REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur D^r **A.AZZOUZ** , qui a accepté sans de diriger ce mémoire.

Je le remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt pour ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude en vers Monsieur **F.Hathout** d'avoir accepter d'être le président de ce Jury.

Je remercie aussi Monsieur **H.M.Dida** et **H.Abbas** d'avoir accepter de faire partir de ce jury.

Table des matières

Introduction

Depuis le début des années 1980 et la thése de Kitai en 1982, les propriétés orbitales des opérateurs linéaires ont été largement étudiées. Les opérateurs hypercycliques en particulier sont au coeur des développements.

Soit T un opérateur linéaire et continu sur un espace de Banach X. On dit que T est un opérateur hypercyclique s'il existe un vecteur x dans X dont l'orbite visite (infiniment) chaque ouvert non-vide de X. Sous l'impulsion de Frédéric Bayart et Sophie Grivaux en 2004, les chercheurs en dynamique linéaire se sont alors intéressés à la fréquence de ces visites et plusieurs variantes de la notion d'hypercyclicité ont ainsi vu le jour : l'hypercyclicité fréquente, l'hypercyclicité U-fréquente et l'hypercyclicité réitérative.

La propriété d'hypercyclicité pour un opérateur est donc basée sur la densité de l'orbite d'un vecteur. C'est un cas particulier dans un cadre linéaire, de la notion d'universalité qui se définit pour des fonctions continues dans le cadre plus général des espaces topologiques. Une notion bien connue et trés étudiée dans le contexte des systémes dynamiques est la notion de transitivité topologique. Cette propriété a été introduite en 1922 par Birkhoff et caractérise le fait qu'un systéme dynamique n'est pas décomposable en deux sous-systémes dynamiques indépendants. En fait la transitivité topologique et l'hypercyclicité sont des propriétés équivalentes dans le cas ou X est un espace séparable avec une base dénombrable d'ouverts et n'a pas de points isolés, c'est ce que l'on appelle le Théorème de Transitivité de Birkhoff.

Le critére d'hypercyclicité, bien que trés utile, n'est malheureusement qu'une condition suffisante comme l'ont montré quelques auteurs qui ont tous donné des contre-exemples a la réciproque de ce théorème. Toutefois, les opérateurs qui vérifient ce critére sont appelés faiblement mélangeants car ils vérifient des conditions plus fortes que la simple hypercyclicité.

Le but de ce mémoire est de mieux comprendre la définition d'un opérateur hypercycliques, étudier les liens entre ces différentes notions d'hypercyclicité ainsi que leurs applications, Précisément, cette étude est exposé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré, donner quelques définitions élémentaires, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

Dans le deuxiéme chapitre, nous allons étudier les opérateurs hypercycliques ainsi les opérateurs supercycliques leurs existence sur espaces vectoriels topologiques, somme, produit et puissance, on s'intéresse aussi a l'étude spectrale de ses opérateurs. D'un point de vue spectral, les opérateurs hypercycliques ont également des propriétés remarquables. Par exemple, on montre trés facilement la proposition suivante qui lie le comportement de l'opérateur aux valeurs propres de son adjoint.

Dans le troisiéme chapitre, nous présentons les opérateurs gamma-hypersyclique, aprée les avoir définie nous donnons quelques propriétes principaux, et quelques exemples importants, Ce chapitre est illustré par des applications.

Chapitre 1

Espaces vectoriels topologiques

1.1 Espaces vectoriels topologiques

Définition 1.1.1. *Un espace vectoriel topologique (noté EVT) est un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continue l'application $+$ et le produit par un scalaire. On parle d'espace vectoriel topologique localement convexe (noté EVTLC) lorsqu'en plus de cela, le vecteur nul possède une base de voisinage formée de parties convexes. Enfin on notera EVTLCS les EVTLC dont la topologie est séparée.*

Définition 1.1.2. *Étant donnée $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur un espace E, on appelle $\mathcal{P}$-boule une intersection finie de « semi-boules », i.e. d'ensembles de la forme $\{x \in E : p(x-a) < r\}$, où $p \in P$, $a \in E$ et $r > 0$. La $\mathcal{P}$-topologie est alors la plus petite topologie de E (ou la moins fine) contenant les $\mathcal{P}$-boules.*

Proposition 1.1.1. *(Equivalence des définitions) Tout espace E muni d'une $\mathcal{P}$-topologie pour une certaine famille $\mathcal{P}$ de semi-normes est un EVTLC. La topologie est séparée si et seulement si 0 est l'unique vecteur annulant toutes les semi-normes de $\mathcal{P}$.*
Réciproquement, pour tout EVTLC E il existe une famille $\mathcal{P}$ semi-normes telle que la $\mathcal{P}$-topologie associée soit égale à la topologie de E.

1.2 Espace de Fréchet

Définition 1.2.1. *Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique réel complet (au sens uniforme) dont la topologie est induite par une famille dénombrable et séparante de semi-normes.*
On parle de choix ***canonique*** *de famille de semi-normes, cependant on se demande que signifie le mot canonique dans cette définition .*

1.3 Espace de Baire

Définition 1.3.1. *On dit qu'un espace topologique X est un espace de Baire lorsqu'il vérifie l'une des assertions suivantes :*

1. *Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*
2. *Toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vide est d'intérieur vide i.e. toute partie maigre est d'intérieur vide.*

Proposition 1.3.1. *i) Tout espace de Baire séparé n'ayant de point isolé est non dénombrable.*
ii) Si $U \subset X$ est ouvert, toute partie maigre dans U est maigre dans X.
iii) Tout ouvert $U \subset X$ d'un espace de Baire est un espace de Baire pour la topologie induite.

Preuve. i) Puisque tout singleton est fermé et d'intérieur vide, une réunion dénombrale de singletons est d'intérieur vide, et ne peut donc pas être égale à X.
ii) Puisque $A = \overline{A} \cap U$, il suffit de montrer que si $A \subset U$ est un fermé de U d'intérieur vide dans U, son adhérence $\overline{A}$ dans X est d'intérieur vide. Or si U_1 est un ouvert non vide contenu dans $\overline{A}$, $U_1 \cap U$ serait un ouvert non vide contenu dans A, contradiction.
iii) Ceci résulte de ii), car si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'intérieurs vides de U, alors $(\overline{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'intérieurs vides de X, et

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n) \cap U$$

■

Proposition 1.3.2. *Soit X un espace de Baire qui est réunion dénombrable de fermés F_n. Alors la réunion des intérieurs des F_n est un ouvert dense de X.*

Preuve. Soit $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{F}_n^0$ la réunion des intérieurs et $F'_n = F_n \cap (X\backslash U)$. Chaque F'_n est un fermé d'intérieur vide de X : en effet, si un ouvert est contenu dans F'_n, il est contenu dans F_n, donc dans son intérieur, donc dans U. D'après le théorème de Baire la réunion des F'_n est d'intérieur vide. Or $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors la réunion des F'_n est $X\backslash U$. Par suite U est dense dans X. Dans la pratique, on utilise souvent ce corollaire ∎

Corollaire 1.3.1. *Soit X un espace Baire qui est réunion dénombrable de fermés F_n. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_{n_0} soit non vide.*

Théorème 1.3.1. ***(de Baire)***

1. *Tout espace métrique complet est un espace de Baire.*
2. *Tout espace topologique localement compact est un espace de Baire. En particulier, tout espace compact est un espace de Baire.*

Preuve.
1) Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés d'intérieur vide de X. On veut montrer que $A = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ est d'interieur vide i.e. Etant donné U_0 un ouvert de X, on doit trouver un $x \in U_0$ qui ne soit pas dans A. Par hypothése A_1 ne contient pas U_0, il existe alors une boule $B(x_1, r_1)$ telle que la $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U_0\backslash A_1$ et $r_1 < 1$. Construisons par recurrence, une suite de boules ouvertes $B(x_n, r_n)_{n\geq 1} : \overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})\backslash A_n$ et $r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$. Supposant $B(x_i, r_i)$ construites pour $i \in 1, \cdots, n-1$, le fait que A_n soit d'interieur vide implique que $B(x_{n-1}, r_{n-1})\backslash A_n$ est un ouvert non vide de $B(x_{n-1}, r_{n-1})$ il contient donc une boule $B(x_n, r_n)$ telle que $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})\backslash A_n$ et l'on peut imposer $r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$. Les $\overline{B(x_n, r_n)}$ forment une suite de fermés emboités dont le diamétre tend vers 0. Par complétude,$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n)$ est non vide. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_n)$. Alors $x \in U_0$, car $\overline{B(x_1, r_1)} \subset U_0$ et pour tout n, x n'est pas un element de A_n, car $B(x_n, r_n)$ est disjointe de A_n, donc x n'est pas dans A.
2) Si X un espace localement compact, comme tout point a une base formée d'ouverts d'aderence compacte, il suffit de considérer les ouverts d'adhérence compacte. Soit

$(F_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés d'intérieur vide de X. On veut montrer que $A = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ est d'intérieur vide i.e. Etant donné U_0 un ouvert tel que $\overline{U_0}$ est compact, on doit trouver un $x \in U_0$ qui ne soit pas dans A. Par hypothése A_1 ne contient pas U_0, il existe alors un ouvert V_1 telle que la $\overline{V_1} \subset U_0 \backslash A_1$. On Construit, de la même maniére, une suite d'ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ avec les propriétés suivantes : $\overline{V_n} \subset V_{n-1} \backslash A_n$. Alors les $\overline{V_n}$ forment une suite de compacts emboités non vides, donc $\bigcap_{n\geq 1} \overline{V_n} \neq \emptyset$ et un point de cette intersection est dans U_0 mais pas dans A. ■

Théorème 1.3.2. - *des catégories de Baire* *Un espace topologique X est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est une partie dense de X. Une partie Y d'un espace topologique X est dit de première catégorie si $X \setminus Y$ contient une intersection d'ouverts dense. Si X est un espace topologique, les sous-ensembles de deuxième catégorie de Baire sont tous les sous-ensembles de X qui ne sont pas de première catégorie.*

Un espace topologique est donc de Baire si tout ouvert non-vide est de deuxième catégorie. Ou encore, un espace topologique est de Baire si toute partie de première catégorie est d'intérieur vide. Le théorème des catégories de Baire peut s'énoncer alors de la façon suivante :

Théorème 1.3.3. *Tout espace métrique complet est de Baire. Tout espace topologique localement compact est de Baire.*

Chapitre 2

Opérateurs hypercycliques

2.1 Introduction

Soit T un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach X. Un opérateur T est dit hypercyclique s'il existe un vecteur x dans X dont l'orbite parcourt (infiniment) chaque ouvert non-vide de X. cela suggère un apport de la densité dans cette définition. Bien que ce concept est mis en évidence par les spécialistes de l'Analyse fonctionnelle, on le trouve partout ailleurs. En effet, avec les travaux de Frederic Bayart et Sophie Grivaux en 2004, les chercheurs en dynamique linéaire se sont interéssés à la fréquence de ces visites (dans le sens des orbites) et plusieurs variantes de la notion d'hypercyclicité ont ainsi vu le jour : l'hypercyclicité fréquente, l'hypercyclicité U-fréquente et l'hypercyclicité reiterative.
Le but de ce chapitre est d'exposer dans le cadre d'analyse fonctionnele les notions d'hypercyclicité, d'établir les différents critères d'hypercyclicité ainsi qu'une étude spectrale relative.

2.2 Opérateurs hypercycliques

Soit X un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons par $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus sur X. Si $T \in \mathcal{L}(X)$, le T-orbite d'un vecteur

$x \in X$ est l'ensemble :

$$\mathcal{O}(x,T) = \{T^n(x); n \in \mathbb{N}\}.$$

L'opérateur T est dit hypercyclique s'il existe des vecteurs $x \in X$ tel que $\mathcal{O}(x,T)$ soit dense dans X. Un tel vecteur x est dit hypercyclique (ou T-Hypercyclique), et l'ensemble de tous les vecteurs hypercycliques pour T sera noté $HC(T)$. De même, T est dit supercyclique s'il existe un vecteur $x \in X$ dont l'orbite projective :

$$\mathbb{K} \cdot \mathcal{O}(x,T) = \{\lambda T^n(x); n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

soit dense dans X. L'ensemble de tous les vecteurs supercycliques pour T est noté $SC(T)$. on rappelle que T est dit cyclique s'il existe $x \in X$ tel que

$$\mathbb{K}[T]x := span\, \mathcal{O}(x,T) = \{P(T)x;\ Polynôme\ P\}$$

soit dense dans X. Il est impératif de dire que ces notions ont un sens uniquement si l'espace X est séparable. De Plus, l'hypercyclicité est un phénomène associé aux espaces de dimensions infinies. En effet, on a :

Proposition 2.2.1. *Il n'y a pas des opérateurs hypercycliques sur un espace de dimension finie $X \neq \{0\}$.*

Preuve. Supposons au contraire que T est un opérateur hypercyclique sur $\mathbb{K}^N$, $N \geq 1$. Choissisons $x \in HC(T)$ et remarquons que $(x, T(x), ..., T^{N-1}(x))$ est libre et donc une base de $\mathbb{K}^N$. En effet, sinon le sous espace engendré par $\mathcal{O}(x,t)$ aura une dimension inférieure à N et donc ne peut être dense dans $\mathbb{K}^N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on peut trouver une suite d'entiers (n_k) de telle sorte que $T^{n_k}(x) \longrightarrow \alpha x$. Alors $T^{n_k}(T^i x) = T^i(T^{n_k}x) \longrightarrow \alpha T^i x$ pour chaque $i < N$, et parsuite $T^{n_k}(z) \longrightarrow \alpha z$ pour tout $z \in \mathbb{K}^N$. Il découle que $\det(T^{n_k}) \longrightarrow \alpha^N$, Autrement dit $\det(T)^{n_k} \longrightarrow \alpha^N$. Ainsi, en posant : $a := |\det(T)|$, nous pouvons voir que l'ensemble $a^n; n \in \mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$. ce qui est impossible.

