République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Nr Attribué par la bibliothèque

Année Universitaire: 2014-2015

Equations différentielles stochastiques en dimension infinie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Probabilités et Applications

par

Bekki **F**ouzia [1]

Sous la direction de

Dr T. Guendouzi

Soutenu le 14 Juin 2015 devant le jury composé de

Dr Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr Madani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mlle Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : bekki-fouzia@outlook.fr

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon encadreure , Mme.Rouane Rachida ; pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger. Je lui témoigne enfin ma profonde reconnaissance pour son soutien constant au cours de ces années.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Mme.Mokhtari Fatiha, qui a accepté de présider le jury de cette mémoire . Par sa présence il apporte un point de vue probabiliste différent sur ce sujet.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mlle.Rahmani et Mme.Benziadi Fatima m'aient fait l'honneur d' accepté d'être dans le jury de cette thèse.

Je remercie tous les membres laboratoire des Modéles Stochastique, Statistique et Application pour leur accueil et leur sympathie.

Je remercie chaleureusement toute ma famille, qui m'a soutenu, encouragé et poussé durant toutes mes années d'étude. Et enfin, je ne saurai l'oublier : un immense merci à xxxxxxxxx

Ceux que j'aurais pu oublier sauront, je l'espère, m'excuser.

Dédicaces

Je dédie ce travail à celui ou celle qui m'a donné son affection et ses conseils durant toutes mes années d'études , en particuliers à :
Mon pére ;
Mon frére et mes soeurs ; Mes oncles et leures épouses ; Mes tantes, mes cousines,mes cousins, et à toute ma famille.
Ma copine bachir cherif khalida et tous mes collégues ;
A tous ceux qui m'ont aimé, soutenu, accompagné et protégé de leur attention bienveillante, amicale, frraternelle, affecteuse.
En particulier à ma defunte mère qui m'a soutenue durant toute ma vie.
Et en fin, à tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction **6**

1 Calcul Stochastique **8**

1.1 Processus à valeurs dans un espace de Hilbert, martingales, et processus de Wiener cylindrique 8

1.1.1 Variable aléatoire gaussian cylindrique dans un espace de Hilbert 8

1.1.2 Processus Q-Wiener cylindrique 9

1.1.3 Martingales dans un espace de Hilbert 10

1.2 Intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener 11

1.2.1 Processus élémentaires 12

1.2.2 Intégrale stochastique d'Itô pour les processus élémentaires 12

1.2.3 Intégrale stochastique d'Itô par rapport à un processus Q-Wiener 14

1.2.4 Intégrale stochastique d'Itô par rapport à un processus de Wiener cylindrique 15

1.2.5 Le Théorème de représentation de martingale 17

1.2.6 Théorème de Fubini stochastique 18

1.3 La formule d'Itô 19

1.3.1 Le cas d'un processus Q-Wiener 19

1.3.2 Le cas d'un processus de Wiener cylindrique 20

2 Equations Différentielles Stochastiques **22**

2.1 Elements de la théorie des semigroupes 22

2.2 Equations différentielles stochastiques et leurs solutions 23

2.3 Solutions sous les conditions de lipschitz 28

2.4 Un Cas Particulier 30

2.5 Propriété de Markov et l'unicité 31

2.6 La dépendance de la solution sur la valeur initial 32

2.7 Equation backward de Kolmogorov : 34

2.8 L'approximation de type lipshitz des coefficients continus 34

2.9 Existence des solutions faibles sous l'hypothèse de la continuité 35
2.10 Semis groupes compacts et existence des solutions martingales 36
2.11 Solutions mild des EDSSs dirigées par un processus de Wiener cylindrique 37

Conclusion. **39**

Bibliography **40**

Introduction

Le sujet des équations différentielles stochastiques dans des espaces de dimension infinie a connu un grand développement aprés la publication de K. Ito (CBMS monographie), et l'article de J. Walsh dans l'Ecole d'Itô de Saint Flour. Ces équations généralisent les équations stochastiques d'Ito [12], présentées dans les années 1940, et sous une forme différente par Gikhman[16].

Les équations différentielles stochastiques ont commencé à apparaître dans les années 1960 et ont été motivées par le développement interne de l'analyse et de la théorie de processus stochastiques d'une part, et par un besoin de décrire des phénoménes aléatoires étudiés en sciences naturelles et qui interviennent en mathématiques théoriques (par exemple dans les problèmes de Dirichlet ou des équations paraboliques [17], dans les équations de filtrage non linéaire [8], dans les équations de type de Kolmogorov [22], des équations retardées [25]) ainsi que dans des modèles décrivant des phénomènes aléatoires en physique (par exemple la propagation des ondes en milieux aléatoires [15], des problèmes concernant la turbulence [5]), la biologie (évolutions de populations[15], la neurophysiologie [9]) ou en théorie du controle ([21]). Une belle introduction au sujet des équations stochastiques ainsi que beaucoup d'autres exemples et de références peuvent être trouvés dans [15].

Des questions théoriques fondamentales sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques dans les espaces de dimension infinie ont été posées et répondues, sous de divers ensembles des conditions, pendant les années 1970 et les années 1980 et ont toujours de grand intérêt aujourd'hui. De nombreux mathématiciens qui ont contribué et contribuent toujours à la théorie des EDS dans les espaces de dimension infinie ; il m'est impossible de les tous citer. Néanmoins, signalons les travaux de Rozovskii([19],1990), Da Prato et Zabczyk ([6], 1992), Kallianpur et Xiong([20], 1993),et plus récemment Gawarecki et Mandrekar([15],2011).

Dans ce mémoire, nous avons choisi de mettre l'accent sur les aspects liés à la théorie des équations différentielles stochastiques dans des espaces de dimension infinie.

Le présent travail comporte deux parties. La première partie est consacrée à un bref rappel de la théorie de calcul stochastique. Nous avons voulu faire un tour d'horizon des concepts et définitions. Dans ce chapitre, les concepts de base et les résultats concernant les processus stochastiques dans des espaces de Hilbert sont établis. Notament le processus de Wiener cylindrique de variable aléatoire Gaussienne dans un Espace de Hilbert, les processus Q-Wiener cylindrique, les martingales et les processus élémentaires et, Puis, l'intégration stochastique par rapport à un processus de Wiener, et par rapport aux les processus élémentaires, le processus Q-Wiener,cylindrique respectivement. Ensuite nous rappelons certains théorèmes comme celui de la représentation de martingale, de Fubini et puis la formule d'Itô. Enfin nous présentons un aperçu sur les principes de la théorie de semigroupes des opérateurs linéaires.

Le deuxième chapitre a pour objectif d'étudier la théorie des equations différentielles stochastiques et leurs solutions. Nous décrivons tout d'abord les différentes notions des solutions, ensuite nous présentons les différentes solutions sous les conditions de Lipschitz, et la propriété de Markov et sa relation avec l'unicité des solutions, ainsi que la dépendance de la solution avec la valeur initiale, puis nous examinerons une classe importante des équations différentielle stochastique notamment celles de type backward et de Kolmogorov. Nous aborderons ensuite l'existence des solutions faibles sous l'hypothèse de la continuité et nous terminerons ce chapitre par l'étude d'existence des solutions martingales et semigroupes compacts.

Chapitre 1

Calcul Stochastique

Ce chapitre a pour but de présenter brévement les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite. Il ne s'agit nullement de développer la théorie générale pour laquelle les ouvrages sont des références remarquables.

1.1 Processus à valeurs dans un espace de Hilbert, martingales, et processus de Wiener cylindrique

Dans cette section , nous rappelons tout d'abord la notion de la variable aléatoire Gaussian dans un espace de Hilbert. Et ensuite nous définissons le processus de Wiener cylindrique, processus de Wiener à valeur dans un espace de Hilbert.

Dans toute la suite on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, K un espace de Hilbert réel séparable muni de la norme et produit scalaire noté par $\|.\|_K$ et $\langle ., . \rangle$. Nous supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est complet ,i.e., $\mathcal{F}$ contient tous les sous-ensembles A de Ω de mesure de probabilité nulle,

$$P^*(A) = \inf\{P(F) : A \subset F \in \mathcal{F}\} = 0.$$

1.1.1 Variable aléatoire gaussian cylindrique dans un espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *On dit que $\tilde{X}$ est une variable aléatoire gaussienne standard cylindrique dans K si : $\tilde{X} : K \to \mathbf{L^2}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ satisfait les conditions suivantes :*

(1) L'application $\tilde{X}$ est linéaire.

(2) Pour tout $k \in K$, arbitraire, $\tilde{X}(K)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance $\|K\|_k^2$.

(3) Si $k, k^{'} \in K$ sont orthogonaux ,i.e $< k, k^{'} >_K = 0$, alors les variables aléatoires $\tilde{X}(k)$ et $\tilde{X}(k^{'})$ sont indépendantes.

Notons que si $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ est une base orthonormée dans K, alors $\{\tilde{X}(f_j)_{j=1}^{\infty}\}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance un. Par linéarité de l'application $\tilde{X} : K \to \mathbf{L^2}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, nous pouvons représenter $\tilde{X}$ comme suit :

$$\tilde{X}(k) = \sum_{j=1}^{\infty} < k, f_j >_k \tilde{X}(f_j).$$

1.1.2 Processus Q-Wiener cylindrique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité filtré à la filtration $\mathcal{F}_t$, et K un espace de Hilbert réel séparable.

