

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Variétés différentiables	4
1.1	variété différentiable	6
1.1.1	Définitions des Variétés	6
1.2	Fibré tangent	13
1.2.1	Espace tangent	13
1.2.2	Application Tangente	18
1.2.3	Fibré tangent	21
1.2.4	Champs de Vecteurs	25
1.3	Connexions Linéaires	27
1.3.1	Aspect géométrique	29
1.4	Sous-variétés d'une variété différentiable	30
1.4.1	Théorème du rang constant	30
1.4.2	Immersion, Submersion, Plongement	31
1.4.3	Sous-variétés	32
2	Variété Riemannienne	35
2.1	Notions de Tenseur	35
2.1.1	Fibré Cotangent	36
2.1.2	Tenseurs sur une variété	37
2.2	Métrie Riemannienne	37
2.2.1	Isométrie	38
2.2.2	Connexion de Levi-Civita d'une métrie Riemannienne	38
2.2.3	Courbure Riemannienne	40

2.3	Sous-Variété Riemannienne	41
2.3.1	Métrie Induite	41
2.3.2	Connexion de Levi-Civita	42
2.3.3	Hypersurface	44
3	Structure géométrique du fibré tangent (Unitaire)	46
3.1	Structure Géométrique du fibré tangent TM	46
3.1.1	Relèvement horizontal et vertical	48
3.1.2	Crochet de Lie	51
3.1.3	Métrie naturelle	51
3.1.4	Métrie de SASAKI	53
3.1.5	La connexion de Levi-Civita	53
3.1.6	Tenseur de Courbure	54
3.2	Structure Géométrique du fibré tangent Unitaire T_1M	55
3.2.1	Structure géométrique de du fibré tangent unitaire	57
3.2.2	Crochet de Lie	60
3.2.3	Connexion de Levi-Civita	61

0.1 Introduction

La théorie des relèvements des structures au fibré d'une variété différentielle a débuté vers l'année 1960 par E.T.DAVIES, P.DOMBROWSKI, S.ISHIHARA, M.OKUMURA, S.KOBAYACHI, S.SASAKI, S.TASHIBANA et K.YANO.

L'utilité des relèvements est de prolonger les structures géométriques (structure de contact, structure complexe etc.) d'une variété différentielle au fibré tangent, de nombreux articles ont été publiés à propos de ce sujet ; l'exemple de l'article de SASAKI en 1958 qui a y calculé la métrique du fibré tangent et c'était le début de l'étude de la géométrie du fibré tangent.

Notre travail s'intéresse à la géométrie de fibré tangent unitaire qui est une hypersurface du fibré tangent d'une variété riemannienne ;

Le premier chapitre a l'ambition de faire comprendre ce que sont les variétés différentielles.

Dans le deuxième chapitre on étudie les notions de la variété riemannienne et la sous-variété riemannienne (connexion de LEVI-CIVITA, tenseur de torsion, tenseur de courbure) et on donnera la définition de l'hypersurface en utilisant les formules de GAUSS et WEINGARTEN.

Dans le dernier chapitre on s'intéresse aux structures géométrique du fibré tangent et du fibré tangent unitaire, on va voir la construction de la métrique \hat{g} dite de SASAKI sur le fibré tangent à partir d'une métrique riemannienne donnée g sur une variété M et on va munir le fibré tangent unitaire d'une métrique induite \tilde{g} de celle de SASAKI \hat{g} , tout ça on va le voir sur le fibré tangent de la sphère et le fibré tangent de la sphère unitaire, on donnera aussi l'expression explicite de la connexion de LEVI-CIVITA et du crochet de LIE qui a été calculé par DOMBROWSKI.

Chapitre 1

Variétés différentiables

Introduction

La géométrie différentielle est une continuité du calcul infinitésimal, elle permet d'étudier grâce aux techniques du calcul différentiel une nouvelle famille d'espaces topologiques appelées "variétés différentiables".

Le calcul différentiel permet d'étudier l'évolution d'un phénomène au voisinage d'un instant donné (sa vitesse, son accélération) lorsque celui ci décrit une portion d'un espace dans lequel on a une structure d'espace vectoriel normé. Notre but est de montrer qu'on peut faire de l'analyse mathématique en dehors des espaces qui n'admettent pas de structure d'espace vectoriel normé. Plus encore, nous pouvons mesurer des portions de la terre, nous nous déplaçons entre les villes, les pays, on peut décrire presque toutes les régions du globe terrestre d'une manière adéquate, en utilisant un petit livre, appelé atlas, formé d'un ensemble de cartes, qui sont des ouverts du plan \mathbb{R}^2 .

Ici, chaque point du globe peut être représenté dans une carte. En s'inspirant de la cartographie, on définit une variété différentiable de dimension n ($n \in \mathbb{N}$) par un atlas qui est un ensemble d'ouverts de \mathbb{R}^n appelés cartes. H.Poincaré a saisi l'importance du concept d'une variété différentiable, il s'est arrêté sur les changements de cartes d'un atlas. C'est Whitney (en 1944) qui a réglé définitivement ce problème ; c'est dans les changements de cartes où réside la notion de variété différentiable.

Pour se déplacer entre divers villes de notre planète terre, on choisit assez souvent les chemins les plus courts (géodésiques), ces trajectoires ne sont pas des droites. La formulation géométrique de ces notions a conduit à introduire des métriques sur des variétés différentiables (variétés

riemanniennes), et par la suite, à des modèles non euclidiens :

(1) **Modèle de Riemann** : La sphère \mathbb{S}^2 (munie de la métrique induite par le produit scalaire habituel de l'espace \mathbb{R}^3) admet pour géodésiques les grands cercles.

(2) **Modèle de Lobatchevski** : le demi-plan de Poincaré est défini par : $P = \{(x, y) \mid y > 0\}$ muni de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Ici, les géodésiques sont

- (a) les demi droites d'équation $x = cte$,
- (b) les demi-cercles centrés sur l'axe Ox .

La géométrie différentielle utilise un arsenal très riche et varié de méthodes mathématiques faisant de cette branche des mathématiques, un carrefour des mathématiques, nécessitant l'utilisation de nombreuses théories structurées (calcul différentiel, intégration, algèbre linéaire, topologie générale et algébrique, etc,...), comme elle conduit à des directions importantes en mathématiques et aussi à des applications en physique :

1. **Les groupes et algèbres de Lie** : sont très importants en mathématiques en raison de leurs applications fondamentales à la géométrie, à la mécanique, l'analyse, etc,...

2. **La géométrie symplectique** : traite des objets qui issus de la mécanique

(a) La géométrie symplectique donne le formalisme géométrique de la mécanique hamiltonienne classique, il s'agit en fait d'une géométrie de l'espace de phase (fibré tangent TM , d'une variété différentiable M , muni de la forme de Liouville); elle permet de calculer aussi précisément que possible les trajectoires de planètes.

(b) La géométrie symplectique est utilisée en optique géométrique, en mécanique quantique etc,...