■

Dans la majorité des cas, on s'intéresse à la dynamique linéaire en considérant des espaces vectoriels topologiques séparables X. Cependant, on peut se limiter à des espaces notés F-espace, c'est à dire un espace vectoriel topologique complet et métrisable . Alors X a une distance compatible invariante par translation et (X,d) est

complet. En fait, dans la plupart des cas, X sera considéré un espace Fréchet, càd : un F-espace localement convexe. Ou de faàon équivalente, un espace Fréchet est un espace vectoriel topologique complet dont sa topologie est générée par une famille dénombrable de semi-normes.
Une caractéristique intéressante des F-espaces est que l'on peut faire usage de la catégorie le théorème de Baire. Par ailleurs, nous pouvons voir que le théoréme de Banach-Steinhaus et théorème d'isomorphisme de Banach sont valides dans les F-espaces. Si de plus, on a la convexité locale alors on peut également utiliser le théorème de Hahn-Banach et faire appel à ses conséquences.
Nous commençons par voir comment montrer qu'un opérateur donné est hypercyclique ou supercyclique. En particulier, nous énonçons un critère connu sous le nom " Critère d'hypercyclicité". Ensuite nous allons voir que hypercyclicité et supercyclicité va entraîner certaines restrictions spectrales de l'opérateur et son adjoint. Ensuite, nous discutons de la "grandeur" et topologique propriétés de l'ensemble de tous les vecteurs hypercycliques pour un opérateur donné T. Enfin, nous traitons en détail plusieurs exemples spécifiques : décalages pondérés sur les espaces ℓ^p, composition des opérateurs sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, et les opérateurs qui commutent avec la translation sur l'espace des fonctions entières $H(\mathbb{C})$.
Notons d'abord que sans la séparabilité de l'espace, la définition de l'hypecyclicité devient obsolète. En effet, si $\|T\| \leq 1$, alors toutes les orbites sont bornées, et donc non denses.

Définition 2.2.1. *Un vecteur $x \in X$ est dit hypercyclique pour T si son orbite*

$$\mathcal{O}(x,T) = \{T^n x, n \in \mathbb{N}\}$$

Une notion bien connue dans le contexte des systèmes dynamiques est la notion de transitivité topologique. Cette propriété a été introduite en 1922 par Birkhoff et stipule qu'un systéme dynamique n'est pas décomposable en deux sous systémes dynamiques indépendants. En fait la transitivité topologique et l'hypercyclicité sont des propriétés équivalentes dans le cas *oú* X est un espace séparable avec une base dénombrable d'ouverts et n'ayant pas de points isolés. Cette affirmation est bien connue sous le nom du Théorème de Transitivité de Birkhoff.

Théorème 2.2.1. ***de Transitivité de Birkhoff***
Soient X un F-espace séparable et T un opérateur linéaire sur X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
- *(i) T est hypercyclique*
- *(ii) T est topologiquement transitive : pour tout couple d'ouverts non-vides U et $(U,V) \subset X$, il existe un entier n tel que $T^n(U) \bigcap V \neq \emptyset$ Dans ce cas, $HC(T)$ est un ensemble G_δ dense de X.*

Ce théorème représente une caractérisation des opérateurs hypercycliques et lorsque l'utilisation de la définition ne peut être facile. La démonstration repose sur l'application du théorème des catégories de Baire.
Preuve. Remarquons d'abord que si x est un vecteur hypercyclique pour T alors $\mathcal{O}(x,T) \in HC(T)$. En effet, puisque X n'a pas de points isolés, l'extraction d'un nombre fini de points d'un sous ensemble dense $A \subset X$ n'affecte pas sa densité. Appliquons cela à $A := \mathcal{O}(x,T)$, et du moment que $\mathcal{O}(T^p(x),T) = \mathcal{O}(x,t)\ x, T(x), ..., T^{p-1}(x)$, on constate que $T^p(x) \in HC(T)$ pour tout entier positif p. Ainsi $HC(T)$ est soit vide, soit dense dans X. De ce fait, il est clair que (i)$\Longrightarrow$ (ii). En effet, si (i) est vérifiée et U, V sont des ensembles ouverts donnés, nous pouvons prendre $x \in U \cap HC(T)$, il vient que $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(x) \in V$. Réciproquement, puisque l'espace X est métrisable et séparable il admet une base dénombrable d'ensembles ouverts.
Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une telle base, un vecteur $x \in X$ est hypercyclique T ssi son $T-$Orbite rencontre chaque ensemble ouvert de V_j, ou encore : Pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe un entier $n \geq 0$ tel que $T^n(x) \in V_j$. Ainsi, on peut voir $HC(T)$ sous la forme :

$$HC(T) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j).$$

Ceci montre que $HC(T)$ est un ensemble G_δ. De plus, il résulte du théoréme de catégorie de Baire que $HC(T)$ est dense dans X si et seulement si chaque ensemble ouvert $W_j := \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j)$ est dense : plus précisemment, si et seulement si pour chaque ensemble ouvert non vide $U \subset X$ et tout $j \in \mathbb{N}$ on peut trouver un entier naturel n tel que

$$U \cap T^{-n}(V_j) \neq \emptyset \quad \text{ou de façon équivalente } T^n(U) \cap V_j \neq \emptyset.$$

Du fait que (V_j) est une base pour la topologie de X, cela est équivalent à la transitivité topologique de T. ■

Remarque 2.2.1. *L'implication (hypercyclique) $\Longrightarrow$ (topologiquement transitive) n'éxige pas que l'espace X soit métrisable ou de Baire : Elle est vérifiée pour tout espace vectoriel topologique non vide. En effet, la seule hypothèse que nous avons utilisé est que $SC(T)$ soit dense dans X sans être vide. Cependant, les hypothèses pour la réciproque (topologiquement transitive)$\Longrightarrow$ (hypercyclique) est que X soit un espace de Baire et admet une base dénombrable d'ensembles ouverts. Dans un autre contexte, le théorème* 2.2.1 *ne fait pas allusion à la linéarité de l'application T, puisque les définitions de l'hypercyclicité et de la transitivité topologique n'exigent pas de structure linéaire.*

Lorsque l'opérateur T est inversible, il est possible de voir que la transitivité topologique est vérifiée pour T^{-1} si elle l'est pour T et inversement.

Corollaire 2.2.1. *Soit X un F-espace séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Supposons que T soit inversible. Alors T est hypercyclique si et seulement si T^{-1} l'est aussi.*

Notons que le fait que T et T^{-1} se partagent la propriété d'hypercyclicité n'induit pas les mêmes les vecteurs hypercycliques.
On peut illsutrer le théorème 2.2.1 par un exemple donné par Birkhoff (1929).

Exemple 2.2.1. *Soit $H(\mathbb{C})$ l'espace de toutes les fonctions entières sur $\mathbb{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Pour tout complexe non nul a, posons $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ l'opérateur de translation défini par $T_a(f)(z) = f(z+a)$. Alors T_a est hypercyclique sur $H(\mathbb{C})$.*

Preuve. L'espace $H(\mathbb{C})$ étant de Fréchet et séparable, il suffit donc de montrer que T_a est topologiquement transitive. Si $u \in H(\mathbb{C})$ et $E \subset \mathbb{C}$ est compact, On pose :

$$\|u\|_E := \sup\{|u(z)|; z \in E\}.$$

Soient U, V deux sous-ensembles ouverts non vides de $H(\mathbb{C})$. Il existe $\varepsilon > 0$, deux diques fermés $K, L \in \mathbb{C}$ et deux fonctions $f, g \in H(\mathbb{C})$ tels que

$$U \supset \{h \in H(\mathbb{C}); \|h - f\|_k < \varepsilon\},$$

$$V \supset \{h \in H(\mathbb{C}); \|h - g\|_L < \varepsilon\}.$$

Soit n un entier positif tel que $K \cap (L + an) = \emptyset$. Puisque $\mathbb{C}$ $(K \cup (L + an))$ est connexe, on peut trouver $h \in H(\mathbb{C})$ tel que

$$\|h - f\|_k < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|h - g(\cdot - na)\|_{L+an} < \varepsilon;$$

Ainsi $h \in U$ et $T_a^n(h) \in V$, ce qui montre que T_a est topologiquement transitif.
Les applications topologiquement transitives sont trés présentes dans les mathématiques. Par exemple, l'application $x \longmapsto 4x(1-x)$ est transitive sur l'intervalle $[0,1]$ et l'application $\lambda \longmapsto \lambda^2$ est transitive sur le cercle $\mathbb{T}$. Cependant, dans des considérations topologiques on a plus besoin d'arguments pour montrer qu'une application donnée est (topologiquement) transitive. Néanmoins, dans un cadre linéaire, Il n'existe aucun critère général pour montrer l'hypercyclicité. On retient le critère isolé par C. Kitai dans une forme restreinte puis celui dee R. Gethner et JH Shapiro sous une forme proche de celle donnée ci-dessous. On donne une version qui apparait dans la thèse de J. Bès.

■

Définition 2.2.2. *Soit X un E.V.T séparable et $T \in \mathcal{L}(X)$. On dit que T satisfait le critère d'hypercyclicité s'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k \in \mathbb{N}$, deux ensembles denses $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset X$ et une suite d'applications $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \longrightarrow X$ tels que :*

a) $T^{n_k}x \longrightarrow 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}_1$ *;*

b) $S_{n_k}y \longrightarrow 0$ *pour tout* $y \in \mathcal{D}_2$ *;*

c) $T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y$ *pour tout* $y \in \mathcal{D}_2$.

Nous dirons parfois dire que T satisfait le critère d'Hypercyclicité par rapport à la suite (n_k). Quand c'est possible de prendre $n_k = k$ et $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, il est généralement dit que T satisfait le **critère de Kitai**. Notons que dans cette définition ci-dessus, les applications S_{n_k} ne sont pas supposées linéaires ou continues.

Théorème 2.2.2. *Soit X un espace de Fréchet séparable et soit $T : X \longrightarrow X$ une application linéaire continue , s'il existe deux parties denses Y et Z de X ainsi qu'une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ tels que :*

– *pour tout* $y \in Y$. $\lim_{k\longrightarrow\infty} T^{n_k}(y) = 0$.
– *pour tout* $z \in Z$*, il existe une suite* $(x_k)_{k\geq 0}$ *d'éléments de* X *telle que ,* $\lim_{k\longrightarrow\infty} T^{n_k}(x_k) = z$, $\lim_{k\longrightarrow\infty}(x_k) = 0$
alors T *est hypercyclique.*

Récemment,M. De La Rosa et C. Read ([RR]) ont prouvé que la réciproque était fausse en construisant un contre-exemple. Ce résultat a été généralisé par F. Bayart et E. Matheron ([BM]) qui ont prouvé l'existence de tels opérateurs dans de nombreux espaces de Banach séparables, notamment C^0 et L_p.

Théorème 2.2.3. ***(Léon, Muller)*** *Soient* T *un opérateur hypercyclique et* λ *un scalaire de module égal à* 1*. Alors* λT *est hypercyclique et* $HC(T) = HC(\lambda T)$*.*

En 1995, Ansari s'est intéréssé à l'hypercyclicité des opérateurs à des puissances naturelles. Ceci revient à " oublier" des itérations par rapport à l'orbite de l'opérateur initial. De prime, il parait hasardeux de penser que tous les itérés d'un opérateur hypercyclique sont $eux-mêmes$ hypercycliques. C'est pourtant ce qu'affirme le théoréme suivant :

Théorème 2.2.4. *Soit* $\mathcal{M} \in B(X)$ *un semi-groupe d'opérateurs et soit* $x \in X$ *tels que l'ensemble* $\{\mu Sx : S \in \mathcal{M}, \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1\}$ *soit dense dans* X*.*
Supposons qu'il y'ait un opérateur $T \in B(X)$ *avec* $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ *vérifiant* $TS = ST$ *pour chaque* $S \in \mathcal{M}$*. Alors l'ensemble* $\{Sx : S \in \mathcal{M}\}$ *est dense*

Preuve. Nous montrons d'abord que les vecteurs x et Tx sont linéairement indépendants. Supposons au contraire que $Tx = \alpha x$ pour certains $\alpha \in \mathbb{C}$. Puis $S\ker(T-\alpha) \subset \ker(T-\alpha)$ pour tous les $S \in \mathcal{M}$ et $X = \{\mu Sx : S \in \mathcal{M}, \mu \in \mathbb{T}\}^- \subset \ker(T-\alpha)$ et $\mathbb{T} = \{z \in \mathcal{C} : |z| = 1\}$. Ainsi T est un multiple scalaire de l'identité, ce qui contredit la hypothèse que $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ le disque unité fermé. Soit $g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{T}$ la fonction de nie par $g(z) = f(zx + (1-|z|)Tx)$. Il est clair que g est continue. Pour tout z vérifiant $|z| = 1$, nous avons $F_{x,zx} = z^{-1}F_{x,x}$ et $g(z) = f(zx) = z^{-k}f(x) = z^{-k}$. Il est simple de voir qu'une telle fonction g ne peut pas exister.

En effet, la fonction g fournirait une homotopie entre le cheminement constant $\gamma_1 :< 0, 2\pi >\longrightarrow \mathbb{T}$ definie par $\gamma_1(t) = g(0)$ et le chemin $\gamma_2 :< 0, 2\pi >\longrightarrow \mathbb{T}$ donné par $\gamma_1(t) = g(\exp^{it}) = \exp^{-kit}$, qui a le nombre k d'enroulement. Ainsi $F_{x,x} = T$ et l'ensemble $\{Sx : S \in \mathcal{M}\}$ est dense dans X.

■

Corollaire 2.2.2. *Soit $T \in B(X)$. En suite $x \in X$ est hypercyclique T si et seulement si l'ensemble $\{\mu T^n x : \mu \in \mathbb{T}, n = 0, 1 \cdots \}$ est dense dans X.*

Preuve. Une implication est triviale. Pour vérifier la réciproque, soit $x \in X$ satisfont $\{\mu T^n x : \mu \in \mathbb{T}, n = 0, 1, \cdots\}^- = X$. Soit $\mathcal{M} = \{T^n : n = 0, 1, \cdots\}$. il est de montrer que $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. Supposons au contraire que $\alpha \in \sigma_b(T^*)$.Soit $x^* \in X^*$ être le correspondant vecteur propre, $T^*x^* = \alpha x^*$. nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \{< \mu T^n x, x^* >: \mu \in \mathbb{T}, n = 0, 1, \cdots\}^- = \{< \mu x, \alpha^n x^* >: \mu \in \mathbb{T}, n = 0, 1, \cdots\}^- \\ &= < x, x^* > \{\mu\alpha^n : \mu \in \mathbb{T}, n = 0, 1, \cdots\}^- \end{aligned}$$

Si $|\alpha| \leq 1$ ou $< x, x^* >= 0$ alors la dernière série est bornée et donc non-dense dans $\mathbb{C}$.

Si $|\alpha| > 1$ et $< x, x^* >\neq 0$ alors la dernière série est bornée inférieurement, et donc non-dense dans $\mathbb{C}$, soit. Ainsi $\sigma_p(T^*) = \emptyset$. La déclaration suit maintenant du théorème 2.2.4

■

Théorème 2.2.5. ***(Ansari 1995)*** *Soient T un opérateur hypercyclique et $k \in \mathbb{N}$ Alors T^k est hypercyclique et $HC(T) = HC(T^k)$.*

Les propriétés de ces opérateurs sont assez connues maintenant, on pourra par exemple consulter les livres récents de Bayart et Matheron et de Grosse-Erdmann et Peris [32] pour plus de détails.

