

N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année: 2015

La théorie spectrale des équations aux dérivées partielles

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse fonctionnelle, Géométrie et application

par

M^{elle} : **Becharef Hala**¹

Sous la direction de

Encadreur : D^r. G.Djellouli

Soutenue le 15 Juin 2015 devant le jury composé de

M. b	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. J	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
M. G	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
M. M	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

1. e-mail : hbecharef2013@gmail.com

Remerciements

Tout d'abord, je remerce dieu tout puissant pour sa bénédiction, de nous avoir donné le privilège d'étudier et de suivre le chemin de la science.

Je remerce notre encadreur Dr.G.Djellouli qui nous a sacrifiés beaucoup de son temps, ainsi pour ses précieux conseils et son grande patience.

Je tenons à remercier les membres du jury pour l'amabilité de jury notre travail.

Je tene à remercier tout le personnel d'Université Dr.Moulay Tahar et en particulier ceux du département de mathématique.

Enfin nous remercions également tout ceux qui nous ont aidé, de pré ou de loin, à élaborer ce modeste travail.

Dedicaces

Je dédie ce modeste travail :

- Mes très chers parents qui m'ont enfanté, m'ont encouragé à suivre mes études. -
- A mes frères, et spécialement à mon frère Mokhtar.
- A mes chers soeurs et leurs mariés et leurs enfants .
- A mes amis Et spécialement à Hanane .
- A tout la promotion *master2* lmd 2014 \ 2015.
- A tout qui prend une place dans mon coeur.

Table des matières

1	Éléments de la théorie spectrale	8
1.1	Éléments de théorie spectrale	11
1.1.1	Opérateurs non-bornés	11
1.1.2	Opérateurs fermés	11
1.1.3	Adjoint	12
1.1.4	Opérateurs symétriques et autoadjoints	14
1.1.5	Spectre et résolvante	16
1.1.6	Spectre discret, spectre essentiel	21
1.1.7	Perturbation d'opérateurs autoadjoints	22
2	Laplacian Libre	26
2.1	Introduction	26
2.2	Problèmes aux bords du Laplacien unidimensionnelle	27
2.2.1	Position du problème	27
2.2.2	Sur l'intervalle $]0, L[$	27
2.2.3	Problème de Robin	29
2.2.4	Le cercle $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,	30
2.3	Caractéristiques spectrales en dimension 1	31
2.4	Conclusion	31
2.5	Problèmes aux bords du Laplacien en dimension 2	31
2.5.1	Sur le rectangle $\Omega =]0, L[\times]0, M[$	31
2.5.2	Sur le disque $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x < R\}$	32

2.5.3	Triangle équilatéral de longueur L	34
2.6	Caractéristiques spectrales dans dimension 2	35
2.6.1	Simplicité de la plus petite valeur propre : approche formelle	39
3	Opérateur de Schrödinger	43
3.1	Quelques propriétés de l'opérateur $H = -\Delta_g + V$	44
3.1.1	Caractère auto-adjoint de l'opérateur de Schrödinger	44
3.1.2	Le spectre de l'opérateur est-il discret ?	46
3.2	Calcul explicite de spectres de l'opérateur de Schrodinger	47
3.2.1	Oscillateur harmonique unidimensionnelle	48
3.2.2	Atome d'hydrogène en trois dimensions $-\Delta u - \frac{2}{ x }u = Eu$	52
3.2.3	Etude qualitative spectrale	54
3.3	Une introduction à l'analyse semi-classique	57
3.3.1	l'analyse semi-classique	57

Introduction

Il serait difficile de faire une présentation exhaustive de l'étude de l'opérateur laplacien et de celui de Schrödinger en quelques pages, néanmoins ces notes donnent un panorama partiel et historique sur l'étude spectrale de ces deux opérateurs. On y présente quelques résultats remarquables qui illustrent en particulier la diversité des thèmes mathématiques associés.

L'étude du laplacien dans l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^n , et plus généralement de l'opérateur de Schrödinger, est bien sûr très présente en physique, comme par exemple en mécanique quantique : dans un système physique constitué d'une particule se déplaçant dans une partie ouverte X de \mathbb{R}^n , l'espace de Hilbert associé est $L^2(X)$, et, si la particule n'est soumise à aucune force, l'hamiltonien² est :

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ est le laplacien de \mathbb{R}^n , m la masse de la particule, et \hbar la constante de Planck. Si au contraire la particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel réel V , l'hamiltonien est alors :

$$H = H_0 + V$$

En géométrie riemannienne, l'opérateur de Laplace-Beltrami est la généralisation du laplacien de \mathbb{R}^n . Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 à valeurs réelles définie sur une variété riemannienne (M, g) , et pour $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ une carte locale de la variété

2. En physique il représente l'énergie de la particule, mathématiquement c'est une fonction (contexte classique) ou bien un opérateur linéaire (contexte quantique).

M , l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement laplacien de (M, g) , appliqué à la fonction f est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$$

où $g = \det(g_{ij})$ et $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$. Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur. Beaucoup de géomètres, motivés par le livre de Berger, Gauduchon et Mazet [10], se sont alors intéressés à cet invariant spectral. L'étude du laplacien, et plus particulièrement de son spectre, est un carrefour entre la théorie spectrale, l'analyse harmonique, la géométrie différentielle et même la théorie des groupes.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Le premier chapitre pose les bases les plus classiques : définition des opérateurs non bornés, de l'adjoint... jusqu'au théorème spectral qui donne une représentation de tout opérateur auto-adjoint comme un opérateur maximal de multiplication dans un espace L^2 .

Le deuxième chapitre est consacrée aux problèmes directs consistant à déterminer le spectre de l'opérateur de Laplace. Considérons l'opérateur $-\Delta u$ et voyons les différents problèmes qui peuvent se poser sur l'existence des fonctions propres du problème tels que nous examinons

- 1- Les problèmes aux bords du Laplacien unidimensionnelle sur l'intervalle le cercle
- 2- Les problèmes aux bords du Laplacien en dimension 2 sur le rectangle le disque et le triangle équilatéral de longueur L En termineras par une approche formelle pour déterminer la plus petite valeur propre de l'opérateur $-\Delta u$.

Dans troisième chapitre on s'intéresse au problème spectral d'un cas particulier de l'opérateur de schrodinger tels que l'opérateur d'oscillateur harmonique unidimensionnel et l'atome d'hydrogène en trois dimensions. Enfin, la dernière partie est une invitation à l'analyse semi-classique

Chapitre 1

Eléments de la théorie spectrale

H : Espace de Hilbert

Ω : Ouvert borné de \mathbb{R}^n

$\mathcal{L}(H)$: L'espace de opérateurs linéaires bornés de H dans H

$D(\Omega)$: L'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n (espace des fonctions test).

$D'(\Omega)$: L'espace des distributions à support dans Ω est le dual topologique de $D(\Omega)$,

$S(\Omega)$: L'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide (espace de Schwartz) c'est-à-dire des fonctions $\phi \in C^\infty(\Omega)$ telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ (multi-indices), $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| = 0$, où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

$S'(\Omega)$: Le dual topologique de $S(\Omega)$, l'espace des distributions tempérées.

$C^k(\overline{\Omega})$: L'ensemble des restrictions des fonctions u de $C^k(\mathbb{R}^n)$ à $\overline{\Omega}$ qui vérifient $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \in \Omega}} |D^\alpha u(x)| = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k$, lorsque Ω n'est pas borné. La topologie de $C^k(\overline{\Omega})$ est celle de la convergence uniforme pour la fonction et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k sur $\overline{\Omega}$.

$B^k(\mathbb{R}^n)$: L'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^n , k fois continûment différentiables et qui tendent vers 0 ainsi que toutes leurs dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k lorsque $|x| \rightarrow +\infty$.

Il convient de bien faire la différence entre les topologies de $C^k(\Omega)$ et $C^k(\overline{\Omega})$.

$L^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_\Omega |u|^2 dx < \infty\}$, muni de la norme

$\|u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$, pour $1 \leq p < \infty$.

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty\}$, muni de la norme

$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, pour $1 \leq p < \infty$.

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \text{ess sup}_{\Omega} |u| < \infty\}$ que l'on munit de la norme

$\|u\|_{\infty} = \text{ess sup}_{\Omega} |u|$.

$C(\Omega)$: Espace des fonctions continues.

$C_0^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω à support compacte.

$H^2(\Omega)$: Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, grâce à l'identité de Parseval, on vérifie aisément que si \hat{u} est la transformée de Fourier de u

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) / \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m d\xi < \infty \right\}$$

et que

$$\langle u, v \rangle_m = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} (1 + |\xi|^2)^m d\xi$$

est un produit hermitien équivalent à celui défini plus haut.

Ou encore si $\Omega =]0, 1[$, on vérifie que

$$H^m(]0, 1[) = \left\{ u \in L^2(]0, 1[) / \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^m |\hat{u}_n|^2 < \infty \right\}$$

où \hat{u}_n est la série de Fourier de u .

$W^{1,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev, à dérivée d'ordre 1 dans $L^p(\Omega)$.

$$= \left\{ u \in L^p(\Omega) ; \text{tels que } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach pour $1 \leq p < \infty$. Il est de plus séparable pour $1 \leq p < \infty$.

et réflexif pour $1 \leq p < \infty$.

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire

$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle_{L^2}$ est un espace de Hilbert séparable.

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

On a : $H^1(\mathbb{R}^n) = H_0^1(\mathbb{R}^n)$.

À présent rappelons quelques propriétés de base de ces espaces. Commençons par le critère de compacité de Rellich-Kondrachov.

Soit Ω un domaine borné de classe C^1 , on a

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, 2^*[\quad \text{si } p < n$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, \infty[\quad \text{si } p = n$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}), \quad \forall q \in [1, \infty[\quad \text{si } p > n$$

avec injections continues et compactes.

Il faut remarquer ici que l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ n'est pas compacte.

On peut mentionner le résultat suivant sur la trace des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$.

X' : Espace dual de X .

Remarque 1.0.1. 1- On dira qu'une suite de fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $D(\Omega)$ si :

- Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ contenant les supports de toutes les fonctions u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha u_n(x) - D^\alpha u(x)| = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout α multi-indice.

2- On dira qu'une suite de fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $S(\Omega)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |x^\alpha (D^\beta u_n(x) - D^\beta u(x))| = 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^n , on dira qu'une suite de fonctions $(u_n)_n$ de $C^k(\overline{\Omega})$ ($k \in \mathbb{N}$) converge lorsqu'elle converge uniformément sur tout compact de Ω ainsi que les suites $(D^\alpha u_n)_n$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq k$.

1.1 Éléments de théorie spectrale

Dans cette section H est un espace de Hilbert séparable sur \mathbb{C} . On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire, qui, par convention, est antilinéaire par rapport à la seconde variable.

1.1.1 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.1. *Un opérateur sur H (ou opérateur non-borné) est la donnée d'un sous espace vectoriel D de H , et d'une application linéaire $A : D \rightarrow H$. L'espace D est le domaine de l'opérateur A . On le note (D, A) et l'on parle de l'opérateur A , de domaine $D(A) = D$. Si $D' \subset D$ et $Au = A'u$ pour tout $u \in D'$, on dit que (D, A) est une extension de (D', A') , ce que l'on note $(D', A') \subset (D, A)$.*

On dit qu'un opérateur (D, A) est borné lorsque la quantité

$$\|A\| = \sup\{\|Au\|, u \in D, \|u\| = 1\}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur D , et lorsque D est dense dans H , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H . On note $L(H)$ l'espace des applications linéaires continues sur H .

Sauf mention explicite du contraire, on considérera toujours des opérateurs à domaine dense.

1.1.2 Opérateurs fermés

Le théorème du graphe fermé affirme qu'un opérateur fermé de domaine H est borné. Rappelons la

Définition 1.1.2. *Soit (D, A) un opérateur, et $G(A) = \{(x, Ax), x \in D\}$ son graphe. On dit que (D, A) est*

1. *fermé lorsque G est un sous-espace fermé de $H \times H$.*
2. *fermable si \overline{G} est un graphe, i.e.*

$$(x, y) \in \overline{G}, (x, y') \in \overline{G} \Rightarrow y = y'.$$

On note alors $(\overline{D}, \overline{A})$ l'opérateur dont le graphe est \overline{G} . C'est une extension de (D, A) . La linéarité de A donne un critère simple pour montrer qu'un opérateur est fermable : il suffit de vérifier que si $(0, y) \in G$, alors $y = 0$.

Exemple 1.1.1. *L'opérateur $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)$ n'est pas fermé : il existe*

$u \in H^2(\mathbb{R}^d) \setminus C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si (u_n) est une suite de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui tend vers u , alors Δu_n tend vers Δu dans L^2 mais $\Delta u_n \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par contre l'opérateur $(H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)$ est fermé. En effet soit $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ et (u_n) une suite de H^2 qui tend vers u dans L^2 . Si v est la limite de Δu_n dans L^2 , on voit immédiatement que $v = \Delta u$ dans $S'(\mathbb{R}^d)$, puis que $u \in H^2$ (utiliser la transformée de Fourier par exemple). L'opérateur $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)$ est fermable, et sa fermeture est $(H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)$: il suffit de vérifier que dans H^2 , $(u_n) \rightarrow 0$ et $-\Delta u_n \rightarrow v$ entraînent $v = 0$.

Lemme 1.1.1. *Un opérateur (D, A) est fermable si et seulement si il admet une extension fermée.*

Preuve 1.1.1. *on a vu que si (D, A) est fermable, $(\overline{D}, \overline{A})$ en est une extension fermée. Supposons qu'il existe (D', A') fermé tel que $(D, A) \subset (D', A')$. Alors le graphe de A est inclus dans le graphe de A' et en prenant l'adhérence, $\overline{G}(A) \subset G(A')$, donc $\overline{G}(A)$ est un graphe.*

On note au passage que toute extension fermée de (D, A) est une extension de $(\overline{D}, \overline{A})$.