Définition 1.1.2 *On dit que la famille $\{\tilde{W}_t\}_{t \geq 0}$ définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq o}, \mathbf{P})$ est un processus de Wiener cylindrique dans l'espace de Hilbert K si :*

1. *Pour tout $t \geq 0$, arbitraire, l'application $\tilde{W}_t : K \to \mathbf{L^2}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est linéaire ;*

2. *Pour tout $k \in K$, arbitraire, $\tilde{W}_t(k)$ est un $\mathcal{F}_t$ mouvement Brownien ;*

3. *Pour tout $k, k^{'} \in K$,arbitraire , et $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\tilde{W}_t(k)\tilde{W}_t(k^{'})) = t\langle k, k^{'} \rangle_K$.*

Pour tout $t > 0$, $\frac{\tilde{W}_t}{\sqrt{t}}$ est une variable aléatoire gaussienne standard cylindrique , de sorte que pour tout $k \in K$, $\tilde{W}_t(k)$ est peut être représentée par une série convergente $\mathbf{P}$-p.s.

$$\tilde{W}_t(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle k, f_j \rangle_K \tilde{W}_t(f_j) \tag{1.1}$$

où $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ est une base orthonormée dans K.

Définition 1.1.3 *Soit Q un opérateur symétrique défini positive sur un espace de Hilbert séparable K, soit $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans K diagonalisant Q , et soit les valeures propres* *correspondantes* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$. *Soit* $\{\omega_j(t)\}_{t\geq 0}$, $j = 1, 2, ...,$ *une suite de mouvements Browniens indépendantes définies sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \mathbf{P})$. *Le processus*

$$W_t = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} \omega_j(t) f_j \tag{1.2}$$

est appelé un processus Q-Wiener dans K.

1.1.3 Martingales dans un espace de Hilbert

Définition 1.1.4 *Soit H un espace de Hilbert séparable muni de sa tribu de borel . Fixons* $T > 0$ *et soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ *un espace de probabilité filtré et* $\{M_t\}_{t\leq T}$ *un processus adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$ *à valeur dans H. Supposons que* M_t *est intégrable,* $\mathbf{E}\|M_t\|_H < \infty$. *Alors* M_t *est une martingale si pour* $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s \qquad \mathbf{P} - p.s.$$

Théorème 1.1.1 *(Inégalités maximal de Doob's)*
Si $M_t \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *est une martingale à valeur dans H ,ona :*

(1) $\mathbf{P}(sup_{0\leq t\leq T}\|M_t\|_H > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}\|M_T\|_H^p, \quad p \geq 1, \quad \lambda > 0;$

(2) $\mathbb{E}(sup_{0\leq t\leq T}\|M_t\|_H^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p\mathbb{E}\|M_T\|_H^p, \quad p > 1$.

Nous introduisons, maintenant , l'espace de Hilbert des martingales de carré intégrable à valeur dans H . Notons que par l'inégalité de Doob's :

$$\mathbb{E}(\sup_{t\leq T} \|M_t\|_{H^2}) \leq 4\mathbb{E}\|M_T\|_H^2.$$

Définition 1.1.5 *Une martingale* $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ *est dite carée intégrable si :*

$$\mathbb{E}\|M_T\|_H^2 < \infty.$$

La classe des martingales continu de carées intégrable et notée par $\mathcal{M}_T^2(H)$.
Puisque $M_t \in \mathcal{M}_T^2(H)$ est déterminé par la relation $M_t = \mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_t)$, l'éspace $\mathcal{M}_T^2(H)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire donnée par :

$$< M, N >_{\mathcal{M}_T^2(H)} = \mathbb{E}(< M_T, N_T >_H).$$

Définition 1.1.6 *Soit $M_t \in \mathcal{M}_T^2(H)$. Notons par $\langle M \rangle_t$ l'unique processus continu croissant issu de 0 et adapté tel que $\|M_t\|_H^2 - \langle M \rangle_t$ est une martingale continue. Définissons un processus à variation quadratique $\ll M \gg_t$ de M_t comme un processus continu adapté issu à 0 , à valeurs dans l'espace des opérateurs symétriques défini positive tel que pour tout $h, g \in H$ ona :*

$$< M_t, h >_H < M_t, g >_H - \langle \langle \langle M \rangle \rangle_t(h), g \rangle_H$$

est une martingale.

Lemme 1.1.1 *Le processus à variation quadratique d'une martingale $M_t \in \mathcal{M}_T^2(H)$ existe et unique. De plus,*

$$\langle M \rangle_t = tr \langle \langle M \rangle \rangle_t. \tag{1.3}$$

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.22)

1.2 Intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener

Nous allons présnter le concept de l'intégrale stochastique d'Itô par rapport à un processus Q-Wiener et par rapport à un processus de Wiener cylindrique simultanément.

Soient K et H deux espaces de Hilbert séparables, et soit Q un opérateur symétrique défini positive (trace) sur K ou $Q = I_k$, l'opérateur d'indentité sur K.
Dans le cas ou Q est une classe-trace , supposer que ses tous valeures propres $\lambda_j > 0, j = 1, 2, ...$; puis l'espace $K_Q = Q^{\frac{1}{2}} K$ muni de produit scalaire

$$< u, v >_{K_Q} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} < u, f_j >_K < v, f_j >_K$$

est un espace de Hilbert séparable avec une base orthonormée $\{\lambda_j^{\frac{1}{2}}\}_{j=1}^{\infty}$.

Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert réeles séparables avec $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans H_1 , alors l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_1 à H_2 est définie par :

$$\mathcal{L}_2(H_1, H_2) \quad = \quad \{L \in \mathcal{L}(H_1, H_2) : \sum_{i=1}^{\infty} \|Le_i\|_{H_2}^2 < \infty\}.$$

1.2.1 Processus élémentaires

Soit $\mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ la classe des processus élémentaires adaptés à la filtration $\mathcal{F}_t$ à valeur dans $\mathcal{L}(K,H)$ qui sont de la forme :

$$\Phi(t,\omega) \quad = \quad \phi(\omega)\mathbb{I}_{\{0\}} + \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(\omega)\mathbb{I}_{(t_j,t_{j+1}]}(t) \tag{1.4}$$

où $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ et $\phi, \phi_j, j = 0, 1, ..., n-1$, sont respectivement $\mathcal{F}_0$-mesurable et $\mathcal{F}_{t_j}$ -mesurable à valeurs dans $\mathcal{L}_2(K_Q, H)$ tel que $\phi(\omega), \phi_j(\omega) \in \mathcal{L}(K,H)$, $j = 0, 1, ..., n-1$.

1.2.2 Intégrale stochastique d'Itô pour les processus élémentaires

Pour un processus $Q \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ élémentaire , nous définissons l'intégrale stochastique d'Itô par rapport à un processus Q-Wiener W_t par :

$$\int_0^t \Phi(s)dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t})$$

pour $t \in [0,T]$. Le terme ϕW_0 est négligé puisque $\mathbf{P}(W_0 = 0) = 1$. Cette intégrale stochastique est un processus stochastique à valeur dans H.

Nous définissons l'intégrale stochastique cylindrique d'Itô d'un processus élémentaire $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ par rapport à un processus de Wiener cylindrique $\tilde{W}$ par :

$$\left(\int_0^t \Phi(s)d\tilde{W}_s\right)(h) = \sum_{j=0}^{n-1}(\tilde{W}_{t_j+1\wedge t}(\Phi_j^*(h))) - \tilde{W}_{t_j\wedge t}(\Phi_j^*(h)) \quad pour \quad t \in [0,T] \quad et \quad h \in H. \tag{1.5}$$

La proposition suivante indique l'isométrie d'Itô, qui est essentiel pour faviriser la construction de l'intégrale stochastique.

Proposition 1.2.1 *Pour un processus élémentaire borné* $\Phi \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$,

$$\mathbb{E}\| \int_0^t \Phi(s)dW_s\|_H^2 \quad = \quad \mathbb{E}\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds < \infty \tag{1.6}$$

pour $t \in [0,T]$.

Proposition 1.2.2 *Soit* $\Lambda_2(K_Q,H)$ *la classe des processus mesurables à valeur dans* $\mathcal{L}_2(K_Q,H)$ *définie de* $([0,T]\times\Omega, \mathcal{B}([0,T])\otimes\mathcal{F})$ *à* $(\mathcal{L}_2(K_Q,H), \mathcal{B}(\mathcal{L}_2(K_Q,H)))$ *adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$.

Si $\Phi \in \Lambda_2(K_Q,H)$ *, alors il existe une suite de processus élémentaire borné* $\Phi_n \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,H))$ *approximation* ϕ *dans* $\Lambda_2(K_Q,H)$ *,i.e.,*

$$\|\Phi_n - \Phi\|_{\Lambda_2(K_Q,H)} = \mathbb{E}\int_0^T \|\Phi_n(t) - \Phi(t)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}dt \to 0$$

quand $n \to \infty$ *.*

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.28).

Lemme 1.2.1 *(a) Soient* $T, T_n \in \mathcal{L}(H)$ *pour chaque* $h \in H$, $T_nh \to Th$ *, et soit* $L \in \mathcal{L}_2(K_Q,H)$ *. Donc*

$$\|T_nL - TL\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \quad \to \quad 0. \tag{1.7}$$

(b) Soit A *le générateur d'un* C_0*-semi groupe de l'opérateur* $S\ (t)$ *d'un espace de Hilbert réel séparable* H*, pour* $\Phi(t) \in \Lambda_2(K_Q,H)$ *tel que* $\mathbb{E}\int_0^t \|\Phi(t)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}dt \to \infty$ *,* $p \geq 1$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\leq T} \mathbb{E}\int_0^t \|(e^{(t-s)A_n} - S(t-s))\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds \quad \to \quad 0. \tag{1.8}$$

(c) Sous les hypothèses dans la partie (b),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^t \sup_{0\leq s\leq T} \|(e^{sA_n} - S(s))\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds \to 0.$$

1.2.3 Intégrale stochastique d'Itô par rapport à un processus Q-Wiener

Définition 1.2.1 *Intégrale stochastique d'un processus $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$ par rapport à un processus de Q-Wiener à valeur dans K , W_t est l'unique éxtension linéaire isométrique de l'application*

$$\Phi(.) \to \int_0^T \Phi(s) dW_s$$

De la classe des processus élementaires bornées à $\mathbf{L}^2(\Omega, H)$, pour une application de $\Lambda_2(K_Q, H)$ à $\mathbf{L}^2(\Omega, H)$, telle que l'image de $\Phi(t) = \Phi\mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi(j)\mathbb{I}_{(t_j, t_{j+1}]}(t)$ et $\sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$. On définie le processus de l'intégrale stochastique par :

$$\int_0^t \Phi(s) dW_s = \int_0^T \Phi(s)\mathbb{I}_{[0,t]}(s) dW_s.$$

Théorème 1.2.1 ([15]). *L'intégrale stochastique $\Phi \to \int_0^{\cdot} \Phi(s) dW_s$ par rapport à un processus Q-Wiener à valeur dans K, W_t est une isémotrie entre $\Lambda_2(K_Q, H)$ et l'éspace de martingale de carré intégrable continue $\mathcal{M}_T^2(H)$,*

$$\mathbb{E}\| \int_0^t \Phi(s) dW_s\|_H^2 \quad = \quad \mathbb{E}\int_0^t \|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 ds < \infty \tag{1.9}$$

pour $t \in [0, T]$.