Corollaire 2.2.3. ***(Critère de Godefroy-Shapiro)*** *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ où X est un F-espace séparable. Supposer que $\bigcup_{|\lambda|<1} \ker(T - \lambda)$ et $\bigcup_{|\lambda|>1} \ker(T - \lambda)$ à la fois couvrir un sous-espace dense de X. Alors T est hypercyclique.*

Preuve. Nous montrons que T satisfait le critère hypercyclicité avec $(n_k) := (k)$ et

$$D_1 := span(\bigcup_{|\lambda|<1} \ker(T - \lambda)) \qquad D_2 := span(\bigcup_{|\lambda|>1} \ker(T - \lambda)).$$

Les applications $S_k : D_2 \longrightarrow X$ sont définis comme suit : nous avons mis $S_k(y) := \lambda^{-k}y$ si $T(y) = \lambda y$ avec $|\lambda| > 1$, et nous étendons S_k à D_2 par linéarité. Cette définition est logique parce que le sous-espaces $\ker(T-\lambda)$, $|\lambda| > 1$, sont linéairement indépendants. Ainsi, toute valeur non nulle $y \in D_2$ peut être écrit de manière unique sous la forme $y = y_1 + \cdots + y_p$, avec $y_i \in \ker(T-\lambda_i)\backslash\{0\}$ et $|\lambda_i| > 1$. Cela dit, il est clair que les hypothèses pour le critère d'hypercyclicité sont satisfaites.

■

2.3 Opérateurs supercycliques

Définition 2.3.1. *Un vecteur $x \in X$ est dit supercyclique pour T si*

$$\{\lambda T^n x,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$$

est dense dans X.

L'ensemble des vecteurs supercycliques pour l'opérateur T est noté $SC(T)$. L'opérateur T est dit supercyclique si $SC(T) \neq \emptyset$ Dans le *même* article, les auteurs exhibent certains opérateurs supercycliques en prouvant que l'adjoint d'un opérateur de décalage pondéré à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est toujours supercyclique. De plus, ceux-ci remarquent également que la classe des opérateurs normaux ne contient pas d'opérateurs supercycliques et que dans le cas complexe la supercyclicité ne peut survenir que dans des espaces de dimension 1 ou de dimension infinie. Il faut ensuite attendre 20 ans, pour qu'en 1992, Herzog [23] compléte ce théoréme de Hilden et Wallen pour le cas des espaces réels.

Théorème 2.3.1. ***Transitivité de Birkhoff et Supercyclicité*** *Soient X un F-espace séparable et T un opérateur linéaire continu sur X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

– *(i) T est supercyclique*
– *(ii) pour tous ouverts non-vides U et V de X, il existe un entier n et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ De plus, dans ce cas $SC(T)$ est un G_δ dense de X.*

Preuve. Comme avant, soit $(V_j)_j \in \mathbb{N}$ être une base dénombrable d'ouverts pour X. Puis une peut écrire $SC(T) = \bigcap_j \bigcup_{\lambda,n} (\lambda T^n)^{-1}(V_j)$. et la preuve est terminé exactement comme celle d'avant. La définition et le théorème ci-dessous sont dues à H. N Salas [28].

■

Définition 2.3.2. ***(Critére de Supercyclicité)*** *Soient X un espace de Banach séparable et $T \in \mathcal{L}(X)$. On dit que T satisfait le critére de supercyclicité s'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k \in \mathbb{N}$, deux ensembles denses $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in X$ et une suite d'applications*
$S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \longrightarrow X$ tels que :
- *a) $\|T^{n_k}x\|\|S_{n_k}y\| \longrightarrow 0$ pour tous $x \in \mathcal{D}_1$ et $y \in \mathcal{D}_2$*
- *b) $T^{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y$ pour tous $y \in \mathcal{D}_2$*

Théorème 2.3.2. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) T satisfait le critère de supercyclicité. (ii) $T \oplus T$ est supercyclique. Pour illustrer le critére de supercyclicité, nous allons donner une caractérisation des décalages (Shift) pondérés bilatéraux supercycliques. Cette caractérisation est encore due à Salas .*

2.4 Existence d'opérateurs hypercycliques sur espaces vectoriels topologiques

On essauera dans cette section de répondre à une question élémentaire :

Existe t-il des opérateurs hypercycliques continus sur des espaces vectoriels toplogiques de dimension infinie ?

Rappelons que si (x_n) est une suite dans un espace vectoriel topologique X et (f_n) est une suite dans l'espace dual de X, alors $\{x_n, f_n\}$ est dite un système biorthogonal si $f_m(x_n) = \delta_{m,n}$ et l'enveloppe linéaire engendrée par (x_n) est dense dans X.

Définition 2.4.1. *Soit X un espace vectoriel topologique. Soit (x_n) une suite dans X et (f_n) une suite dans l'espace dual de X. Alors, $\{x_n, f_n\}$ est dit un système biorthogonal bornée si les points suivants sont vérifiés :*

(1) *L'espace enge,dré par* $\{x_n\}$ *est dense dans* X.

(2) *Pour tous* m, n *entiers positifs,* $f_n(x_n) > 0$ *et* $f_n(x_m) = 0$ *si* $n \neq m$.

(3) *Les deux suites* (x_n) *et* (f_n) *sont bornées . Un système biorthogonal borné* $\{x_n, f_n\}$ *est dit équicontinu si la suite* (f_n) *est équicontinue par rapport à la topologie de* X. *Note 1. Dans la définition précédente, il n'est pas imposé que* "$f_n(x_n) = 1$," *mais seulement que* "$f_n(x_n) > 0$."

Définition 2.4.2. *Un espace vectoriel topologique* X *est dit* ℓ^1*-complet par rapport à une suite bornée* (x_n) *dans* X *si pour toute suite réelle* (t_n) *telle que* $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| < \infty$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ *converge dans* X. *Si* $\{x_n, f_n\}$ *est un système biorthogonal borné et* X *est* ℓ^1*-complet par rapport à* (x_n), *nous dirons que* X *est* ℓ^1*-complet par rapport à* $\{x_n, f_n\}$.

Théorème 2.4.1. *Supposons que* X *est un espace vectoriel topologique avec un système biorthogonal borné* $\{x_n, f_n\}$. *Supposons que* X *est* ℓ^1*-complet par rapport à* (x_n).

(a) *Si* $\tilde{T} : X \longrightarrow X$ *est continue et* $\tilde{T}(x_n) = w_n x_{n-1}$ *pour certains suites bornées* (w_n) *de nombres réels positifs, alors* $I_X + \tilde{T}$ *est hypercyclique.*

(b) *Si* X *est localement convexe et l'espace dual de* X *est Mackey-complet alors,* X *admet un opérateur hypercyclique.*

(c) *Si* X *est localement* ℓ^1*-convexe par rapport à* (x_n) *et* (f_n) *est équicontinue, alors* X *admet un opérateur hypercyclique.*

Preuve. (a) Soit $T : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ soit l'opérateur linéaire définie par $T(e_n) = w_n e_{n-1}$. Soit X_1 le ℓ^1-espace de associé à la biorthogonal borné système $\{x_n, f_n\}$. Il est clair que $\tilde{T}$ est un quasi-extension de T. Donc, $I_X + \tilde{T}$ estun quasi-extension de $I_{\ell^1} + T$ Il. Par suite de H. Salas [28], Il $I_{\ell^1} + T$ a une vecteur hypercyclique x dans ℓ^1. Soit $J : \ell^1 \longrightarrow X_1$ être l'isomorphisme naturel. Ensuite, $\{Jx, (I_X + \tilde{T})Jx, (I_X + \tilde{T})^2 Jx, \cdots\}$ est un sous-ensemble dense de $(X_1, \|\cdot\|_1)$. Ainsi, par Lemme 1 cet ensemble est dense dans X. Autrement dit, Jx est hypercyclique pour $I_X + \tilde{T}$. (b) Si $(f_n(x_n))$ est pas une suite bornée, nous pouvons trouver une suite (s_n) des nombres réels positifs tels que $(s_n f_n(xn))$ est bornée. Nous pouvons remplacer (f_n) par la nouvelle séquence $(g_n) = (s_n f_n)$ de telle sorte que $(g_n(x_n))$ est bornée. Alors, sans perte de généralité, nous supposerons que $(f_n(x_n))$ est bornée. Soit (t_n) être toute séquence

de nombres réels positifs avec $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < 1$. Définir $\tilde{T} : X \longrightarrow X$ comme suit. Soit $\tilde{T}x = \sum_{n=1} t_n f_{n+1}(x)x_n$. Nous allons montrer que $\tilde{T}$ est faiblement continue. (Rappelons que puisque X est localement convexe, un plan linéaire sur X est faiblement continue ssi elle est continue par rapport à la topologie de
X.) Il est un fait élémentaire qu'une d'application linéaire A est faiblement continue ssi Goa est faiblement continue pour chaque g fonctionnelle linéaire faiblement continue sur X. Par suite de A. Grothendieck, puisque X est Mackey complète, Goa est faiblement continue ssi il est faiblement continue sur l'ensemble équitable sous-ensembles continus de X. Donc, nous allons prouver que Go$\tilde{T}$ est faiblement continue sur tous les sous-ensembles équicontinues de X. Soit S toute partie équicontinue de X et soit (y_α) Soyez tout filet dans S convergeant faiblement à certains y en S. Puisque (y_α) est équicontinu et (f_n) est borné, il existe une constante M telle que $|f_n(y_\alpha)| \leq M$ pour tout n et pour tout α et $|f_n(y)| \leq M$ pour tout n. En outre, puisque (x_n) est limitée, il existe une constante N tel que $|g(x_n)| \leq N$ pour tout n. soit $\varepsilon => 0$ arbitraire. Il existe un m tel que : $\sum_{n=m+1}^{\infty} t_n 2MN < \varepsilon$ existe un α_0 tel que $|f_n(y_\alpha - y)| < \varepsilon N^1$ pour tous $\varepsilon > \alpha_0$ et $n = 1, 2, \cdots, m|Go\tilde{T}(y_\alpha) - Go\tilde{T}(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n|f_n(y_\alpha - y)||g(x_n)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} t_n|f_n(y_\alpha - y)||g(x_n)|2\varepsilon$ pour tous $\alpha \geq \alpha_0$. La conclusion résulte de (a).

(C) Définir $\tilde{T}$ comme ci-dessus. Voilà, $\tilde{T}X = \sum_{n=1}^{\infty} t_n f_{n+1}(x)x_n$. Ce qui précède argument ne vaut pas pour prouver la continuité de $\tilde{T}$, Parce que l'espace est pas localement convexe. Dans ce cas, $\tilde{T}$ est un opérateur nucléaire et il est connue qu'un opérateur nucléaire envoie certain ensemble ouvert dans une équitable ensemble continu. Dans partucular, exploitants nucléaires sont continues. Maintenant, appliquez (a) pour obtenir la conclusion.

■

Corollaire 2.4.1. *Tout espace metrisable localement convexe admet un opérateur hypercyclique continu. En particulier, tout espace de Banach admet un opérateur hypercyclique borné.*

Preuve. Tout espace localement convexe complète est évidemment ℓ^1-complet et localement ℓ^1-convexe par rapport à toute suite bornée. En Remarque $1(d)$, tout espace métrisable admet un système biorthogonal continu. Or, le corollaire résulte du théorème 1(c). ∎

Exemple 2.4.1. *Nous remercions Richard Aron qui nous a gentiment montré cet exemple d'un espace localement convexe qui ne contient pas d'absorbant borné définir. Soit* $C^n = \{(a_i) : a_i \in \varphi, a_i = 0 \ i > n\}$. *Soit* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$. *Considérons* X *avec la topologie forte en vertu de laquelle toutes les injections* $J_n : C^n \longrightarrow X$ *sont continu. Ceci est une topologie localement convexe et un sous-ensemble de* X *est bornée ssi il est un sous-ensemble borné de* C^n *pour un certain* n. *Il est clair que, dans cet espace, il existe un suite* (x_n) *tel que* $(t_n x_n)$ *est pas bornée pour toute suite* (t_n) *de biens numéros.*

Note 3. Dans [2], nous avons prouvé que, sur un espace de Banach sur le champ de nombres complexes, si un vecteur x *est hypercyclique pour un opérateur linéaire borné* T, *alors* x *est hypercyclique* T^n *pour tout* $n \geq 1$. *Le même résultat reste vrai si l'espace sous-jacent est un espace localement convexe soit sur le champ de biens numéros ou le corps des nombres complexes. Si l'espace est sur le champ de nombres complexes la même preuve fonctionne bien. Si l'espace est sur le champ des nombres réels alors nous avons besoin de faire un changement mineur. Dans ce document, le auteur considéré comme l'ensemble* $V = \{p(T)x = p(T) estunpolynme\}$, *où* x *était un vecteur hypercyclique pour* T. *Par suite de P.S. Bourdon, chaque élément de cet ensemble est hypercyclique si l'espace est sur le champ de nombres complexes. Si l'espace est pas sur le corps des nombres complexes, alors nous ne savons pas si* $p(T)x$ *est hypercyclique lorsque* x *est. Si nous remplaçons l'ensemble* V *par l'ensemble* $W = \{r_1 t T^{n+1} x + r_2(1-t)T^n x : r_1, r_2 \in \mathbb{R}, t \in [0,1], n \geq 1\}$, *La preuve en [1] travaille pour des espaces plus des nombres réels. Nous devons seulement vérifier que chaque élément de l'ensemble* W *est hypercyclique si* x *est hypercyclique. Cela découle de la résultat de C. Kitai [22] que pour tout nombre réel* s *l'opérateur* $(T - SI)$ *a une gamme dense lorsque* T *est hypercyclique. Dans [2] l'auteur a prouvé aussi que sur un espace de Banach sur le corps des nombres complexes si* x *est supercyclique pour un opérateur continu* T, *alors* x *est supercyclique pour tous positifs pouvoirs de* T. *La même démonstration fonctionne pour tout espace localement convexe sur le champ de nombres complexes ou des nombres réels.*

Probléme 1. Supposons que X est un espace vectoriel topologique ou un espace de Banach sur le champ de nombres réels. Supposons $T : X \longrightarrow X$ est un opérateur continu avec un vecteur x hypercyclique. Est-il vrai que $P(T)x$ est hypercyclique pour chaque polynôme $P(X)$ avec des coefficients réels ?
Problème 2. Que localement espaces convexes ne reconnaissent pas bornées biorthogonal système ? Que topologique espaces ne pas admettre équicontinu systèmes biorthogonaux ? Il ya des espaces vectoriels topologiques qui ne soutenons pas le port même un seul de linéaire continue non nulle fonctionnelle, par exemple $L^p[0,1]$ pour $0 < p < 1$[18].
Problème 3. Disons que d'un espace vectoriel topologique est ℓ^1-complet si pour toute suite bornée (x_n) et toute séquence (t_n) de scalaires avec $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n| < \infty$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ converge dans l'espace. Faire tout le ℓ^1-complète des espaces vectoriels topologiques admettent opérateurs hypercycliques ? fais le espaces $L^p[0,1]$ (pour $0 < p < 1$) admettent opérateurs hypercycliques ?