1.1.3 Adjoint

Définition 1.1.3. *L'adjoint d'un opérateur (D, A) est l'opérateur (D^*, A^*) dont le domaine D^* est l'ensemble des $u \in H$ tel que $v \rightarrow \langle u, Av \rangle$ s'étend en une forme antilinéaire continue sur H . D'après le théorème de **Riesz**, il existe $w \in H$ tel que $\langle u, Av \rangle = \langle w, v \rangle$ pour tout $v \in H$, et A^* est l'opérateur qui à $u \in D$ associe ce w .*

Remarque 1.1.1. Puisque D est dense dans H , D^* peut aussi être décrit comme l'ensemble des $u \in H$ pour lesquels il existe $C_u > 0$ tel que, pour tout $v \in D$, $|\langle u, Av \rangle| \leq C_u \|v\|$. En effet pour $v \in H$ et $(v_n) \subset D$ telle que $(v_n) \rightarrow v$, la suite $(\langle u, Av_n \rangle)$ est une suite de Cauchy de \mathbb{C} et notant $l_u(v)$ sa limite, on voit facilement que l_u est une forme linéaire continue sur H qui prolonge $v \in D \mapsto \langle u, Av \rangle$. La densité du domaine D_A dans H est nécessaire pour avoir l'équivalence

$$u \in D_{A^*} \iff \exists C_u > 0, \forall v \in D, |\langle u, Av \rangle| \leq C_u \|v\|$$

Exemple 1.1.2. l'adjoint de $(D, A) = (C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)$ est $(H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)$. En effet pour $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle u, \Delta v \rangle_{L_2} = \langle \Delta u, \bar{v} \rangle$, où le dernier crochet désigne l'action de la distribution u sur la fonction \bar{v} . Or $v \mapsto \langle \Delta u, \bar{v} \rangle$ s'étend en une forme continue sur L_2 si et seulement si $u \in L_2$. Donc le domaine de l'adjoint de (D, A) est $D' = \{u \in L_2, u \in L_2\} = H^2$. Enfin pour $u \in H^2$ et $v \in L^2$ on a $\langle \Delta u, \bar{v} \rangle = \langle \Delta u, v \rangle_{L_2}$ donc $A^*u = \Delta u$.

Attention : rien ne dit à priori que l'ensemble D^* défini ci-dessus est dense dans H . On a cependant le

Lemme 1.1.2. Soit (D, A) un opérateur, et G son graphe. Si G^* désigne le graphe de l'adjoint de A , on a

$$G^* = [J(\overline{G})]^\perp, J : (u, v) \mapsto (v, -u).$$

En particulier (D^*, A^*) est un opérateur fermé.

Preuve 1.1.2. Soit $(u, v) \in G^*$, i.e. $u \in D^*$ et $v = A^*u$. Pour $(u_0, v_0) \in J(\overline{G})$, il existe une suite $((u_n, v_n))_n \subset G$ telle que $(v_n, -u_n) = J(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$. On a donc

$$\begin{aligned} \langle (u, v), (u_0, v_0) \rangle_{H \times H} &= \lim \langle u, v_n \rangle - \langle v, u_n \rangle \\ &= \lim \langle u, Au_n \rangle - \langle A^*u, u_n \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $G^* \subset [J(\overline{G})]^\perp$. Réciproquement, pour $(u, v) \in [J(\overline{G})]^\perp$ et $(u_0, v_0) \in G$ on a

$\langle (u, v), (v_0, -u_0) \rangle = 0$, donc $\langle u, Au_0 \rangle = \langle v, Au_0 \rangle$, ce qui montre que $u \in D$ et $Au = v$.

Proposition 1.1.1. *L'espace D^* est dense dans H si et seulement si (D, A) est fermable.*

Dans ce cas l'adjoint de (D^*, A^*) est $(\overline{D}, \overline{A})$, ce que l'on note $A^{**} = \overline{A}$. De plus on a

$$\text{Ker} A^* = (\text{Im} A)^\perp$$

Preuve 1.1.3. On note que $(0, v_0) \in \overline{G} \Leftrightarrow J(0, v_0) \in J(\overline{G}) \Leftrightarrow \forall (u, v) \in G^*$,

$\langle J(0, v_0), (u, v) \rangle = 0$, ce qui donne $(0, v_0) \in \overline{G}$, $\forall u \in D, \langle v_0, u \rangle = 0$.

Donc $(0, v_0) \in \overline{G}$ si et seulement si $v_0 \in (D^*)^\perp$, et D^* est dense si et seulement si G est fermable.

Soit $u \in \text{Ker} A^*$ et $w \in \text{Im} A$. Il existe $v \in D$ tel que $Av = w$, donc

$\langle u, w \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle = 0$, donc $u \in (\text{Im} A)^\perp$. Réciproquement, si

$v \in (\text{Im} A)^\perp$, il existe $(v_n)_n \in D^*$ tel que $v_n \rightarrow v$. Pour $u \in D$ on a

$$0 = \langle Au, v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au, v_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, A^*v_n \rangle.$$

Puisque A^* est fermé on a $\langle u, A^*v \rangle = 0$, puis $A^*v = 0$ par densité de D .

Enfin pour (D, A) fermable, et compte tenu du fait que $J^2 = -1$, $(G^*)^* = \overline{G}$.

Notons enfin que si $(D_1, A_1) \subset (D_2, A_2)$ alors $(D_2^*, A_2^*) \subset (D_1^*, A_1^*)$.

1.1.4 Opérateurs symétriques et autoadjoints

Définition 1.1.4. *On dit qu'un opérateur (D, A) est symétrique lorsque*

$$\forall u, v \in D, \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

Exemple 1.1.3. $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)$ est symétrique, tout comme $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), -\Delta + V(x))$ lorsque $V \in L^\infty$ est une fonction à valeurs réelles. Tout opérateur symétrique est fermable. D'autre part, lorsque (D, A) est symétrique, son adjoint (D^*, A^*) est une extension de sa fermeture $(\overline{D}, \overline{A})$.

Définition 1.1.5. *On dit qu'un opérateur (forcément symétrique et fermé) (D, A) est auto-adjoint lorsque $(D^*, A^*) = (D, A)$.*

Pour les opérateurs symétriques qui ne sont pas fermés, on a la

Définition 1.1.6. *On dit qu'un opérateur symétrique (D, A) est essentiellement auto-adjoint lorsque $(\overline{D}, \overline{A})$ est auto-adjoint.*

L'opérateur $(H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)$ est auto-adjoint. On a vu en e et que $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)$ est fermable, de fermeture $(H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)$. De plus $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)^* = (H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)$, donc $(H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)^* = (C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)^{**} = (H^2(\mathbb{R}^d), \Delta)$. Du coup $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \Delta)$ est essentiellement autoadjoint.

Lemme 1.1.3. *Si l'opérateur symétrique (D, A) est essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe.*

Preuve 1.1.4. *Si (D', A') est une extension auto-adjointe de (D, A) , on a nécessairement $(\overline{D}, \overline{A}) \subset (D', A')$ puisque (D', A') est fermé, puis l'égalité en passant à l'adjoint.*

Proposition 1.1.2. *Soit (D, A) un opérateur symétrique. S'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $Im(A+z)$ et $Im(A+\bar{z})$ sont denses dans H , alors A est essentiellement auto-adjoint.*

Preuve 1.1.5. *Soit $u \in D^*$, et $\tilde{u} = A^*u$. Puisque $Im(A+\bar{z})$ est dense dans H , il existe une suite (v_n) de D telle que $(A+\bar{z})v_n \rightarrow \tilde{u} + \bar{z}u$. Pour $\varphi \in D$ on a alors*

$$\begin{aligned} \langle u, (A+z)\varphi \rangle &= \langle u, A\varphi \rangle + \bar{z} \langle u, \varphi \rangle \\ &= \langle \tilde{u} + \bar{z}u, \varphi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (A+\bar{z})v_n, \varphi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, (A+z) \rangle \end{aligned}$$

puisque A est symétrique et $v_n, \varphi \in D$. Puisque $Im(A+z)$ est dense dans H , on en déduit que $u = \lim(v_n)$, puis que $\tilde{u} = \lim(Av_n)$, donc $(u, \tilde{u}) \in G(\overline{A})$ et $(D^, A^*) \subset (\overline{D}, \overline{A})$.*

Exemple 1.1.4. *l'oscillateur harmonique (C_0^∞, P_{osc}) est essentiellement auto-adjoint. Il s'agit bien sûr d'un opérateur symétrique, qui, tout comme $(C_0^\infty, -\Delta)$, n'est pas fermé. On se contente de le montrer pour (D, P_{osc}) , où,*

$$D = \{x \mapsto x^\alpha e^{-x^2/2}, \alpha \in \mathbb{N}^d\}$$

On a vu que D est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et que $\text{Posc}(D) = D$. La proposition précédente (avec $z = \pm i$) montre que (D, Posc) est essentiellement auto-adjoint. On peut montrer que le domaine de l'extension auto-adjointe de l'oscillateur harmonique est

$$B^2 = \{u \in L^2, \forall \alpha, \beta \in N^d, |\alpha + \beta| \leq 2, \Rightarrow x^\alpha \partial_x^\beta u \in L^2\}$$

1.1.5 Spectre et résolvante

Spectre

Définition 1.1.7. Soit (D, A) un opérateur non-borné à domaine dense. On note $\rho(A)$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

1. $(A - zI) : D \rightarrow H$ est injectif,
2. $H_z = (A - zI)(D)$ est dense dans H ,
3. $(A - zI)^{-1} : H_z \rightarrow D$ est borné.

Définition 1.1.8. Le spectre $\sigma(A)$ de (D, A) est le complémentaire de $\rho(A)$ dans \mathbb{C} . Le spectre ponctionnel $\sigma_p(A)$ de A est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Ker}(A - zI) \neq \{0\}$. Le spectre continu $\sigma_c(A)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Ker}(A - zI) = \{0\}$, D' est dense, et $(A - zI)^{-1} : D' \rightarrow D$ n'est pas borné. Enfin le spectre résiduel $\sigma_r(A)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Ker}(A - zI) = \{0\}$ et D' n'est pas dense.

On a bien sur

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

Lorsque (D, A) est un opérateur fermé, on peut voir que $\rho(A)$ est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $(A - zI) : D \rightarrow H$ soit bijectif, et d'inverse borné. En effet dans ce cas, si $\lambda \in \rho(A)$, $(A - \lambda I)^{-1}$ s'étend automatiquement en un opérateur borné sur H .

Remarque 1.1.2. Par le théorème de l'application ouverte, le fait que

$(A - zI) : H \rightarrow H$ soit bijectif entraîne automatiquement que son inverse est borné. Pour $A \in \mathcal{L}(H)$, l'ensemble résolvant est donc l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $(A - zI) : H \rightarrow H$ est bijectif.

Résolvante

On se limite maintenant aux opérateurs fermés.

Définition 1.1.9. Soit (D, A) un opérateur fermé. L'application

$$R_A : z \in \rho(A) \mapsto (A - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

est appelé la résolvante de A .

Lemme 1.1.4. Soit (D, A) un opérateur fermé, et R_A sa résolvante. On a les propriétés suivantes :

1. $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$, et $\overline{R_A(z)} = R_{A^*}(\bar{z})$,
2. Pour $z, z' \in \rho(A)$, $R_A(z) - R_A(z') = (z - z')R_A(z)R_A(z')$.
3. Pour $z, z' \in \rho(A)$, $R_A(z)R_A(z') = R_A(z')R_A(z)$.

Preuve 1.1.6. Le premier point découle directement de la relation

$$\text{Ker}(A^*) = \text{Im}(A)^\perp, \text{ et du fait que } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* .$$

Le deuxième point s'appelle "première formule de la résolvante". Il suffit de calculer

$$\begin{aligned} & (A - z)^{-1} - (z - z')(A - z)^{-1}(A - z')^{-1} \\ &= (A - z)^{-1}[I - (z - z')(A - z')^{-1}] \\ &= (A - z)^{-1}[I - (z - A + A - z')(A - z')^{-1}] \\ &= (A - z')^{-1}. \end{aligned}$$

Enfin le troisième point s'obtient en échangeant z et z' .

Proposition 1.1.3. L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de \mathbb{C} , et R_A est une application holomorphe, par exemple dans le sens où, pour tout $u, v \in H$, $z \mapsto \langle R_A(z)u, v \rangle$ est holomorphe. Enfin pour $z \in \rho(A)$ on a

$$\frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))} \leq \|R_A(z)\| .$$

Preuve 1.1.7. Soit $z_0 \in \rho(A)$. Pour $z \in \rho(A)$ la première formule de la résolvante itérée donne

$$R_A(z) = \sum_{j=0}^n (z - z_0)^j R_A(z_0)^{j+1} + (z - z_0)^{n+1} R_A(z_0)^{n+1} R_A(z)$$

ce qui conduit à poser $R_\infty(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j R_A(z_0)^{j+1}$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leq \|R_A(z_0)\|^{-1}$. On montre alors facilement que $R_\infty(z)$ est l'inverse de $(A - z)$ pour ces z là, ce qui prouve la proposition.

On déduit de l'estimation ci-dessus le critère suivant :

Proposition 1.1.4. Soit (D, A) un opérateur fermé. $z \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de A s'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de D telle que $\|\psi_n\| = 1$ et $\|(A - z)\psi_n\| \rightarrow 0$. La réciproque est vraie si z est un point du bord du spectre.

Preuve 1.1.8. S'il existe une telle suite, z ne peut appartenir à $\rho(A)$: sinon on aurait $1 = \|\psi_n\| = \|R_A(z)(A - z)\psi_n\| \leq C \|(A - z)\psi_n\| \rightarrow 0$, ce qui est absurde. Réciproquement supposons que $z \in \partial\sigma(A)$. Soit (z_n) une suite de $\rho(A)$ telle que $\text{dist}(z_n, z) = \frac{1}{n}$. Il existe une suite $\tilde{\phi}_n$ telle que $\|\tilde{\phi}_n\| = 1$ et $\|R(z_n)\tilde{\phi}_n\| \geq n$.

On pose $\phi_n = \frac{\tilde{\phi}_n}{\|R(z_n)\tilde{\phi}_n\|}$. Alors $\|\phi_n\| \rightarrow 0$ et si $\psi_n = R(z_n)\phi_n$ on a $\|\psi_n\| = 1$

et $(A - z)\psi_n = (A - z_n)\psi_n + (z_n - z)\psi_n = \phi_n + (z_n - z)\psi_n$, ce qui montre que $\|(A - z)\psi_n\| \rightarrow 0$.