Le processus à variation quadratique intégrale du processus stochastique de Q) et le processus de plus en plus lié à Z (r) sont donnés par

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.35).

Lemme 1.2.2 *Soit $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$. Alors il existe une suite de processus borné $\Phi_n \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K, H)) \subset \Lambda_2(K_Q, H)$ tel que :*

$$\int_0^T \|\Phi(t,\omega) - \Phi_n(t,\omega)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}^2 dt \to 0 \quad quand \quad n \to \infty$$

en probabilité et $\mathbf{P}$-p.s.

Lemme 1.2.3 *Soit $\psi(t), t \leq T$ processus $\mathcal{F}_t$ -adapté à valeur dans H , satisfait la condition :*

$$\mathbf{P}(\int_0^T \|\psi(t)\|_H dt < \infty) = 1.$$

alors il existe une suite élémentaire borné $\psi_n \in \mathcal{E}(H)$ tel que :

$$\int_0^T \|\psi(t,\omega) - \psi_n(t,\omega)\|_H dt \to 0 \qquad quand \quad n \to \infty$$

en probabilité et presque sûrement.

Définition 1.2.2 *Un processus stochastique $\{M_t\}_{t\leq T}$, adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$, avec des valeurs dans un espace de Hilbert séparable dans H est appelé une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt τ_n , avec $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} \tau_n = T) = 1$, tel que pour tout n, $M_{t\wedge\tau_n}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Lemme 1.2.4 *Soit $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$, et τ un temps d'arrêt par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbf{P}(\tau \leq T) = 1$. Définie :*

$$\int_0^\tau \Phi(t) dW_t = \int_0^u \Phi(t) dW_t$$

sur l'ensemble $\{\omega : \tau(\omega) = u\}$.
Alors :

$$\int_0^\tau \Phi(t) dW_t = \int_0^T \Phi(t) \mathbb{I}_{\{t\leq\tau\}} dW_t.$$

1.2.4 Intégrale stochastique d'Itô par rapport à un processus de Wiener cylindrique

Définition 1.2.3 *L'intégrale stochastique d'un processus $\Phi \in \Lambda_2(K, H)$ par rapport à un processus de Wiener cylindrique dans un espace de Hilbert dans K, $\tilde{W}_t$ est l'unique l'éxtension linéaire isométrique de l'application*

$$\Phi(.) \to \int_0^T \Phi(s) d\tilde{W}_t$$

De la classe des processus élémentaires à $\mathbf{L}^2(\Omega, H)$ à une application de $\Lambda_2(K, H)$ à $\mathbf{L}^2(\Omega, H)$, tel que l'image de $\Phi(t) = \Phi\mathbb{I}_{[0]}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j \mathbb{I}_{(t_j, t_{j+1}]}(t)$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} (\tilde{W}_{t_j+1 \wedge t}(\Phi_j^*(e_i)) - \tilde{W}_{t_j \wedge t}(\Phi_j^*(e_i)))e_i$$

.

Nous définissons le processus de l'intégrale stochastique $\int_0^t \Phi(s) d\tilde{W}_s$, $0 \leq t \leq T$, pour $\Phi \in \Lambda_2(K, H)$ par :

$$\int_0^t \Phi(s) d\tilde{W}_s = \int_0^T \Phi(s) \mathbb{I}_{[0,t]}(s) d\tilde{W}_s.$$

Théorème 1.2.2 *L'intégrale stochastique $\Phi \to \int_0^\cdot \Phi(s) d\tilde{W}_s$ par rapport à un processus de Wiener cylindrique $\tilde{W}_t$ dans K est une isométrie entre $\Lambda_2(K, H)$ et l'espace martingale continue de carré intégrable $\mathcal{M}_T^2(H)$. Le processus à variation quadratique de l'intégrale stochastique $\int_0^t \Phi(s) d\tilde{W}_s$ donnée par :*

$$\langle\langle \int_0^\cdot \Phi(s) d\tilde{W}_s \rangle\rangle_t = \int_0^t \Phi(s) \Phi^*(s) ds$$

et

$$\begin{aligned} \langle \int_0^\cdot \Phi(s) d\tilde{W}_s \rangle &= \int_0^t tr \Phi(s) \Phi^*(s) ds \\ &= \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q, H)} ds. \end{aligned}$$

Lemme 1.2.5 *Soit W_t un processus Q-Wiener dans un espace de Hilbert séparables dans K , $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$, et $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans K , alors :*

$$\int_0^t \Phi(s) dW_s = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (\phi(s) \lambda_j^{\frac{1}{2}} f_j) d\langle W_s, \lambda_j^{\frac{1}{2}} f_j \rangle_{K_Q}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (\phi(s) f_j) d\langle W_s, f_j \rangle_K.$$

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.46).

1.2.5 Le Théorème de représentation de martingale

Théorème 1.2.3 *Théorème de la Représentation de Martingale 1 :*
Soient H et K deux espaces de Hilbert séparable , W_t est un processus Q-Wiener à valeur dans K, et M_t est une $\mathcal{F}_t^W -$ martingale continue à valeur dans H tel que $\mathbb{E}\|M_t\|_H^2 < \infty$ pour $t \geq 0$. Alors il existe un processus unique $\Phi(t) \in \Lambda_2(K_Q, H)$
tel que :

$$M_t = \mathbb{E}M_0 + \int_0^t \Phi(s) dW_s$$

.

Remarque 1.2.1 *Si $\mathbb{E}M_0 = 0$ le processus quadratique correspondant à M_t et le processus croissant lié à $\|M_t\|_H^2$ sont donées par (voir*[57]*) :*

$$\begin{aligned}
\langle\langle M \rangle\rangle_t &= \int_0^t (\Phi(s) Q^{\frac{1}{2}})(\phi(s) Q^{\frac{1}{2}})^* ds, \\
\langle M \rangle_t &= \int_0^t \|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q, H)} ds = \int_0^t tr((\phi(s) Q^{\frac{1}{2}})(\phi(s) Q^{\frac{1}{2}})^*) ds.
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.4 *(Lévy) :*
Soit M_t , $0 \leq t \leq T$, une martingale de carré intégrable dans K par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}$, supposons que le processus à variation quadratique est de la forme $\ll M \gg_t = tQ$,$t \in [0, T]$. Alors M_t est un processus Q-Wiener par rapport à la filtartion $\{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}$.

Théorème 1.2.5 *Théorème de la Représentation de Martingale 2 :*
Soit M_t, $0 \leq t \leq T$, est une martingale continue à valeur dans H par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{\infty}$. Supposons que le processus à variation quadratique est donnée par $\langle\langle M_t \rangle\rangle = \int_0^t (\Phi(s,\omega) Q^{\frac{1}{2}})(\Phi(s,\omega) Q^{\frac{1}{2}})^* ds$, où $\phi(s,\omega)$ est un processus adapté à valeur dans $\Lambda_2(K_Q, H)$, alors il existe un processus Q-Wiener à valeur dans H sur un espace de probabilité prolongée

$(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{P}})$,*tel que :*

$$M_t(\omega) = \int_0^t \Phi(s,\omega) dW_s(\omega, \tilde{\omega}).$$

De plus, le processus de Wiener est peut être construit de façon que ses incréments $W_t - W_s$ *sont indépendantes de* $\mathcal{F}_s$ *pour* $t \geq s$.

Corollaire 1.2.1 *Soit* M_t *une martingale continue à valeur dans* H *par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *. Supposons que le processus de variation quadratique est donnée par* $\langle\langle M \rangle\rangle_t = \int_0^t \psi(s,\omega)\psi^*(s,\omega)ds$ *, où* $\Psi(s,\omega)$ *est un processus adapté à valeur dans* $\Lambda_2(K,H)$ *. Alors il existe* $\tilde{W}_t$ *un processus de Wiener cylindrique dans* K *sur un espace de probabilité prolongée* $(\Omega \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{F}}, \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{P}})$ *adaptés à la filtration* $\{\mathcal{F}_t \times \tilde{\mathcal{F}}_t\}$ *tel que :*

$$M_t(\omega) = \int_0^t \psi(s,\omega) d\tilde{W}_s(\omega, \tilde{\omega}).$$

De plus, le processus de Wiener cylindrique est peut être construit tel que pour tout $k \in K$*, les incréments* $W_t - W_s$ *sont indépendantes de* $\mathcal{F}_s$ *, si* $t \geq 0$.

1.2.6 Théorème de Fubini stochastique

La version stochastique du théorème de Fubini permet de calculer des intégrales déterministes d'un intégrand qu'est un processus intégral stochastique. Dans la littérature, ce théorème est présenté pour les processus prévisibles, mais il n'y a aucune nécessité de cette restriction si l'intégrale stochastique est relative à un processus de Wiener.