2.5 Sommes et Produits des opérateurs hypercycliques

Nous concluons ce chapitre en présentant le résultat suivant, à nouveau dû à S. Grivaux.

Proposition 2.5.1. *Soient $T : X \longrightarrow X$ et $S : Y \longrightarrow Y$ deux opérateurs linéaires bornés. Si $T \oplus S$ est hypercyclique sur $X \oplus Y$ alors T (resp. S) est hypercyclique sur X (resp. Y).*

On peut encore se demander ce qu'il se passe si l'on remplace T par un opérateur "ressemblant " dans un sens à définir. On sait par exemple que les multiples d'un opérateur hypercyclique ne sont pas toujours hypercycliques. En effet, Rolewicz a montré le résultat suivant en 1969 :

Proposition 2.5.2. *Soient B l'opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ Alors λB est hypercyclique si et seulement si $|\lambda| > 1$. Toutefois Léon et Müller* [38] *ont montré que les choses se passent mieux si l'on multiplie un opérateur hypercyclique par un scalaire unimodulaire.*

Corollaire 2.5.1. *Soit $T \in B(X)$ et hypercyclique $\lambda \in \mathbb{T}$. Alors l'opérateur T est Hypercyclic et a le même ensemble de vecteurs hypercycliques que T.*
Le dernier a pour corollaire une reformulation pour les opérateurs supercyclique.

Théorème 2.5.1. *Soit H un espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie . Alors chaque opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est la somme de deux opérateurs de mélange.*

Nous expliquons maintenant brièvement la stratégie pour prouver ce théorème. Si T est un opérateur de rang fini alors on peut procéder comme dans la proposition ?. Plus précisément, soit $F \subset H$ un sous-espace de dimension finie tel que $T(H) \subset F$. Nous identifions H avec $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^d)$, $d = dim(F)$ et nous considérons le décalage à gauche B sur H, c'est à dire l'opérateur défini par $B(x_0 \oplus x_1 \oplus \cdots) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots$. Ensuite, pour $|w|$ assez grand, $T - wB$ et wB sont tous deux des mélanges. Par conséquent, il suffit d'écrire $T = (T - wB) + wB$. Pour traiter le cas général, nous allons d'abord prouver que si T est triangulaire supérieur relativement à une base orthonormée de H (dans un sens bien précis), alors $T + wB$ est toujours le mélange quand $|w|$ est assez grand, où B est un changement construit sur cette base. le théorème 2.28 suit si nous sommes capables de décomposer T comme $T = A_1 + A_2$, où A_1 et A_2 sont tous deux triangulaire supérieure dans la même base : pour voir ça, on va juste écrire $T = (A_1 + wB) + (A_2 - wB)$.
Nous passons maintenant aux détails, qui ne sont pas si simples ! Un certain nombre de lemmes sont aussi nécessaires. Essentiellement, les résultats de la théorie des perturbations de opérateurs de Fredholm.
Preuve. Il suffit de montrer que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ peut se écrit $T = A_1 + A_2$, où A_1, A_2 satisfaire les hypothèses du lemme ? avec le même décomposition $H = \oplus_\alpha H_\alpha$ et même orthonormé bases $(e_{\alpha i})_{i \in \mathbb{N}}$, $\alpha \geq 1$. En effet, une fois cela fait, on peut appliquer le lemme ? pour choisir un complexe Numéro ? telle que $T_1 := A_1 + wB$ et $T_2 := A_2 - wB$ mélangent puis écrivent $T = T_1 + T_2$. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et laisser $r \in \mathbb{N}^*$ et $(H_\alpha)_\alpha \geq 1$ être donnée par le lemme . dans ce suit, on désigne par le même symbole un opérateur $R \in \mathcal{L}(H_\alpha, H_\beta)$ et sa matrice par rapport aux bases $(e_{\alpha i})_{i \in \mathbb{N}}, (e_{\beta i})_{i \in \mathbb{N}}$. Définissons matrices infinies $(A_1)_{\alpha\beta}$ et $(A_2)_{\alpha\beta}$ comme suit.

- $(A_1)_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ si $\alpha \neq \beta$
- $(A_1)_{\alpha\alpha}$ est la matrice de bloc supérieur triangulaire avec des blocs de taille obtenues à partir $2r$
  $T_{\alpha\alpha}$ en faisant une décomposition de $T_{\alpha\alpha}$ en blocs de taille et de remplacer chaque $2r$ Coefficient dessous de la diagonale par 0.
- $(A_2)_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - (A_1)_{\alpha\beta}$.
  Par définition, nous avons $(A_1)_{\alpha\alpha} = 0$ si $\alpha \neq \beta$. En outre, depuis $T_{\alpha\alpha}$ est triangulaire ainsi r, chaque matrice $(A_2)_{\alpha\alpha}$ est facilement considérée comme bloc-diagonale, avec une diagonale bloc de taille r sur les blocs du haut, alors en diagonale de taille $2r$. Enfin, chaque coefficient de $(A_2)_{\alpha\alpha}$ est soit ou égale à 0 le coefficient correspondant de $T_{\alpha\alpha}$, de sorte que les modules de ces coefficients ne jamais dépasser$\|T\|$. Depuis les blocs ont une taille au $2r$ plus, il se ensuit que chaque matrice $(A_2)_{\alpha\alpha}$ définit un opérateur bornée sur H_α avec $\|(A_2)_{\alpha\alpha}\| \leq 2r\|T\|$. Par conséquent, la matrice diagonale des opérateurs $((A_2)_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\geq 1}$, de définit un opérateur borné $A_2 \in \mathcal{L}(H)$ et par conséquent la matrice $((A_1)_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\geq 1}$ définit un opérateur borné $A_1 \in \mathcal{L}(H)$, avec $A_1 + A_2 = T$. Tant A_1 et A_2 sont bloc-triangulaire supérieure par rapport à la décomposition $H = \oplus_\alpha H_\alpha$, et chaque diagonale bloc $(A_j)_{\alpha\alpha}$ est $2r$ triangulaire par rapport à la base orthonormée de $(e_{\alpha i})_{i\in\mathbb{N}}$. Ceci conclut la preuve

∎

Lemme 2.5.1. *Soit T un opérateur triangulaire on H, et soit $(e_i)_{i\geq 1}$ être un repère orthonormé base par rapport à laquelle la matrice $(t_{i,j})$ de T est triangulaire supérieure. Ensuite, le espace engendré par les noyaux* $\ker(T - t_{i,i}I)^k$, *$i \geq 1$, $k \geq 1$, est dense dans H.*

Preuve. Ce est facile. Pour chaque $n \geq 1$,fixons $E_n := span(e_1, e_n \cdots)$ Et $T_n := T_{|E_n}$. Puis T_n est triangulaire par rapport à $(e1, \cdots, e_n)$, avec des coefficients diagonaux $(t_{i,i})_{1\leq i\leq n}$. Ainsi, la $span[\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k\geq 1} \ker(T_n - t_{i,i}I)^k] = E_n$. Comme T et T_n En coïncider sur et $\bigcup_n E_n$ est dense dans H, le résultat suit.

∎

2.6 Propriétés spectrales

Dans cette section, nous montrons que les opérateurs hypercycliques et supercycliques ont des remarquables propriétés spectrales.On note $\sigma_p(R)$, le spectre d'un opérateur ponctuel de R, ce est à dire l'ensemble des valeurs propres de R.

Proposition 2.6.1. *Soit $T \in H(X)$ hypercyclique. Alors $\sigma_p(T^*) = \emptyset$*

Preuve. Supposons que $T^*(x^*) = \mu x^*$ pour certains $\mu \in \mathbb{K}$ et certains $x^* \in X^*, x^* \neq 0$. Si $x \in X$ alors $< x^*, T^*(x) >=< T^{*n}(x^*), x >= \mu^n < x^*x >$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque l'ensemble $\mu^n < x^*x >; n \in \mathbb{N}$ ne est évidemment pas dense dans $\mathbb{K}$, il s'en suit que aucun vecteur $x \in X$ peut être hypercyclique pour T.
Remarque Lorsque X est localement convexe, la déclaration $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ signifie que pour chaque $\mu \in \mathbb{K}$ l'opérateur $T - \mu$ a une Avérifies. Cette dernière propriété détient toujours un opérateur hypercyclique, même si X ne est pas localement convexe. Un résultat plus général sera prouvé dans la section suivante (Lemme 1.31). Nous avons déjà observé qu'un opérateur de contraction ($\|T\| \leq 1$) ne peut pas être hypercyclique. De même, un opérateur expansive ($\|Tx\| \geq \|x\|$ pour tout x) ne peut pas être hypercyclique soit, depuis l'orbite de tout vecteur non nul reste loin de 0. Le suivante théorème, dues à C. Kitai, dit qu'un opérateur ne peut pas être hypercyclique "Partie" de contraction ou expansion ■

Théorème 2.6.1. *Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ être hypercyclique. Alors chaque composante connexe du spectre de T croise l'unitécercle. Pour la preuve, nous avons besoin de deux résultats bien connus de la théorie spectrale, qui sont indiqué dans les deux prochaines lemmes. Dans ce qui suit, X est un espace de Banach complexe.*

Preuve. Supposons que certains composants C_1 de $\sigma(T)$ ne est pas couper le cercle unité, de sorte que $C_1 \in \mathbb{D}$ ou $C_1 \subset \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$. D'après le lemme 2.4.2 , on peut trouver un ensemble clopen $\sigma_1 \subset \sigma(T)$ de telle sorte que $C_1 \subset \sigma_1 \subset \mathbb{D}$ ou $C_1 \subset \sigma_1 \subset \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$. Par Lemme(Riesz Decomposition) appliqué pour σ_1 et $\sigma_2 := \sigma(T)\backslash\sigma_1$, on peut écrire $T = T_1 \oplus T_2$, où $\sigma(T_1) = \sigma_1$. Il est facile de vérifier que si T est hypercyclique alors les deux T_1 et T_2 sont hypercyclique (en fait, ils sont quasi-facteurs de T via les projections associés sur X_1 et X_2). Maintenant, il résulte du lemme 2.4.2 que $\|T_1^n(x)\|$ tend vers 0 ou ∞ pour tout $x \in X_1 \backslash 0$, de sorte que T_1 ne peut pas être hypercyclique. Par conséquent, T lui-même n'est pas hypercyclique.

∎

Lemme 2.6.1. ***(théorème de décomposition de Riesz)*** *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, et assumer que le spectre de T peut être décomposée en tant que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_N$, où les ensembles σ_i sont fermées et deux à deux disjoints. Alors on peut écrire $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_N$, où chaque X_i est un sous-espace invariant T-fermée et $\sigma(T_{|X_i}) = \sigma_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, N\}$. Pour preuve, on peut indiquer le livre de [ref preuve].*

Lemme 2.6.2. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$, et soit C une composante connexe de K. Supposons que C est contenu dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Puis une peut trouver un sous ensemble fermé et ouvert simultanément σ de K tel que $C \subset \sigma \subset \Omega$.*

Preuve. Comme dans tout espace compact séparé, la composante C est l'intersection de tous les sous-ensembles ouverts-fermés de K contenant, disent $C = \bigcap_{O \in F} O$. Par compacité, on peut trouver $O_1, \cdots, O_n \in F$ tel que $O_1 \cap \cdots \cap O_n \cap (\mathbb{C} \backslash \Omega) = \emptyset$. Puis $\sigma := O_1 \cap \cdots O_n$ est l'ensemble clopen nous recherchons.

∎

2.7 Les puissances d'un opérateur hypercyclique et opérateur supercyclique

Théorème 2.7.1. *Si un vecteur x de X est hypercyclique pour un opérateur T dans $B(X)$, alors x est hypercyclique pour T^n pour tous $n \geq 1$.*

Preuve. Pour un sous-ensemble B d'un espace topologique V, $\overline{B}^r$ désignera la fermeture de B dans V. Supposons que x est hypercyclique pour T.Soit $V = \{p(T)x :$ p est un polynome$\}$. Alors, V est un ensemble connexe invariant sous T. Soient $A = T|_v$. Alors A est continue sur V. chaque $v \neq 0$ est hypercyclique pour T. alors le série $\{y, Ay, A^2y, \cdots\}$ est dense dans V pour toute élément $y \in V$ c'est-à-dire tout élément de V est hypercyclique pour A Supposons que $S = \{x, A^n x, A^{2n} x, \cdots\}$. Nous

allons prouver que $\overline{S}^r = V$.
Soit $S_k = \cup\{\overline{A^{i_1}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^r | 0 \le i_1 < \cdots < i_k \le n-1\}$,
pour $\forall k$ avec $1 \le k \le n$.
chaque S_k closed dans V et $S_n \subset S_{n-1} \subset \cdots \subset S_1$ nous allons prouver que (i) S_k invariant sous A pour chaque k.(ii) $0 \in S_n$. (iii) $S_n = V$.
(i) $\forall 0 \le i_1 < \cdots < i_k \le n-1$ existe $0 \le j_1 < \cdots < j_k \le n-1$ comme $A(\overline{A^{i_1}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^r) \subset \overline{A^{i_{i+1}}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{i_{k+1}}S}^r = A \subset \cdots \subset S_k$
(ii) Remarque que $S_1 = \overline{A^0S}^r \cup \cdots \cup \overline{A^{n-1}S}^r = V$ et $S_n = \overline{A^0S}^r \cup \cdots \cup \overline{A^{n-1}S}^r$, comme $0 \in S_1$. nous avous $0 \in \overline{A^iS}^r$ pour quelque i , comme $A(\overline{A^iS}^r \subset \overline{A^{i+1}S}^r$ et $A^n \subset \overline{S}^r$ nous donc . $0 \in \overline{A^0S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{n-1}S}^r = S_n$
(iii) On sout que $S_1 = V$, Supposons $S_k = V$ pour quelque k avec $1 \le k < n$.nous allons dementer $s_{k+1} = V$.
pour absurde suppossent $s_{k+1} \neq V$ comme chaque vecteur $\neq 0$ de V est hypercyclique pour A et . S_{k+1} est invariant sous A, nous avous $S_{k+1} = \{0\}$. si $\{i_1 \cdots i_k\} \neq \{j_1 \cdots j_k\}$ alors
$[\overline{A^{i_1}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^r] \cap [\overline{A^{j_1}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k}S}^r] \subset S_{k+1}$. Alors $[\overline{A^{i_1}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^r \backslash \{0\}] \cap [\overline{A^{j_1}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{j_k}S}^r \backslash \{0\}] \subset S_{k+1} \backslash \{0\} = \emptyset$. avec cette resultat,$S_k \backslash \{0\} (= V \backslash \{0\})$. est un infinie des series disjoint fermée (relative pour $V \backslash \{0\}$) de la forme $[\overline{A^{i_1}S}^r \cap \cdots \cap \overline{A^{i_k}S}^r \backslash \{0\}]$.Comme $S_k \backslash \{0\}$ est connecté , l'un des serie soit, de cet forme égal à $V \backslash \{0\}$ et les autre serie soit vide.Sous l'argumant de cet preuve de (i) que. $A(V \backslash \{0\}) = \emptyset$ mais cela est contradie commeA $(V \backslash \{0\})$ est dense dans V. ∎