3. **Le problème cosmologique** : L'univers (espace-temps) est une variété différentiable de dimension 4. Le problème cosmologique consiste à déterminer la forme globale de cette variété, ainsi que les structures diverses exprimant la distribution et l'évolution de l'énergie. Dans sa théorie de la relativité générale, A.Einstein représente le potentiel gravitationnel, donc les distributions des masses, par une métrique locale d'espace temps. La géométrie locale de l'espace-temps (en particulier les géodésiques, donc les rayons lumineux qui sont des géodésiques particulières) est ainsi déterminé par la distribution de masses, les Γ_{ij}^k de la connexion associée représentant la magnitude de la force gravitationnelle.

1.1 variété différentiable

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur \mathbb{R}^n . Pour cela, nous allons introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à \mathbb{R}^n , afin d'y transférer ce que nous savons déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à \mathbb{R}^n . De tels objets nous sont familiers dans \mathbb{R}^3 : une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe... ressemblent localement à \mathbb{R}^2 . Nous voyons toujours ces objets comme sous-ensembles de \mathbb{R}^3 . Ce que nous allons définir ne peut a priori pas être vu comme sous ensemble d'un \mathbb{R}^n . Nous voulons en donner une définition intrinsèque, que nous appellerons variétés, sans faire référence à un espace plus grand. Nous sommes dans la situation d'habitants d'une sphère qui voudraient définir leur habitat sans connaître ni se référer à \mathbb{R}^3 . Un habitant d'une sphère, s'il était mathématicien, se rendrait compte que localement (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de \mathbb{R}^2 . C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. Nous allons recoller ensemble des ouverts de \mathbb{R}^n . Globalement, nous n'auront pas nécessairement \mathbb{R}^n , mais localement, nous aurons à notre disposition tout ce que nous savons faire sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

On peut voir une variété différentiable M de dimension n comme une réunion $\cup U$ (finie ou dénombrable) d'ouverts de \mathbb{R}^n dont chaque ouvert est muni d'un système de coordonnées locales $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et telle que si U et V sont deux ouverts de M d'intersection non vide, munis respectivement des systèmes de coordonnées locales $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(y_j)_{1 \leq j \leq n}$ alors chacun de ces systèmes se laisse exprimer différemment en fonction de l'autre et dont le jacobien $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est non nul.

Un vecteur tangent à une variété M de dimension n , en un de ses points x , par rapport à un système de coordonnées locales $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, est une famille de nombres réels $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que si, par rapport à un autre système de coordonnées locales $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$, ce vecteur soit représenté par une autre famille de nombres réels $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors les familles $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ représentant ce même vecteur, sont liées par la relation : $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} v_j$.

1.1.1 Définitions des Variétés

On considère un espace topologique M . On suppose que cet espace est

- 1/ à base dénombrable : la topologie de M a une base dénombrable d'ouverts. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un sous-ensemble dénombrable dense (par exemple \mathbb{Q}^n pour \mathbb{R}^n);
- 2/ séparé : deux points distincts ont des voisinages distincts.

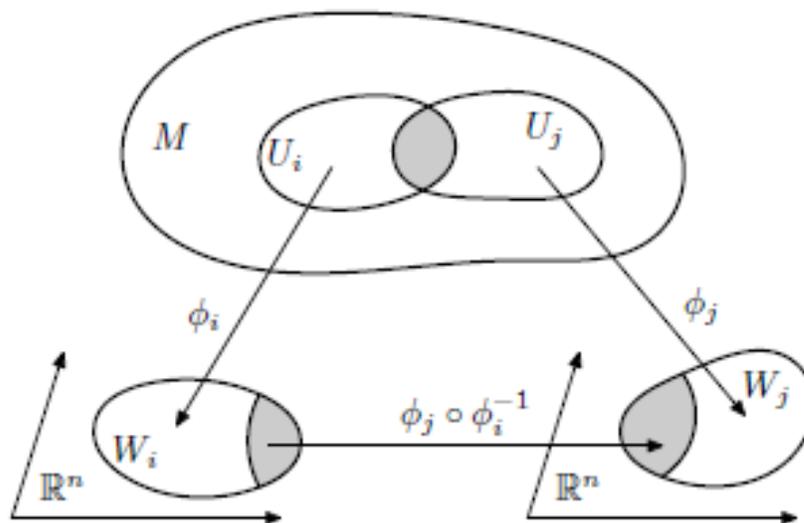
Définition 1.1 Une carte de dimension n sur M est un couple (U, φ) formé de

- 1/ un ouvert $U \subset M$;
- 2/ un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

L'ouvert U est le domaine de la carte . Pour $p \in U, \varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n : \varphi$, qu'on appelle une fonction coordonnées. Un point de M peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Un ensemble de cartes locales $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M tout entier est appelé atlas de la variété.

On dira alors que $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouverts de M . A priori, cet atlas n'est pas unique. En particulier, la réunion de deux atlas est encore un atlas.



Définition 1.2 Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur M sont compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ est un difféomorphisme entre les ouverts de \mathbb{R}^n .

En coordonnées locales, une carte (U, φ) donne un système locale de coordonnées. Sur $U \cap V$, on a deux systèmes de coordonnées $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$.

Ces deux applications s'écrivent

$$\varphi \circ \psi^{-1} : y = (y^1, \dots, y^n) \mapsto (x^1 = f^1(y), \dots, x^n = f^n(y)),$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1 = g^1(x), \dots, y^n = g^n(x)),$$

La compatibilité signifie que les fonctions f^i et g^i sont de classe C^∞ .

Définition 1.3 *Un atlas de dimension n de M est un ensemble $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes de dimension n tel que*

1/ les ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ recouvrent M ;

2/ toutes les cartes de \mathcal{A} sont compatibles deux à deux.

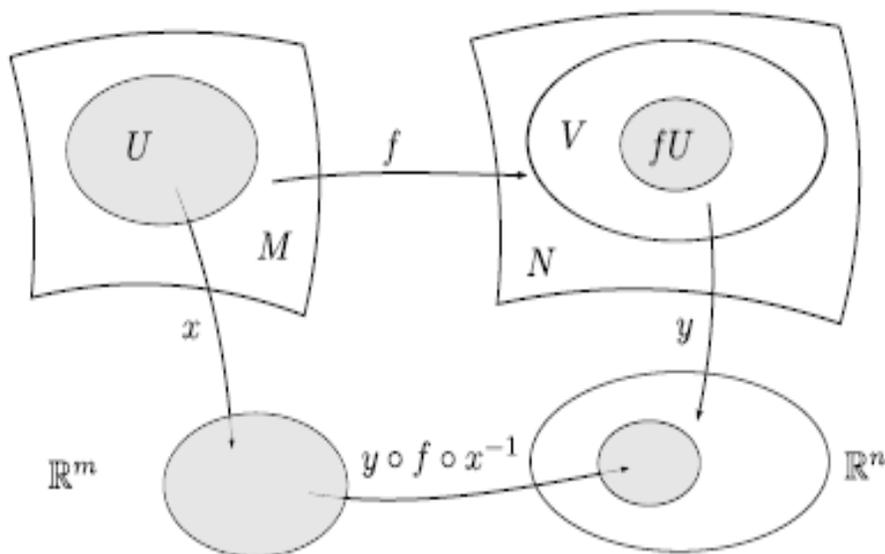
Un atlas permet donc de définir des coordonnées locales partout sur M . On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas ,c'est à dire que $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $\mathcal{A}' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sont équivalents si toutes les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (V_β, ψ_β) sont compatibles deux à deux.