Cas des opérateurs autoadjoints

On remarque d'abord que le spectre résiduel d'un opérateur autoadjoint est toujours vide. En effet si $\text{Ker}(A - zI) = \text{Ker}(A^* - zI) = \{0\}$, alors $(\text{Im}(A - z))^\perp = \{0\}$. On a aussi la

Proposition 1.1.5. Soit (D, A) un opérateur fermé symétrique. A est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

On a donc le critère suivant

Proposition 1.1.6. *Soit (D, A) un opérateur auto-adjoint. $z \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de A si et seulement si il existe une suite (ψ_n) de D telle que $\|\psi_n\| = 1$ et $\|(A - z)\psi_n\| \rightarrow 0$.*

Le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints

Famille spectrale

Définition 1.1.10. *Une famille spectrale est une famille $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projecteurs orthogonaux sur H telle que*

1. *Pour tout $u \in H$, $E_\lambda u \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow -\infty$, et $E_\lambda u \rightarrow u$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.*
2. *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda, \mu)}$.*
3. *Pour tout $u \in H$, $E_\lambda u \rightarrow E_{\lambda_0} u$ quand $\lambda \rightarrow \lambda_0^+$.*

Exemple 1.1.5. *Soit $K \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact et symétrique. On sait qu'il existe une suite de sous-espaces H_k de dimension finie deux à deux orthogonaux, et une suite $(\lambda_k)_k$ bornée de réels telles que $H = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k$ et pour $u \in H_k$, $Ku = \lambda_k u$. On note*

Π_k le projecteur orthogonal sur H_k et E_λ le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{S}_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leq \lambda} H_k$.

La famille E_λ est une famille spectrale : la propriété 1 découle du fait que la suite (λ_k) est bornée, et les propriétés 2 et 3 découlent de la définition de \mathfrak{S}_λ . On note que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k^-} E_\lambda u = E_{\lambda_k} u - \Pi_k u.$$

En particulier, au sens des distributions on a

$\partial_\lambda(E_\lambda u) = \delta_{\lambda_k} \Pi_k u$, et donc

$$u = \sum \Pi_k u = \int d(E_\lambda u), \quad Ku = \sum \lambda_k \Pi_k u = \int \lambda d(E_\lambda u).$$

Dans le cas général, pour $u, v \in H$ on montre que $\lambda \mapsto \langle E_\lambda u, v \rangle$ est une fonction croissante à variation bornée. On peut donc lui associer une mesure de Stieljes, qu'on note $d \langle E_\lambda u, v \rangle$. Disons que pour une fonction continue sur \mathbb{R} , $\int f(\lambda) d \langle E_\lambda u, v \rangle$ s'obtient comme limite de sommes Riemann, et c'est seulement pour intégrer les fonctions boreliennes que la notion de mesure de Stieljes est utile.

Le résultat qui suit porte le nom de Théorème Spectral.

Théorème 1.1.1. *Soit (D, A) un opérateur autoadjoint. Il existe une famille spectrale $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que $D = \{u \in H, \int \lambda^2 d \langle E_\lambda u, v \rangle < +\infty\}$, et pour tout $u, v \in D$, $\langle Au, v \rangle = \int \lambda d \langle E_\lambda u, v \rangle$. où $d \langle E_\lambda u, v \rangle$ est la mesure de Stieltjes associée à la fonction $\lambda \mapsto \langle E_\lambda u, v \rangle$*

Le spectre de (D, A) peut être caractérisé à partir sa famille spectrale, on peut montrer la

Proposition 1.1.7. *Soit (D, A) un opérateur autoadjoint, et (E_λ) sa famille spectrale. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ appartient à $\sigma(A)$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $E([\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]) \neq 0$. On a noté $E([a, b]) = \int_a^b dE_\lambda = E_b - E_a$.*

Voici un corollaire très simple mais très utile du théorème spectral :

Proposition 1.1.8. *Soit (D, A) un opérateur autoadjoint. Pour $u \in D$ et $z \in \mathbb{R}$, on a $\text{dist}(z, \sigma(A)) \|u\| \leq \|(A - z)u\|$. (1.4.2)*

Preuve 1.1.9. : On a $\|(A - z)u\|^2 = \int (\lambda - z)^2 d \langle E_\lambda u, u \rangle$.

Pour $z \in \rho(A)$ et $u = R_A(z)v$ avec $\|v\| = 1$, on obtient $\|R_A(z)\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))}$,

$$\|R_A(z)\| = \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(A))} \quad (1.4.3)$$

On retrouve en particulier le fait que, pour un opérateur auto-adjoint,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad \|R_A(z)\| = \frac{1}{\text{Im}z}$$

Remarque 1.1.3. *On a vu que l'on pouvait intégrer des fonctions boréliennes contre la mesure spectrale $d \langle E_\lambda u, v \rangle$. On note $f(A)$ l'opérateur défini par*

$$\langle f(A)u, v \rangle = \int f(\lambda) d \langle E_\lambda u, v \rangle. (1.4.4)$$

Lorsque $f(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$ pour un $z \in \rho(A)$, on a bien $f(A) = R_A(z)$. Plus généralement la formule (1.4.4) ci-dessus redonne $f(A)$ dans tous les cas où cette expression a un sens autre (par exemple lorsque f est un polynôme, . . .).

Exemple 1.1.6. $(-\Delta)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ dont la famille spectrale $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ associée est $E_\lambda = \mathfrak{F}^{-1} \Pi_{\xi^2 \leq \lambda} \mathfrak{F}$ où \mathfrak{F} est la transformée de Fourier dans \mathbb{R}^n .

A l'aide du théorème spectral on peut définir $f(A)$ en tant qu'opérateur, pour A autoadjoint et f une fonction continue sur \mathbb{R} , en effet pour toute fonction $f \in C^0(\mathbb{R})$ il suffit de prendre :

$$D_{f(A)} = D = \{u \in H, \int |f(\lambda)| d\|E_\lambda u\|^2 < +\infty\}$$

et

$$f(A)u = \int_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| dE_\lambda, \quad \forall u \in D_{f(A)}$$

ainsi $(f(A))^* = \overline{f}(A)$, en particulier si f est à valeur réelles $f(A)$ est un opérateur autoadjoint

1.1.6 Spectre discret, spectre essentiel

Définition 1.1.11. On appelle spectre discret d'un opérateur (D, A) l'ensemble des valeurs propres de A qui sont isolés dans $\sigma(A)$ et de multiplicité finie. On le note $\sigma_{disc}(A)$, et on appelle spectre essentiel de A son complémentaire $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A)$.

Le spectre discret est inclus dans le spectre ponctuel défini plus haut, mais l'inclusion inverse est fautive en général. De même, le spectre continu est inclus dans le spectre essentiel sans que la réciproque ne soit pas toujours vraie.

On voit que $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(A)$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que le projecteur $E(] \lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon[)$ est de rang fini. On a vu par exemple que $(H^2(\mathbb{R}^d), -\Delta)$ est autoadjoint. Sa famille spectrale est $E_\lambda = \mathfrak{F}^{-1} \Pi_{\xi^2 \leq \lambda} \mathfrak{F}$, et son spectre est inclus dans $[0, +\infty[$. On peut montrer aussi que

$$\sigma(-\Delta) = \sigma_{ess}(A) = [0, +\infty[,$$

par exemple en utilisant la notion de suite de **Weyl** :

Définition 1.1.12. Soit (D, A) un opérateur autoadjoint, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite (u_n) de D est une suite de **Weyl** pour A et lorsque $\|u_n\| = 1$, u_n tend vers 0 faiblement et $\|(A - \lambda)u_n\| \rightarrow 0$.

L'intérêt de cette définition réside dans la

Proposition 1.1.9. $\lambda \in \mathbb{R}$ appartient au spectre essentiel de A si et seulement si il existe une suite de Weyl pour A et λ .

On peut vérifier que la suite (u_n) définie ci-dessous est une suite de Weyl pour $(H^2(\mathbb{R}^d), -\Delta)$ et λ lorsque $\lambda > 0$:

$$u_n(x) = \mathfrak{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-n^2|\xi - \xi_0|^2}), \lambda = |\xi_0|^2.$$

Remarque 1.1.4. Si $\sigma(A)$ désigne le spectre de A et $\sigma(f(A))$ celui de $f(A)$ par le "spectral theorem mapping" on a $\sigma(f(A)) = \overline{\sigma(f(A))}$.

1.1.7 Perturbation d'opérateurs autoadjoints

D'un point de vue très général, on dit que l'opérateur $A + B$ est une perturbation de l'opérateur A lorsque $A + B$ a les mêmes propriétés que A . On donne ici deux critères concernant les perturbations d'un opérateur autoadjoint A : le premier permet de dire que $A + B$ est encore autoadjoint, et le second que le spectre essentiel de $A + B$ est le même que celui de A . Il faut remarquer que le spectre discret ne peut pas rester stable par perturbation, aussi petite soit-elle.

Théorème de Kato-Rellich

Définition 1.1.13. Soit (D_A, A) et (D_B, B) deux opérateurs, avec $D_A \subset D_B$. On dit que B est A -borné lorsque pour un $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que, pour tout $u \in D_A$, $\|Bu\| \leq a\|Au\| + b\|u\|$. La borne inférieure de l'ensemble des $a > 0$ pour lesquels cette propriété est vraie est appelée borne relative de B pour A .

Lorsque A est autoadjoint, en appliquant le théorème du graphe fermé, on peut voir que tout opérateur fermé B tel que $D_A \subset D_B$ est A -borné. Ce qui suit repose sur le

Lemme 1.1.5. *Soit (D_A, A) un opérateur autoadjoint, et (D_B, B) un opérateur tel que $D_A \subset D_B$. B est A -borné si et seulement si il existe $z \in \rho(A)$ tel que $BR_A(z)$ est un opérateur borné (c'est alors le cas pour tout $z \in \rho(A)$ grâce à la première formule de la résolvante). La borne relative a de B pour A est donnée par*

$$a = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|BR_A(\pm i)\|$$

Preuve 1.1.10. *Supposons que $BR_A(\pm i)$ soit borné pour $u_n > 0$. Par la première formule de la résolvante c'est vrai pour tout $\lambda > 0$, et on note $\|BR_A(\pm i)\| = a_\lambda$. On a immédiatement*

$$\|Bu\| \leq a_\lambda \|Au\| + \lambda a_\lambda \|u\|,$$

ce qui montre que B est A -borné et que sa borne relative a vérifie pour tout $\lambda > 0$ l'inégalité $a \leq \|BR_A(\pm i\lambda)\|$, donc $a = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \inf \|BR_A(\pm i\lambda)\|$.

Réciproquement, supposons que B soit A -borné, de borne relative a . Pour $\varepsilon > 0$, il existe $b > 0$ tel que $\|BR_A(\pm i\lambda)u\| \leq (a + \varepsilon) \|AR_A(\pm i\lambda)u\| + b \|R_A(\pm i\lambda)u\|$

Or par le théorème spectral, on a $\|R_A(\pm i\lambda)u\| \leq \frac{1}{\lambda} \|u\|$ et

$$\|AR_A(\pm i\lambda)u\|^2 = \int \frac{\mu^2}{\mu^2 + \lambda} d \langle E_\mu u, u \rangle \leq \|u\|$$

Donc $\|BR_A(\pm i\lambda)u\|$ est un opérateur borné de norme inférieure à $(a + \varepsilon) + b/\lambda$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on voit que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup \|R_A(\pm i\lambda)u\| \leq a$

Voilà enfin le Théorème de Kato-Rellich.

Proposition 1.1.10. *Soit (D_A, A) un opérateur autoadjoint (resp. essentiellement autoadjoint), et (D_B, B) un opérateur symétrique A -borné de borne relative inférieure à 1. Alors $(D_A, A + B)$ est autoadjoint (resp. essentiellement autoadjoint).*

Preuve 1.1.11. *Supposons (D_A, A) autoadjoint. D'après le lemme précédent, il existe $\lambda > 0$ tel que $\|BR_A(\pm i\lambda)\| < 1$, et donc $I + BR_A(\pm i\lambda)$ est inversible.*

Or $(A + B \pm i\lambda) = (I + BR_A(\pm i\lambda))(A \pm i\lambda)$, donc $(A + B \pm i\lambda)$ est d'image dense.

Théorème de Weyl

Définition 1.1.14. Soit (D_A, A) un opérateur fermé et (D_B, B) un opérateur tel que $D_A \subset D_B$. On dit que B est A -compact lorsqu'il existe $z \in \rho(A)$ tel que $BR_A(z)$ est compact (c'est alors le cas pour tout $z \in \rho(A)$ grâce à la première formule de la résolvante). Si B est A -compact, B est A -borné de borne relative 0. Cela découle du Lemme et de l'identité $BR_A(i\lambda) = (BR_A(i))((A+i)RA(i\lambda))$: le premier opérateur est compact, et le second tend vers 0 fortement quand $\lambda \rightarrow +\infty$ (par exemple avec le théorème spectral). Le théorème de Kato-Rellich peut donc s'appliquer dans ce cas.

