \right\| \le \|x_p\|_{H_A} \le M \ , \ \forall p \in \mathbb{N} \tag{17}$$

Alors

$$\left\| \sum_{K=0}^{n} A_K x \right\| = \lim_{p\longrightarrow+\infty} \left\| \sum_{K=0}^{n} A_K x_p \right\| \le M$$

Ceci prouve que $x \in H_A$.
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} \|x - x_p\|_G \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall p \in \mathbb{N}, p \geq p_0 \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{K=0}^{n} A_K x_p - A_K x_q\| \leq \|x_p - x_q\|_{H_A} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq p_0 \end{cases} \tag{18}$$

D'où , $\forall p \in \mathbb{N},\ p \geq p_0$ on a àpartir de (18)

$$\begin{aligned} \|x - x_p\|_{H_A} &= \|x - x_p\|_G + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\textstyle\sum_{K=0}^{n} A_K x - A_K x_p\| \\ &= \|x - x_p\|_G + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\textstyle\sum_{K=0}^{n} A_K x_q - A_K x_p\| \\ &\leq \|x - x_p\|_G + \|x_p - x_q\|_{H_A} \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{19}$$

Par conséquent , H_A est un espace de Banach .
Soit $x \in H_A$, alors :

$$\begin{cases} \|A_n x\| \leq \|\sum_{k=0}^{n} A_k x\| + \left\|\sum_{K=0}^{n-1} A_k x\right\| \leq 2\|x\|_{H_A} \\ \|x\|_{H_{S_N}} = \|x\|_G + \sum_{k=0}^{N-1} \|A_k x\| \leq 2N\|x\|_{H_A} \end{cases} \tag{20}$$

(20) montre que $H_A \hookrightarrow H_{S_N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$.
On a aussi :

$$\begin{cases} Ax = \lim_{N\longrightarrow+\infty} S_N x \\ D(A) = \{x \in \bigcap_{N=0}^{\infty} D(S_N) \cap H_A; \lim_{N\longrightarrow S_N x\ existe}\} \end{cases} \tag{21}$$

En vertu du théoréme 2.3.2 , A est presque fermé sur H d'espace de Banach auxilliaire défini par :

$$\widetilde{H} = \{x \in \bigcap_{N=0}^{\infty} D(S_N) \cap H_A; \|x\|_{H_A} + \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x\| \leq +\infty\}$$

donc $\widetilde{H} = H_A$.

■

Chapitre 3

Discussions et Eléménts à Retenir

A travers ce chapitre, on fera une discussion sur les concepets présentés au chapitre 2. Bien qu'en apparence, les opérateurs presque fermés et semi fermés sont introduit différement, nous allons montrer qu'ils sont identiques. La définition des opérateurs semi fermé de Kaufmann donne utilise une contraction qui servira dans plusieurs cas à résoudre des EDO, et d'autres problèmes. Cette décomposition sscite actuellement beaucoup d'intêret.

3.1 Equivalence des Concepts

Rappelons les trois définitions des opérateurs semi fermés :

Définition 3.1.1. *Soit A un opérateur semi fermé de H_1 dans H_2 , alors il existe deux opérateurs fermés $P : H_3 \longrightarrow H_2$ et $Q : H_1 \longrightarrow H_3$ vérifiant :*
- $A = PQ$
- $R(P) = R(A)$ et $P \in B(H_3, H_1)$
- $D(Q) = D(A)$ et A envoie injectivement $D(A)$ sur H_3
où H_1 , H_2 , H_3 sont des espaces de Hilbert .

Définition 3.1.2. *Un opérateur linéaire non borné de H_1 dans H_2 est appelé presque fermé s'il existe un produit scalaire $<,>_A$ sur $D(A)$ tel que $H_A := (D(A), <,>_A)$ est compléte , $H_A \hookrightarrow H_2$ et $A \in B(H_A, H_2)$.*

Définition 3.1.3. *Dans un espace de Hilbert H, un opérateur C est semi fermé traduit l'existence d'un opérateur borné B sur H, dont l'image est le domaine de C, de sorte que CB est bornné.*

Proposition 3.1.1. *Soit A un opérateur non borné linéaire de H_1 dans H_2 . les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) A est semi-fermé
(2) A est presque fermé