Théorème 2.7.2. *Si le vecteur x dans X est supercyclique pour un opérateur T dans $B(X)$, alors x est supercyclique pour T^n pour tous $n \ge 1$.*

Preuve. peruve pour la présent théoréme toute dépent sur la théoréme nous vous le une série V de X tel que (i) V est dense, invariant sous multiplication des numérou complexe , et un invariant sous T. de chaque élément $\neq 0$ de V est supercyclique pour T (iii) la série $V \backslash \{0\}$ est connecté . proposition (iii) de cet que : si T est supercyclique ,alors $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ ou $\sigma_p(T^*) = \{\alpha\}$ quelque compelexe nule 0 numéro x. si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$, Alors la série de $p(T)$ est dense pour tout polynomial $p(z)$. Alors $\{cT^np(T)x : n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}\} (= \{cT^np(T)x : n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}\})$ est dense. c'est $p(T)x$ est supercyclique pour chaque polynomial $p(z)$. on se cas soit $V = \{p(T)x : p(z) estpolynomail\}$. Si

$\sigma_p(T^*) = \{\alpha\}$. Soit β est un complexe nul zéro numéro comme $\alpha \neq \beta((1-t)/t)$ pour toute T dans $(0,1)$. Soit $V = \{ctT^{n+1}x - c\beta(1-t)T^n x : 0 \leq t \leq 1, n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}\}$. pour le chont β la série de l'opérateur $ctT^{n+1}x - c\beta(1-t)T^n$ est dense pour tous t dans $[0,1]$ et c dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. il nous donne que chaque élément nul zéro de V est supercyclique comme x est supercyclique pour T, V est dense. c'est claire ,V est invariant sous T,$V\backslash\{0\}$ est connecte, et $\mathbb{C}V \subset V$. avec cet resultat, V est une volu. Soit $A = T|_v$, Alors , pour tous vecteur y dans V la serie $\{cA^n y; n = 0, 1, \cdots, c \in \mathbb{C}\}$ est dense dans V. Soit $S = \{cA^{kn}y; k = 0, 1, \cdots, c \in \mathbb{C}\}$. définie $S_1, \cdots, S_n$ comme dans la preuve de la premier théoréme on peut que $S_n = V$. de la nous avons donne que x est supercyclique pour T^n. nous allons utiliser la notation suiv

■

2.8 Opérateurs de composition

Soit $\phi : D \longrightarrow D$ un auto-holomorphe de D. L'opérateur de composition induit ϕ est défini par $H(\mathbb{D})$ sur par $C_\phi(f) = f \circ \phi$. De toute évidence, C_ϕ est une injection continue. Il est également vrai, mais non négligeable, que C_ϕ est une injection continue sur $H^2(D)$ l'espace de Hardy. Le plus court chemin pour prouver que c'est en observant qu'une fonction $f \in H(\mathbb{D})$ est en H^2 ssi la fonction $|f|^2$ a un majorant harmonique. L'étude des opérateurs de composition consiste en la comparaison entre les propriétés C_ϕ d'un opérateur et celui de la fonction ϕ lui-même. Pour les comptes utiles de ce sujet très intéressant, nous nous référons à nouveau. Dans cette section, nous allons objectif de cours sur le hypercyclicity d'un opérateur de composition C_ϕ agissant sur $H^2(\mathbb{D})$. Nous commençons avec le résultat suivant concernant les points fixes de ϕ.

Proposition 2.8.1. *Soit ϕ être une auto-holomorphe de $\mathbb{D}$. Si C_ϕ est hypercyclique sur $H^2(\mathbb{D})$, alors ϕ n'a pas de points fixes dans $\mathbb{D}$.*

Preuve. D'abord nous notons que si α est un point quelconque de $\mathbb{D}$ alors

$$C_\phi^*(K_\alpha) = k_{\phi(\alpha)}$$

où $k_z \in H^2(\mathbb{D})$ est le noyau reproduisant à $z \in \mathbb{D}$. Cela découle de l'identités

$$< f, C_\phi^*(K_\alpha) >_{H^2} = < f \circ \phi, k_\alpha >_{H^2} = f(\phi(\alpha)) = < f, k_{\phi(\alpha)} >_{H^2} .$$

Ainsi, si ϕ a un point fixe $\alpha \in \mathbb{D}$ puis $C_\phi^*(K_\alpha) = K_\alpha$, de sorte que K_α est un vecteur propre C_ϕ^*. Par la proposition, C_ϕ ne peut pas être hypercyclique. Ainsi, nous sommes réduits à cadastraux ϕ sans point fixe dans $\mathbb{D}$. Nous allons en fait restreindre nous à une classe particulière de applications, le soi-disant applications fractions linéaires. ■

Définition 2.8.1. *Une application non constante $\phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est appelée une fraction linéaire application s'elle peut être écrite comme*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
Équivalente, une application linéaire fractionnaire $\phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est la restriction à $\mathbb{D}$ d'un automorphisme de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (toujours notée ϕ) cartographie l'unité disque $\mathbb{D}$ dans soimeme.We nous $LFM(\mathbb{D})$ l'ensemble de tous fractionnaire linéaire applications de $\mathbb{D}$ et par $Aut(\mathbb{D})$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{D}$. Puis $Aut(\mathbb{D}) \subset LFM(\mathbb{D})$, et si nous conjuguons une fonction de $\phi \in LFM(\mathbb{D})$ par un automorphisme de $\mathbb{D}$ alors nous obtenons toujours une application fractionnaire linéaire. Si $\phi \in LFM(\mathbb{D})$, alors ϕ comporte au moins un et au plus deux points fixes dans $\widehat{C}$. De plus, il n'est pas trop difficile de montrer que si ϕ n'a pas de points fixes dans $\mathbb{D}$, alors ϕ a une point fixe attractif sur $T = \partial\mathbb{D}$. Ainsi, les applications fractions linéaires $\mathbb{D}$ sans point fixe dans $\mathbb{D}$ chute dans l'une des deux catégories suivantes :
• ***applications paraboliques*** *: ceux ayant une uniques attractifs de point fixe $\alpha \in \mathbb{T}$;*
• ***applications hyperboliques*** *: ceux ayant une $\alpha \in \mathbb{T}$ de point fixe attractif et un deuxième fixe signaler $\beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}$.*
En particulier, si $\alpha \in \mathbb{T}$ est le point fixe attractif de $\phi \in LFM(\mathbb{D})$, les itérations

$$\phi_n(z) := \phi \circ \cdots \circ \phi(z)$$

converger vers α pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, sauf peut-être l'répulsive de point fixe $\beta \in \mathbb{T}$. En outre, la convergence est uniforme sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}} \backslash \{\beta\}$. À ce stade, il est utile d'observer que si u est tout automorphisme de $\mathbb{D}$ alors l'opérateur de composition associée C_u est inversible sur $H^2(\mathbb{D})$ et $C_{uo\phi ou^{-1}} = (C_u)^{-1} \circ C_\phi \circ C_u$. Ainsi, nous ne changeons pas les propriétés dynamiques de C_ϕ si nous conjuguons ϕ par un *automorphisme de disque. puisque le groupe* $Aut(\mathbb{D})$ *agit doublement transitive sur* $\mathbb{T}$*, nous pouvons donc supposer, en conjuguant avec un automorphisme approprié si nécessaire, que les points fixes sur* $\mathbb{T}$ *de la application fractionnaire linéaire à laquelle nous recherchons se trouvent exactement là où nous voulons. Par exemple, on peut supposer que l'attrayante point fixe est* $\alpha = +1$*, et (si nécessaire) que le point fixe répulsif est* $\beta = -1$*. Enfin, nous soulignons que les applications fractions linéaires sont plus faciles à visualiser quand, considéré que les transformations du demi-plan* $\mathbb{P}_+ := \{s \in \mathbb{C}; Im(s) > 0\}$*. Cette se fait via l'application dite Cayley*

$$\omega(z) := i\frac{1+z}{1-z},$$

qui fait $\mathbb{D}$ *correspondre de façon conforme sur* $\mathbb{P}_+$ *avec* $\omega(0) = i$ *et* $\omega(1) = \infty$*. Ainsi, si* $\phi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *est une auto-holomorphe de* $\mathbb{D}$ *puis la application* $\psi := \omega \circ \phi \circ \omega^{-1}$ *est un holomorphe auto-application de* $\mathbb{P}_+$*. Soit* $\phi \in LFM(\mathbb{D})$ *n'ont pas de points fixes dans les* $\mathbb{D}$*, et laissez-il son attractif fixé* $\alpha = +1$ *points sur la limite. Lorsque* ϕ *est paraboliques, tours* ψ *la application associée être un de traduction* $\psi(s) = s + ia$*, où* $Re(a) \geq 0$*. C'est un automorphisme de* $\mathbb{P}_+$ *si et seulement si* $Re(a) = 0$*. Lorsque* ϕ *est le plan hyperbolique* ψ *est la dilatation* $\psi(s) = \lambda(s - s_0) + s_0$*, où* $\lambda > 1$ *et* $Im(s_0) \leq 0$*. Il est un automorphisme si et seulement si* $Im(s_0) = 0$*, ce qui signifie que le deuxième point de* ϕ *fixe se trouve sur* $\mathbb{T}$*. Nous avons maintenant la caractérisation suivante des hypercyclicité pour la composition induites par les opérateurs de applications fractions linéaires.*

Théorème 2.8.1. *Soit* $\phi \in LFM(\mathbb{D})$ *n'ont pas de points fixes dans* $\mathbb{D}$*. Alors* C_ϕ *est hypercyclique sur* $H^2(D)$ *si et seulement si* ϕ *est soit hyperbolique ou parabolique automorphismes un de* $\mathbb{D}$*. Pour la preuve, nous avons besoin du lemme densité élémentaire suivante.*

Lemme 2.8.1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{D}$*, et définir* $\mathcal{P}_\alpha := \{polynômeP; P(\alpha) = 0\}$*. Alors* $\mathcal{P}_\alpha$ *est dense dans* $H^2(\mathbb{D})$*.*

Preuve. Soit $f = \sum_0^\infty c_n z^n \in H^2(\mathbb{D})$ être orthogonale à $\mathcal{P}_\alpha$. Alors

$$0 = < f, z^{p+1} - \alpha z^p >_{H^2} = c_{p+1} - \alpha c_p$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Cela donne $c_p = \alpha^p c_0$ pour tout p, et puisque $|\alpha| \geq 1$ il se ensuit que f peut appartenir à $H^2(\mathbb{D})$ que s'elle est égale à zéro. ∎

Preuve.du théoréme 2.8.1 Dans ce qui suit, on note $\psi = \omega \circ \phi \circ \omega^{-1}$ la sœur de ϕ vivant sur $\mathbb{P}_+$. De plus, nous supposons que le point fixe attractif de ϕ est $\alpha = +1$ et on note β l'autre point de ϕ fixe, la mise en $\beta := \alpha$ si ϕ est parabolique

Nous supposons d'abord que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{D}$. Alors β est l'attrayante fixe point de ϕ^{-1} (ce est particulièrement évident quand on sait ψ) .Nous mettons $\mathcal{D}_1 := \mathcal{P}_\alpha$,$\mathcal{D}_2 := \mathcal{P}_\beta$ et $S_k = C^k_{\phi^{-1}} = C^{-k}_\phi$, $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in D_1$ et tout $z \in \mathbb{T}\backslash\{\beta\}$, on a

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} P \circ \phi_k(z) = P(\alpha) = 0.$$

puisque

$$\|C^k_\phi(P)\|^2_{H^2} = \int_{-\pi}^{\pi} |P \circ \phi_k(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi},$$

il résulte de la convergence du théorème de Lebesgue que $C^k_\phi(P) \longrightarrow 0$ dans $H^2(\mathbb{D})$. De même, $S_k(Q) = C^k_{\phi-1}(Q) \longrightarrow 0$ dans $H^2(\mathbb{D})$ pour tout $Q \in \mathcal{D}_2$. Ainsi nous voyons que C_ϕ satisfait la hypercyclicity Critère. Supposons maintenant que ϕ est hyperbolique et non un automorphisme. Ensuite, ψ est donnée par $\psi(s) = \lambda(s - s_0) + s_0$, où $\lambda > 1$ et $Im(s_0) < 0$. Si nous conjuguons ψ par un automorphisme de $\mathbb{P}_+$ de la forme $u(z) = \varepsilon z$, $\varepsilon \in (0, 1)$, nous obtenons $u \circ \phi \circ u^{-1}(s) = \lambda(s - \varepsilon s_0) + \varepsilon s_0$. Ainsi, nous pouvons supposer que $Im(s_0) > -1$. Puis de domaine le $\Delta := \omega^{-1}(\{Im(s - s0) > 0\})$ est bornée (et contient $\mathbb{D}$) parce $\omega^{-1}(s) = (s - i)/(l + i)$ est bornée à l'extérieur de ne importe quel quartier $-i$; et ϕ induit un automorphisme of Δ paraque ψ induit un automorphisme de la demi-plan $\{Im(s - s0) > 0\}$.