Définition 1.4 *une variété différentiable est le couple (M, \mathcal{A}) où M est la variété topologique de dimension n et \mathcal{A} est l'atlas maximal de classe C^∞ de M , on l'appelle aussi la structure différentiable de M .*

Définition 1.5 *Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique M séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension n .*

Définition 1.6 *Soient (M^m, \mathcal{A}) et (N^n, \mathcal{B}) deux variétés différentiables. On dit que l'application $f : M \rightarrow N$ est de classe C^∞ si chaque représentation locale de f (respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B}) est de classe C^∞ c'est à dire si la composition $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ est une application lisse $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ pour toute carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, on dit que $f : M \rightarrow N$ est*

un difféomorphisme de classe C^∞ si f et f^{-1} sont de classe C^∞ .



Remarque 1.7 1/ Sur un espace non séparé il n'existe pas de métrique, puisque tout espace muni d'une distance est séparé. De même un sous-espace compact n'est pas forcément fermé et l'image d'un compact par une application continue n'est pas toujours compact. C'est pour avoir ce type de propriété que l'on impose à une variété d'être un espace séparé. En revanche, tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

2/ Base dénombrable : la classe d'équivalence d'un atlas \mathcal{A} peut être représentée par son atlas maximal qui est l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec celles de \mathcal{A} . On veut que la topologie définie par les domaines de ces cartes ait une base dénombrable. Cette hypothèse est importante, sans elle, il est par exemple possible de munir \mathbb{R}^n d'une topologie qui le rende homéomorphe à un \mathbb{R}^k muni de la topologie canonique, pour $k < n$ quelconque.

Exemple 1.8 1/ \mathbb{R}^n est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte (\mathbb{R}^n, id) .

2/ Tout \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit un atlas (E, φ) . De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, φ) .

3/ L'espace euclidien \mathbb{E}^n est une variété de dimension n : il est en bijection avec \mathbb{R}^n via le

choix d'un système de coordonnées x . L'atlas à une carte (\mathbb{E}^n, x) y définit donc une structure différentiable.

Tous ces exemples sont triviaux puisqu'il s'agit d'espaces homéomorphes à \mathbb{R}^n .

Exemple 1.9 1/ Le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1 : cependant il n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} (puisque \mathbb{S}^1 est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas. On définit deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) :

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\} ; U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\ \varphi_1 &: U_1 \rightarrow]0, 2\pi[: (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta \\ \varphi_2 &: U_2 \rightarrow]-\pi, \pi[: (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta \end{aligned}$$

Les domaines de ces cartes recouvrent clairement le cercle : $U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}^1$. De plus $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles. Ainsi $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas et définit une structure différentiable sur \mathbb{S}^1 .

2/ La sphère unité

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

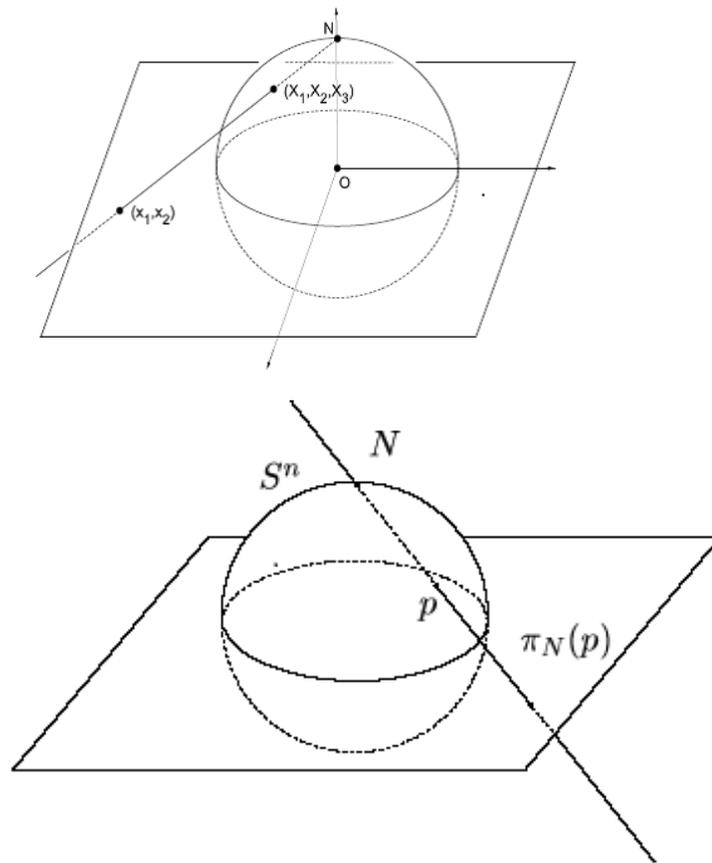
est une variété de dimension n .

En effet ; on peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique, les points $N = (1, 0)$ et $S = (-1, 0)$ désignant respectivement les pôles nord et sud, on considère les ouverts $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, et $U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et les applications

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1-x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \\ \varphi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1+x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

Déterminons les applications de changement de cartes $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ et $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui sont des difféomorphismes données par $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. Donc $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ définit une

structure différentiable sur \mathbb{S}^n .



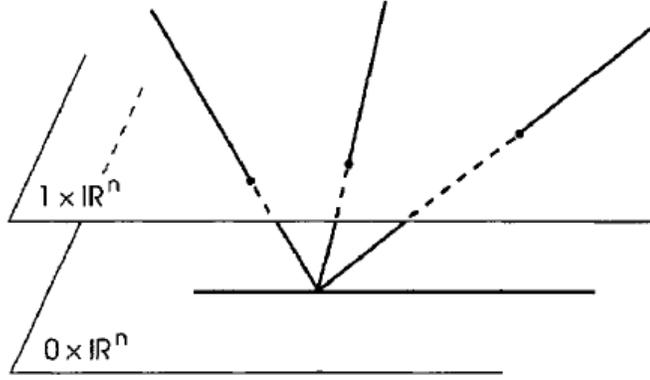
3/ Tout sous-ensemble ouvert Ω d'une variété différentiable M est lui même une variété différentiable. Sa structure différentiable est définie par l'atlas $A_\Omega = \{(U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \Omega})\}$, où $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ est un atlas de M .

4/ Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n et d'atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ respectivement. Alors l'espace produit $M \times N$ est une variété de dimension $n+m$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$, où $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

Le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ est une variété, de même que le tore plat de dimension n , $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$.

5/ L'espace projectif réel de dimension n noté $P^n\mathbb{R}$ est l'espace quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}$$



On peut donc considérer $P^n \mathbb{R}$ comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . On définit l'espace projectif réel $P^n \mathbb{R}$ comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n \mathbb{R}$ la projection naturelle.