Preuve. (1) Supposons que A est semi-fermé et considérons
$[x,y] =< x,y >_{H_1} + < Qx,Qy >_{H_3}$ pour tous $x,y \in D(A)$ $[x,y]_A$ est trivialement un produit scalaire sur $D(A)$, $H_A = (D(A),[,]_A)$ est également complet pusique si (x_n) est une suite de cauchy dans H_A alors x_n est (Qx_n) convergent vers x dans H_1 et vers y dans H_3 .
$x_n \longrightarrow^{H_1} x$, $Qx \longrightarrow^{H_3} y$, $Q \in C(H_A,H_2)$ on déduit que $x \in D(Q) = D(A)$ et $y = Qx$. Par la fermeture de Q on a $x \in D(A)$ et $y = Qx$.
ce qui prouve que $(x_n)_n$ converge vers x dans H_A .
H_A est alors un espace de Hilbert, $H_A \hookrightarrow H_1$ et $A \in B(H_A,H_2)$.
Pour tout $x \in D(A)$, on a :

$$\|Ax\|_{H_2} = \|PQx\|_{H_2} \leq C\|Qx\|_{H_3} \leq C\|x\|_{H_A}$$

(2) Inversement, si A est presque fermé de H_1 dans H_2, il existe alors un produit scalaire $[,]_A$ sur $D(A)$ tels que $H_3 = (D(A),[,]_A)$ est complet, $H_3 \hookrightarrow H$ et $A \in B(H_3,H_2)$ Soit $Px = Ax$ et $Qx = x$ Alors $A = PQ$ et par conséquent A est semi fermé . ∎

3.2 Opérateurs Quotient et Représentation de Kaufmann

Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie. Soit A et B deux opérateurs bornés sur H avec une condition du $\ker A \subset \ker B$. Alors, on définit un quotient B/A comme étant une application $Au \longrightarrow Bu$, $u \in H$. Un quotient est opérateur

linéaire non nécessairement borné de $AH = \{Au : u \in H\}$ pour BH, qui est aussi appelé un opérateur semi fermé.
Les opérareurs quotient sont d'abord étudiés par Izumino [33] dans un cadre général. Kaufmann dans [32] montre que les opérateurs semin fermés sont des opérateurs quotients sous une forme particulière, dite reprensentation de Kaufmann.
Si l'on considère un opérateur fermé S à domaine dense dans H, et sa representation de Kaufmann $S = B/(1-B^*B)^{\frac{1}{2}}$ où B est une contratction pure définie de façon unique. Si S est symétrique, il est montré que S est autoadjoint si et seulement si le spectre de B est réel . Alors une question pose naturel, ce est une condition nécessaire et suffisante relative le spectre de B à admettre exrensions autoadjoints de S ?
Le suivant est connu comme le théorème de représentation de Kaufman

Théorème 3.2.1. *Soit T un opérateur fermé avec un domaine dense $D(T)$ dans H. Alors il existe un unique purement contraction B (i.e. $\|B\| \leq 1$, $\ker(1-B^*B) = \{0\}$) tel que $T = B/(1-B^*B)^{\frac{1}{2}}$ et $D(T) = (1-B^*B)^{\frac{1}{2}}H$. Inversement toute contraction B purement donne un opérateur fermé et le plus dense définie T. Dans ce cas, T est auto-adjoint positif, auto-adjoint, normale ou semi normale si et seulement si B est le cas, respectivement .*
Soit S un opérateur fermé et le plus dense défini dans H . S est dit être symétrique si $S \subset S^*$, (S^* est une extension de S) , équivalente $Sx = S^*x$, $x \in D(S) \subset D(S^*)$. lorsque $S = B/(1-B^*B)^{\frac{1}{2}}$, S est symmettic si $B^*(1-B^*B)^{\frac{1}{2}} = (1-B^*B)^{\frac{1}{2}}B$.

conclusion

Ce manuscrit résume, en quelques pages, les principaux outils et concepts de théorie des opérateurs.

Le travail est consacré essentiellement à l'étude des opérateurs semi fermé ainsi que les opérateurs fermé,et spécialement l'opérateur de Fredholm, on s'intéresse aussi au opérateur presque fermé. Nous conclurons que ses opérateurs sont stable par rapport aux opérations usuelles.
enfin notre résultat principale sera l'équivalence établit entre les opérateurs presque fermés et semi fermés.

Bibliographie

[1] S. Goldberg, "Unbounded linear operators". Mc Graw Hill, New York, (1966)

[2] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathcal{C}^n$, Springer-Verlag, 1980

[3] B.Messirdi, M. H. Mortad : *On Different products of closed operators*. Banach Journal of Mathematical Analysis. 2, N (1) (2008), p40-47.

[4] Schmeisser, H, J, et Triebel, H.(1987). Topics in Fourier analysis and function spaces.John Wiley et Sons.