Théorème 1.2.6 *Soit* $(G, \mathcal{G}, \mu)$ *un espace mesurable finie , et* $\Phi : ([0,T] \times \Omega \times G, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{G}) \to (H, \mathcal{B}(H))$ *est un plan mesurable de telle sorte que pour chaque* $x \in G$ *, le processus* $\Phi(.,.,x)$ *est* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}$*- adapté . Soit* W_t *est un processus de Q-Wiener sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}, \mathbf{P})$*, alors :*

$$||| \, \Phi \, ||| \quad = \quad \int_G \|\Phi(.,.,x)\|_{\Lambda_2(K_Q,H)} \mu(dx) < \infty \tag{1.10}$$

alors

1. $\int_0^t \Phi(t,.,x)dW_t$ *a une version mesurable à partir de* $(\Omega \times G, \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{G})$ *à* $(H, \mathcal{B}(H))$;

2. $\int_G \Phi(.,.,x)\mu(dx)$ *est* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$*- adaptée ;*

3. *l'égalité suivantes* $\mathbf{P}-p.s.$:

$$\int_G \left(\int_0^T \Phi(t,.,x)dW_t\right)\mu(dx) = \int_0^T \left(\int_G \phi(t,.,x)\mu(dx)\right)dW_t. \tag{1.11}$$

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.58).

Corollaire 1.2.2 *Sous les hypothèses du théorème* (1.2.6)*, avec la condition* (1.10) *remplacé par :*

$$||| \Phi |||_1 = \int_G \|\Phi(.,.,x)\|_{\Lambda_2(K,H)}\mu(dx) < \infty.$$

1.3 La formule d'Itô

Nous allons présenter un théorème qui donne les conditions dans lesquelles un processus stochastique $F(t, X(t))$ a une différentielle stochastique, à condition que $X(t)$ a une stochastique differential.

1.3.1 Le cas d'un processus Q-Wiener

Si $\Phi \in \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ et $\psi \in H$, alors $\phi^*\psi \in \mathcal{L}_2(K_Q, \mathbb{R})$,depuis

$$\begin{aligned}
\|\phi^*\psi\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,\mathbb{R})} &= \sum_{j=1}^{\infty}((\phi^*\psi)(\lambda^{\frac{1}{2}}f_j))^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\langle\psi, \phi(\lambda^{\frac{1}{2}}f_j)\rangle^2_H \\
&\leq \|\psi\|^2_H\|\phi\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}.
\end{aligned}$$

Donc, si $\Phi(s) \in \mathcal{P}(K_Q, H)$ et $\psi(s) \in H$ sont des processus $\mathcal{F}_t$-adaptée , alors le processus $\Phi^*(s)\Psi(s)$ défini par :

$$(\Phi^*(s)\Psi(s))(k) = \langle \Psi(s), \Phi(s)(k)\rangle_H$$

de sorte que $\Phi^*(s)\Psi(s) \in \mathcal{P}(K_Q, \mathbb{R})$, et défini :

$$\int_0^T \langle \Psi(s), \Phi(s) dW_s\rangle_H = \int_0^T \Phi^*(s)\Psi(s) dW_s.$$

Théorème 1.3.1 *Soit Q un opérateur symétrique définie positive sur un espace de Hilbert séparable dans K, Soit $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ est un processus Q-Wiener sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}, \mathbf{P})$. Supposons que $X(t)$ est un processus stochastique $0 \leq t \leq T$, donnée par :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \psi(s) ds + \int_0^t \Phi(s) dW_s, \tag{1.12}$$

où $X(0)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeur dans H, et $\psi(s)$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable $\mathbf{P}$-p.s à valeur dans H .Processus Bochner-intégrable dans $[0, T]$,

$$\int_0^T \|\psi(s)\|_H ds < \infty \qquad \mathbf{P} - p.s.,$$

et $\phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$.
Supposons que la fonction $F : [0, T] \times H \to \mathbb{R}$ et telle que F est continue ,et les dérivées partielles Fréchet F_t , F_x , F_{xx} sont continues et bornées, alors la formules suivantes :

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(0, X(0)) + \int_0^t \langle F_x(s, X(s)), \Phi(s) dW_s\rangle_H \\ &\quad + \int_0^t \Big\{ F_t(s, X(s)) + \langle F_x(s, X(s)), \psi(s)\rangle_H \\ &\quad + \frac{1}{2} tr[F_{xx}(s, X(s))(\Phi(s) Q^{\frac{1}{2}})(\phi(s) Q^{\frac{1}{2}})^*] \Big\} ds \end{aligned}$$

$\mathbf{P}$-*p.s pour tout $t \in [0, T]$.*

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.62)

1.3.2 Le cas d'un processus de Wiener cylindrique

Dans le cas d'un processus Q-Wiener , pour $\Phi(s) \in \mathcal{P}(K, H)$ et $\mathbf{P}$-p.s. Et le processus $\Psi(s)$ bornée $\mathcal{F}_t$-adapté à valeur dans H, $\Phi^*(s)\Psi(s) \in \mathcal{P}(K, \mathbb{R})$. En plus :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}((\Phi^*(s)\Psi(s))(f_j))^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle\Psi(s),\Phi(s)(f_j)\rangle_H^2\\ &\leq \|\Psi(s)\|_H^2\|\Phi(s)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)},\end{aligned}$$

le processus $\Phi^*(s)\Psi(s)$ est peut être considéré comme étant à valeur dans K ou K^* , et on peut être définie :

$$\begin{aligned}\int_0^T\langle\Psi(s),\Phi(s)d\tilde{W}_s\rangle_H &= \int_0^T\langle\Phi^*(s)\Psi(s),d\tilde{W}_s\rangle_K\\ &= \int_0^T\Phi^*(s)\Psi(s)d\tilde{W}_s.\end{aligned}$$

Théorème 1.3.2 *Soient H et K deux espace de Hilbert réel séparable, et $\{\tilde{W}_t\}_{t\leq 0\leq T}$ est un processus de Wiener cylindrique à valeur dans K sur un espace de probabilité filtrè $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T},\mathbf{P})$. Supposer que $X(t)$ un processus stochastique,$0\leq t\leq T$ est donnée par :*

$$X(t)=X(0)+\int_0^t\Psi(s)ds+\int_0^t\Phi(s)d\tilde{W}_s,$$

où $X(0)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable à valeur dans H, et $\psi(s)$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable $\mathbf{P}$-p.s à valeur dans H . Processus Bochner-intégrable dans $[0,T]$.

$$\int_0^T\|\psi(s)\|_H ds<\infty \qquad \mathbf{P}-p.s.,$$

et $\phi\in\mathcal{P}(K,H)$.
Supposons que la fonction $F:[0,T]\times H\to\mathbb{R}$ et telle que F est continue ,et les dérivées partielles Fréchet F_t , F_x , F_{xx} sont continuee et bornées, alors la formules suivantes :

$$\begin{aligned}F(t,X(t)) &= F(0,X(0))+\int_0^t\langle F_x(s,X(s)),\Phi(s)d\tilde{W}_s\rangle_H\\ &+\int_0^t\Big\{F_t(s,X(s))+\langle F_x(s,X(s)),\psi(s)\rangle_H\\ &+\frac{1}{2}tr[F_{xx}(s,X(s))\Phi(s)(\Phi(s))^*)]\Big\}ds\end{aligned}$$

$\mathbf{P}$-p.s.pour tout $t\in[0,T]$.

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.69).

Chapitre 2

Equations Différentielles Stochastiques

2.1 Elements de la théorie des semigroupes

Nous passons maintenant aux principes fondamentaux de la théorie de semigroupes des opérateurs linéaires dans le but d'étudier l'existence des solutions classiques et mild, nous devons rappeler les définitions suivantes.

Définition 2.1.1 ([24]). *Pour X un espace de Banach, une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornée de X dans lui-méme est un semigroupe de opérateurs linéaires bornée sur X si*
(i). $S(0) = I$, (I est l'opérateur d'identité X).
(ii). $S(t+s) = S(t)S(s)$, pour chaque $t, s \geq 0$ (la propriété de semigroupe).

Un semigroupe des opérateurs linéaires bornée, $S(t)$, est uniformément continu si

$$\lim_{t\to 0} \|S(t) - I\| = 0.$$

Définition 2.1.2 ([24]). *Un semigroupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornée sur X est un semigroupe fortement continu des opérateurs linéaires bornée si*

$$\lim_{t\to 0} S(t)x = x \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

Un semigroupe fortement continu des opérateurs linéaires bornée est a appelé un semigroupe de la classe C_0 ou simplement un semigroupe de C_0, une classe particulérement importante des semigroupes fortement continus sont ceux qui peuvent etre continues analytiquement comme fonctions de t.

Définition 2.1.3 ([24]). *Soit $s_\delta = \{\lambda : |\arg\lambda| < \delta,\ \ \delta \in (0, \pi/2)\}$ et pour $z \in s_\delta$ soit $S(z)$ soit un opérateur linéaire bornée. La famille $S(z), z \in s_\delta$ est un analytique semigroupe dans s_δ si*
(i). $z \to S(z)$, est analytique dans s_δ.
(ii). $S(0) = I$, et $\lim\limits_{z\to 0} S(z)x = x,\ \ z \in s_\delta$.
(iii). $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$, pour $z_1, z_2 \in s_\delta$.

Clairement, la restriction d'un semigroupe analytique au vrai axe est un C_0 semigroupe.