Exemple 1.10 1) Pour $i = 0, \dots, n$, on considère l'ensemble $V_i \subset P^n \mathbb{R}$ des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et l'on définit φ_i l'application $V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui associe à une droite son intersection avec l'hyperplan affine $\{x_i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$. Pour $(x_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul, on note $[x_0 : \dots : x_n] \in P^n \mathbb{R}$ la droite passant par le point de coordonnées (x_i) . Les x_i s'appellent les coordonnées homogènes

$$[x_0 : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_n] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid (x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n)$$

L'on a $V_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$. L'application de carte est

$$\begin{aligned} \varphi_i : \quad V_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Son inverse est

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow V_i \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto [y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : y_n] \end{aligned}$$

Ceci nous définit des cartes $c_i = (V_i, \varphi_i, \mathbb{R}^n)$. Vérifions que c_1 est compatible avec c_2 . D'une part, $\varphi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{y_1 = 0\}$ et $\varphi_2(V_1 \cap V_2) = \mathbb{R}^n \setminus \{y_1 = 0\}$ sont des ouverts de \mathbb{R}^n .

L'application de changement de cartes est

$$\begin{aligned} \varphi_1(V_1 \cap V_2) &\rightarrow \varphi_2(V_2 \cap V_1) \\ (y_i) &\mapsto \frac{1}{y_1}(1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

qui est bien de classe C^1 . De la sorte on établit que les cartes sont deux à deux compatibles. Les V_i recouvrant le projectif, les c_i forment donc un atlas.

Remarque 1.11 On construit des cartes incompatibles sur des variétés. Considérons par exemple la droite réelle recouverte d'une part par la carte globale (\mathbb{R}, φ_1) où

$$\varphi_1 \equiv Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = x$$

et d'autre part la carte (\mathbb{R}, φ_2) où $\varphi_2 \equiv Cube : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = x^3$: Les formules de changement de coordonnées sont

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto y = z^{1/3}$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto z = y^3$$

Ces transformations sont continues mais $z \mapsto y = z^{1/3}$ n'est pas différentiable en $z = 0$.

1.2 Fibré tangent

Soit M une variété différentielle (ou analytique complexe) et $x \in M$; pour définir le concept important de tangence au point x à la variété M , nous utiliserons deux point de vue :

- celui (géométrique) consistant à utiliser les courbes différentiables "tracées sur M au voisinage de x et passant par x ;

- celui (algébro-analytique) consistant à "dériver" les germes (en x) de fonctions différentiables définies au voisinage de M et à valeurs dans la variété différentielle \mathbb{R} (munie de sa structure d'atlas à une carte $(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}}, 1)$).

Conformément à ces deux points de vue, nous devons donc définir les courbes différentiables tracées sur \mathbb{R} et passant par x et les germes de fonctions différentiables sur \mathbb{R} en x .

1.2.1 Espace tangent

Définition 1.12 Une courbe paramétrée sur M est une application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, de domaine $I \subset \mathbb{R}$. Son expression locale dans une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ et la courbe $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, avec

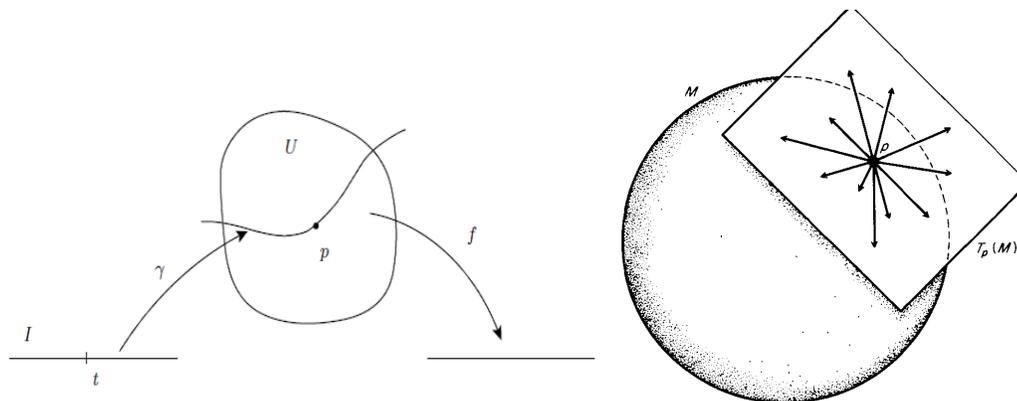
$$\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{\gamma}^1(t), \dots, \tilde{\gamma}^m(t)) = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^m(\gamma(t)))$$

La courbe γ est régulière en $t \in I$ ($x = \gamma(t) \in M$), si pour toute carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que U contient le point x , son expression locale $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ est une courbe régulière en t , i.e $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t) \neq \vec{0}$.

Remarque 1.13 Si γ est une courbe régulière en x , on peut toujours changer sa paramétrisation pour avoir $\gamma(0) = x$. Localement, autour de x , on peut aussi choisir une carte φ telle que $\varphi(x) = (0, \dots, 0) \equiv \vec{0} \in \mathbb{R}^m$. On peut donc toujours avoir une courbe locale $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ régulière en $\tilde{\gamma}(0) = \vec{0}$.

Considérons maintenant une variété différentiable M et un point x de M . On note \mathcal{C} l'ensemble des courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par x

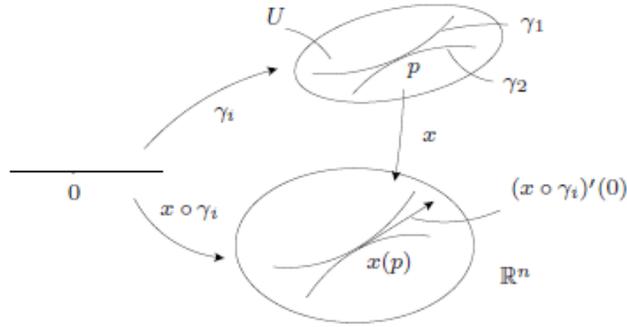
$$\begin{aligned} \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[&\rightarrow M \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned} ; \gamma(0) = x$$



Définition 1.14 Deux courbes γ_1 et γ_2 sont tangentes au point x si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ et s'il existe une carte locale (U, φ) telle que $x \in U$ et $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$.

La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si (V, ψ) est une autre carte autour de x , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)(0) \end{aligned}$$



On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes passant par x : $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si elles sont tangentes en x .

Cette relation signifie que nous considérons deux courbes γ_1 et γ_2 comme équivalentes si elles ont même « vecteur tangent en 0 dans \mathbb{R}^n », sur n'importe quelle carte locale.

Définition 1.15 *Un vecteur tangent à M en un point x est le vecteur tangent à une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ au point $\gamma(0) = x$ (où elle est régulière). On appelle espace tangent à M en x l'ensemble $T_x M$ des vecteurs tangents à M en x , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents en x à toutes les courbes sur M qui passent par x et y sont régulières.*

Par définition, l'espace tangent en x à M est l'ensemble des classes d'équivalences dans \mathcal{C} pour cette relation. Cette définition signifie donc que $T_x M$ est constitué des « tangentes » des courbes dans M . L'indépendance vis à vis du choix des coordonnées locales est essentielle pour assurer la cohérence de cette définition.