Notons ϕ^{-1} l'inverse de $\phi_{|\Delta}$, dont le point fixe attractif est β, le point fixe répulsive de ϕ. Nous avons mis en $\mathcal{D}_1 := \mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{D}_2 := \mathcal{P}_\beta$ et $S_K Q(z) = Q \circ \phi^{-1} \circ \cdots \circ \phi^{-1}(z)$ pour tout $Q \in \mathcal{D}_2$. Comme précédemment, les hypothèses de la hypercyclicité Critère sont satisfaits ; l'borné de Δ assure que l'on peut appliquer de Lebesgue théorème de même à la séquence $(S_K Q)$. Enfin, supposons que ϕ est parabolique et non un automorphisme. Pour montrer que C_ϕ est hypercyclique pas dans ce cas, il est assez clairement pour vérifier que, pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, on peut trouver une certaine non nulle fonction $g \in H^2(\mathbb{D})$ de telle sorte que $< C^n_\phi(f), g >_{H^2} \longrightarrow 0$ $n \longrightarrow \infty$. Nous allons en effet prouver que

$$< C_\phi^n(f), z >_{H^2} \longrightarrow 0$$

pour chaque $f \in H^2(\mathbb{D})$. Donc, nous fixons la fonction f. Comme d'habitude, nous avons mis $\phi_n := \phi \circ \cdots \phi$. Nous notons d'abord que

$$< C_\phi^n(f), z >_{H^2} = f'(\phi_n(0))\phi_n'(0),$$

puisque $< h, z >_{H^2} = h'(0)$ pour tout $h \in H^2(\mathbb{D})$. En outre, écrit $f(w) = \sum_0^\infty a_n \omega^n$ et l'utilisation de l'inégalité de Schwarz, on peut estimer f' comme suit :

$$|f'(w)|^2 \leq \left(\sum_{n\geq 1} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n\geq 1} n^2 |w|^{2(n-1)}\right) \leq \frac{2\|f\|_{H^2}^2}{(1-|w|^2)^3}$$

pour tout $w \in \mathbb{D}$. Ainsi, nous obtenons

$$| < C_\phi^n(f), z >_{H^2} | \leq C \frac{|\phi_n'|}{(1-|\phi_n|^2)^{3/2}}$$

Ici et ci-dessous, $C = C(f, \phi)$ est une constante qui ne dépend pas de n et peut changement de ligne à ligne. Nous avons maintenant à faire quelques calculs. puisque ϕ est parabolique et non un automorphisme, la application ψ associé est une traduction, $\psi(s) = s + ia$, avec $Re(a) > 0$. Une Les rendements de calcul simples

$$\phi(z) = \frac{(2-a)z + a}{-az + 2 + a}$$

Réglez $\psi_n := \psi \circ \cdots \circ \psi (n \geq 1)$. En suite, $\psi_n(s) = s + ina$, de tel que

$$\phi_n(z) = \frac{(2-na)z + na}{-naz + 2 + na}.$$

Différencier et l'évaluation à zéro, nous trouvons

$$\phi_n'(0) = \frac{4}{(2+na)^2}.$$

En outre, il est facile de voir que

$$1 - \phi_n(0) \sim \frac{2}{na} \quad quand \quad n \longrightarrow \infty.$$

À ce stade, nous utilisons le fait que ? n'est pas un automorphisme, c.-à-d $Re(a) > 0$. puisque $\psi_n(i) = i + ina$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous voyons que $\psi_n(i)$ va à ∞ long d'une ligne dans le demi-plan $\mathbb{P}_+$ qui n'est pas parallèle à l'axe réel. Pour en revenir au disque unité, ce forces $\phi_n(0)$ d'aborder le point fixe attractif $\alpha = 1$ non tangentiellement ; dans d'autres mots $|1 - \phi_n(0)|$ est comparable à $1 - |\phi_n(0)|$ et donc avec $1 - |\phi_n(0)|^2$, puisque $1 - |\phi_n(0)| \leq 1 - |\phi_n(0)|^2 \leq 2(1 - |\phi_n(0)|)$. ce qui suit

$$| < C_\phi^n(f), z >_{H^2} | \leq \frac{C_n^{3/2}}{n^2} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Ceci conclut la preuve. ■

Remarque 2.8.1. *Avec des arguments plus sophistiqués, il peut être démontré que C_ϕ est en fait même pas supercyclique lorsque ϕ est un non-automorphisme parabolique*

2.9 Hypercyclicité partout

2.9.1 Introduction

Arrivé à la fin de ce chapitre, nous allons voir plusieurs résultats impressionnants montrant que l'hypercyclicité est loin d'être un phénomène exotique. En particulier, nous verrons que les opérateurs hypercycliques existent sur un espace Fréchet séparable de dimension infinie et que l'on peut construire des opérateurs hypercycliques avec des orbites "arbitraires". Dans le même esprit, nous montrons que la dynamique linéaire est en quelque sorte aussi compliqué que la dynamique topologique. Nous discutons aussi la taille de l'ensemble de tous les opérateurs hypercycliques sur un espace donné X. Enfin, nous montrons que tout opérateur de l'espace de Hilbert peut être écrit comme la somme de deux opérateurs hypercycliques.

2.9.2 Opérateurs de mélange

Définition 2.9.1. *Soit X un espace vectoriel topologique. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit être (topologiquement)* ***mélange*** *si la propriété suivante est vérifie : pour toute paire (U, V) d'ouverts non-vides de X, on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ pour tout $n \geq N$.*

Par la définition même, la propriété de mélange est une forme forte de transitivité topologique, en particulier, les opérateurs de mélange sont hypercycliques si l'espace sous-jacent X est un F-espace séparable. Dans ce cas, il est facile de voir que l'opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est un mélange si et seulement si il est **héréditairement hypercyclique**, ce qui signifie que pour tout ensemble infini $N \in \mathbb{N}$ la famille $\{T^n; n \in N\}$ est universelle. Cela se produit en particulier si T satisfait le critère d'hypercyclicité par rapport à la suite complète $(N_k) = (k)$.
Le théorème suivant, qui est une légère amélioration du résultat, donne une condition suffisante générale et facilement vérifiable pour qu'un opérateur linéaire soit un mélange. Elle s'applique en particulier aux opérateurs de la forme $T = I + B$, où B est décalage à gauche pondéré $\ell^p(\mathbb{N})$, et on obtient une preuve plutôt transparente de Salas. Il peut également être considéré comme une extension du critère de Godefroy-Shapiro.

Théorème 2.9.1. *Soit X un espace vectoriel topologique, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ fixé.*

$$\Lambda_1(T) := span\left(\bigcup_{|\lambda|=1, N\in\mathbb{N}} Ker(T-\lambda)^N \cap Ran(T-\lambda)^N\right),$$

$$\Lambda_+(T) := span\left(\Lambda_1(T) \cup \bigcup_{|\lambda|>1, N\in\mathbb{N}} Ker(T-\lambda)^N\right),$$

$$\Lambda_-(T) := span\left(\Lambda_1(T) \cup \bigcup_{|\lambda|<1, N\in\mathbb{N}} Ker(T-\lambda)^N\right).$$

Si$\Lambda_+(T)$ et $\Lambda_-(T)$ sont tous deux denses dans X alors T est un mélange.

Appliquons ce résultat à des opérateurs de la forme $T = I + B$, nous voyons que si $B \in \mathcal{L}(X)$ et $span(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} Ker(B^N) \cap Ran(B^N))$ est dense dans X, alors $I + B$ est aussi un mélange. Cela donne lieu au corollaire suivant :

Corollaire 2.9.1. *Soit $B \in \mathcal{L}(X)$, où X est un espace vectoriel topologique. Supposons que le noyau généralisé $Ker^*(B) := \bigcup_{N\in\mathbb{N}} Ker(B^N)$ est dense dans X, et que $Ker^*(B) \subset Ran(B)$. Alors $I + B$ est un mélange. Cela se produit dans les deux cas suivants :*

(a) $x = c_0(\mathbb{N})$ *ou* $\ell^P(\mathbb{N})$, *et* B *est décalage en arrière pondéré avec un poids non nul.*
(b) $\dim X = \infty$ *et* B *est un décalage en arrière généralisé dans le sens de Godefroy-Shapiro. C'est-à-dire* $Ker(B)$ *est de dimension* 1 *et* $Ker^*(B)$ *est dense dans* X.

La suite $(Ker(B^k))_{k\geq 0}$ s'appelle la suite itérée des noyaux de B. On peut aussi utiliser :
• La suite des noyaux itérés est non décroissante, et si $Ker(B^k) = Ker(B^{k+1})$ pour un $k \geq 0$ alors $Ker(B^j) = Ker(B^k)$ pour tout $j \geq k$;
• si $Ker(B)$ est de dimension infinie alors $Ker(B^k)$ est de dimension infinie pour chaque $k \geq 1$ et $\dim(Ker(B^k)) - \dim(Ker(B^{k-1}))$ est non-croissante par rapport à k.

Définition 2.9.2. *Si* R *est un opérateur linéaire continu sur un E.V.T* E, *nous posons*

$$J^{mix}(R) := \{(u, v) \in E \times E; \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : X_n \longrightarrow u \quad et \quad R^n(x_n) \longrightarrow v\}.$$

Notons que l'espace E peut être de dimension infinie. L'utilité de cette définition provient du lemme suivant :

Lemme 2.9.1. *Soit* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Si* $J^{mix}(T)$ *est dense dans* $X \times X$ *alors* T *est le mélange.*

Preuve. Supposons que $J^{mix}(T)$ est dense dans X. Si (U, V) est ne importe quelle paire de non-vide sous-ensembles ouverts de X, on peut trouver un point $(u, v) \in (U \times V) \cap J^{mix}(T)$ à laquelle correspond une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la définition de $J^{mix}(T)$. Ensuite, pour les grands assez $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \in U$ et $T^n(x_n) \in V$, où $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Cette montre que T est le mélange.
Remarquons que lorsque l'espace X est métrisable, il peut être démontré que T est le mélange si et que si $J^{mix}(t) = X \times X$. Compte tenu de ce lemme, Théorème suit à la fois de la proposition suivante.

■

Proposition 2.9.1. *Si* $T \in \mathcal{L}(X)$, *alors* $\Lambda^-(T) \times \Lambda^+(T) \subset J^{mix}(T)$. *Nous passons maintenant à la preuve de la proposition. Peut-être étonnamment, cette preuve est de dimension finie en substance, l'étape principale étant le lemme suivant.*

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Puisque $J^{mix}(T)$ est évidemment un vecteur espace, il suffit de vérifier que les propriétés suivantes pour chaque $N \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:
(i) $\{0\} \times (Ker(T-\lambda)^N \cap Ran(T-\lambda)^N)$ et $(Ker(T-\lambda)^N \cap Ran(T-\lambda)^N) \times \{0\}$ sont contenus dans $J^{mix}(T)$ lorsque $|\lambda| = 1$;
(ii) $Ker(T-\lambda)^N \times \{0\} \subset J^{mix}(T)$ lorsque $|\lambda| < 1$;
(iii) $\{0\} \times Ker(T-\lambda)^N \subset J^{mix}(T)$ lorsque $|^\lambda| > 1$.
Fixons N et $\lambda \in T$, et nous fixons également $z \in Ker(T-\lambda)^N \cap Ran(T-\lambda)^N$. Sans perte de généralité, on peut supposer que N est le plus petit entier tel que $z \in Ker(T-\lambda)^N \cap Ran(T-\lambda)^N$. Réglez $R := \lambda^{-1}T - I$. Puis $z \in Ker(R^N) \cap Ran(R^N)$, et N est le plus petit entier avec cette propriété. Écrire $z = R^N(e)$, de sorte que e satisfait $R^{2N}(e) = 0$ et $R^k(e) \neq 0$ pour tout $k < 2N$. Réglage $E := span\{R^i(e); 0 \leq i < 2N\}$ et $e_j = R^{2N-j}(e)$ pour $j = 1, \cdots, 2N$, on voit que E est un sous-espace invariant $R \in N$ dimensions de X avec base $(e_1, \cdots E_{2n})$ et que $B := R_{|E}$ est le déplacement vers l'arrière construit sur la base $(e_1, \cdots, E_{2n})$. En outre, nous avons $z = e_N$. Par le lemme 2.7 et puisque $I + R = \lambda^{-1}T$, il se ensuit que $(0, z)$ et $(z, 0)$ les deux appartiennent à $J^{mix}(\lambda^{-1}T)$. Puisque $|\lambda| = 1$, ce revient à dire que $(0, z)$ et $(z, 0)$ appartiennent à $J^{mix}(T)$. Supposons maintenant que $\lambda\mathbb{C}$ et soit $z \in Ker(T-\lambda)^N$, où N est le plus petit entier avec cette propriété. Soit $E := span(z, T(z), T^{N-1}(z))$. Alors E est un T-invariant et $(T-\lambda)_{|E}$ est un opérateur nilpotent. Si $|\lambda| < 1$, il est ainsi clair que $T^n(z) = 0$ quandn $n \longrightarrow \infty$, de sorte que $(z, 0) \in J^{mix}(T)$. Si $|\lambda| > 1$, alors $x_n := S^n(z) \longrightarrow 0$, où S est l'inverse de $T_{|E}$. Depuis $T^n(x_n) = z$ pour tout n, il se ensuit que $(0, z) \in J^{mix}(T)$. Cette preuve de l'inversibilité de L nous a été suggérée par S. Grivaux.

■

Lemme 2.9.2. *Soit n un entier positif et E un espace vectoriel topologique de dimensions $2N$ avec base $(e_1, \cdots, e_{2N})$. Réglez $E_0 := span(e_1, \cdots, e_N)$. Si $B \in \mathcal{L}(E)$ est le déplacement vers l'arrière construit sur la base $(e_1, \cdots, e_{2N})$ puis $E_0 \times E_0 \subset J^{mix}(I+B)$.*

Preuve. On peut supposer que $E = \mathbb{K}^{2N}$ et que $(e_1, \cdots, e_{2N})$ est le canonique base de $\mathbb{K}^{2N}$. Ensuite, chaque vecteur $x \in E$ peut être écrit comme

$$x = \begin{pmatrix} u \\ \widetilde{u} \end{pmatrix},$$

où $u, \widetilde{u} \in \mathbb{K}^N$. Enfin, nous identifions tout opérateur $R \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{2N})$ avec sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^{2N}$. Ainsi, B peut être identifié avec le $2N \times 2N$ norme Jordan matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous devons montrer que, compte tenu de $(u, v) \in \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de telle sorte que dans $\mathbb{K}^{2N}$

$$x_n \longrightarrow \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad (I+B)^n x_n \longrightarrow \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple montre que

$$(I+B)^n = \begin{pmatrix} K_n & L_n \\ 0 & K_n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \geq 2N$, où

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} n \\ N-1 \end{pmatrix} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$L_n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ N \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ N+1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} n \\ 2N-1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} n \\ N-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ N \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \begin{pmatrix} n \\ N+1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} n \\ N-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ N \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous devons trouver deux séquences $(u_n), (\widetilde{u}_n)$ dans $\mathbb{K}^N$ tel que

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \quad et \quad \widetilde{u}_n \longrightarrow 0; \\ K_n u_n + L_n \widetilde{u}_n \longrightarrow v \quad et \quad K_n \widetilde{u}_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Cet objectif sera atteint comme suit. Premièrement, nous montrons que la L_n de la matrice est inversible pour n assez grand. Mettre de $u_n := u$ et $\widetilde{u}_n = L_n^{-1}(v - K_n u)$, nous serons alors obtenir le résultat requis si nous sommes en mesure de prouver que

$$\|L_n^{-1}\| + \|L_n^{-1}K_n\| \longrightarrow 0 \quad et \quad \|K_n l_n^{-1}\| + \|K_n l_n^{-1} K_n\| \longrightarrow 0.$$