Proposition 1.1.11. *Théorème de Weyl.*

Si (D_A, A) est un opérateur autoadjoint, et (D_B, B) un opérateur symétrique A -compact, alors $(D_A, A+B)$ est autoadjoint et

$$\sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A).$$

Remarque 1.1.5. Le théorème de Weyl sert aussi sous la forme suivante : s'il existe $z \in \rho(A+B) \cap \rho(A)$ tel que $R_{A+B}(z) - R_A(z)$ est compact, alors

$$\sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A)$$

Cet énoncé entraîne le précédent compte tenu de la seconde identité de la résolvante :

$$R_{A+B}(z) = -R_A(z)BR_{A+B}(z) = -R_{A+B}(z)BR_A(z).$$

Preuve 1.1.12. On prouve le théorème sous la forme énoncée dans la remarque. Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(A+B)$, $\lambda \neq z$, et (u_n) une suite de Weyl pour $A+B$ et . On va montrer que $(v_n = R_A(z)u_n)$ (après normalisation) est une suite de Weyl pour A et λ . D'abord (v_n) tend faiblement vers 0, mais pas fortement (donc est normalisable) puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_{A+B}(z)u_n\| = |\lambda - z|^{-1} \neq 0.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} (A - \lambda)v_n &= (A - \lambda)R_A(z)u_n \\ &= u_n + (z - \lambda)R_A(z)u_n \\ &= u_n + (z - \lambda)R_{A+B}(z)u_n - Ku_n \\ &= R_{A+B}(z)(A + B - \lambda)u_n - Ku_n \end{aligned}$$

où $K = R_{A+B}(z) - R_A(z)$ est compact par hypothèse, ce qui montre que $\|(A - \lambda)v_n\| \rightarrow 0$. La réciproque s'obtient en échangeant les rôles de $A + B$ et A . Ce théorème permet en particulier de montrer que si $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tend vers 0 à l'infini, alors le spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger $P = -h^2\Delta + V$ est le même que celui de $-h^2\Delta$, i.e. $\sigma_{\text{ess}}(P) = [0, +\infty[$. On a en effet le

Lemme 1.1.6. *Si $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tend vers 0 à l'infini, alors $V - \Delta$ est compact.*

Preuve 1.1.13. : Il s'agit de montrer que $V(-\Delta + 1)^{-1}$ est compact. Puisque $(-\Delta + 1)^{-1}$ est continu de $H^2(\mathbb{R}^d)$ dans L^2 , il suffit de montrer que $V : H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur compact.

Soit (V_k) la suite d'opérateurs définis par $V_k : u \mapsto \left(\frac{x}{k}\right)V(x)u(x)$, $\phi \in C_0^\infty(B(0, 1))$.

Rappelons que pour $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, l'application $H^s(\mathbb{R}^d) \ni u \mapsto \phi u \in H^t(\mathbb{R}^d)$ est compacte pour $t > s$. Chaque V_k est donc un opérateur compact de H^2 dans L^2 puisque composé de la multiplication par $\phi_k = \phi(\frac{\cdot}{k}) \in S$, qui est compacte de H^2 dans L^2 , et de la multiplication par $V \in L^\infty$ qui est continue de L^2 dans L^2 . Enfin on voit que $\|V_k - V\|_{\mathcal{L}(H^2, L^2)} \leq \sup_{|x|>k} |V(x)|$, ce qui montre que (V_k) tend fortement vers

V quand V tend vers 0 à l'infini.

Résumons : lorsque $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $V(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$, $(C_0^\infty, P = -h^2\Delta + V)$ est un opérateur essentiellement autoadjoint. Son spectre essentiel est $[0, +\infty[$, et P peut avoir des valeurs propres négatives, isolées et de multiplicité finie. Le seul point d'accumulation possible de l'ensemble des valeurs propres négative est 0.

Chapitre 2

Laplacian Libre

2.1 Introduction

Le Laplacien $-\Delta$ n'a aucune fonction propre dans L^2 , mais il est, pour toute $\lambda \in \mathbb{R}^+$ une fonction propre de $S'(\mathbb{R}^m)$ (en fait dans L^∞) et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ une fonction propre dans $D'(\mathbb{R}^m)$. Alors, quelle est la bonne façon d'étendre la théorie des matrices hermitiennes sur \mathbb{C}^k ?

D'autre part, il est facile de construire des fonctions propres approchées sous la forme

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp ix\xi \chi\left(\frac{x - n^2}{n}\right), \text{ où } \chi \text{ est une fonction à support compact de norme}$$

L^2 -égal à 1.

Pour examiner le rôle des valeurs et vecteurs propres dans la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires du 1^{ère} et de 2^{ème} ordre ; à interpréter valeurs propres comme les taux de décroissance et les fréquences ; et d'observer l'analogies formelles avec EDP voir W. A. Strauss[33], S. J. Farlow[21] .

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Fixons $L > 0$.

- Condition limite de Dirichlet : $u = 0$ sur $\partial\Omega$,
- Condition limite de Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$ sur $\partial\Omega$ (où $\sigma \in \mathbb{R}$ est la constante de Robin),
- Condition limite de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$,

2.2 Problèmes aux bords du Laplacien unidimensionnelle

Considérons l'opérateur $-u'' = -\frac{d^2 u}{dx^2}$ et voyons les différents problèmes qui peuvent se poser sur l'existence de fonctions propres du problème à $L^2(]0, L[)$.

2.2.1 Position du problème

Examinons d'abord le couple $(u, \lambda) \in \mathcal{H}^1(]0, L[) \times \mathbb{C}$, ($u \neq 0$) tel que

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Il est immédiat de constater qu'aucun de ces paires existe. Examinons maintenant la paire $(u, \lambda) \in \mathcal{H}^2(]0, L[) \times \mathbb{C}$, ($u \neq 0$) tel que $-u'' = \lambda u$ nous pouvons trouver pour tout λ deux solutions linéairement indépendantes.

Dans les lignes qui suivent, on se contente de donner quelques idées générales sans se baser sur les détails techniques !

2.2.2 Sur l'intervalle $]0, L[$

Problème de Dirichlet

On souhaite résoudre le problème suivant : Trouver $(u, \lambda) \in \mathcal{H}^2(]0, L[) \times \mathbb{C}$, ($u \neq 0$) tel que

$$-u'' = \lambda u$$

et

$$\mathcal{H}^{2,D}(]0, L[) = \{u \in \mathcal{H}^2(]0, L[), u(0) = u(L) = 0\}$$

admet une solution non nulle.

Trois cas se présente :

- Cas $\lambda < 0$: Les solutions sont de la forme

$u_n(x) = A \cosh(n\pi x/L) + B \sinh(n\pi x/L)$. On remarque que $u(0) = 0$ entraîne $A = 0$

et que $u(L) = 0$ implique $B \sinh(n\pi) = 0$. La seule possibilité est $u = 0$.

- Cas $\lambda = 0$: u est alors affine et donc $u = 0$.
- Cas $\lambda > 0$: Les solutions sont de la forme $u_n(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, on trouve encore $A = 0$ et $B \sin(n\pi) = 0$. Comme on ne veut pas $B = 0$, cela implique qu'on a donc une famille de λ qui convient : $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. On peut clairement se restreindre à $n \geq 1$. Pour chaque λ_n , l'ensemble des solutions est de dimension 1 et est associé à la fonction $u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. On note que $u_1 > 0$ sur $]0, L[$.

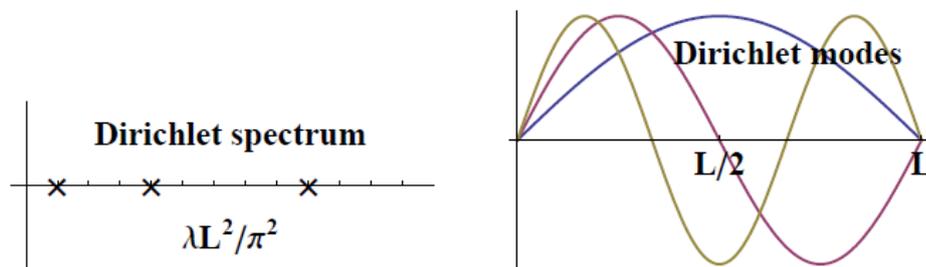


FIGURE 2.1 –

sepectre et mode de Dirichlet

Problème de Neumann

On souhaite résoudre le problème suivant : Trouver $(u, \lambda) \in \mathcal{H}^{2,N}([0, L]) \times \mathbb{C}$ ($u \neq 0$) tel que

$$-u'' = \lambda u$$

et

$$\mathcal{H}^{2,N}([0, L]) = \{u \in H^2([0, L]), u'(0) = u'(L) = 0\}$$

admet une solution non nulle. De la même manière on peut montrer qu'on a $\lambda_n = \pi^2 n^2$ et est associé à la fonction $u_n = A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que $\lambda = 0$ est la plus petite valeur propre de multiplicité un et que l'espace propre correspondant est de dimension un et aucune fonction propre de ce sous-espace et nulle sur $]0, L[$ et aucune fonction propre associée ne s'annule sur $]0, L[$.

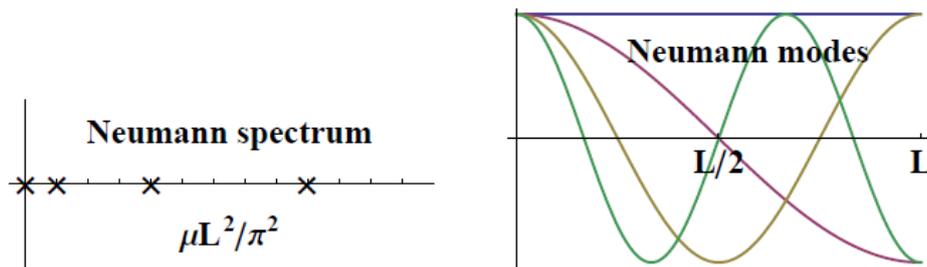


FIGURE 2.2 –
spectre et mode de Neumann

2.2.3 Problème de Robin

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ -u'(0) + \sigma u(0) = u'(1) + \sigma u(1) = 0 \end{cases}$$

Les fonctions propres $u_n(x) = \sqrt{\rho_n} \cos(\sqrt{\rho_n}x) + \sigma \sin(\sqrt{\rho_n}x)$.

Les valeurs propres $\rho_n = n^{ime}$ racine positive de $\tan(\sqrt{\rho}) = \frac{2\sigma\sqrt{\rho}}{\rho - \sigma^2}$ pour $n \geq 1$.

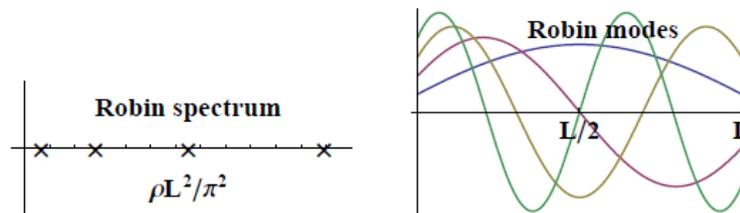


FIGURE 2.3 –

spectre et mode de Robin

2.2.4 Le cercle $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

Problème périodique

On souhaite résoudre le problème suivant : Trouver $(u, \lambda) \in \mathcal{H}^{2,per}(\cdot) - \pi, \pi[\cdot) \times \mathbb{C}$ ($u \neq 0$) tel que

$$-u'' = \lambda u$$

sur

$$\mathcal{H}^{2,per}(\cdot) - \pi, \pi[\cdot) = \{u \in \mathcal{H}^2(\cdot) - \pi, \pi[\cdot), u(-\pi) = u(\pi) \text{ et } u'(-\pi) = u'(\pi)\}$$

admet une solution non nulle. C'est facile de montrer que les paires sont décrits par deux familles :

- $\lambda = n^2$, associé à la fonction propre $u_n = \mu \cos nx$, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $\lambda = n^2$, associé à la fonction propre $u_n = \mu \sin nx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On constate que $\lambda = 0$ est la plus petite valeur propre d'ordre de multiplicité un. Cela signifie que l'espace propre correspondant est de dimension un (d'autres sous-espaces propres sont de dimension 2). De plus aucune fonction propre de ce sous-espace s'annule sur $\cdot) - \pi, \pi[\cdot)$. Ceci est évident puisque $u_0 = \mu \neq 0$. On observe également qu'on peut trouver une base orthonormale dans $L^2(\cdot) - \pi, \pi[\cdot)$ des fonctions propres en normalisant la famille $(\cos nx, (n \in \mathbb{N}), \sin nx (n \in \mathbb{N}^*))$ ou de la famille $\exp inx (n \in \mathbb{Z})$.

2.3 Caractéristiques spectrales en dimension 1

- Mise à l'échelle : valeur propre doit être équilibré $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$, et ainsi $\lambda \sim (\text{longueur d'échelle})^{-2}$ plus précisément, $\lambda_n(]0, tL]) = \lambda_n \frac{([0, L])}{t^2}$.
- *asymptotique* : les valeurs propres croissent à un taux régulier,, $\lambda_n \sim (\text{const.})n^2$
- Le spectre de Robin est compris entre le spectre de Neumann et de Dirichlet :

$$\text{Neumann} \xleftarrow{\sigma \rightarrow 0} \text{Robin} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \text{Dirichlet}$$

comme on le voit formellement en fait tendre σ vers 0 ou ∞ dans les conditions de limites de Robin $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$.

2.4 Conclusion

Tous ces exemples entre dans le cadre de la théorie de Sturm-Liouville. Nous avons mis l'accent sur une propriété qui a toujours été vérifiée dans chaque cas : l'espace propre correspondant à la plus petite valeur propre est unidimensionnelle et on peut trouver un usage strictement positif (dans $]0, L[$ ou dans $] - \infty, +\infty[$ dans le cas de l'oscillateur harmonique) correspondant aux fonctions propres.

2.5 Problemes aux bords du Laplacien en dimension 2

Considérons l'opérateur $-\Delta u$ et voyons les différents problèmes qui peuvent se poser sur l'existence des fonctions propres du problème à :

2.5.1 Sur le rectangle $\Omega =]0, L[\times]0, M[$

Notons que chaque rectangle peut être réduit à un rectangle avec des côtés parallèlement aux axes de coordonnées parce que le laplacien, et donc son spectre, est invariant

par rotation et par translation.

En utilisant la méthode de séparation de variables, donc notons par x_1, x_2 les coordonnées rectangulaires alors.

Problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u = 0 \end{cases}$$

De la même manière on peut montrer qu'on a :

Les fonctions propres $u_{nk}(x) = \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x_2}{M}\right)$ pour $n, k \geq 1$

Les valeurs propres $\lambda_{nk} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{M}\right)^2$ pour $n, k \geq 1$,

Si $L = M = \pi$ alors les valeurs propres sont donnés par $\lambda = 2, 5, 5, 8, 10, 10, \dots$

Problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Alors :

Les fonctions propres $u_{nk}(x) = \cos\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x_2}{M}\right)$ pour $n, k \geq 0$.

Les valeurs propres $\mu_{nk} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{M}\right)^2$ pour $n, k \geq 0$, Si $L = M = \pi$

Alors les valeurs propres sont donnés par : $\lambda = 0, 1, 1, 2, 4, 4, \dots$

2.5.2 Sur le disque $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$.

Problème de Dirichlet :

En utilisant la méthode de séparation de variables pour les coordonnées polaires r, θ .