Il faut cependant souligner qu'un « vecteur tangent » à M n'a pas de sens si M n'est pas un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . La tangente est plutôt vue ici dans \mathbb{R}^n , grâce aux cartes locales.

Bien que nous puissions visualiser les vecteurs (au moins dans \mathbb{R}^n), cette définition ne fait pas apparaître une structure d'espace vectoriel de $T_x M$. C'est pourquoi nous avons recours à une seconde définition.

On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur M ,

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ de classe } C^1\}$$

Cet espace vectoriel est une algèbre pour le produit usuel des fonctions : $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Pour $x \in M$, nous définissons sur $\mathcal{F}(M)$ une relation d'équivalence :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } x \in U, \text{ tel que } f|_U = g|_U$$

On note $C_p^1(M) = \mathcal{F}(M)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathcal{F}(M)$ pour cette relation. Le produit sur $\mathcal{F}(M)$ passe au quotient. Donc $C_p^1(M)$ est une algèbre.

Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

Définition 1.16 Une dérivation en x est une application linéaire $D_x : C_x^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_x est une dérivation si, pour tous réels α et β , et toutes fonctions \tilde{f}, \tilde{g} dans $C_x^1(M)$,

$$(i) D_x \cdot (\alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}) = \alpha D_x \cdot \tilde{f} + \beta D_x \cdot \tilde{g} \text{ (linéarité),}$$

$$(ii) D_x \cdot (\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = g(x) D_x \cdot \tilde{f} + f(x) D_x \cdot \tilde{g} \text{ (Leibniz)}$$

Définition 1.17 l'espace tangent en x à M , $T_x M$, est l'espace vectoriel des dérivations sur $C_x^1(M)$.

Remarque 1.18 la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{F}(M)$ sert à ne faire dépendre $D_x \cdot (\tilde{f})$ que des valeurs de f « autour » de x . En effet ; la seule information que \tilde{f} puisse conserver de f est son comportement dans un voisinage aussi petit qu'on le veut de x . Donc aucun autre point que x ne peut intervenir dans la définition d'une dérivation D_x sur $C_x^1(M)$. Ensuite, la relation de Leibniz assure que cette dépendance ne peut se faire qu'au maximum par la première dérivée de f en x , car une dérivation d'ordre supérieur ne serait pas compatible avec cette relation.

Exemple 1.19 1/ Plaçons dans le cas $M = \mathbb{R}^n$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ on pose $(x_0, u) \cdot f = df_{x_0}(u)$. Le couple (x_0, u) définit bien une dérivation en x_0 . Désignons par $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour tout $i (i = 1, \dots, n)$, on a :

$$(x_0, e_i) \cdot f = df_{x_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}(f)$$

quelle que soit la fonction $f \in D_{x_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ainsi, le couple (x_0, e_i) s'identifie à l'opérateur de dérivation $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}$:

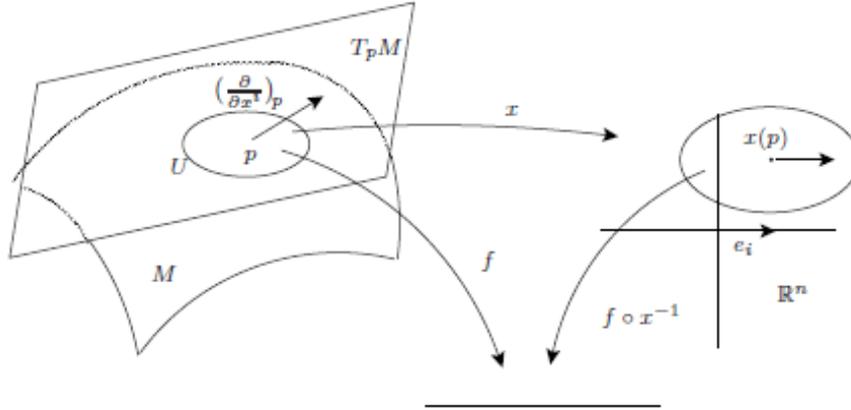
$$(x_0, e_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}$$

(x_1, \dots, x_n) étant le système de coordonnées cartésiennes.

2/ Pour toute carte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ en x_0 , on associe n dérivations en x_0 en posant

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x_0}(f) = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

pour tout $f \in D_{x_0}(M, \mathbb{R})$.



Équivalence des définitions

Ces deux définitions sont équivalentes, nous pouvons les relier de la façon suivante. Soit $\gamma \in \mathcal{C}$ un représentant d'une classe de \mathcal{C} / \sim . Soit $f \in \mathcal{F}(M)$ un représentant d'une classe de $C_x^\infty(M)$. On définit

une dérivation associée à γ par la formule :

$$\tilde{f} \mapsto \left(\frac{df}{dt}(\gamma(t))\right)_{t=0}$$

On vérifie bien que c'est une dérivation sur $C_x^\infty(M)$, c'est à dire que le résultat ne dépend que des classes de f et γ . Nous avons ainsi une relation entre la première définition et la seconde. Il est possible de montrer que cette application est une bijection.

Nous tirons de tout cela que $T_x M$ est un espace vectoriel, dont tout vecteur $X(x)$ peut être vu soit comme la dérivée d'une courbe (non unique) passant par x , donc comme un « vecteur », soit comme une dérivation en x sur les fonctions définies au voisinage de x .

Puisque nous avons un espace vectoriel, il est utile d'en trouver une base. Soient (x_1, \dots, x_n) des coordonnées au voisinage de x . Une base de $T_x M$ est donnée par les n dérivations $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_x$,

pour $1 \leq i \leq n$, dont les courbes associées sont les γ_i définies par : $x_j(\gamma_i(t)) = 0$ pour $j \neq i$ et $x_i(\gamma_i(t)) = t$.

En particulier, la dimension de $T_x M$ en tant qu'espace vectoriel est la dimension de M en tant que variété. Donc tout vecteur $X(x) \in T_x M$ s'écrit $X(x) = X_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x$, où les $X_i(x)$ sont des réels. Cette écriture a l'avantage de suggérer que $X(x)$ est un vecteur puisqu'il a n composantes $X_1(x), \dots, X_n(x)$, et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe définit ce vecteur, avec bien sûr $\gamma(0) = x$, alors nous avons

Proposition 1.20 *L'espace tangent $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension n et l'ensemble $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \mid i = 1, \dots, n \right\}$ forme une base de $T_x M$ en coordonnées locales.*

Exemple 1.21 *1/ Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ une courbe sur la sphère unité dans \mathbb{R}^{n+1} tel que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. La courbe satisfait à $\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle = 1$, alors $\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$. Donc, $\langle x, X \rangle = 0$, (i.e) tout vecteur tangent $X \in T_x \mathbb{S}^n$ est orthogonal à x . D'autre part, si $X \neq 0$ tel que $\langle x, X \rangle = 0$, alors $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$ avec $\gamma : t \mapsto \cos(t |X|) \cdot x + \sin(t |X|) \cdot \frac{X}{|X|}$ est une courbe sur \mathbb{S}^n avec $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. Par conséquent,*

$$T_x \mathbb{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, X \rangle = 0\}$$