Définition 2.1.4 ([24]). *Définissez $D(A)$ un ensemble de $x \in X$ pour lequel la limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Bigg[S(t)x - x\Bigg],$$

existe, et nous définissons Ax d'être cette limite pour $x \in D(A)$. Alors A s'appelle le générateur infinitésimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

2.2 Equations différentielles stochastiques et leurs solutions

Soient K et H deux espaces de Hilbert réelles séparables , W_t est un processus Q-Wiener sur un espace complet de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}, \mathbf{P})$ avec la filtration $\mathcal{F}_t$ satisfait les conditions habituelles. Nous considérons EDS semilinéaires sur $[0, T]$ dans H. La forme génerale :

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t, X))dt + B(t, X)dW_t, \\ X(0) = \xi_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ici,$A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ est le générateur de $C_0 - semigroupe$ des opérateurs $S(t), t \geq 0$ de H,ona $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Mexp\{\alpha(t)\}$ et si $M = 1$, alors $S(t)$ est un semi groupe appelé pseudo-contraction.
En général, les coefficients F et B sont des applications non linéaires,

$$\begin{aligned} F : \Omega * [0, T] * C([0, T], H) &\to H, \\ B : \Omega * [0, T] * C([0, T], H) &\to \mathcal{L}_2(K_Q, H). \end{aligned}$$

La condition initial ξ_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ -mesurable à valeur dans H.
Nous allons étudier le probleme de l'éxistence et l'unicité :
(A1) F et B conjointement mesurables, et pour chaque $0 \leq t \leq T$, ils sont mesurables par

rapport à la σ- algébre produit $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{C}_t$ sur $\Omega \times C([0,T],H)$.
(A2) F et B sont conjointement continues.
(A3) Il existe une constante l telle que pour tout $x \in \mathcal{C}([0,T],H)$,

$$\|F(\omega,t,x)\|_H + \|B(\omega,t,x)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \leq l(1+\sup\|x(s)\|_H)$$

pour $\omega \in \Omega$ and $0 \leq t \leq T$.
Pour chaque $t \in [0,T]$, nous définisions l'opérateur θ_t sur $C([0,T],H)$ par :

$$\theta_t(x) = \begin{cases} x(s) & ,0 \leq s \leq t, \\ x(t) & ,t \leq s \leq T. \end{cases}$$

L'hypothése (A1) implique que

$$F(\omega,t,x) = F(\omega,t,x_1)$$

et

$$B(\omega,t,x) = B(\omega,t,x_1)$$

Si $x = x_1$ sur $[0,t]$, parce que $\theta_t x$ est une fonction de borel de t à valeur dans $C([0,T],H)$, $F(\omega,t,\theta_t x)$ et $B(\omega,t,\theta_t x)$ sont égalements des fonctions de borel à t . Avec cette notation (2.1) on peut écrire comme

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t,X))dt + B(t,X)dW_t, \\ X(0) = \xi_0. \end{cases}$$

Nous disons que F et B satisfant à la condition de Lipschitz si :
(A4) Pour tout $x,y \in C([0,T],H), \omega \in \Omega, 0 \leq t \leq T$, il exist $\mathfrak{K} > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|F(\omega,t,x) - F(\omega,t,y)\|_H \quad & + \|B(\omega,t,x) - B(\omega,t,y)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \\ & \leq \mathcal{K} \sup\nolimits_{0 \leq s \leq T} \|x(s) - y(s)\|_H. \end{aligned}$$

Il existe différentes notions d'une solution à la SDE semilinéaire, et nous définissons maintenant des solutions fortes, faibles, mild, et martingale.

Définition 2.2.1 *Soit X(t) un processus stochastique définie sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}, \mathbf{P})$ *adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}$ *donc :*
(a) est une solution forte de (2.1) si :

1. $X(.) \in C([0,T],H)$;

2. $X(t,\omega) \in \mathcal{D}(A)dt \bigotimes dP$ - *presque partout ;*

3. *La conditions suivantes est satisfaite :*

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T \|AX(t)\|_H dt < \infty\right) = 1,$$
$$\mathbf{P}\left(\int_0^T (\|F(t,X)\|_H + \|B(t,X)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)})dt < \infty\right) = 1;$$

4. *Pour chaque* $t \leq T, \mathbf{P} - p.s.$:

$$X(t) \quad = \quad \xi_0 + \int_0^t (AX(s) + F(s,X))ds + \int_0^t B(s,X)dW_s; \tag{2.2}$$

(b) est une solution faible (2.1) si :

1. *Les conditions suivantes sont :*

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T \|X(t)\|_H dt < \infty\right) = 1,$$
$$\mathbf{P}\left(\int_0^T (\|F(t,X)\|_H + \|B(t,X)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)})dt < \infty\right) = 1;$$

2. *Pour chaque* $h \in \mathcal{D}(A^*)$ *et* $t \leq T, \mathbf{P} - p.s.,$:

$$\begin{aligned}\langle X(t),h\rangle_H \quad = \quad & \langle \xi_0,h\rangle_H + \int_0^t (\langle X(s),A^*h\rangle_H \\ & +\langle F(s,X),h\rangle_H)ds + \int_0^t \langle h,B(s,x)dW_s\rangle_H;\end{aligned} \tag{2.3}$$

(c) est une solution mild de (2.1)si :

1. *Les conditions précédentes (2.2) et (2.3) ;*

2. Pour chaque $t \leq T, \mathbf{P}-p.s.$,

$$X(t) \quad = \quad S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)F(s,X)ds + \int_0^t S(t-s)B(s,X)dW_s. \tag{2.4}$$

On dit que le processus X est une solution martingale de l'équation

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(t,X))dt + B(t,X)dW_t, \\ X(0) = x \in H \quad (\textit{déterministe}), \end{cases} \tag{2.5}$$

S'il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbf{P})$ et W_t est un processus de Q-Wiener, par rapport à la filtartion $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$, de telle que $X(t)$ est une solution mild de $(2,5)$.

Contrairement à la solution forte, où l'espace de probabilité filtré et le processus de Wiener sont donnés, une solution martingale est un système $((\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}, \mathbf{P}), W, X)$ où l'espace de probabilité filtré et le processus de Wiener font partie de la solution.

Si $A = 0$, $S(t) = I_H$, nous obtenons la SDE :

$$\begin{cases} dX(t) = F(t,X))dt + B(t,X)dW_t, \\ X(0) = x \in H \quad (\text{ déterministe}), \end{cases} \tag{2.6}$$

et une solution de martingale de (2.6) est appelé une solution faible (voir $[Viot]$).

Proposition 2.2.1 *Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe sur H et W_t est un processus Q-Wiener à valeur dans K . Si $\Phi(t) \in \mathcal{D}(A)$ $\mathbf{P}$-p.s. pour tout $t \in [0,T]$ et :*

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T \|\Phi(t)\|^2_{\mathcal{L}_{\in}(K_Q,H)} dt < \infty\right) = 1,$$

$$\mathbf{P}\left(\int_0^T \|A\Phi(t)\|_{\mathcal{L}_{\in}(K_Q,H)^2} dt < \infty\right) = 1,$$

puis $\mathbf{P}(\int_0^T \Phi(t)dW_t \in \mathfrak{D}(A)) = 1$ *et*

$$A\int_0^T \Phi(t)dW_t \quad = \quad \int_0^T A\Phi(t)dW_t \qquad \mathbf{P}-p.s. \tag{2.7}$$

Preuve 2.2.1 *L'égalité* (2.7) *est vrai pour les processus élémentaire bornée dans* $\mathcal{E}(\mathcal{L}(K, \mathcal{D}(A))$. *Soit* $\Phi_n \in \mathcal{E}(\mathcal{L}(K,_D(A))$ *un processus élémentaires bornées rapprochant* Φ

$$\int_0^T \|\Phi(t,\omega) - \Phi_n(t,\omega)\|^2_{\mathcal{L}-2(K_Q,\mathcal{D}(A))} \to 0 \qquad quand \qquad n \to \infty \qquad \mathbf{P} - p.s.$$

et donc :

$$\int_0^t \Phi_n(s)dW_s \to \int_0^t \Phi(s)dW_s,$$

$$A\int_0^t \Phi_n(s)dW_s = \int_0^t A\Phi_n(s)dW_s \to \int_0^t A\Phi(s)dW_s$$

en probabilité que $n \to \infty$.

Théorème 2.2.1 *Supposons que A est un générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi groupe de l'opérateur S(t) sur H et que* W_t *est un processus Q-Wiener à valeur dans K ona :*

(a) *Si* $\Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$ *et pour* $h \in \mathcal{D}(A^*)$ *et chaque* $0 \le t \le T$ *ona :*

$$\langle X(t), h\rangle_H \;\; = \;\; \int_0^t \langle X(s), A^*h\rangle_H ds + \langle \int_0^t \Phi(s)dW_s, h\rangle_H \qquad \mathbf{P} - p.s., \tag{2.8}$$

puis $X(t) = S \star \Phi(t)$, *tel que* $S \star \Phi(t) = \int_0^t S(t-s)\Phi(s)dW_s, \quad \Phi \in \mathcal{P}(K_Q, H)$.

(b) *Si* $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$, *alors pour tout* $0 \le t \le T, S \star \Phi(t)$ *satisfait (2.7).*

(c) *Si* $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H), \Phi(K_Q) \subset \mathcal{D}(A)$ *et* $A\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$, *puis* $S\star\Phi(t)$ *est une solution forte.*

Théorème 2.2.2 *Une solution faible de l'équation* (2.1) *est une solution mild . Inversement, si* X *est une solution mild de* (2.1) *et*

$$\mathbb{E}\int_0^T \|B(t,X)\|^2_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}dt < \infty;$$

alors $X(t)$ *est une solution faible de* (2.1). *Si, en plus de* $X(t) \in \mathcal{D}(A), dp \otimes dt$ *presque partout, alors* $X(t)$ *est une solution forte de* (2.1).

Corollaire 2.2.1 *Soit $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ un processus Q-Wiener définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}, \mathbf{P})$, et A le générateur infinitésimal d'un $S(t), t \geq 0$ C_0-semi groupe . Supposons que $B \in \mathcal{L}(K, H)$, $f(.) \in L^1(\Omega, H)$ sont des processus adaptées , ξ_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeur dans H. Alors l'équation linéaire :*

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + f(t))dt + BdW_t, \\ X(0) = \xi_0, \end{cases}$$

a une unique solution faible donnée par

$$X(t) = S(t)\xi_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)BdW_s, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

2.3 Solutions sous les conditions de lipschitz

Nous prouvons d'abord l'unicité et l'existence d'une solution mild de l'équation (2.1) dans le cas des coefficients de type Lipschitz. Ce résultat est connu (voir Ichikawa [32]) si le coefficient $F(t,.)$ et $B(t,.)$ dépendent de $x \in \mathcal{C}([0,T], H)$ par $x(t)$ seulement. Nous suivons une technique extraite du travail de Gikhman et Skorokhod , [25] et de l'étendre à partir de $\mathbf{R}^n$ aux processus à valeur dans H.
Noter que les conditions (A3) et (A4) impliquent,respectivement,que :

$$\| \int_a^b F(t,x)dt\|_H \leq l \int_a^b (1 + \sup_{s\leq T} \|(\theta_t x)(s)\|_H)dt$$

et

$$\| \int_a^b (F(t,x) - F(t,y))dt\|_H \leq \mathfrak{K} \int_a^b \sup \|(\theta_t(x-y))(s)\|dt.$$

Nous allons maintenant énoncer les inégalités utiles pour prouver l'existence, l'unicité, et les propriétés de la solution de EDS (2.1) . Nous commençons par les inégalités $((7,8),(7,9)$ dans [7] et (24) dans [11]).