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u = 0 \end{cases}$$

On obtient :

Les fonctions propres

$$J_0\left(\frac{r j_{0,m}}{R}\right) \text{ de } m \geq 1,$$

$$J_n\left(\frac{r j_{n,m}}{R}\right) \cos(n\theta) \text{ et } J_n\left(\frac{r j_{n,m}}{R}\right) \sin(n\theta) \text{ pour } n \geq 1, m \geq 1.$$

Remarque 2.5.1. Remarquons les termes avec $n = 0$ sont purement radiale, alors que quand $n \geq 1$ les termes ont une dépendance angulaire.

Les valeurs propres $\lambda_{n,m} = \left(\frac{j_{n,m}}{R}\right)^2$ pour $n \geq 0, m \geq 1$, où $J_n =$ La fonction de Bessel d'ordre n , et $j_{n,m} = m^{\text{ème}}$ racine positive de $J_n(r) = 0$.

La valeur propre $\lambda_{n,m}$ a multiplicité 2 lorsque $n \geq 1$, associé à la fois aux modes *cosinus* et *sinus*. A partir des graphes des fonctions de Bessel J_0, J_1, J_2 on peut lire sur les 4 premières racines :

$$j_{0,1} \simeq 2.40, j_{1,1} \simeq 3.83, j_{2,1} \simeq 5.13, j_{1,2} \simeq 5.52.$$

Ces racines génèrent les 6 premières valeurs propres (rappelant les valeurs propres sont doubles lorsque $n \geq 1$).

Problème de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

Utilisant les racines de $J'_n(r) = 0$. Voir Bandle[03].

2.5.3 Triangle équilatéral de longueur L .

La méthode de séparation de variables est insuffisante, donc on peut tenir compte de manière répétée à un réseau hexagonal dont les fonctions propres sont trigonométriques.

Problème de Dirichlet

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_{nk} = \frac{16\pi^2}{9L^2}(n^2 + nk + k^2) \text{ pour } n, k \geq 1.$$

Problème de Neumann

Les valeurs propres sont :

$$\mu_{nk} = \frac{16\pi^2}{9L^2}(n^2 + nk + k^2) \text{ pour } n, k \geq 0.$$

voir Mathews & Walker, McCartin[09].

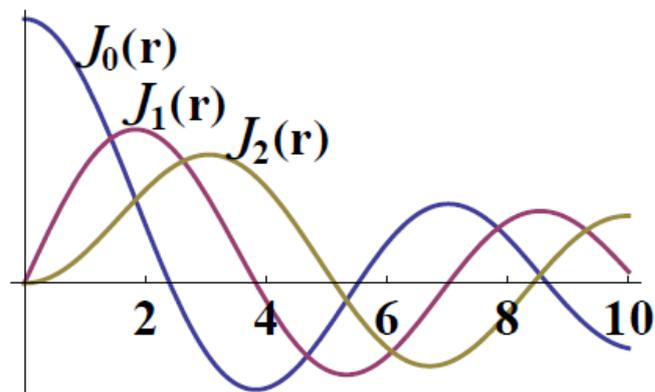


FIGURE 2.4 –
graphes des fonctions de Bessel

2.6 Caractéristiques spectrales dans dimension 2

· Mise en *échelle* : Valeur propre doivent être équilibrer Δ , et ainsi $\lambda \sim (\text{longueur de échelle})^{-2}$. Exactement, $\lambda_n(t \Omega) = \frac{\lambda_n(\Omega)}{t^2}$.

· Le spectres de Dirichlet et de Neumann se comportent très différemment lorsque le domaine dégénère (se dégrade). Considérons le rectangle, par exemple. Fixons l'un des côté de longueur L , et l'autre côté de longueur M qui tend vers 0. Alors la première valeur propre positif de Dirichlet "explose" : En prenant $n = k = 1$ alors la valeur propre $(\frac{\pi}{L})^2 + (\frac{\pi}{M})^2 \rightarrow \infty$.

La première valeur propre positif de *Neumann* est constante (indépendante de M) : En prenant $n = 1$, $k = 0$, on obtien la valeur propre $(\frac{\pi}{L})^2$.

· *Asymptotique* : Les valeurs propres du rectangle croîtssent a un taux régulière.

Proposition 2.6.1. (*La loi de Weyl pour les rectangles*). Le rectangle $]0, L[\times]0, M[$ on a

$$\lambda_n \sim \mu_n \sim \frac{4\pi n}{\text{Aire}} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

où $\text{Aire} = LM$ est la surface du rectangle et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ et $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ sont les valeurs propres de Dirichlet et de Neumann, respectivement, dans l'ordre croissant.

Preuve 2.6.1. Nous donnons la preuve pour les valeurs propres de Dirichlet. (Le cas de Neumann est similaire.) Définissons pour $\alpha > 0$ la fonction de comptage de valeurs propres

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= \#\{\text{les valeurs propres} \leq \alpha\} \\ &= \#\{n, k \geq 1 : \frac{n^2}{\alpha L^2 / \pi^2} + \frac{k^2}{\alpha M^2 / \pi^2} \leq 1\} \\ &= \#\{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (n, k) \in E\} \end{aligned}$$

où E est l'ellipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leq 1$ et $a = \sqrt{\alpha} \frac{L}{\pi}$, $b = \sqrt{\alpha} \frac{M}{\pi}$.

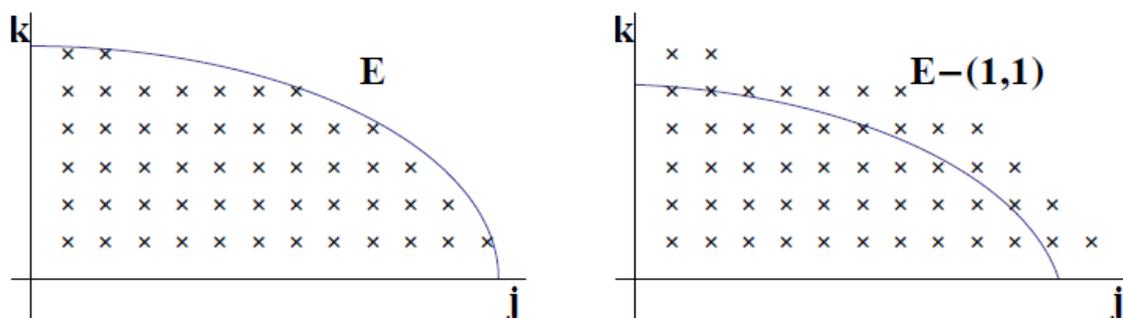


FIGURE 2.5 –
Le graphe de Ellipse

Nous associons chaque point du contour $(n, k) \in E$ avec le carré

$$S(n, k) = [n - 1, n] \times [k - 1, k]$$

dont le coin droit supérieur se trouve à (n, k) . Ces carrés se trouvent dans tous les E , et ainsi en comparant les surfaces on trouve :

$$N(\alpha) \leq (\text{Aire } E \text{ du premier quadrant}) = \frac{1}{4}\pi ab = \frac{\text{Aire}}{4\pi}\alpha.$$

D'autre part, un peu de réflexion montre que l'union des carrés couvre une copie de E déplacé vers le bas et à gauche par une unité :

$$U_{(n,k) \in E} S(n, k) \supset (E - (1, 1)) \cap (\text{premier quadrant}).$$

La comparaison montre que les surfaces

$$\begin{aligned} N(\alpha) &\geq \frac{1}{4}\pi ab - a - b \\ &= \frac{LM}{4\pi}\alpha - \frac{L+M}{\pi}\sqrt{\alpha} \\ &= \frac{\text{Aire}}{4\pi}\alpha - \frac{\text{périmètre}}{2\pi}\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Combinant nos estimations supérieures et inférieures montre que

$$N(\alpha) \sim \frac{\text{Aire}}{4\pi}\alpha \quad \text{quand } \alpha \rightarrow \infty$$

Pour compléter la preuve nous inversons simplement cette dernière asymptotique, en utilisant le lemme suivant.

Lemme 2.6.1. (*Inversion d'asymptotique*) fixons $c > 0$. Alors

$$N(\alpha) \sim \frac{\alpha}{c} \Rightarrow \lambda_n \sim cn.$$

Preuve 2.6.2. Remplaçant formellement $\alpha = \lambda_n$ et $N(\alpha) = n$ nous conduit à partir de la première à la seconde asymptotique. La difficulté avec ce qui en fait la substitution rigoureuse est que si λ_n est une valeur propre multiple, alors $N(\lambda_n)$ peut dépasser n .

Pour contourner le problème, nous affirmons comme suit. Soit $\epsilon > 0$ nous savons de $N(\alpha) \sim \alpha/c$ que

$$(1 - \epsilon)\frac{\alpha}{c} < N(\alpha) < (1 + \epsilon)\frac{\alpha}{c}$$

pour tous les α grands. En substituant $\alpha = \lambda_n$ dans l'inégalité droite implique que

$$n < (1 + \epsilon)\frac{\lambda_n}{c}$$

pour tous les n grands. En substituant $\alpha = \lambda_n - \delta$ dans l'inégalité gauche implique que

$$(1 - \epsilon)\frac{\lambda_n - \delta}{c} < n$$

pour n grands et $0 < \delta < 1$, et donc (quant $\delta \rightarrow 0$) que

$$(1 - \epsilon)\frac{\lambda_n}{c} \leq n.$$

Nous concluons que

$$\frac{1}{1 + \epsilon} < \frac{\lambda_n}{cn} \leq \frac{1}{1 - \epsilon}$$

pour tous les grands n , de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{cn} = 1$$

cqfd.

Lemme 2.6.2. (*Loi asymptotique de Weyl*)

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi n}{\text{Aire}}$$

pour tous les domaines bornés en deux dimensions, indépendamment de la forme ou des conditions aux limites.

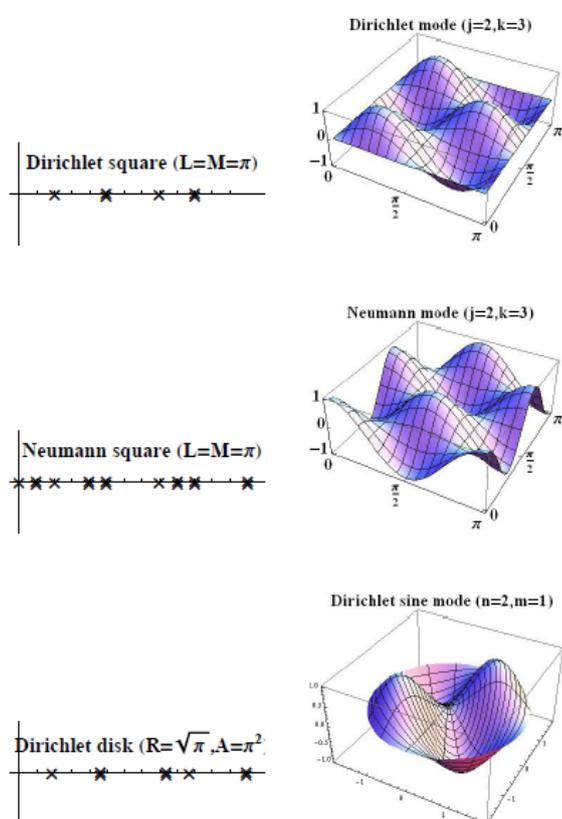


FIGURE 2.6 –

La racine et le mode de Dirichlet et Neumann pour ($j = 2, k=3$)
le disk et le mode de Dirichlet ($n=2, m=1$) resp

Il semblerait que la plus petite valeur propre soit toujours simple et associée à une fonction qui ne s'annule qu'au bord.

2.6.1 Simplicité de la plus petite valeur propre : approche formelle

On se place sur un ouvert borné Ω (qui est sympathique). On examine déjà l'équation :

$$-\Delta\psi = \lambda\psi, \text{ avec } \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (2.1)$$

On admet le lemme suivant, classique dans la théorie des EDP elliptiques :

Lemme 2.6.3. *Les solutions ψ de (2.1) sont C^∞ dans Ω .*

On multiplie (2.1) par ψ et on trouve :

$$\int_{\Omega} -\Delta\psi \psi \, dx = \lambda \int_{\Omega} \psi^2 \, dx.$$

La formule de Green-Riemann implique que :

$$\int_{\Omega} -\Delta\psi \psi \, dx = \int_{\Omega} -\nabla\psi \cdot \nabla\psi \, dx + \int_{\partial\Omega} -\nabla\psi \cdot \nu\psi \, d\sigma(x).$$

La nullité de ψ sur le bord entraîne que :

$$\frac{\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx} = \lambda$$

On en déduit que $\lambda \geq 0$ et que si $\lambda = 0$, alors ψ est constante et est donc nulle par condition au bord. Les valeurs propres sont donc strictement positives.

Notons, pour $\psi \neq 0$ et $\psi \in C^\infty$:

$$q(\psi) = \frac{\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx}$$

On appelle cette quantité un quotient de Rayleigh. On vient de voir que si ψ est une fonction propre associée à λ , alors $q(\psi) = \lambda$.

Si S est une matrice symétrique définie positive, on peut la diagonaliser dans une

base orthonormée, de sorte que $Se_n = \lambda_n e_n$. Dans cette base sympathique, la forme quadratique associé à S prend une forme très agréable :

$$q(u) = \sum \lambda_n u_n^2$$

On remarque alors que λ_1 est l'infimum du quotient de Rayleigh !

Retour au problème du Laplacien Forts de la remarque précédente, posons :

$$\mu = \inf_{\psi \in C_0^\infty(\Omega), \psi \neq 0} q(\psi)$$

On est amené à examiner l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$. L'espace ainsi fabriqué s'appelle $H_0^1(\Omega)$. Clairement, on a :

$$\mu = \inf_{\psi \in H_0^1(\Omega), \psi \neq 0} q(\psi)$$

L'avantage de "fermer l'espace" de nos fonctions tests est le suivant :

Lemme 2.6.4. μ est atteint dans $H_0^1(\Omega)$.