[5] P. Hess, T. Kato : Perturbations of Closed Operators and Their Adjoints. Comment. Math. Helv., 45(1970), p524-529.

[6] J.B. Conway : *A course in Functional Analysis*. Springer. 1990 (Second Edition).

[7] M. Reed, B. Simon : *Methods of modern mathematical physics*.vol.2 Academic Press (1978).

[8] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer (1980), 2nd Edition.

[9] R. V. Kadison, J. R. Ringrose : *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. Academic Press London, (1983), Vol. I.

[10] M. Reed, B. Simon : *Methods of modern mathematical physics : Analysis of operators*. vol.4 Academic Press (1978).

[11] G. Da Prato, P. Grisvard : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*. J. Math. Pures Appl. IX Ser 54,305-397 (1975).

[12] G. Dore, A. Venni : *On the closedness of the sum of two closed operators*. Mathematische Zeitschrift, 196 (1987) p 270-286.

[13] P.H. Bezandry, T. Diagana : *Almost periodic stochastic process*. Springer Verlag N.Y, 2011.

[14] M.J.J. Lennon : *On Sums and Products of Unbounded Operators in Hilbert Space*. Trans. Amer. Math.Soc. 198, 273-285 (1974).

[15] M.H. Stone : *On Unbounded Operators in Hilbert Space*, J. Ind. Math. Soc. 15, p 155192 (1951).

[16] M. Naimark : *On the square of a closed symmetric operator*.Dokl. Akad. Nauk SSSR. 26. 1940. p866-870.

[17] P. R. Chernoff : *A semibounded closed symmetric operator whose square has trivial domain*. Proc. Amer. Math. Soc. 89 (2). 1983. p289-290.

[18] J. Dixmier : *L'adjoint du produit de deux opérateurs fermés*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 4^{me} série, 11 (1974), p101-106.

[19] K. Vo-Khac Khoan : *Distributions, Analyse de Fourier. Opérateurs aux Dérivées Partielles*. Librairie Vuibert. Paris. 1970.

[20] M.H. Mortad : *An application of the Putnam-Fuglede theorem to normal products of self-adjoint operators*. Proc. Amer. Math. Soc. 131/10. 2003. p3135-3141.

[21] M. Fernandez Miranda, J. Ph. Labrousse : *On the Closure of the Product and Sum of Linear Relations*. Submitted for publication, (2011).

[22] G. Hirasawa : *A topology for semiclosed operators in a Hilbert space*. Acta Sci. Math. (Szeged) 73, (2007), pp. 271-282

[23] I. Goldberg : *Unbounded linear operators*, Mc Graw Hill, New York, 1966. Proc. Nati. Acad. Sci. 36. 1950. p35-40.

[24] J.P. Labrousse : *Les opérateurs quasi-Fredholm : une généralisation des opérateurs semi-Fredholm*. Rendiconti Del Circolo mathematica di Palermo, T. XXIX (1980), p161-258.

[25] N. Dunford, J.T. Schwartz : *Linear operators. Part II : spectral theory*. Interscience, New York, 1963.

[26] S.S. Holland : *On the adjoint of the product of operators*. Bull. Amer. Math. Soc. 4, 931-932, 1968.

[27] V. Willilams : *Closed Fredholm and semi Fredholm operators, Essential spectra and perturbations*. Journal of functional analysis, 1975, 20 p 1-25

[28] M. Schechter : *The conjugate of a product of closed operators*. Journal of Functional Analysis, 6 (1970), 26-28

[29] A. Azzouz : Sur la Somme, le Produit et passage à l'adjoint dans la classe des opérateurs fermés sur un espace de Hilbert. Thèse de Doctorat, Univ. Oran. 2011

[30] A. Azzouz, B. Messirdi, G. Djellouli : *New Results on closedeness of the sum and product of two linear operators*. Bull. Math. Ana. and App. Vol(3) N°2, 2011, p 151-158,

[31] M.A.Kaashoek,closed linear operator on Banach space , Thesis ,University of Leiden,1964

[32] W. E. Kaufman, Representing a closed operator as a quotient of continuous operators, Proc. Amer. Math. Soc. (1978), 531-678

[33] S. Izumino. : *Quotients of bounded operators*. Proc. Am. Math. Soc. 106, 427–435 (1989)

[34] R.T.Powers,Self Adjoint Algebras of Unbounded Operators , Comm.Math.Phys.,21(2)(1971),85-124

[35] S. Messirdi :"Opérateurs Fermés dans un espace de Hilbert".