Lemme 2.3.1 *Soit $\Phi \in \Lambda_2(K_Q, H)$ et $p \geq 1$ alors :*

$$\mathbb{E}\left(\sup \| \int_0^t \Phi(s)dW_s\|_H^{2p}\right) \quad \leq \quad c_{1,p}\mathbb{E}\left(\| \int_0^T \Phi(s)dW_s\|_H^{2p}\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq c_{2,p}\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds\right)^p \\ &\leq c_{2,p}T^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds\right) \qquad (2.9) \end{aligned}$$

avec les constantes :

$$c_{1,p} = (\frac{2p}{2p-1})^{2p},$$

$$c_{2,p} = (p(2p-1))^p(c_{1,p})^{2p^2}.$$

Corollaire 2.3.1 *Soit $S(t), 0 \leq t \leq T$ est un C_0-semi groupe et $p \geq 1$. Pour $\Phi \in \Lambda_2(K_Q,H)$ et $t \in [0,T]$ donc :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\int_0^t S(t-s)\Phi(s)dW_s\|^{2p}_H &\leq C^1_{p,\alpha,M,T}\mathbb{E}\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds\right)^p \\ &\leq C^2_{p,\alpha,M,T}\mathbb{E}\int_0^t \|\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}ds. \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Lemme 2.3.2 *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $p \geq 1$, et tel que $\alpha > \frac{1}{p}$. Alors pour un $f \in \mathcal{L}^p([0,T],H)$, la fonction :*

$$G_\alpha f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad (2.11)$$

est continue et il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|G_\alpha f(t)\|_H \leq C\|f\|_{\mathcal{L}^p([0,T],H)}.$$

Théorème 2.3.1 *Soit $\mathcal{H}_{2p}$ un espace des variables aléatoires ξ à valeur dans $C([0,T])$ tel que le processus $\xi(t)$ est conjointement mesurable, adapté, à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, avec $\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq T}\|\xi(s)\|_H^{2p} < \infty$. Alors $\mathcal{H}_{2p}$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}_{2p}} = \left(\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq T}\|\xi(s)\|_H^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Soit les coefficients F et B satisfont les conditions (A1),(A3), et (A4). Supposons que $S(t)$ est ou bien un semi-groupe pseudo contraction et $p \geq 1$ ou un C_0-semi groupe générale et $p > 1$. Alors l'équation semi linéaire de (2.1) *a une solution mild continue unique. Si, de plus $\mathbb{E}\|\xi_0\|_H^{2p} < \infty$, alors la solution est dans $\mathcal{H}_{2p}$. Si $A = 0$, alors l'équation* (2.6) *a une solution forte unique. Si,de plus,$\mathbb{E}\|\xi_0\|_H^{2p} < \infty$, alors la solution est dans $\mathcal{H}_{2p}$, $p \geq 1$.*

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.97).

2.4 Un Cas Particulier

Nous avons prouvé le théorème d'existence et d'unicité pour les solution mild de l'équation (2.1), le théorème (2.2.1), pour les C_0-semi groupes généraux si $p > 1$, et pour les semi groupes pseudo contraction si p $= 1$.Dans cette section nous incluons le cas $p = 1$ et un C_0-semi groupe général. Supposons que les coefficients de l'équation (2.1) dépendent de la valeur de la solution à l'instant t, tel que $F(\omega,t,x) = F(\omega,t,x(t))$ et $B(\omega,t,x) = B(\omega,t,x(t))$ pour $x \in C([0,T],H)$. Notons que si $\tilde{F}(\omega,t,h) = F(\omega,t,x(t))$ et $\tilde{B}(\omega,t,h) = B(\omega,t,x(t))$ pour $x(t) \equiv h$, une fonction constante alors les condition $(A1)$,$(A3)$ et $(A4)$ sur F et B implique les conditions suivantes sur $\tilde{F}$ et $\tilde{B}$:

(A1') $\tilde{F}$ et $\tilde{B}$ sont conjointement mesurable sur $\Omega \times [0,T] \times H$, et pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x \in H$ elles sont mesurables par rapport à la σ-algèbre sur Ω.

(A2') Il existe une constante l telle que pour tout $x \in H$,

$$\|\tilde{F}(\omega,t,x)\|_H + \|\tilde{B}(\omega,t,x)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \leq l(1 + \sup\|x(s)\|_H).$$

(A3') Pour $x_1, x_2 \in H$,

$$\|\tilde{F}(\omega,t,x_1)-\tilde{F}(\omega,t,x_2)\|_H \quad +\|\tilde{B}(\omega,t,x_1)-\tilde{B}(\omega,t,x_2)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)}$$
$$\leq \mathcal{K}\|x_1-x_2\|_H.$$

Corollaire 2.4.1 *Soit $\xi,\xi_2,\xi_3 \in \tilde{\mathcal{H}_{2p}}$, $p \geq 1$. Si $F(t,x)=F(t,x(t))$ et $B(t,x)=B(t,x(t))$ satisfait les conditions $(A1)$ et $(A3)$, alors ils existe un constante $C_{p,M,\alpha,T,l}$, tel que*

$$\|I(.,\xi)\|^{2p}_{\tilde{\mathcal{H}}_{2p}} \leq C_{p,M,\alpha,T,l}(1+\|\xi\|^{2p}_{\tilde{\mathcal{H}}_{2p}}).$$

Si $F(t,x)=F(t,x(t))$ et $B(t,x)=B(t,x(t))$ satisfait les conditions $(A1)$ et $(A4)$, alors il existe un constante $C_{p,M,\alpha,T,\mathcal{K}}\|\xi_1-\xi_2\|^{2p}_{\tilde{\mathcal{H}}_{2p}}$.

Théorème 2.4.1 *Soit les coefficients $F(t,x)=F(t,x(t))$ et $B(t,x)=B(t,x(t))$ satsisfait les conditions $(A1)$, $(A3)$, et $(A4)$. Supposons que $S(t)$ est un C_0-semi groupe générale. Alors l'équation semi linéaire de (2.1) est une solution mild continue uniques. Si, de plus, $\mathbb{E}\|\xi_0\|^{2p}_H<\infty$, $p\geq 1$, alors la solution est dans $\tilde{\mathcal{H}}_{2p}$.*

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.105).

2.5 Propriété de Markov et l'unicité

Nous examinons la propriété de Markov de solutions mild sous les conditions de Lipschitz sur les coefficients de la EDSS de (2.1), nous supposons que les coefficients de (2.1) dépendent de t , pour $F(t,x)=F(t,x(t))$ et $B(t,x)=B(t,x(t))$ en plus, $F:[0,T]\times H\to H$ et $B:[0,T]\times H\to \mathcal{L}_2(K_Q,H)$.

Définition 2.5.1 *Soit $\{X(t),t\geq 0\}$ un processus stochastique à valeur dans H définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ est appelé un processus de Markov si elle satisfait la propriété suivante :*

$$\mathbb{E}(\varphi(X(t+h)) \mid \mathcal{F}^X_t) \quad = \quad \mathbb{E}(\varphi(X(t+h)) \mid X(t)) \tag{2.12}$$

pour tout $t,h\geq 0$ et tout fonction mesurable bornée à valeur réelle.

Théorème 2.5.1 *Soient les coefficients F et B satisfont les conditions (A1),(A3),et(A4). Supposons que $S(t)$ est un C_0-semi groupe , et pour $u \leq s \leq t \leq T$ alors ils satisfont la propriété suivante :*

$$\mathbb{E}(\varphi(X(t,u;\xi)) \mid \mathcal{F}_s^{W,\xi}) \quad = \quad (\mathbf{P}_{s,t}\varphi)(X(s,u;\xi)) \tag{2.13}$$

pour toute fonction φ à valeur réelle , tel que $\varphi(X(t,s;\xi)) \in \mathbf{L}^1(\Omega,\mathbb{R})$ pour un arbitraire $s \leq t$.

Corollaire 2.5.1 *Sous les hypothèses du théorème*(2.3.1) *, pour $u \leq s \leq t \leq T$, la solution $X(t,u;\xi)$ satisfait la propriété de Markov :*

$$\mathbb{E}(\varphi(X(t,u;\xi)) \mid \mathcal{F}_s^X) = (\mathbf{P}_{s,t}\varphi(X(s,u;\xi))$$

avec $\mathcal{F}_s^x = \sigma\{X(r,u;\xi), u \leq r \leq s\}$ pour chaque fonction φ à valeur réel tel que $\varphi(X(t,s;\xi)) \in \mathbf{L}^1(\Omega,\mathbb{R})$ pour un arbitraire $s \leq t$.

2.6 La dépendance de la solution sur la valeur initial

Nous considérons la EDS de semi-linéaire de l'équation (2.1) avec les coefficients $F(t,x(t))$ et $B(t,x(t))$ pour $x \in \mathcal{C}([0,T],H)$ tels que F et B ne dépendent pas de ω .
Avant que nous étudions la dépendance à l'état initial, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.6.1 *Soit $S(t), t \geq 0$ un C_0-semi groupe et $\xi \in \mathbf{L}^2(\Omega,H)$ et $X \in C([0,T],H)$ étendre l'opérateur est définie :*

$$\tilde{I}(\xi,X)(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F(s,X(s))ds + \int_0^t S(t-s)B(s,X(s))dW_s. \tag{2.14}$$

Soient F et B satisfait les conditions (A1),(A2),et (A4). Alors , pour $0 \leq t \leq T$,

1. $\mathbb{E}\|\tilde{I}(\xi,X)(t) - \tilde{I}(\eta,X)(t)\|_H^2 \leq C_{1,T}\mathbb{E}\|\xi-\eta\|_H^2$.