Parler heuristique, Ln matrice se comporte comme

$$L'_n := \begin{pmatrix} \frac{n^N}{N!} & \frac{n^{N+1}}{(N+1)!} & \cdots & \frac{n^{2N-1}}{(2N-1)!} \\ \frac{n^{N-1}}{(N-1)!} & \frac{n^N}{N!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{n^{N+1}}{(N+1)!} \\ n & \cdots & \frac{n^{N-1}}{(N-1)!} & \frac{n^N}{N!} \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est plus docile, car il admet une factorisation utile : si nous notons D_n diag de matrice diagonale $(1, \cdots, n^{N-1})$ et par $\check{D}_n$ la matrice diag $(n^{N-1}, \cdots, 1)$ alors

$$L'_n = n\check{D}_n L D_n,$$

où

$$L_n := \begin{pmatrix} \frac{1}{N!} & \frac{1}{(N+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2N-1)!} \\ \frac{1}{(N-1)!} & \frac{1}{N!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{(N+1)!} \\ 1 & \cdots & \frac{1}{(N-1)!} & \frac{1}{N!} \end{pmatrix}$$

Ayant exposé la matrice L, nous voyons maintenant que

$$(n^{-1}\check{D}_n^{-1} L_n D_n^{-1})_{i,j} = \frac{\begin{pmatrix} n \\ N+j-i \end{pmatrix}}{n^{N+j-i}} = \frac{1}{(N+j-i)!} + o(1).$$

Cela signifie que le $n^{-1}\check{D}_n^{-1} L_n D_n^{-1} = L + M_n$, où (M_n) est une suite de matrices tendant à 0. Ainsi, l'inversibilité de L_n réduit à celle de L pour n assez grand. Notons

$\mathcal{E}$ l'espace vectoriel à N dimensions constitué de tous les polynômes complexe de la forme $P(t) = \sum_{i=N}^{2N-1} C_i t^i$, et soit $\mathbf{L} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C}^N$ être la application linéaire défini par $\mathbf{L}(p) = (P(1), \cdots, P^{(N-1)}(1))$.
La application linéaire L est clairement inversible. De plus, sa matrice par rapport à la base

$$\left(\frac{t^N}{N!}, \dots, \frac{T^{2N-1}}{(2N-1)!}\right)$$

$\mathcal{E}$ et de la base canonique de $\mathbb{C}^N$ est précisément la matrice L. Ainsi L est inversible et est L_n donc assez grand pour , $n \geq n_0$ dire. Il reste à vérifier est vraie. Notons $a_{i,j}(n)$ les entrées la matrice de $(L + M_n)^{-1}$. Alors chaque séquence $(a_{i,j}(n))_{n \geq n_0}$ est borné. Puisque $L_n^{-1} = n^{-1} D_n^{-1} (L+M_n)^{-1} \check{D}_n^{-1}$ voit que $n(L_n^{-1})_{i,j} = a_{i,j}(n)/n^{N+i-j}$, don $\|L_n^{-1} 0\|$. Ensuite, l'écriture $K_n = (b_{i,j}(n))_{i,j}$ nous obtenons $(\check{D}_n^{-1} K_n)_{i,j} = b_{i,j}(n)/n^{N-i}$. Depuis $b_{i,j}(n) = O(n^{j-i})$, il se ensuit que la suite $(D_n^{-1} K_n)$ est bornée, et il peut être vérifiée de la même façon que $(K^N D_n^{-1})$ est bornée ainsi. Puisque D_n^{-1}, $(L + M)^{-1}$, et D_n^{-1} sont aussi bornée, nous obtenons maintenant la deuxième partie par compte tenu de l'expression de L_n^{-1}. Ceci conclut la preuve du lemme.

■

Remarque 2.9.1. *Il peut être démontré par le fait que L_n matrice introduite dans la preuve ci-dessus est inversible pour tout $n \in N$.*

Chapitre 3

Opérateurs Gamma-Hypercycliques

Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. on note par $\sigma(T)$ le spectre de T, $\sigma_p(T)$ son spectre ponctuel, $N(T)$ son noyau et $R(T)$ son image. Le rayon spectral de T est noté $r(T)$ et $\alpha(T) := dimN(T)$ s'appelle la nulité de T, $\beta(T)$ désigne la codimension de $R(T)$ dans X.

Définition 3.0.3. *L'ensemble Γ- hypercyclique noté $\Gamma_{hyp}(T)$ de l'opérateur T est défini par :*

$$\Gamma_{hyp}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \quad telle\ que \quad T - \lambda\ est\ hypercyclique\}$$

3.1 Propriétés

Nous commençons par donner quelques propriétés de l'ensemble $\Gamma_{hyp}(T)$.

Théorème 3.1.1. *Soient X un espace de Banach séparable de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(X)$. Alors :*

$$\Gamma_{hyp}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \quad tel\ que \quad \sigma(T) \cap S(\lambda, 1) \neq \emptyset\}$$

où $S(\lambda, 1)$ est le cercle de rayon 1 autour de λ.

Preuve. Soit $\lambda \in \Gamma_{hyp}(T)$, $T-\lambda$ est hypercyclique, alors de [22] :
nous avons $\sigma(T-\lambda) \cap S^1 \neq \emptyset$, et donc :
$\Gamma_{hyp}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \textit{tel que} \quad \sigma(T) \cap S(\lambda, 1) \neq \emptyset\}$. Notons qu'à partir du théorème de Kitai (voir [6]), nous avons un résultat plus fort :
$\Gamma_{hyp}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}$ de tel que toutes les composantes de $\sigma(T)$ intersectent $S(\lambda, 1)\}$. ■

Remarque 3.1.1. *(i) Comme conséquence immédiate du théorème 3.1.1, pour tout opérarteur borné T l'ensemble $\Gamma_{hyp}(T)$ est borné.*
(ii) Notons également que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Gamma_{hyp}(T+\lambda) = \Gamma_{hyp}(T) + \lambda$.

On note par $\mathcal{D}(0, \xi)$, le disque complexe ouvert centré en 0 de rayon ξ.
On en déduit la propriété suivante de $\Gamma_{hyp}(T)$.

Corollaire 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné opérant sur un espace de Banach séparable de dimension infinie X. Alors :*

$$\Gamma_{hyp}(T) \subset \overline{\mathcal{D}}(0, r(T)+1)$$

Nous avons aussi :

Corollaire 3.1.2. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Alors :*

$$\Gamma_{hyp}(T) \subset \overline{\mathcal{D}}(0, \|T\|+1)$$

Dans le théorème suivant, notons pour toute partie M de $\mathbb{C}$, l'ensemble $|M|$ défini par :

$$|M| := \{|\lambda|, \lambda \in M\}$$

Donnons d'abord un résultat probablement connu :

Théorème 3.1.2. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\lambda \in \Gamma_{hyp}(T)$ et $|\sigma(T-\lambda)| = \{|\mu - \lambda| : \mu \in \sigma(T)\}$ est un ensemble dénombrable, alors $\sigma(T-\lambda) \subset S^1$.*

Preuve. Supposons que $|\sigma(T-\lambda)|$ est dénombrable, et que $|\sigma(T-\lambda)| \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) \neq \emptyset$
Puisque tout ensemble dénombrable a un point isolé, on choisit α dans $|\sigma(T-\lambda)| \cap \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ et on écrit $\sigma_i := \{\mu \in \sigma(T-\lambda) \text{ tel que : } |\mu - \lambda| = \alpha\}$.
Il est clair que σ_i compasante connexe dans $\sigma(T-\lambda)$, et puisque $\sigma(T-\lambda)$ est hypercyclique, on'a $\sigma_i \cap S^1 \neq \emptyset$, parsuite $\alpha = 1$ et donc $\sigma(T-\lambda) \subset S^1$. ∎

Corollaire 3.1.3. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Si $\sigma(T)$ est dénombrable, alors $\Gamma_{hyp}(T) \subset \rho(T)$.*

Preuve. Let $\lambda \in \Gamma_{hyp}(T)$. Puisque $\sigma(T)$ est dénombrable, l'ensemble $\sigma(T-\lambda)$ aussi bien que $|\sigma(T-\lambda)|$. Puisque $(T-\lambda)$ est un opérateur hypercyclique, il vient du théorème 3.1.2 que $\sigma(T-\lambda) \subset S^1$. Nous déduisons que 0 n'est pas dans $\sigma(T-\lambda)$ donc n'est pas dans $\lambda \in \rho(T)$. ∎

Corollaire 3.1.4. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(X)$ ayant un spectre dénombrable. Alors on'a :*
(1) Si $\sigma(T) = \{\alpha\}$ est un singleton, Alors $\Gamma_{hyp}(T) \in S(\alpha, 1)$
(2) Si $\sigma(T) = \{\alpha, \beta\}$ avec $\alpha \neq \beta$ alors $S(\alpha, 1) \cap S(\beta, 1)$ et alors $\Gamma_{hyp}(T)$ est un singleton ou vide.

Preuve. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma_{hyp}(T)$, Alors par le théorème 3.1.2, nous avons :

$$\sigma(T) \subset S(\lambda_2, 1) \cap S(\lambda_2, 1)$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $card(S(\lambda_2, 1) \cap S(\lambda_2, 1)) \leq 2$. Par suite $card(\sigma(T)) \leq 2$ ∎

Définition 3.1.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit essentiellement quasinilpotent si $\sigma_{ess}(T) = \{0\}$.*

Remarque 3.1.2. *De tout évidence, tout opérateur compact est essentiellement quasinilpotent. De plus, le spectre d'un opérateur essentiellement quasinilpotent est au plus un ensemble dénombrable $\{\lambda_1, \lambda_2 ....\}$ tel que $\lambda_n \to 0$ (Voir [1]). Il vient par le corollaire 3.1.2 que si T est essentiellement quasinilpotent ayant un spectre infini alors :* $\Gamma_{hyp} \subset \{\alpha\}$

La proposition suivante donne un critère plus pratique qui peut aider à montrer la défaillance de l'hypercyclicité de T.

Proposition 3.1.1. *[6] Soit X un un espace de Banach séparable de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur hypercyclique. Alors $\sigma_p(T^*) = \emptyset$.*

On peut aussi retrouver la quasinilpotence d'un opérateur T par :

Proposition 3.1.2. *Si l'opérateur T est essentiellement quasinilpotent et $\Gamma_{hyp}(T) \neq \emptyset$, Alors T est quasinilpotent.*

Preuve. Si $\Gamma_{hyp}(T) \neq \emptyset$, Il est simple de voir par la proposition 3.1.1, pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, $T - \lambda$ est à image dense. De plus, Si T est essentiellement quasinilpotent alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $T - \lambda$ est est un opérateur de Fredholm. En particulier $T - \lambda$ a une image fermée et dense, ce qui signifie que $T - \lambda$ est surjective. Il suit que $i(T - \lambda) = 0$, alors $T - \lambda$ est injective et donc inversible, alors $\lambda \notin \sigma(T)$. D'où $\sigma(T) = \{0\}$ d'où le résultat. ■

Proposition 3.1.3. *[26] Tout opérateur compact commutant avec un opérateur hypercyclique quelconque est quasinilpotent.*

Selon [21], pour tout nombre unimodulaire complexe λ, Il existe un opérateur compact K tel que $K - \lambda$ est hypercyclique. Par conséquent, nous avons :

$$S^1 \subset \bigcup_{k \in \mathcal{K}(X)} \Gamma_{hyp}(K)$$

En fait, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1.3. *Soit X un espace de Banach séparable, Alors :*

$$S^1 = \bigcup_{k \in \mathcal{K}(X)} \Gamma_{hyp}(K)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \bigcup_{k \in \mathcal{K}(X)} \Gamma_{hyp}(K)$, alors il existe un opérateur compact K tel que : $K - \lambda$ est hypercyclique. Par la proposition 3.1.3, K est quasinilpotent, Alors par le théorème de l'application spectrale on'a $\sigma(K - \lambda) = \{-\lambda\}$. Ceci montre en utilisant le théorème 3.1.2 que $\lambda \in S^1$. ■

Remarque 3.1.3. *Si T est un opérateur polynomial compact, càd : il existe $P \in \mathbb{C}[Z]\backslash\{0\}$ tel que : $P(T)$ est compact, alors*

$$\Gamma_{hyp}(T) \bigcup_{\lambda_0 \in P^{-1}\{0\}} S(\lambda_0, 1)$$

En effet, soit $\lambda \in \Gamma_{hyp}(T)$, alors $T-\lambda$ est hypercyclique, il suit que par la proposition 3.1.1 $\sigma(P(t)) = \{0\}$. Par le théorème spectral, on déduit que $\sigma(T) \subset P^{-1}\{0\}$ et alors $\sigma(T-\lambda) \subset P^{-1}\{0\} - \lambda$. Puisque $\sigma(T-\lambda) \bigcap S^1 \neq \emptyset$, Cela implique que $P^{-1}\{0\} - \lambda \cap S^1 \neq \emptyset$. Il vient qu'il existe $\lambda_0 \in S(\lambda_0, 1)$ tel que $P(\lambda_0)$.

3.2 Exemples

3.2.1 Opérateurs avec des petits Γ_{hyp}

Proposition 3.2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur borné opérant sur un espace de Banach séparable X tel que $\sigma_p(T^*) \neq \emptyset$, où comme d'habitude T^* désigne l'adjoint de T. alors :*

$$\Gamma_{hyp}(T) = \emptyset$$

Preuve. Il suffit de constater que $\sigma_p(T-\mu)^* = \sigma_p(T_\mu)^* - \overline{\mu}$ et d'utiliser la proposition 3.1.1 ∎

Définition 3.2.1. *Soit T un opérateur linéaire borné agissant sur un espace de Hilbert X. Le opérateur T est dit être hyponormal si $T^*T - TT^* \geq 0$ ou $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ pour tout $x \in X$.*

En particulier opérateur normal et inférieure à la normal de sont hyponormal.

Théorème 3.2.1. *Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie X. Si T est hyponormal, alors $\Gamma_{hyp}(T) = \emptyset$.*

Preuve. Si$\lambda \in \Gamma_{hyp}(T)$, alors $T-\lambda$ est hypercyclique et hyponormal, alors à partir de [36], le opérateur $T-\lambda$ est pas hypercyclique et donc une contradiction. ∎

Théorème 3.2.2. *Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach séparable de dimension infinie X.D'aprée la propriété de l'évêque (β) [31]. Si $\Gamma_{hyp}(T) = \emptyset$, Alors $\sigma(T)$ est inclus dans un cercle.*

Preuve. Soit $\lambda \in \Gamma_{hyp}(T)$, alors $(T - \lambda)$ La propriété de l'évêque (β) et est hypercyclique, alors à partir de [30], $\sigma(T - \lambda) \subset S^1$. Il en résulte que $\sigma(T) \subset S(\lambda, 1)$. ∎

3.2.2 Opérateurs avec des grands Γ_{hyp}

Godefroy et Shapiro dans [35], a donné une condition sufisante Pour hypercyclicité qui est une conséquence du critère de Kitai [22]. Dans la proposition suivante, nous noterons H un espace de Hilbert séparable complexe de dimensions infinie. Le résultat montre que les opérateurs bornés sur H avec un grande quantité de vecteurs propres sont hypercyclique.