1.2.2 Application Tangente

Définition 1.22 *Soient M^m et N^n deux variétés différentiables et soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ . L'application tangent de f au point x est l'application linéaire ;*

$f_ : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ définie par ;*

$$(f_* v)g = v(g \circ f), \forall g \in C^\infty(f(p)), v \in T_p M$$

*On peut écrire aussi $T_x f$ ou f_{*x} .*

Remarque 1.23 *1. $f_* v$ est un vecteur tangent au point $f(x)$ pour tout $v \in T_x M$ et l'application f_* est linéaire.*

*2. Si $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$, alors $f_{*x} = f'(x)$ (avec l'identification canonique $T_p \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$).*

3. Soient M, N et L trois variétés différentiables et $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow L$ deux applications de classe C^∞ , alors

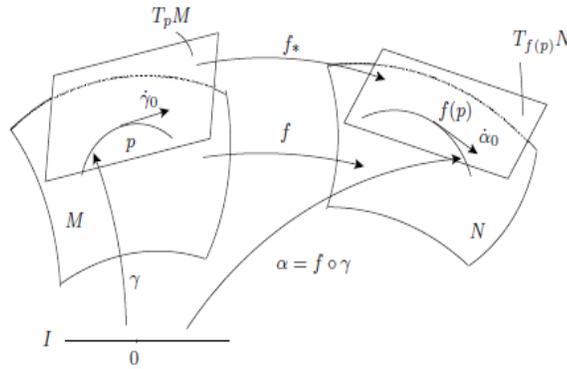
$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$$

pour tout $p \in M$.

4. L'interprétation de l'application tangente en utilisant les courbes :

soit $v \in T_p M$ et soit ; $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe de classe C^∞ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}_0 = v$.

Remarque 1.24 soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ et $\alpha = f \circ \gamma : I \rightarrow N$, alors, $f_* v = \dot{\alpha}_0$.



Soit $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ les coordonnées locales de $x \in M^m$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ les coordonnées locales de $f(x) \in N^n$. La matrice de $f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ par rapport à les bases $(\frac{\partial}{\partial x^i})_x$, $i = 1, \dots, m$ et $(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(x)}$, $j = 1, \dots, n$ est

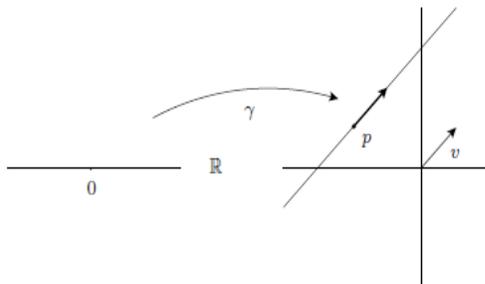
$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x = \sum_{i=1}^n f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{f(x)}, 1 \leq j \leq m.$$

Ainsi on obtient la matrice (a_{ij}) dont la dimension est $n \times m$; $a_{ij} = f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x y^i = \frac{\partial}{\partial x^j} (y^i \circ f)$, cela s'appelle la matrice jacobienne de f au point x (par rapport à des bases données). En tant que matrice, c'est la même matrice de l'application $g(x(p))$, $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ par rapport aux bases standards de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n .

Théorème 1.25 Soit $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ et $x \in M$. Alors f est un difféomorphisme locale au point x si et seulement si $f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ est un isomorphisme.

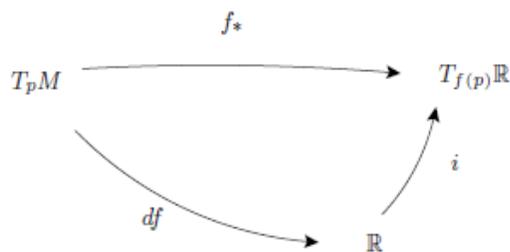
Exemple 1.26 1/ l'espace tangent d'un espace vectoriel de dimension n

Soit V un espace vectoriel (réel) de dimension n . Rappelons que tout isomorphisme (linéaire) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ induit la même C^∞ -structure sur V , ainsi nous pouvons identifier V et $T_x V$ de façon naturelle pour tout $x \in V$: si $p \in V$, alors il existe un isomorphisme canonique $i : V \rightarrow T_x V$. En effet ; soit $v \in V$ et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V$, $\gamma(t) = x + tv$ et on pose $i(v) = \dot{\gamma}(0)$



2/ Si $V = \mathbb{R}^n$, alors $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

3/ Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $x \in M$, on définit la différentielle de f par $df : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $dfv = v(f)$, $v \in T_p M$, on peut la désigner aussi par df_p par l'isomorphisme : $i : \mathbb{R} \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ on obtient $df = i^{-1} \circ f_*$, nous identifions $df = f_*$.



4/ l'espace tangent d'une variété produit

Soient M et N deux variétés différentiables et soient ;

$$\pi_1 : M \times N \rightarrow M$$

$$\pi_2 : M \times N \rightarrow N$$

deux projections ,en utilisant ces projections on peut identifier $T_{(p,q)}(M \times N)$ et $T_p M \oplus T_q N$ d'une

façon naturelle; on définit un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \tau : T_{(p,q)}(M \times N) &\rightarrow T_p M \oplus T_q N \\ v &\mapsto \tau v = \underbrace{\pi_{1*} v}_{\in T_p M} + \underbrace{\pi_{2*} v}_{\in T_q N} \end{aligned}$$

1.2.3 Fibré tangent

Sur une variété, la notion de dérivation garde un sens. Dans ces conditions, on aimerait bien avoir un résultat analogue à celui obtenu pour les dérivations ponctuelles : une dérivation sur une variété M devrait pouvoir nous permettre d'associer à chaque point x de M un vecteur tangent X_x de $T_x M$. Pour ce faire, nous allons montrer que l'ensemble des vecteurs tangents est lui-même une variété d'une façon naturelle.

Posons tout d'abord

Définition 1.27 Soit M une variété différentiable. On définit le fibré tangent TM de M comme l'union disjointe de tous les espaces tangents de M (i.e)

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

Les points de TM sont les couples (x, v) où $x \in M$ et $v \in T_x M$ et $\pi : TM \rightarrow M$ la projection $\pi(x, v) = x$. Pour le moment, TM est la somme ensembliste des différents espaces vectoriels tangents à M , sans aucune topologie. Pour chaque carte (U, φ) , l'application

$$\Phi : (x, \xi) \mapsto (\varphi(x), T_x \varphi(\xi))$$

est une bijection de TU sur $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$.

Un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de M étant donné, on munit TM d'une topologie en imposant les conditions suivantes :

- a) les TU_i sont des ouverts de TM .
- b) les applications Φ_i sont des homeomorphismes.