2. $\mathbb{E}\|\tilde{I}(\xi,X)(t) - \tilde{I}(\xi,Y)(t)\|_H^2 \leq C_{2,T}\int_0^T \mathbb{E}\|X(t)-Y(t)\|_H^2 dt$.

Théorème 2.6.1 *Soit X_n une solution mild à l'équation (2.1), de sorte que l'équation suivante est :*

$$X_n(t) = S(t)\xi_n + \int_0^t S(t-r)F_n(r,X_n(r))dr + \int_0^t S(t-r)B_n(r,X_n(r))dW_r.$$

de plus,les conditions sont :

(1) $\sup_n \mathbb{E}\|\xi_n\|^2 < \infty$.

(2) *Avec* $n \to \infty$, $\|F_n(t,x) - F_0(t,x)\|_H^2 + \|B_n(t,x) - B_0(t,x)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \to 0$,*et* $\mathbb{E}\|\xi_n - \xi_0\|_H^2 \to 0$.

Donc $X_n(t) \to X_0(t)$ *dans* $\mathbf{L}^2(\Omega, H)$ *uniformément en* t .

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.112).

Théorème 2.6.2 *Supposons que* $F : [0,T] \times H \to H$ *et* $B : [0,T] \times H \to \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ *satisfait les conditions (A1),(A3), et (A4) donc :*

(a) Si les derivés de Fréchet $DF(t,.)$ *et* $DB(t,.)$ *sont continues dans H et bornée,*

$$\|DF(t,x)y\|_H + \|DB(t,x)y\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \leq M_1\|y\|_H \tag{2.15}$$

pour $x, y \in H, 0 \leq t \leq T$ *, avec la constante* $M_1 \geq 0$ *, alors* $\tilde{I} : H \times \tilde{\mathcal{H}}_2 \to \tilde{\mathcal{H}}_2$ *est continue Fréchet différentiable,et ses dérivées partielles est :*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{I}(x,\xi)}{\partial x} y\right)(t) &= S(t)y, \\ \left(\frac{\partial \tilde{I}(x,\xi)}{\partial \xi} \eta\right) &= \int_0^t S(t-s)DF(s,\xi(s))\eta(s)ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)DB(s,\xi(s))\eta(s)dW_s \quad \mathbf{P}-p.s. \end{aligned}$$

avec $\xi, \eta \in \tilde{\mathcal{H}}_2, x, y \in H, 0 \leq t \leq T$.

(b) Si en plus, les dérivés de seconde ordere Fréchet $D^2F(t,.)$ *et* $D^2B(t,.)$ *sont continues dans H et bornée ,*

$$\|D^2F(t,x)(y,z)\|_H + \|D^2B(t,x)(y,z)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \leq M_2\|y\|_H\|z\|_H \tag{2.16}$$

pour $x, y, z\ inH, 0 \leq t \leq T$, *est deux fois continuement differentiable Fréchet , et sa seconde dérivée partielle est :*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \tilde{I}(x,\xi)}{\partial \xi^2}(x,\xi)(\eta,\zeta)\right)(t) &= \int_0^t S(t-s)D^2F(s,\xi(s))(\eta(s),\zeta(s))ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)D^2B(s,\xi(s))(\eta(s),\zeta(s))dW_s \quad \mathbf{P}-p.s. \end{aligned}$$

avec $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{H}_2, x \in H, 0 \leq t \leq T.$

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.114).

2.7 Equation backward de Kolmogorov :

Théorème 2.7.1 *Equation Backward De Kolmogorov 1 : Supposons que* $A \in \mathcal{L}(H)$ *et* F, B *ne dépend pas de* t , $F : H \to H$ *et* $B : H \to \mathcal{L}_2(K_Q, H)$. *Soit les dérivés de Fréchet* $DF(x), DB(x), D^2F(x), etD^2B(x)$ *sont continues et satisfait les conditions et* $\varphi \in C_b^2(H)$ *, alors il existe une solution unique u de l'équation Backward de Kolmogorov données par :*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathbf{P}_t\varphi(x) \\ &= \mathbb{E}(\varphi(X^x(t))), \qquad 0 \leq t \leq T, \quad x \in H \end{aligned} \tag{2.17}$$

où $X^x(t)$ *est une solution* (2.1) *avec la condition initiale déterministe* $\xi_0 = x \in H$.

Théorème 2.7.2 *Equation Backward De Kolmogorov 2 : Supposons que* F *et* B *ne dépend pas de* t , $F : H \to H$ *et* $B : H \to \mathcal{L}_2(K_Q, H)$. *Soit les dérivés de Fréchet* $DF(x), DB(x), D^2F(x), etD^2B(x)$ *sont continues et satisfait les conditions* (2.15) , (2.16). *Si les conditions* $(A1)$,$(A3)$, *et* $(A4)$ *satisfaites , pour* $\varphi \in C_b^2(H)$ *, il existe une unique solution u tel que*

(1) $u(t,x)$ *conjointement est continue et bornée sur* $[0,T] \times H$,

(2) $u(t,.) \in C_b^2(H), 0 \leq t \leq T$,

(3) $u(.,x) \in C_b^1([0,T[)$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$.

De plus, u est donnée par la formule (2.17), *où* $X^x(t)$ *est la solution de l'équation* (2.1) *avec la condition initial* $\xi_0 = x \in H$.

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.120).

2.8 L'approximation de type lipshitz des coefficients continus

On construit maintenant les suites des coefficients de type Lipschitz F_n et B_n à valeurs dans H, qui convergent réspectivement vers les coéfficients continus F et B uniformément sur les parties compactes de $C([0,T], H)$. Les valeurs de F_n et B_n ne sont pas limités à aucun sous-espace de dimension finie de H.

Lemme 2.8.1 *Soit* $F : [0,T] \times H \to H$ *,*$B : [0,T] \times H \to \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ *satisfait les conditions (A1)-(A3) . Il existe de suites* $F_n : [0,T] \times H \to H$ *et* $B_n : [0,T] \times H \to \mathcal{L}_2(K_Q, H)$ *qui satisfait les conditions (A1)-(A4), avec une constante universelle dans l'état (A3), telle que :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|F(t,x) - F_n(t,x)\|_H + \sup_{0 \leq t \leq T} \|B(t,x) - B_n(t,x)\|_{\mathcal{L}_2(K_Q,H)} \to 0$$

uniformément sur tout compact de $\mathcal{C}([0,T], H)$.

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.126).

2.9 Existence des solutions faibles sous l'hypothèse de la continuité

Pour obtenir les résultats faibles de convergence, nous avons besoin d'une estimation de moment d'incréments de solutions à EDS.

Lemme 2.9.1 *Soit* $\xi(t) = x + \int_0^t F(s,\xi)ds + \int_0^t B(s,\xi)dW_s$ *, avec* $x \in H$ *et les coefficients* F *et* B *satisfait les conditions (A1)-(A3), alors :*

$$\mathbb{E}\|\xi(t+h) - \xi(t)\|_H^4 \leq \mathcal{C}(T,l)h^2.$$

Lemme 2.9.2 *La condition* $\sup_n \mathbb{E}(\|\xi_n(t+h) - \xi_n(t)\|_H^4) \leq Ch^2$ *implique que pour toute* $\xi > 0$,

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_n \mathbf{P}(\sup_{|t-s|<\delta} \|\xi_n(t) - \xi_n(s)\|_H > \xi) = 0.$$

Corollaire 2.9.1 *Soit* F_n *et* B_n *satisfait les conditions (A1)-(A3) avec une constante commune dans l'état de la croissance (A3). Soit* X_n *une suite de solutions aux EDSs suivants :*

$$\begin{cases} dX_n(t) = F_n(t, X_n)dt + B_n(t, X_n)dW_t, \\ X_n(0) = x \in H. \end{cases}$$

Puis :
(1) La suite X_n *est stochastiquement bornée , i.e., pour tout* $\xi > 0$ *, il existe* M_ξ *satisfait :*

$$\sup_n \mathbf{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_n(t)\|_H > M_\xi) \leq \xi,$$

(2) Pour toute $\xi > 0$ *,*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_n \mathbf{P}(\sup |t-s| < \delta \|X_n(t) - X_n(s)\|_H > \xi) = 0.$$

Théorème 2.9.1 *considérer l'équation*

$$dX_t = a(X(t))dt + B(X(t))dW_t, \qquad (2.18)$$

où $a : H \to H$ *,*$B : H \to \mathcal{L}(K, H)$*, et* W_t *est un processus de Wiener à valeur dans* H *de covariance* Q *. Supposons les conditions suivantes :*

(1) *B sont conjointement continu et localement bornée,*

(2) $2\langle a(x), x\rangle_H + tr(B(x)QB^*(x)) \leq l(1 + \|x\|_H^2)$,

(3) *Il existe un opérateur symétrique linéaire compact S positif sur H,tel que :*

$$2\langle S^{-1}a(Sx), x\rangle_H + tr(S^{-1}B(Sx)QB^*(Sx)S^{-1}) \leq l_1(1 + \|x\|_H^2).$$

alors il existe une solution faible de (2.17) avec $X(0) = Sx_0, x_0 \in H$.

2.10 Semis groupes compacts et existence des solutions martingales

Dans cette section, nous présentons un théorème d'existence pour les solutions martingale dans le cas où l'opérateur A génère un semi groupe compact. Ce étend le théorème 8.1 dans [11], puisque nous incluons les coefficients F et B de l'équation (2.1) qui peut dépendre de l'ensemble des pas d'une solution.