Le principe général de la preuve est de se ramener au théorème d'Ascoli

Lemme 2.6.5. Soit ψ un minimum. Il vérifie : $-\Delta\psi = \mu\psi$. En particulier, c'est une fonction régulière à l'intérieur de Ω .

Preuve 2.6.3. Fixons $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ une fonction quelconque et examinons l'application "partielle" :

$$f(\varepsilon) = q(\psi + \varepsilon\varphi).$$

Il s'agit, par rapport à ε , d'une fraction rationnelle dont on peut aisément calculer la dérivée. En écrivant que ψ est minimal ($f'(0) = 0$), on en déduit l'équation dite d'Euler-Lagrange :

$$\int_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla\phi \, dx - \mu \int_{\partial\Omega} \psi \phi \, dx = 0.$$

Par intégration par parties formelle (théorie des distributions), nous en déduisons :

$$\int_{\Omega} (-\Delta\psi - \mu\psi)\varphi dx = 0$$

Cela est valable pour tout φ , il n'est pas dur d'admettre qu'on en déduit :

$$-\Delta\psi - \mu\psi = 0.$$

On déduit de ce qu'on a dit jusqu'à présent que μ est une valeur propre et $\mu = \lambda_1$.

Cette caractérisation est un cas particulier du principe du min-max. Nous aurons encore besoin d'un lemme :

Lemme 2.6.6. Si $\sigma \in H_0^1(\Omega)$, alors $|\sigma| \in H_0^1(\Omega)$ et, presque partout : $|\nabla|\sigma|| = |\nabla\sigma|$.

Pleins d'enthousiasme, on remarque que :

$$q(|\psi|) = q(\psi).$$

On en déduit que $|\psi|$ est une fonction propre associée à λ_1 . Nous voulons un peu plus. Le principe du maximum va nous sauver :

Lemme 2.6.7. Supposons que $-\Delta u \geq 0$ et $u \geq 0$ dans Ω . Alors, on a : $u > 0$ dans Ω ou u est nulle.

Preuve 2.6.4. Introduisons la moyenne de u sur la sphère $S(x_0, t)$:

$$m_{x_0}(t) = \frac{1}{|S(x_0, t)|} \int_{S(x_0, t)} u(x) d\sigma(x)$$

On peut écrire par homogénéité :

$$m_{x_0}(t) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(0, 1)} u(x_0 + ty) d\sigma(y).$$

Dérivons cela :

$$m'_{x_0}(t) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(0, 1)} \nabla u(x_0 + ty) \cdot y d\sigma(y).$$

En intégrant $-\Delta u \geq 0$ sur la boule $B(x_0, t)$, on en déduit que :

$$m'_{x_0}(t) = \frac{1}{|S(x_0, t)|} \int_{S(x_0, t)} \nabla u(x) \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|} d\sigma(x) \leq 0$$

m_{x_0} est donc décroissante et elle vaut $u(x_0)$ en 0. On a prouvé l'inégalité de la moyenne :

$$u(x_0) \geq \frac{1}{|S(x_0, t)|} \int_{S(x_0, t)} u(x) d\sigma(x)$$

Si u s'annule quelque part, elle est donc identiquement nulle près de ce point

Conclusion λ_1 est simple. Sinon, soient ψ_1 et φ_1 deux fonctions non nulles associées. Soit $x_0 \in \Omega$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\psi_1(x_0) > 0$ et que $\varphi_1(x_0) > 0$.

Soit alors :

$$\psi = \varphi_1(x_0)\psi_1 - \psi_1(x_0)\varphi_1.$$

ψ est une fonction propre associée à λ_1 et elle s'annule en x_0 ! Elle est donc identiquement nulle et les fonctions sont liées !

Chapitre 3

Opérateur de Schrödinger

Considérons une variété riemannienne (M, g) complète connexe de dimension $n \geq 1$. On lui associe l'espace de Hilbert $L^2(M) = L^2(M, d\mathcal{V}_g)$, \mathcal{V}_g désignant le volume riemannien associé à la métrique g .

L'opérateur de Schrödinger H associé à la variété (M, g) de potentiel V , V étant une fonction de M dans \mathbb{R} , est défini comme l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compacte $\mathcal{C}_c^\infty(M, \mathbb{R})$ par :

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V \quad (3.1)$$

Δ_g étant le laplacien de (M, g) , et h un paramètre positif.

Si $M = \mathbb{R}^n$ le laplacien canonique est $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

On s'intéresse au problème spectral : Trouver les couples non-triviaux (λ, u) de scalaires complexes et de fonctions tels que :

$$-\Delta_g u + Vu = \lambda u$$

(avec $u \in L^2(M)$ dans le cas non compact).

Dans le cas des variétés à bord on a besoin en supplément d'imposer des conditions au bord sur les fonctions u , comme par exemple les conditions de Dirichlet : on impose $u = 0$ sur le bord de M , ou celles de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur le bord de M , n étant

la normale extérieure au bord de M . Dans le cas des variétés compactes sans bord, comme par exemple la sphère, on parle de problème fermé.

Il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien (ou de l'opérateur de Schrödinger) sur une variété riemannienne complète (M, g) :

1. Les problèmes directs : étant donnée une variété riemannienne (M, g) , que dire du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ ou de celui de l'opérateur $-\Delta_g + V$?
2. Les problèmes inverses : étant donné le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$, que dire géométriquement de la variété (M, g) ? Dans ce memoire en s'enterese seulement au repondre au premier question a cause de defficulte et de la deusieme question

Alors, examinons quelques propriétés générales du spectre.

3.1 Quelques propriétés de l'opérateur $H = -\Delta_g + V$

Intéressons nous aux hypothèses assurant d'une part le caractère auto-adjoint des opérateurs laplacien et Schrödinger, et d'autre part l'obtention d'un spectre discret.

3.1.1 Caractère auto-adjoint de l'opérateur de Schrödinger

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint. Rappelons que un opérateur linéaire H est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture \overline{H} est auto-adjointe. Quel est l'intérêt du caractère auto-adjoint ? Il y a au moins deux bonnes raisons d'en parler :

1. Si H est auto-adjoint, on a déjà une première information spectrale importante : le spectre de l'opérateur H est une partie de \mathbb{R} .
2. Le caractère auto-adjoint assure en mécanique quantique l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger : en effet, à partir de l'hamiltonien auto-adjoint H , on peut, via le calcul fonctionnel voir P.Levy-bruhl [18], et M.Reed, B.Simon [15], construire de manière unique le groupe unitaire fortement continu¹

1. Ce qui signifie que : $U(0) = I$, $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$, $U^*(t) = U^{-1}(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)\varphi = \varphi$.

$\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ où :

$$U(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}.$$

Ainsi, pour tout état initial ψ_0 , l'évolution quantique de ψ_0 par l'hamiltonien H au cours du temps est donnée par

$$\psi(t) = U(t)\psi_0 = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0 \in L^2.$$

Notons bien qu'en dérivant la précédente expression on obtient :

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}H\psi(t).$$

C'est l'équation de Schrödinger qui régit toute la mécanique quantique !

Quels sont les principaux résultats connus sur le caractère auto-adjoint ?

- Dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, T. Carleman [24] en 1934 a montré que si la fonction V est localement bornée et globalement minorée, alors l'opérateur de Schrödinger H est essentiellement auto-adjoint.
- En 1972, T. Kato [25] a montré que l'on pouvait remplacer dans l'énoncé de Carleman l'hypothèse $V \in L_{loc}^\infty(M)$ par $V \in L_{loc}^2(M)$.
- En 1994, I. Olenik [06], [07], [08] donne un énoncé très général concernant des variétés riemanniennes complètes connexes quelconques avec des hypothèses plus complexes sur la fonction V . Un corollaire sympathique de cet énoncé est le suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$, et V une fonction de $L_{loc}^\infty(M)$ tels que $\forall x \in M, V(x) \geq C$, où C est une constante réelle, alors l'opérateur*

$$H = -\Delta_g + V$$

est essentiellement auto-adjoint.

3.1.2 Le spectre de l'opérateur est-il discret ?

Hormis le fait que le spectre est réel, que savons nous de plus ? En 1934 K. Friedrichs [10] a montré que dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, si la fonction V est confinante, ie $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger H est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Dans le contexte d'une variété riemannienne compacte avec un laplacien pur ($V \equiv 0$), nous savons aussi voir M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet [12] que le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ est constitué d'une suite de valeurs propres positives, de multiplicités finies, et s'accumulant en $+\infty$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Qu'en est-il des variétés non compactes ? Commençons par donner une définition :

Définition 3.1.1. Soit (M, g) une variété lisse et V une fonction de M dans \mathbb{R} , on dira que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists K \subset\subset M, \forall x \in M \setminus K, |f(x)| \geq A.$$

Un des théorèmes concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger est celui de Kondratev et Shubin [26], [32] qui donnent un énoncé assez technique sur les variétés à géométrie bornée ; de cet énoncé, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. V une fonction de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. Alors le spectre $\sigma(H)$ de l'opérateur H est discret, i.e. il existe un système orthonormé y_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, des fonctions propres dans $L^2(\mathbb{R})$, à valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$ i.e. $\lambda_k \rightarrow \infty$ quand $k \rightarrow \infty$:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Le théorème de Courant de 1953 voir R.Courant and D.Hilbert [19], assure en particulier que la première valeur propre λ_1 de l'opérateur H est simple :

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Corollaire 3.1.1. $\sigma(H)$ est discret si et seulement si on a la condition suivante :

$$\int_r^{r+1} V(x) dx \rightarrow +\infty \text{ quand } r \rightarrow +\infty \quad (3.2)$$

Remarque 3.1.1. *Hormis le fait que le spectre est réel, que savons nous de plus ? En 1934 K. Friedrichs a montré que dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, si la fonction V est confinante, i.e. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger H est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Dans le contexte d'une variété riemannienne compacte avec un laplacien libre ($V \equiv 0$), nous savons aussi que le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ est constitué d'une suite de valeurs propres positives, de multiplicités finies, et s'accumulant en $+\infty$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots .$$

Un des théorèmes concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger est celui de Kondratiev et Shubin qui donnent un énoncé assez technique sur les variétés à géométrie bornée.

3.2 Calcul explicite de spectres de l'opérateur de Schrodinger

Dans cette partie, nous allons résoudre l'équation de Schrödinger valeur propre dans quelques cas particuliers (par exemple, pour quelques potentiels particuliers) qui non seulement illustrent quelques-uns des arguments généraux présentés ci-dessus, mais

en fait, constituent une base pour notre intuition sur le comportement quantique. nous étudions les exemples classiques de l'oscillateur harmonique en dimension 1 et l'atome d'hydrogène en trois dimensions.

Il n'y a bien sur pas de méthodes générales pour calculer un spectre d'opérateur linéaire ; même dans le cas de Schrödinger sur une variété raisonnable, le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples ou l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même quelques calculs exacts

3.2.1 Oscillateur harmonique unidimensionnelle

L'oscillateur harmonique est un concept important en physique car il permet notamment de décrire le comportement autour d'une position d'équilibre de nombreux systèmes physiques dans des conditions d'approximation à définir.

L'oscillateur harmonique, ou opérateur d'Hermite comme on le nomme en analyse harmonique, est l'un des rares exemples d'opérateur de Schrödinger sur une variété non compacte pour lequel on arrive à calculer explicitement son spectre. L'oscillateur harmonique joue un rôle très important dans l'étude des systèmes intégrables en classification symplectique : il sert en effet de modèle de référence des équilibres stables de type elliptique ; pour plus de détails, on peut consulter le livre de Vu Ngoc [22]. Ici on prend $M = \mathbb{R}$ et :

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}$$

Les propriétés spectrales de l'opérateur H sont très remarquables : on arrive à calculer son spectre et les vecteurs propres associés de manière explicite. Ces calculs, d'un point de vu très formel.

Remarque 3.2.1. *L'oscillateur classique unidimensionnelle est une particule avec un degré de liberté qui se déplace dans le domaine de potentiel de la forme*

$$v(x) = \frac{\omega^2}{2} x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

L'énergie classique est de la forme

$$M_{cl} = \frac{m}{2}(\dot{x})^2 + \frac{m \omega^2}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m \omega^2}{2}x^2,$$

où m est la masse de la particule, et $p = m \dot{x}$ est sa dynamique.

L'espace analogue d'états quantique est $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, les opérateurs de coordonner et dynamique ont été définis ci-dessus, et l'Hamiltonien quantique H est un opérateur auto-adjoint généré par l'expression

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m \omega^2}{2}x^2.$$

Pour des raisons de simplicité, nous fixons $\hbar = m = \omega = 1$.

Soit

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right).$$

Soit $\tilde{\mathcal{H}}$ un sous-espace linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ (pas fermé!) qui se compose de toutes les fonctions de la forme

$$P(x)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

où $P(x)$ est un polynôme. $\tilde{\mathcal{H}}$ is dense in $L^2(\mathbb{R})$. Maintenant, laissez-nous vous présenter les dits opérateurs d'annihilation et la naissance.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$$

En fait, on peut montrer que A^* est l'opérateur adjoint de A , définie sur $\tilde{\mathcal{H}}$. Cependant, nous ne l'utilisons ce fait. Donc, on peut considérer A^* comme un symbole unique. Ces opérateurs, ainsi que \hat{p} , \hat{x} et H , sont bien défini sur l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$ et l'application $\tilde{\mathcal{H}}$ dans lui même. Par conséquence, sur les produits de l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$ et commutateurs de tous ces opérateurs sont également bien définie. Vérifier les identités suivantes (sur $\tilde{\mathcal{H}}$) :

$$\begin{aligned} [A, A^*] &= I, \\ H = A^*A = \frac{1}{2}I &= AA^* - \frac{1}{2}I, \\ [H, A] - A, [H, A^*] &= A^* \end{aligned}$$

Soit $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}$ est un vecteur propre de H de la valeur propre λ et $A^*\psi \neq 0$. Alors $A^*\psi$ est un vecteur propre de H avec les valeurs propres $\lambda + 1$.