Autrement dit, $\Omega \subset TM$ est ouvert si et seulement si $\Phi_i(\Omega \cap TU_i)$ est, pour tout i , un ouvert de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Pour voir que ces conditions sont cohérentes, on remarque que, d'après

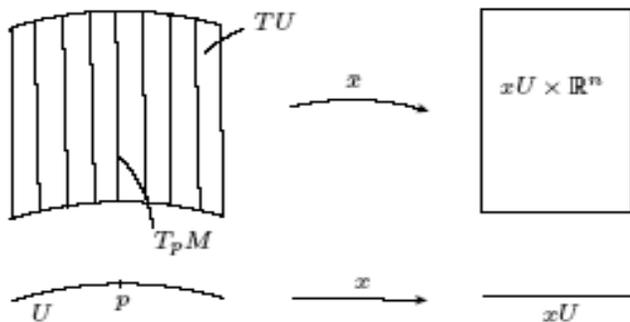
la définition même de l'espace tangent, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ (y, v) &\mapsto ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), T_x(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, et même un difféomorphisme. On a donc défini une topologie sur TM qui en fait une variété topologique munie de l'atlas $(TU_i, \Phi_i)_{i \in I}$. Cet atlas étant lisse, TM est une variété lisse de dimension $2 \dim M$ (si M est une variété C^p avec $p > 0$, alors TM est une variété C^{p-1}). Cette variété s'appelle le fibré tangent à M .

Le fibré tangent TM a une structure canonique d'une variété différentiable.

Théorème 1.28 *Soit M une variété différentiable de dimension n , le fibré tangent TM de M est muni de la topologie naturelle et d'une structure de variété lisse de dimension $2n$ telle que la projection $\pi : TM \rightarrow M$ est lisse.*



Définition 1.29 *Soient E, B, F trois variétés. Une application lisse p de E dans B est une fibration (de base B , de fibre type F et d'espace total E) si pour tout $x \in B$, il existe un ouvert U contenant x et un difféomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que le diagramme*

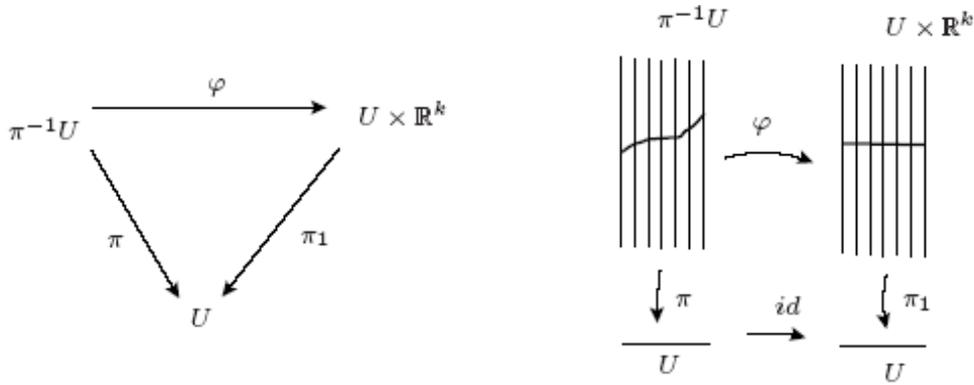
$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ p \downarrow & \searrow \text{pr}_1 & \\ U & & \end{array}$$

soit commutatif. On appelle espace fibré le quadruplet (E, p, B, F) .

Proposition 1.30 *La projection canonique p de TM sur M est une fibration.*

Preuve. Il suffit d'introduire l'application

$$\begin{aligned} \psi_i : p^{-1}(U) = TU_i &\rightarrow U_i \times \mathbb{R} \\ \xi_x &\mapsto (x, T_x\varphi(\xi)) \end{aligned}$$



■

Remarque 1.31 la restriction de ψ_i la fibre T_xM de x est un isomorphisme d'espaces vectoriels de T_xM sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.32 Un fibré vectoriel réel sur une variété B est un espace fibré (E, p, B, F) tel que

- a) la fibre type F et les fibres $p^{-1}(b)$, $b \in B$ sont des espaces vectoriels réels ;
- b) pour toutes trivialisations locale φ , la restriction de φ à $p^{-1}(b)$ (qui envoie $p^{-1}(b)$ dans $\{b\} \times F$) induit un isomorphisme d'espaces vectoriels sur F . La fibre $p^{-1}(b)$ est notée E_b .

Remarque 1.33 Ainsi le fibré tangent est difféomorphe localement à un produit :

$\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (on appelle une trivialisations locale). En général TM n'est pas globalement trivial, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de difféomorphisme de TM dans $M \times \mathbb{R}^n$ linéaire le long des fibres.

Exemple 1.34 1/ Le fibré tangent à \mathbb{R}^n admet une trivialisations globale $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via l'identification canonique $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

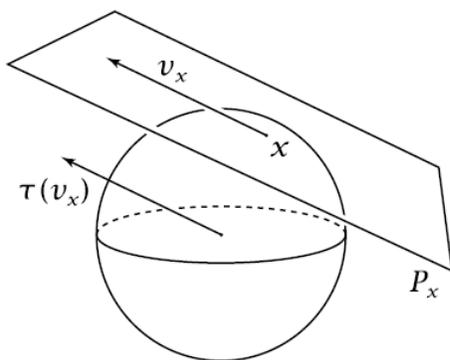
2/ Le fibré tangent au cercle \mathbb{S}^1 admet une trivialisations globale car il est difféomorphe au cylindre : $T\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. En revanche le fibré tangent $T\mathbb{S}^2$ n'admet pas de trivialisations globale. En effet ; Le fibré $T\mathbb{S}^n$ est trivial pour $n = 1; 3; 7$. L'explication est que ces trois sphères sont des groupes de Lie pour $n = 1; 3$:

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{U}(1); \quad \mathbb{S}^3 = \mathbb{S}\mathbb{U}(2)$$

(si G est un groupe de Lie alors TG est toujours trivial).

2. Le fibré TS^n n'est pas trivial pour n pair. La preuve passe par l'inexistence de n sections linéairement indépendentes. En effet; toute section de TS^n , pour n pair, s'annule en au moins un point. Ce théorème a été énoncé par Poincaré à la fin du 19 ème siècle, et démontré par Brouwer en 1912, avec des notions de topologie algébrique (caractéristique d'Euler et indice de Poincaré-Hopf).

Pour motiver la définition d'un fibré vectoriel à \mathbb{S}^2 , considérons un vecteurs tangents à la sphère \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . A chaque point $x \in \mathbb{S}^2$, il ya un plan tangent \mathbb{P}_x . Ceci est un espace vectoriel de dimension 2. Si nous considérons un vecteur v_x dans \mathbb{P}_x comme un vecteur de \mathbb{R}^3 , alors la convention standard en algèbre linéaire serait d'identifier v_x avec tout son parallèle translaté, et en particulier avec l'unique translation $\tau(v_x)$ ayant son origine dans \mathbb{R}^3 . L'association $v_x \rightarrow \tau(v_x)$ définit une fonction $\tau : TS^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ où TS^2 est l'ensemble de tous les vecteurs tangents v_x en x . Cette fonction τ est surjective mais pas injective pour tout x dans un grand cercle en \mathbb{S}^2 . En outre $\tau(0_x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, alors $\tau^{-1}(0)$ est une sphère entière. D'autre part, la fonction $\tau : TS^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$, $v_x \mapsto (x, \tau(v_x))$, est injective, et peut être utilisé pour définir une topologie sur TS^2 comme un sous-espace de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3$, à savoir le sous-espace comprenant des paires (x, v) avec v orthogonal à x .