Lemme 2.10.1 *Soit* $p > 1$ *et* $\frac{1}{p} < \alpha \leq 1$. *Considérer l'opérateur* G_α

$$G_\alpha f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) f(s) ds, \qquad f \in L^p([0, T], H).$$

Supposons que $S(t), t \geq 0$ *est un* C_0*-semi groupe compact dans* H *. Alors* G_α *est compact de* $L^p([0, T], H)$ *dans* $C([0, T], H)$.

Théorème 2.10.1 *Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un compact* $S(t)$ C_0*-semi groupe sur un espace de Hilbert réel séparable dans* H*. Soient les coefficients de la EDSS* (2.1) *satisfait les conditions (A1) - (A3). Alors l'équation* (2.1) *est une solution de martingale.*

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.137).

2.11 Solutions mild des EDSSs dirigées par un processus de Wiener cylindrique

Soient K et H deux espaces de Hilbert réel séparables, W est un processus de Wiener cylindrique dans K définie sur un espace de probabilité filtré complet $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}, \mathbf{P})$ à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$ satisfait les conditions habituelles. Nous considérons que la SSDE suivante sur $[0,T]$ dans H, avec $\mathcal{F}_0$-mesurable la condition initiale ξ :

$$\begin{cases} dX(t) = (AX(t) + F(X(t)))dt + B(X(t))d\tilde{W}_t, \\ X(0) = \xi. \end{cases} \tag{2.18}$$

Soient les coefficients de l'équation (2.18) satisfait les hypothèses suivantes,
(DZ1) A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t), t \geq 0\}$ fortement continu sur H .
(DZ2) $F : H \to H$ est une application telle que, pour certaines $c_0 > 0$,

$$\|F(x)\|_H \leq c_0(1 + \|x\|_H), \qquad x \in H,$$

$$\|F(x) - F(y)\|_H \leq c_0\|x - y\|, \qquad x, y \in H.$$

(DZ3) $B : H \to \mathcal{L}(K, H)$ est telle que pour tout $k \in K$, l'application $x \to B(x)k$ est continue à partir de H à H et pour tout $t > 0$ et $x \in H$, $S(t)B(x) \in \mathcal{L}_2(K, H)$, et il existe une application locale de carré intégrable $\mathcal{K} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tel que :

$$\|S(t)B(t)\|_{\mathcal{L}_2(K,H)} \leq \mathcal{K}(t)(1 + \|x\|_H) \qquad pour \quad t > 0, x \in H,$$

$$\|S(t)B(x) - S(t)B(y)\|_{\mathcal{L}_2(K,H)} \leq \mathcal{K}(t)\|x - y\|_H, \qquad pour \quad t > 0, x, y \in H.$$

(DZ4) Il existe $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ tel que :

$$\int_0^t t^{-2\alpha}\mathcal{K}^2(t)dt < \infty.$$

Définition 2.11.1 *Un processus stochastique $X(t)$ définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}, \mathbf{P})$,adaptée à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq T}$, est une solution mild de l'équation* (2.18) *si :*

$$\mathbf{P}(\int_0^T \|X(t)\|_H dt < \infty) = 1,$$

$$\mathbf{P}(\int_0^T (\|F(X(t))\|_H + \|S(t-s)B(X(t))\|^2_{\mathcal{L}(K,H)})dt < \infty) = 1,$$

pour toutes $t \leq T$, $\mathbf{P}$-p.s.,

$$X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)F(X(s))ds + \int_0^t S(t-s)B(X(s))d\tilde{W}_s.$$

nous aurons besoin le lemme suivants :

Lemme 2.11.1 *Soit $\Phi \in \Lambda_2(K,H)$, $p \geq 1$, alors :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\| \int_0^t \Phi(s)d\tilde{W}_s\|^{2p}_H$$

$$\leq (p(2p-1))^p(\int_0^T (\mathbb{E}\|\Phi(s)\|^{2p}_{\mathcal{L}(K,H)})^{\frac{1}{p}} ds)^p.$$

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.142).

Théorème 2.11.1 *(a) Dans les conditions (DZ1) - (DZ3), par un arbitraire $\mathcal{F}_0$-mesurable et l'état initial ξ telle que $\mathbb{E}\|\xi\|^{2p}_H < \infty$,$p \geq 1$, il existe une solution mild unique de$(2,18)$ et C une constante, tel que :*

$$\|X\|^{2p}_{\tilde{\mathcal{H}}_{2p}} \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^{2p}_H).$$

(b) Si, en plus, la condition (DZ4) est vérifiée, alors la solution $X(t)$ est un processus continu $\mathbf{P}$-p.s.

preuve. La preuve peut être trouvé dans ([15], p.143).

Conclusion

• Un sujet très avancé est abordé dans le présent travail ,un rappel sur la théorie de calcul stochastique dans des espaces de Hilbert est présenté, notamment le processus Wiener cylindrique, le processus Q-Wiener cylindrique, les martingales et les processus élémentaires. L'intégration stochastique par rapport à ces processus a été introduite . Certains théorèmes connus ont été établis comme celui de la représentation de martingale, de Fubini, et la formule d'Itô .

• Nous avons établi l'existence des solutions des équations différentielles stochastiques dans des espaces de dimension infinie, les différentes notions des solutions sont établies ; solution forte, faible , mild et ainsi que la solution martingale sous les conditions de Lipschitz, et de la continuité. Nous avons étudier par ailleurs l'unicité de la solution et sa relation avec la propriété de Markov,et bien sûr la dépendance de la solution avec la valeur initiales.

• Comme perspectives, il s'agit d'étudier le comportement de la solution de l'équation différentielle stochastique semi linéaire sous des conditions plus restreintes et en particulier le comportement de la solution non Markovienne et l'étude des conditions de l'unicité de cette solution et par conséquent répondre aux questions ouverts liées aux propriétés ergodiques de cettes solutions.

Bibliographie

[1] S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Mathematical Studies No. 2, Van Nostrand, Princeton (1965).

[2] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn. Homogeneous random fields and statistical mechanics, J. Funct. Anal. 19, (1975)242-272.

[3] S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev, M. Rï£¡ckner, T. V. Tsikalenko, Glauber dynamics for quantum lattice systems, *Rev. Math. Phys.* 13 No. 1, (2001)51-124.

[4] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York (1968).

[5] P.L. Chow, Stochastic partial differential equations in turbulence, in Probabilistic analysis and related topics, Vol. 1, ed. A.T. Bharucha-Reid, *Academie Press*, (1978) 1-43

[6] G. Da Prato, J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 44, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[7] G.Da Prato, J.Zabczyk. *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, London Mathematical Society Lecture Note Series 229 , Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[8] , M. Fujisaki Kallianpur, G. Kunita, H. Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem, *Osaka J. Math.* 9, (1972) 19-40

[9] , W.H. Fleming, Distributed parameter stochastic systems in population biology, Lecture Notes in Economy and Mathematical Systems, No. 107, eds. A. Bensous- san, J.L. Lions, *Springer-Verlag*, (1975)179-191.

[10] A. Ichikawa, Stability of semilinear stochastic evolution equations, J. Math. Anal. Appl. 90, (1982)12-44.

[11] A. Ichikawa, Some inequalities for martingales and stochastic convolutions, Stoch. Anal. Appl. 4,(1986) 329-339 .

[12] , K.Ito, DifferentiaI equations determining Markov processes, Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, No. 1077, (1942) 1352 - 1400.

[13] L. Gawarecki. *Extension of a Stochastic integral with respect to cylindrical martingale,Stat. Probab. lett .34,* (1997) 103-111.

[14] L. Gawarecki, V. Mandrekar, B. Rajeev. The monotonicity inequality for linear stochastic partial differential equations, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat.* Top. 12, No. 4, (2009)1-17.

[15] L.Gawarecki, V. Mandrekar, *Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions ,with Applications to Stochastic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011

[16] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod. *The Theory of Stochastic Processes*, Springer, Berlin (1974).

[17] , L. Gross, Potential theory in Hilbert spaces, J. Funct. Anal., 1, (1965) 123-189.

[18] B. Øksendal, *Stochastic differential equations an introduction with applications*, Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000.

[19] G. Kallianpur, I. Mitoma, and R. L. Wolpert. *Diffusion equations in dual of nuclear spaces*, Stoch. Stoch. Rep. 29, 285Ũ329 (1990).

[20] G. Kallianpur and J. Xiong. Stochastic differential equations in infinite dimensions : a brief survey and some new directions of research. In : Multivariate Analysis : Future Directions, North-Holland Ser. Statist. Probab. 5, North-Holland, Amsterdam, 267Ũ277 (1993).

[21] , H.J. Kushner, On the optimal control of a system governed by a linear parabolic equation with white noise imputs, SIAM, J. Control Optim., 6, No. 4,(1978)596-614.

[22] , H. Kunita, Stochastic fiows and stochastic differential equations, *Cambridge Uni- versity Press* (1990).

[23] , M. Metivier and J. Pellaumail. *Stochastic Integration*, Academie Press, New York (1980).

[24] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, vol. 44. Springer, New York, 1983.

[25] R.B. Vinter, Kwong, R.H. The infinite time quadratic control problem for linear systems with state and control delays : An evolution equation approach, *SIAM J. Control Optimiz.*, 19, (1981)139-153.

[26] M. Viot. *Solution Faibles d'équation aux dérivées partielles non linéaire*, Thése , Univer- sité Pierre et Marie Cruie , Paris (1976).

[27] M. Vishik and A. Fursikov, *Mathematical Problems of Statistical Hydrodynamics*, Kluwer, London (1988).

[28] M. Yor. Existence et unicité de diffusions to valeurs dans un espace de Hilbert, *Ann. Inst. H. Poincaré B 10*, (1974).55-88

[29] K. Yosida. *Functional Analysis*, Springer, New York (1980).

[30] J. Zabczyk. Linear stochastic systems in Hilbert spaces ; spectral properties and limit behaviour, *Banach Cent. Publ.* 41, (1985) 591-609.