Maintenant soit

$$\psi_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Alors

$$H\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_0,$$

et $\psi_0 \in \tilde{\mathcal{H}}$ est un vecteur propre de H de la valeur propre $\frac{1}{2}$. Définissons le vecteurs $\psi_k \in \tilde{\mathcal{H}}$ par

$$\psi_{k+1} = \sqrt{2}A^*\psi_k,$$

ou

$$\psi_k = (\sqrt{2}A^*)^k\psi_0.$$

alors, $H\psi_k = (k + \frac{1}{2})\psi_k$.

Donc, ψ_k est un vecteur propre de H de la valeur propre $(k + \frac{1}{2})$. Puisque $\psi_k \in \tilde{\mathcal{H}}$, nous avons

$$\psi_k(x) = H_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

où $H_k(x)$ sont des polynômes d'*Hermite*. Les fonctions ψ_k sont dites fonctions d'*Hermité*.

Le calcul de $(H\psi_k, \psi_l)$ montre que $\{\psi_k\}$ est un systèmes orthogonales (non normalisée) dans $L^2(\mathbb{R})$ et que le système $\{\psi_k\}$ peut être obtenu au moyen d'orthogonalisation du système

$$x^n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

qui vérifié les identités suivantes :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

$$\frac{d^n H_n}{dx^n} = 2^n \cdot n!,$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^k e^{-x^2}$ état fondamental : $u_0(x) = e^{-x^2/2} = \text{Gaussien}$. (Vérifier : $-u_0'' + x^2 u_0 = u_0$)

Donc $\{\psi_k\}$ est une base orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus

$$\|\psi_k\|^2 = 2^k \cdot k! \sqrt{\pi}.$$

En conséquence, les fonctions

$$\tilde{\psi}_k(x) = \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

former une base orthonormée. En outre,

$$\tilde{\psi}_k = \frac{1}{\sqrt{k!}} (A^*)^k \tilde{\psi}_0.$$

Puisque, par rapport à la base $\{\psi_k\}$, l'opérateur H a une forme diagonale, on peut considérer cet opérateur est auto-adjoint, sur le domaine

$$D(H) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \sum_{k=0}^{\infty} \left| (\psi, \tilde{\psi}_k) \left(k + \frac{1}{2}\right) \right|^2 < \infty \right\}.$$

Par conséquent, le spectre de H est constitué de valeurs propres simples (niveaux d'énergie) $k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, \dots$, avec les vecteurs propres correspondants (états stationnaires de l'oscillateur) $\tilde{\psi}_k$. Dans le cas général, les niveaux d'énergie sont

$$h_k = h \omega \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

à états stationnaires correspondant

$$P_h(x) = \sqrt[4]{\frac{m \omega}{\pi h}} \sqrt{\frac{1}{2^k k!}} H_k(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}},$$

où

$$\xi = x \sqrt{\frac{m \omega}{h}}$$

Le dernier changement de variable réduit le problème général au cas $h = m = \omega = 1$. En outre, dans le cas général, nous avons également des opérateurs correspondants de l'anéantissement et de la naissance, A and A^* . Formule 3.3 signifie que l'oscillateur peut gagner ou perdre d'énergie par des parties (quanta) multiple de $h \omega$. Le niveau minimal d'énergie possible est égale à

$$h_0 = \frac{h \omega}{2} \neq 0,$$

c'est-à-dire l'oscillateur quantique ne peut pas être au repos absolu. Opérateurs A et A^* , agissant sur les fonctions d'onde des états stationnaires diminuent et augmentent, respectivement, le nombre de quanta, i.e A^* génère nouvelle quanta tandis que A les anéantit. Ceci explique les noms "naissance" et "l'anéantissement". Enfin, soit soulignent que l'image que nous voyons dans le cas de l'oscillateur quantique n'est pas typique. En général, le spectre d'un hamiltonien quantique peut contenir des points de spectre continu, non seulement valeurs propres.

3.2.2 Atome d'hydrogène en trois dimensions $-\Delta u - \frac{2}{|x|}u = Eu$

Ici $V(x) = \frac{-2}{|x|}$ est une attraction électrostatique (de Coulomb) le potentiel créé par les protons dans le noyau d'hydrogène. (Notons que le gradient de ce potentiel donne la bonne loi carrée inverse $|x|^{-2}$ approprié pour la force électrostatique.)

Posons la condition aux limites : $u(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$ alors les valeurs propres $\lambda = E = -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \dots$ avec multiplicités 1, 4, 9, ... autrement dit, la valeur propre

$$\lambda = E = \frac{-1}{n^2} \text{ a multiplicité } n^2.$$

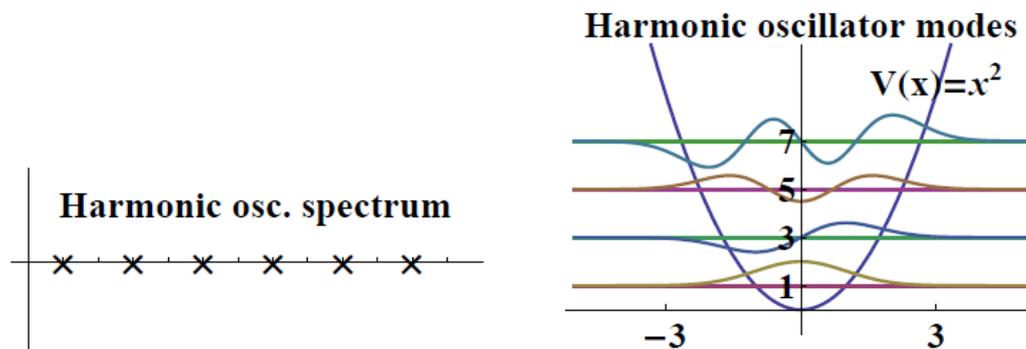


FIGURE 3.1 –
spectre et mode de oscillatour Harmonice.

Les fonctions propres sont données par $e^{-\frac{r}{2}} L_n^l(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ pour $0 \leq |m| \leq n - 1$, ou Y_l^m est une harmonique sphérique et L_n^l égale r^l fois un polynôme Laguerre. (Rappelons les harmoniques sphériques sont des fonctions propres du Laplacien sphérique en dimensions 3, avec $-\Delta_{sphere} Y_l^m = l(l + 1) Y_l^m$. En deux dimensions les harmoniques sphériques ont la forme $Y = \cos(k\theta)$ et $Y = \sin(k\theta)$, qui satisfont $-\frac{d^2}{d\theta^2} Y = k^2 Y$.)

Exemples. Les trois premières fonctions propres purement radiales ($l = m = 0$, $n = 1, 2, 3$) sont $e^{-r}, e^{-\frac{r}{2}}(1 - \frac{r}{2}), e^{-\frac{r}{3}}(1 - \frac{2}{3}r + \frac{2}{27}r^2)$.

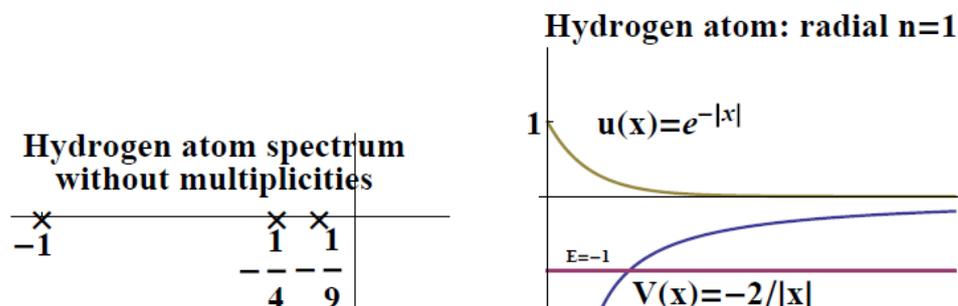


FIGURE 3.2 –
spectre d'atom de hydrogen

Le coin dans le graphe de la fonction propre pour $r = 0$ est dû à la singularité du potentiel de Coulomb.

Remarque 3.2.2. *Les fonctions propres de spectre continu avec l'énergie positive $E > 0$ existent, mais ils oscillent quand $|x| \rightarrow \infty$, et donc ne remplissent pas nos conditions aux limites. Ils représentent « un électrons libres » qui ne sont pas liés au noyau.*

3.2.3 Etude qualitative spectrale

Dans nombre de cas on ne sait pas calculer un spectre, on essaye alors de le décrire de manière qualitative. Il y a disons deux sous thèmes :

- Le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur.
- Le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : analyse semi-classique.

Exemples de résultats qualitatifs en bas du spectre

Donnons quelques exemples de résultats concernant le bas du spectre. Commençons par des résultats de comparaison des premières valeurs propres.

Théorème 3.2.1. (Théorème de Faber-Krahn, 1953) : Soit M une partie bornée de \mathbb{R}^n . En notant par $\lambda_1(M)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet, on a :

$$\lambda_1(M) \geq \lambda_1(B_M)$$

B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à $\text{Vol}(M)$. Et on a égalité si et seulement si M est isométrique à B_M .

Dans le même style, on a aussi la version avec conditions de Neumann où l'inégalité est dans l'autre sens :

Théorème 3.2.2. (Théorème de Szegö-Weinberger, 1954) : Soit M une partie bornée de \mathbb{R}^n . En notant par $\mu_1(M)$ la première valeur propre de de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Neumann, on a :

$$\mu_1(M) \leq \mu_1(B_M)$$

B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à $\text{Vol}(M)$. Et on a égalité si et seulement si M est isométrique à B_M .

Un autre type de résultat classique concerne les constantes de Cheeger : Soit (M, g) une variété riemannienne connexe et compacte de dimension $n \geq 1$. Pour toute partie bornée régulière D de M , on considère la quantité

$$h(D, g) = \frac{\text{Vol}(\partial D, g)}{\text{Vol}(D, g)}$$

où $\text{Vol}(\partial D, g)$ est le volume $n - 1$ dimensionnel.

On définit ensuite la constante de Cheeger par

$$h(M, g) = \inf_{D \in X} h(D, g)$$

X étant l'ensemble de tous les domaines de M de volumes majorés par $\frac{\text{Vol}(M, g)}{2}$. Alors un des résultats de Cheeger est que la première valeur propre non nulle du Laplacien est minorée par $\frac{h(M, g)^2}{4}$ voir M. berger, P.gauduchon and E. Mazet[12].

Pour finir, donnons un autre résultat intéressant qui concerne la multiplicité des valeurs propres en fonction de la topologie. Pour cela plaçons nous un instant dans le cas des surfaces : si (M, g) est une surface complète connexe, et

$$H = -\Delta_g + V$$

avec $V \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tels que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. En notant (cf. 3.1.2) par

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

le spectre de l'opérateur H et par m_k la multiplicité de la k -ème valeur propre λ_k , nous avons le résultat dû à S. Y. Cheng [23] et amélioré par G. Besson [05], Y. Colin De Verdière [27], N. Nadirashvili [16] et B. Sévenec [02] :

Théorème 3.2.3. *Sous les hypothèses précédentes nous avons :*

Si $X = S^2$ ou \mathbb{R}^2 , alors $\forall k \geq 3$, $m_k \leq 2k - 3$.

Si $X = P^2(\mathbb{R})$ ou K_2 (la bouteille de Klein), alors $\forall k \geq 1$, $m_k \leq 2k + 1$.

Si $X = T^2$, alors $\forall k \geq 1$, $m_k \leq 2k + 2$.

En notant par $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré, si $\chi(M) < 0$, alors $\forall k \geq 1$, $m_k \leq 2k - 2\chi(M)$.

Etude qualitative du "haut" du spectre

L'exemple de base est la formule asymptotique de Weyl de 1911, [12]. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire Ω de \mathbb{R}^2 avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres $\mathcal{N}(\lambda)$ inférieure à un réel positif λ , vérifié l'équivalence, pour $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{4\pi} \lambda$$

où $\text{Vol}(\Omega)$ est l'aire du rectangle Ω . En 1911, H.Weyl démontra cette conjecture.

Théorème 3.2.4. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension n , si on note par $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ les valeurs propres de l'opérateur*

$-\Delta_g$ sur M , on a l'équivalent pour $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\text{Card}(\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}) \sim \frac{B_n \text{Vol}(M, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

où $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

Pour l'étude du "haut" du spectre on a besoin de notion de l'analyse semi-classique :

3.3 Une introduction à l'analyse semi-classique

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$:

$$H = -\frac{h^2}{2} \Delta_g + V$$

où h est un paramètre réel strictement positif.

De manière extrêmement simple et naïve l'idée de l'analyse semi-classique est de comprendre le spectre de l'opérateur H lorsque le paramètre $h \rightarrow 0$. On va dans cette partie donner une idée générale de ce qu'est l'analyse semi-classique, puis on terminera sur un exemple concret de calcul de spectre. Pour le lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'analyse semi-classique, on conseille la littérature suivante : Y. Colin de Verdière [31], Dimassi-Sjöstrand [13], L. Evans et M. Zworski [11], A. Martinez [01], D. Robert [04], S. Vu Ngoc [22].

3.3.1 l'analyse semi-classique

Dans la limite des grandes valeurs propres, l'asymptotique du spectre de l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{h^2}{2} \Delta_g + V$$

ou plus généralement d'un opérateur pseudo-différentiel, est remarquablement liée à une géométrie sous-jacente. Celle-ci vit sur le fibré cotangent T^*M , vu comme une

variété symplectique² : c'est la géométrie de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le même phénomène qui permet de voir la mécanique classique (structure de variété symplectique) comme limite de la mécanique quantique (structure d'algèbre d'opérateurs).

Voyons pourquoi s'intéresser à l'asymptotique du spectre de l'opérateur H , revient dans une certaine mesure à faire tendre le paramètre h vers 0 (limite semi-classique). Par exemple, pour $E > 0$ fixé, l'équation :

$$-\frac{h^2}{2}\Delta_g\varphi = E\varphi$$

admet φ_k , le k -ième vecteur propre du laplacien Δ_g , comme solution si

$$-\frac{h^2}{2}\lambda_k = E.$$

Ainsi si $h \rightarrow 0^+$, alors $\lambda_k \rightarrow +\infty$. C'est pourquoi la limite semi-classique peut se voir comme l'asymptotique des grandes valeurs propres du laplacien.