Proposition 3.2.2. *Pour tout opérateur borné T sur H, soit $H_+(T)$ l'espace vectoriel engendré par les noyaux $N(T - \lambda)$ avec $|\lambda| > 1$, et $H_-(T)$ l'espace vectoriel engendré par les noyaux $N(T - \lambda)$ avec $|\lambda| < 1$. Si $H_+(T)$ et $H_-(T)$ sont des sous-espaces denses de H, alors T est hypercyclique.*

Ce résultat est utilisé par Godefroy et Shapiro dans leur document [35], mais n'a pas été déclaré explitement là. Grivaux dans [34] esquisse une preuve de la proposition 3.2.2

Notons B pour le quart arrière sur ℓ^2. Il est connu que $2B$ est hypercyclique tandis que B ne le soit pas, parce que tous ses orbites sont bornées. De la critère précédent, il est facile de montrer que :

Théorème 3.2.3. *Soit zéro nombre non complexe, nous avons :*

$$\Gamma_{hyp}(\alpha B) = \begin{cases} D(0, 1 + |\alpha|) & si \quad |\alpha| \geq 1 \\ C(1 - |\alpha|, 1 + |\alpha|) & si \quad |\alpha| < 1 \end{cases}$$

où $C(1 - |\alpha|, 1 + |\alpha|)$ de l'anneau est centré à 0 et ayant des rayons $1 - |\alpha|$ et $1 + |\alpha|$.

Remarque 3.2.1. *Il est clair que pour tout complexe λ, $\Gamma_{hyp}(T-\lambda) = \Gamma_{hyp}(T) - \lambda$ et il était montré dans [2] que T est hypercyclique si et seulement si T^n est hypercyclique pour tout $n \in \mathbb{N}$. Toutefois, généralement , l'ensemble $\Gamma_{hyp}(T^n)$ est différents de $(\Gamma_{hyp}(T))^n$, par exemple, si nous considérons $T = \alpha S_r^*$ avec $\alpha < 1$, puis par le théorème 3.3, $\Gamma_{hyp}(T^2) = (\Gamma_{hyp}(T))^2$.*
Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canonique de l'un des espaces ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ ou c_0 et soit $w = (w_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres positifs. Le déplacement vers l'arrière B_w, avec poids w_n, (voir [21]) est défini par $B_w e_1 = 0$ et $B_w e_n = w_n e_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Rappelons que $\|B^n\| = \beta_n = sup_k(w_k w_{k+1} \cdots w_{k+n})$ et, par conséquent, le rayon spectral de B_w est $\lim_{n\longrightarrow\infty} \beta_n^{\frac{1}{n}}$. Maintenant B_w est quasinilpotent si et seulement si $\lim_{n\longrightarrow\infty} \beta_n^{\frac{1}{n}} = 0$. (Voir [33] pour une étude complète et pour plus de détails sur les changements pondérés. Nous donnons la prochaine description de pour quasinilpotent quarts arrière pondérés.

Théorème 3.2.4. *Soit B_w un décalage vers l'arrière pondérée quasinilpotent, nous avons :*

$$\Gamma_{hyp}(B_w) = S^1.$$

Preuve. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $I + \lambda B_w$ est hypercyclique. Pour $|\lambda| = 1$, nous savons que toute rotation d'un opérateur hypercyclique étant hypercyclique [29], alors $\overline{\lambda} I + B_w$ est hypercyclique. Cela suit que $S^1 \subset \Gamma_{hyp}(B_w)$. Puisque l'opérateur B_w est quasinilpotent, alors $\sigma(\overline{\lambda} I + B_w) = \{\overline{\lambda}\}$, puis par le théorème 3.1.1, $|\overline{\lambda}| = 1$. Par conséquent $\Gamma_{hyp}(B_w) = S^1$.
Remarque : Étant donné que pour tout opérateur borné T et aucun complexe λ nous avons $\Gamma_{hyp}(T+1) = \Gamma_{hyp}(T) + \lambda$, On déduit que :

$$\Gamma_{hyp}(B_w + \lambda I) = S(\lambda, 1).$$

De toute évidence, la topologie de la norme est plus forte que la topologie faible, et ainsi tous les opérateur hypercyclique est un faiblement hypercyclique (i.e ayant orbite faiblement dense). Par exemple, il existe opérateurs faiblement hypercyclique de décalage B sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui ne sont pas hypercyclique (voir corollaire 3.3 dans [17]). ∎
Une question naturelle pour nous est de déterminer tous les scalaires λ tel que $B - \lambda$ est faiblement hypercyclique. Cela conduit à la question plus générale suivante :

Question : Etant donné un opérateur T linéaire bornée agissant sur un espace de Banach séparable, l'ensemble :

$$\Gamma_{w-hyp}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \quad telque \quad T - \lambda\}$$

est faiblement hypercyclique ?

3.3 Applications

Il a été démontré dans [27], que si A et B sont deux opérateurs linéaires borné $\lambda \neq 0$, le les opérateurs $\lambda - AB$ et $\lambda - BA$ ont de nombreuses propriétés de base en commun. Dans le cas où A et B sont gamme dense, nous écrivons $ABA = A(BA) = (AB)A$ et $B(AB) = (BA)B$, et à partir de [8] section 1.1.1 et [32] Proposition 2.24, nous tirons la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie , et A et B deux opérateurs linéaires bornés, gamme dense, alors BA est hypercyclique si et seulement si AB est hypercyclique. Nous étendons cette propriété à tous les nombres complexes en remarquant que :*

$$A(BA - \lambda) = (AB - \lambda)A \quad et \quad B(AB - \lambda) = (BA - \lambda)B$$

nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie , et A et B deux opérateurs linéaires bornés tel que $R(A)$ et $R(B)$ sont denses dans X,*

$$\Gamma_{hyp}(AB) = \Gamma_{hyp}(BA)$$

Ce dernier théorème impplique les transformations de Aluthge. Plus précisément :

Corollaire 3.3.1. *soit X séparable Espace de Hilbert et $T = U|T| \in \mathcal{L}(x)$ la décomposition polaire de l'opérateur T. On consider r, s non négative tel que $r + s = 1$ et soit $T_{r,s} = (|T|^r)U(|T|^s)$ la transformation de Aluthge généralisé de T, alors*

$$\Gamma_{hyp}(T) = \Gamma_{hyp}(T_{r,s}).$$

3.3.1 Equations d'opérateurs

Théorème 3.3.2. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie , et A et B deux opérateurs linéaires bornés satisfaisant le système suivant :*

$$\begin{cases} ABA = A^2 \\ BAB = B^2 \end{cases}$$

Alors :

$$\Gamma_{hyp}(A) = \Gamma_{hyp}(B) = \Gamma_{hyp}(AB) = \Gamma_{hyp}(BA) = \emptyset.$$

Preuve. A la recherche de contradiction, si $\lambda \in \Gamma_{hyp}(A)$, puis $A - \lambda$ est hypercyclique, alors A est dense gamme. L'égalité $A^2 = ABA$ implique que : $(AB - A)A = 0$, alors : $AB = A$. Il en résulte que $A^2 = (AB)^2 = ABAB = AB^2 = AB = A$, et donc $A = A^2$. Maintenant $(A - I)A = 0$ avec A est portée rendements denses à $A = I$ et par conséquent. $A = B = I$. ■

Corollaire 3.3.2. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie . Si P et Q sont deux opérateurs idempotentes et $A = PQ$ et $B = QP$, alors :*

$$\Gamma_{hyp}(A) = \Gamma_{hyp}(B) = \emptyset$$

3.3.2 Matrices triangulaires supérieures

La classe de tous les opérateurs hypercycliques est invariant sous quasi-similitude. Rappelons que A et B sont dit densément similaire à condition que il ya deux opérateurs S, T dense dans H , tell que : $AS = SB$ et $TA = BT$.
En outre, si $A, B \in \mathcal{L}(X)$, B est hypercyclique et $AC = CB$ pour une $C \in B(X)$ avec la orbite dense, alors on'a :

$$\lambda \in \Gamma_{hyp}(B) \Longrightarrow \lambda \in \Gamma_{hyp}(A)$$

En particulier, si A et B sont quasi-similaires, (ce qui signifie qu'il existe deux quasinités S et T one-to-one et ont orbite dense) tel que : $TA = BT$ et $AS = SB$ alors :

$$\Gamma_{hyp}(B) = \Gamma_{hyp}(A).$$

Soit maintenant $M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $M_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ tels que $AC = CB$ Notez que

$$M_C = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

puisque $\begin{pmatrix} I & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est inversible inverse $\begin{pmatrix} I & -C \\ 0 & I \end{pmatrix}$, Que nous tirons

$$\Gamma_{hyp}(M_C) = \Gamma_{hyp}(M_0).$$

conclusion

Ce manuscrit résume, en quelques pages, les principaux outils et concepts de l'analyse fonctionelle.

Le travail est consacré essentiellement à l'étude des opérateurs hypercycliques ainsi que les opérateurs supercycliques leurs existence sur espaces vectoriels topologiques, somme, produit et puissance, on s'intéresse aussi a l'étude spectrale de ses opérateurs. Par exemple, on montre trés facilement la proposition suivante qui lie le comportement de l'opérateur aux valeurs propres de son adjoint, sans oublier les opérateurs orbite-cycliques.

Des exemples variées sont présentées. Particuliérement, des applications relative aux problèmes dynamique linéaire.

Bibliographie

[1] Y. A. Abramovich and C. D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics., vol 50, (2002).

[2] S.I. Ansari. *Hypercyclic and cyclic vectors*. J. Funct. Anal., 128(2) :374-383, 1995.

[3] S.I. Ansari and P.S. Bourdon. *Some properties of cyclic operators*. Acta Sci. Math. (Szeged), 63(1-2) :195-207, 1997.

[4] F. Bayart. *m-isometries on banach spaces*. Math. Nachr., 284(17-18) :2141-2147, 2011.

[5] F. Bayart and S. Grivaux. *Invariant gaussian measures for operators on banach spaces and linear dynamics*. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 94(1) :181-120, 2007.

[6] F. Bayart and ´E. Matheron. *Hyponormal operators, weighted shifts and weak forms of supercyclicity*. Proc. Edinb. Math. Soc. (2), 49(1) :1-15, 2006.

[7] F. Bayart and ´E. Matheron. *Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical banach spaces*. J. Funct. Anal., 250(2) :426-441, 2007.

[8] F. Bayart and ´E. Matheron. *Dynamics of linear operators. Cambridge tracts in mathematics*. Cambridge University Press, 2009.

[9] F. Bayart : *Common hypercyclic subspaces. Integral Equations Operator Theory*, N°53 : 2005, p 467-476.

[10] F. Bayart, E. Matheron and P. Moreau. *Small sets and hypercyclic vectors*. Comment. Math. Univ. Carolinae, N°49, 2008, p 53-65.

[11] T. Bermùdez, A. Bonilla, and A. Peris. *On hypercyclicity and supercyclicity criteria*. Bull. Aust. Math. Soc., 70 :45-54, 7 2004.

[12] T. Berm´udez, A. Bonilla, and J.L. Torrea. *Chaotic behavior of the Riesz transforms for Hermite expansions*. J. Math. Anal. Appl., 337(1) :702-711, 2008.

[13] J. B‘es, K.C. Chan, and S.M. Seubert. *Chaotic unbounded differentiation operators*. Integral Equations Operator Theory, 40 :257-267, 2001.

[14] J. B‘es and A. Peris. *Hereditarily hypercyclic operators*. J. Funct. Anal., 167(1) :94- 112, 1999.

[15] G. D. Birkhoff : *Surface transformations and their dynamical applications*. Acta Math. N°43, 1922, p 1-119,(Cited on pp. 2 and 26.)

[16] G. D. Birkhoff : *Démonstration d'un théoréme élémentaire sur les fonctions entiéres*, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475.

[17] K. C. Chang and R. Sanders, *A weakly hypercyclic operator that is not norm hypercyclic.*, J. Operator Theory., 52 (1), 3959 (2004).

[18] M. M. Day, *The spaces Lp with 0<p<1*, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 816-823.

[19] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. 98 (1991), 229-269.

[20] I. Halperin, C. Kitai, and P. Rosenthal, *On orbits of linear operators*, J. London Math. Soc. 31 (1985), 561-565.

[21] D. A. Herrero and Z. Wang, *Compact perturbations of hypercyclic and supercyclic operators*, Indiana Univ. Math. J., 39, (1990) 819-830.

[22] C. Kitai Invariant Closed Sets for linear operators. PHd Thesis, Univ ; Toroonto. (1982).

[23] G. Herzog. *On linear operators having supercyclic vectors*. Studia Math., 103(3) :295-298, 1992.

[24] T. Bermudez and V. G. Miller, *On operators T such that f(T) is hypercyclic*, Integr. equ. oper. theory, 37 (3) (2000) 332-340.

[25] T. Bermùdez, I. Marrero, and A. *Martin´on. On the orbit of an m-isometry.* Integral Equations Operator Theory, 64(4) :487-494, 2009.

[26] V. Matache, *Spectral properties of operators having dense orbits*, Topics in operator theory, operator algebras and applications 32, (1994) 221-237.

[27] B. A. Barnes, *Common operator properties of the linear operators RS and SR*, Proc. Am. Math. Soc., 126, (1998) 1055-1061.

[28] H. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. 347, No. 3 (1995), P6 993-1004.

[29] F. Leon-Saavedra, V. Muller, *Rotations of hypercyclic operators*, Integr. equ. oper. theory 50,(2004) 385-391.

[30] T. L. Miller and V. G. Miller, *Local spectral theory and orbits of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 127,(1999) 1029-1037.

[31] K. B. Laursen and M. M. Neumann,*An Introduction to Local Spectral Theory*, London Mathemat- ical Society Monographs. New Series, vol 20, Oxford University Press, New York (2000).

[32] K.-G. Grosse-Erdmann and A.*Peris Manguillot , Linear chaos , Springer-Verlag, London*, (2011).

[33] A. L. Shields,*Weighted shift operators and analytic function theory*. American Mathematical Soci- ety. Mathematical surveys, 13, (1974)49-128.

[34] S. Grivaux, *Sums of hypercyclic operators.*, J. Func. Anal., 202, (2003)486-503.

[35] G. Godefroy and J. H. Shapiro, *Operators with dense invariant cyclic manifolds.*, J. Func. Anal., 98,(1991) 229-269.

[36] P. S. Bourdon, *Orbits of hyponormal operators*, Michigan Math. J., 44, (1997)345-353.