Revenons un instant à la limite $h \rightarrow 0$, quel est son sens physique ? En "principe" tout système physique est de par nature quantique. D'après les fameuses inégalités d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas mesurer précisément à la fois vitesse et position d'un électron, sauf si $h = 0$. En fait plus h est petit, plus on peut faire des mesures simultanées précises. Ainsi plus $h \rightarrow 0$, plus on se rapproche du déterminisme de la mécanique classique sur le fibré cotangent T^*M .

En pratique quand on fait de l'analyse semi-classique, on travaille à la fois avec des objets classiques (variétés symplectiques, algèbre des fonctions C^∞ , crochet de Poisson, équations de Hamilton,...) et des objets quantiques (espace de Hilbert, algèbre d'opérateurs, commutateur, équation de Schrödinger,...). Pour l'étude d'un opérateur de Schrödinger on est amené à considérer deux hamiltoniens vivant sur deux structures mathématiques distinctes :

2. Rappelons que le fibré cotangent d'une variété différentiable est naturellement muni d'une structure symplectique. En effet, pour toute variété M lisse de dimension n , on peut munir de façon intrinsèque son fibré cotangent T^*M d'une structure de variété symplectique (T^*M, ω) de dimension $2n$ définie par la différentielle extérieure $\omega = d\alpha$ de la 1-forme de Liouville α .

Hamiltonien classique

On notera par p la fonction définie sur le fibré cotangent de M par :

$$p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in \mathcal{C}^\infty(T^*M, \mathbb{R}).$$

Hamiltonien quantique

On associe à la fonction p définie ci dessus, son quantifié de Weyl \widehat{P} , opérateur linéaire à domaine agissant sur une sous partie de $L^2(M)$:

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V.$$

Pour finir, donnons la définition utile :

Définition 3.3.1. Soient u_h et v_h deux fonctions dépendant d'un paramètre $h > 0$, alors si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists C_k > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |u_h(x) - v_h(x)| \leq C_k h^k$$

on dira alors que les deux fonctions u_h et v_h sont égales à $O(h^\infty)$ près, et on notera $u_h = v_h + O(h^\infty)$.

Définition 3.3.2. Le spectre semi-classique d'un opérateur linéaire auto-adjoint \widehat{H} est l'ensemble $\Sigma_h(\widehat{H})$ des $\mu_h \in \mathbb{R}$ tels que

$$\exists u_h \in L^2(\mathbb{R}), u_h \neq 0, \left(\widehat{H} - \mu_h I_d \right) (u_h) = O(h^\infty)$$

I_d étant l'opérateur identité.

Moralement le spectre semi-classique (ou microlocal) correspond aux valeurs propres approchées avec une précision d'ordre $O(h^\infty)$. Le lien précis entre spectre exact et semi-classique est donné par la

Proposition 3.3.1. *Sur un compact K de \mathbb{R} , le spectre semi-classique $\Sigma_h(\widehat{H})$ et le spectre exact $\sigma(\widehat{H})$ de l'opérateur linéaire auto-adjoint \widehat{H} sont liés par :*

$$\Sigma_h(\widehat{H}) \cap K = \sigma(\widehat{H}) \cap K + O(h^\infty)$$

au sens où si $\lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$, alors $\exists \mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$ tel que $\lambda_h = \mu_h + O(h^\infty)$; et si $\mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$, alors $\exists \lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$ tel que $\mu_h = \lambda_h + O(h^\infty)$.

Un exemple de calcul de spectre semi-classique : le double puits

Dans une série de trois articles voir Y. Colin de Verdière and B. Parisse [28], [29] et [30] Y. Colin de Verdière et B. Parisse se sont intéressés au spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

sur la variété $M = \mathbb{R}$, avec un potentiel V type double puits ayant un unique maximum local non dégénéré. Dans [29] et [30] les deux auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour trouver le spectre semi-classique de l'opérateur \widehat{P} dans une boule de taille h centrée autour de l'origine. Dans O. Lablée [17], on donne, à partir de la formule de Colin de Verdière-Parisse, la forme de ce spectre.

Le contexte

Soit $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, et V possédant exactement un maximum local non dégénéré, que l'on supposera atteint en 0, ainsi : $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$, $V''(0) < 0$. Un exemple typique est la fonction : $V(x) = x^4 - x^2$.

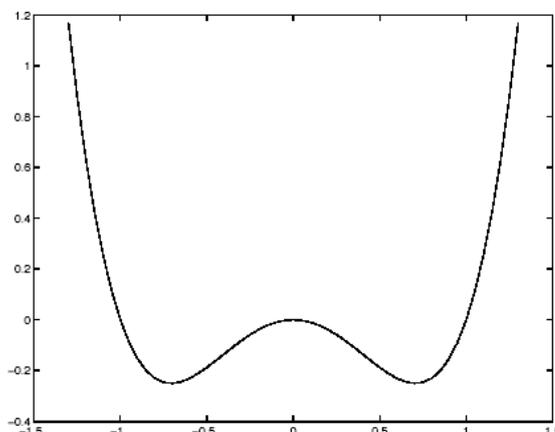


FIGURE 3.3 –

La courbe repr´esentative de la fonction potentiel $V(x) = x^4 - x^2$. On distingue les deux puits (les minimums) du potentiel, le droit et le gauche.

On notera par p l'hamiltonien classique d´efinie sur le fibr´e cotangent de \mathbb{R} par :

$$p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

On associe à cette fonction, l'hamiltonien quantique \widehat{P} , vu comme op´erateur lin´eaire non-born´e sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

Pour ´etudier le spectre de l'op´erateur \widehat{P} dans un voisinage de taille h autour de l'origine, fixons nous un $C > 0$, et pour $\lambda \in [-C, C]$ consid´erons l'op´erateur :

$$\widehat{H}_\lambda = \widehat{P} - h\lambda I_d.$$

Ainsi par d´efinition du spectre semi-classique, nous avons que

$$\exists u_h \in L^2(\mathbb{R}), u_h \neq 0, \widehat{H}_\lambda(u_h) = O(h^\infty) \iff \lambda h \in \Sigma_h(\widehat{P}).$$

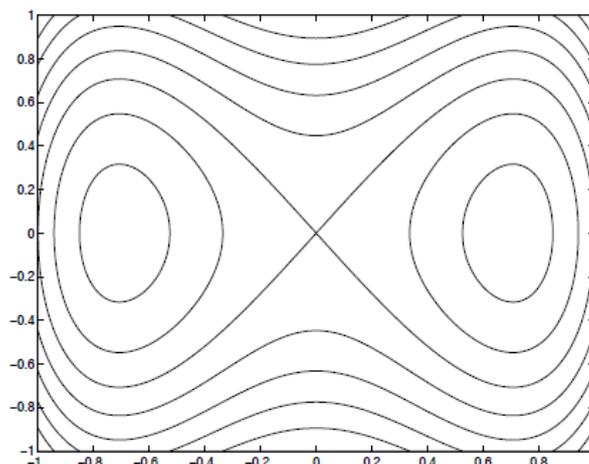


FIGURE 3.4 –

Courbes de $p^{-1}(c)$ dans le fibré cotangent $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$. Avec des $c > 0$: une seule composante connexe, $c = 0$: le huit hyperbolique, $c < 0$: deux composantes connexes elliptiques.

La formule de Colin de Verdière-Parisse

Y. Colin de Verdière et B. Parisse, à l'aide de techniques fines d'analyse microlocale, et en utilisant des formes normales, ont démontré la formule suivante [29], [30] :

Théorème 3.3.1. *L'équation $\widehat{H}_\lambda(u_h) = O(h^\infty)$ admet une solution $u_h \in L^2(\mathbb{R})$ non triviale, avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}\{0\}$, si et seulement si λ vérifie l'équation suivante :*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi\varepsilon}}} \cos\left(\frac{\theta_g - \theta_d}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\theta_g + \theta_d}{2} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right)\right)$$

où $\varepsilon = \varepsilon(h, \lambda)$, $\theta_{g/d} = \theta_{g/d}(h, \lambda)$ sont des fonctions \mathcal{C}^∞ par rapport à λ et admettant

des développements asymptotiques en puissance de h . Plus précisément :

$$\varepsilon(h, \lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{-V''(0)}} + \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j(\lambda) h^j$$

$$\theta_{g/d}(h, \lambda) = \frac{1}{h} A_{g/d}(0) - \lambda \sigma_{g/d}(0) + \sum_{j \geq 1} \theta_{g/d,j}(\lambda) h^j$$

où $A_{g/d}(0)$ désigne l'intégrale d'action du puit gauche/droit, et $\sigma_{g/d}(0)$ l'invariant symplectique associé voir S. Vungoc [22].

Le spectre est un doublet en quinconce

En utilisant la formule de Colin de Verdière-Parisse, on peut en déduire des informations sur la forme du spectre semi-classique de l'opérateur

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2} \Delta + V$$

autour de l'origine. A cause de la présence des deux puits de potentiel on s'attend à avoir deux spectres qui s'entremêlent ; dans O. Lablée[17] on montre que dans une bande $[-ch, ch]$, où c est une constante indépendante du paramètre h , le spectre semi-classique de l'opérateur \widehat{P} est constitué de deux familles de réels en quinconce, et l'interstice spectral est d'ordre $O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right)$:

Théorème 3.3.2. *Le spectre semi-classique de l'opérateur \widehat{P} sur le compact de la forme $[-ch, ch]$, ou $c > 0$, s'écrit comme la réunion disjointe de deux familles de réels :*

$$(h \alpha_k(h))_k \coprod (\beta_l(h))_l$$

avec $\alpha_k(h) = A_h(k)$ et $\beta_l(h) = B_h(l)$, A_h et B_h étant des fonctions \mathcal{C}^∞ . Les deux suites $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ sont strictement décroissantes et en quinconce

$$h\beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

En outre l'interstice spectral est de l'ordre de $O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right)$:

$$|h\alpha_k(h) - h\alpha_{k-1}(h)| = O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right) \quad \text{et} \quad |h\beta_l(h) - h\beta_{l-1}(h)| = O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right).$$

Bibliographie

- [1] A. MARTINEZ, An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis, Springer, 2001.
- [2] B. SEVENNEC, Majoration topologique de la multiplicité du spectre des surfaces, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie de Grenoble, 12 : 29-35, 1993-1994.
- [3] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, Boston, Mass., 1979.
- [4] D. ROBERT, Autour de l'approximation semi-classique, volume 68 of Progress in Mathematics, Birkhauser, 1987.
- [5] G. BESSON, Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes, Ann. Inst. Fourier. 30 : 109-128, 1980.
- [6] I. M. OLEINIK, On the essential self-adjointness of the Schrodinger operators on a complete Riemannian manifold , Math. Notes. 54 :934-939, 1993.
- [7] I. M. OLEINIK, On the connection of the classical and quantum mechanical completeness of a potential at infinity on complete Riemannian manifolds , Math. Notes. 55 : 380-386, 1994.
- [8] I. M. OLEINIK, On the essential self-adjointness of the Schrodinger-type operators on a complete Riemannian manifold , PhD thesis, Northeastern University, 1997.
- [09] J. Mathews and R. L. Walker. Mathematical Methods of Physics. Second edition. W. A. Benjamin, New York, 1970.
- [10] K. FRIEDRICHS, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Math. Ann.

109 :465-487,685-713, 1934.

[11] L. EVANS M. ZWORSKI, Lectures on semiclassical analysis. <http://math.berkeley.edu/azworski/semiclassical.pdf>.

[12] M. BERGER, P.GAUDUCHONE. MAZET, Le spectre d'une variété Riemannienne, Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.

[13] M. DIMASSI J. SJOSTRAND, Spectral asymptotics in the semi-classical limit, London Math Society Lectures Note Series 268, 1999.

[14] M. E. TAYLOR, Noncommutative harmonic analysis, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1986.

[15] M. REED and B. SIMON, Methods of modern mathematical physics, Academic Press,1975.

[16] N. NADIRASHVILI, Multiple eigenvalues of the Laplace operator, Math. USSR Sbornik,61 : 225-238, 1988.

[17] O. LABELLEE, Sur le calcul du spectre semi-classique de l'opérateur de Schrodinger autour d'une singularité hyperbolique. <http://www-fourier.ujfgrenoble.fr/lablee/hyperbolique.pdf>.

[18] P. LEVY-BRUHL, Introduction à la théorie spectrale, Dunod, 2003.

[19] R. COURANT and D. HILBERT, Methods of mathematical physics, Intersciences Publishers, New York, 1953.

[20] S. J. Gustafson and I. M. Sigal. Mathematical Concepts of Quantum Mechanics. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[21] S. J. Farlow. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.Revised reprint of the 1982 original. Dover Publications, Inc.,New York, 1993.

[22] S. VU NGOC, Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global,Panoramas et synthèses 22, SMF,2006.

[23] S. Y. CHENG, Eigenfunctions and nodal sets, Comment. Math. Helv. 51 : 43-55, 1979.

[24] T. CARLEMAN, Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrodinger, Ark. Mat. Astr. Fys. 24B 11 :1-7, 1934.

[25] T. KATO, Schrodinger operators with singular potentials, Israel J. Math.

13 : 135-148, 1972.

[26] V. A. KONDRAT'EV and M.A. SHUBIN, Discreteness of the spectrum for Schrodinger operators on manifolds of bounded, geometry , Proceedings of the conference "Functional Analysis, Partial Differential Equations and Applications" dedicated to the V. G. Maz'ya 60th birthday, Rostock, 1998.

[27] Y. COLIN DE VERDIERE, Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 20 : 599-615, 1987.

[28] Y. COLIN DE VERDIERE and B. PARISSE, Equilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale, Comm PDE, 19 : 1535-1564, 1994.

[29] Y. COLIN DE VERDIERE and B. PARISSE, Equilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerferld, Ann IHP, 61 : 347-367, 1994.

[30] Y. COLIN DE VERDIERE and B. PARISSE, Singular Bohr-Sommerfeld rules, Commun. Math. Phys, 205 : 459-500, 2000.

[31] Y. COLIN DE VERDIERE, Méthodes semi-classiques et théorie spectrale, Cours de DEA, 2006.

[32] V. A. KONDRATEV and M.A. SHUBIN, Conditions for the discreteness of the spectrum for Schrodinger operators on manifolds, Funct. Anal. and Appl. 33, 1999.

[33] W. A. Strauss. Partial Differential Equations. An introduction. Second edition. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2008.