Ainsi TS^2 est d'abord un espace topologique, et deuxièmement, il est l'union disjointe de tous les espaces vectoriels \mathbb{P}_x pour $x \in \mathbb{S}^2$. On peut penser que TS^2 est comme une famille continue d'espaces vectoriels paramétrées par des points de \mathbb{S}^2 . La plus simple famille continue d'espaces vectoriels de dimension 2 paramétrée par les points de \mathbb{S}^2 est bien sûr le produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Est-ce que c'est vraiment TS^2 ?

Plus précisément, nous pouvons nous demander s'il y'a un homéomorphisme

$h : TS^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}^2$ qui envoie chaque plan \mathbb{P}_x au plan $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ par un isomorphisme d'espace vectoriel. Pour chaque vecteur non nul fixe $v \in \mathbb{R}^2$ la famille de vecteurs $v_x = h^{-1}(x, v)$ seraient un champ continu de vecteurs tangents non nuls à S^2 , qui n'est pas vrai toujours. Donc TS^2 est véritablement tordu, et n'est pas sous la forme d'un produit $S^2 \times \mathbb{R}^2$.

1.2.4 Champs de Vecteurs

Jusqu'à maintenant nous avons vu les notions d'espace et de vecteur tangents en un point, qui correspondent aux mouvements infinitésimaux à partir d'une configuration donnée. En considérant toutes les configurations possibles, nous sommes maintenant en mesure de définir des mouvements sur toute la variété : ces mouvements vont être introduits comme des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des équations différentielles. Du point de vue des espaces de configurations, cela signifie que l'on caractérise les mouvements par la donnée en tout point de la vitesse. L'outil principal sera ainsi la notion de champ de vitesse ou de champ de vecteurs : il s'agit d'une application assignant à chaque point x de la variété un vecteur X_x de l'espace tangent.

Définition 1.35 *Un champ de vecteurs différentiable (ou champ de vecteurs) sur M est une application différentiable $X : M \rightarrow TM$ qui, à un point $x \in M$, associe un couple formé de x et d'un vecteur tangent à M en $x : X(x) = (x, X_x)$. Autrement dit, $\pi \circ X = id_M$.*

On notera $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M .

De même qu'un vecteur tangent en x définit une dérivation sur l'ensemble des germes $C^\infty(x)$, un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble $C^\infty(M)$ des fonctions de M dans \mathbb{R} de classe C^∞ . En effet l'application

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ g &\mapsto X(g) \quad \text{tel que } X(g)(x) = X_x(g) \end{aligned}$$

définie par un champ de vecteurs X est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ s'identifiera donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur $C^\infty(M)$.

Exemple 1.36 *(Champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n). En la base naturelle de $T_x\mathbb{R}^n$, tout champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n s'écrit comme*

$$X(x) = \left(x, \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x\right)$$

où X^i est une fonction différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . En particulier, pour $i = 1, \dots, n$, l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : x \mapsto (x, \frac{\partial}{\partial x^i} |_x)$$

est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n .

En tant que dérivation, ce champ de vecteurs est la dérivée partielle par rapport à x^i , c'est-à-dire l'application $g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}$. On pourra réécrire le champ de vecteurs X comme la dérivation

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} : g \mapsto \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

Un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n peut aussi être considéré comme une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en l'identifiant à $x \mapsto (X^1(x), \dots, X^n(x))$.

Considérons une carte (U, φ) de M , avec $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$. Sur le domaine U de la carte, tout champ de vecteurs X sur M s'écrit

$$X : x \in U \mapsto (x, \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} |_x)$$

où $X^i = X(x^i) \in C^\infty(M)$.

En particulier, comme U est lui même une variété, l'application de U sur $\pi^{-1}(U)$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = d\varphi^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi : x \mapsto (x, \frac{\partial}{\partial x^i} |_x) \subset T_x M = T_x U$$

définit un champ de vecteurs sur U . On l'appelle champ de coordonnées.

Proposition 1.37 Les champs de vecteurs sur M sont les dérivations de $C^\infty(M)$ à valeurs dans $C^\infty(M)$, i.e.

$$X(M) \simeq \text{Der}(C^\infty(M), C^\infty(M))$$

Exemple 1.38 (Champs de vecteurs sur les sphères)

1/ Sur $\mathbb{S}^1 = \{e^{it}\}$, tout champ de vecteurs est de la forme $X_t = f(t) \frac{d}{dt}$, avec $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$,

2/ Sur $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, tout champ de vecteurs est de la forme

$$X_{(x,y,z)} = f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + h(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

avec $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ telles que $xf(x, y, z) + yg(x, y, z) + zh(x, y, z) = 0$.

Définition 1.39 Une algèbre de Lie est un espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une opération bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ qu'on appelle crochet de Lie, qui a les propriétés suivantes :

1/ le crochet est antisymétriques : $[a, b] = -[b, a]$, pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$;

2/ le crochet satisfait l'identité de Jacobi : $[[a, b], c] + [[c, a], b] + [[b, c], a] = 0$, pour tout $a, b, c \in \mathfrak{g}$.

Par conséquent, on a

Corollaire 1.40 Les champs de vecteurs $\mathfrak{X}(M)$ forment une algèbre de Lie, avec crochet

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad f \in C^\infty(M)$$

qui vaut en coordonnées locales,

$$[X, Y] \Big|_U = \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Preuve. Le crochet de Lie sur $\mathfrak{X}(M)$ est induit par le crochet de Lie naturel sur les dérivations $Der(C^\infty(M), C^\infty(M))$, donné par $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. ■

Proposition 1.41 Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$; et $f, g \in C^\infty(M)$, alors,

1/ $[a, a] = 0$, pour tout $a \in \mathfrak{g}$;

2/ $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,

3/ l'identité de Leibniz : $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] = [X, [Y, Z]]$,

3/ $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Lemme 1.42 Soient (U, φ) , $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, une carte et $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$, $i = 1, \dots, n$, les coordonnées de champ de vecteur correspond, alors

$$[\partial_i, \partial_j] = 0, \quad \forall i, j.$$

1.3 Connexions Linéaires

Nous allons introduire maintenant une nouvelle structure sur une variété M . Cette structure nous permettra de définir une nouvelle dérivation, la dérivation covariante. Cette dérivation agira sur les champs de vecteurs, en général.

Définition 1.43 Une connexion linéaire sur M est une application ∇

$$\begin{aligned}\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes

$$1) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$2) \nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$3) \nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$$

$$4) \nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$

Définition 1.44 Soit ∇ une connexion sur M et (U, φ) une carte sur M de coordonnées locales (x_1, x_2, \dots, x_n) . On définit une fonction différentiable $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appelé symboles de Christoffel.

En général,

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ est la dérivée covariante associée à la connexion linéaire ∇ .

Exemple 1.45 1/ Une connexion affine est une sorte de dérivée directionnelle de champs de vecteurs sur une variété. Imaginez un champ de vecteurs V sur \mathbb{R}^n (qui est une application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$). Prenez un point et choisissez un vecteur tangent $X \in T_p \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

On note par $\nabla_X V$ la dérivée covariante de V en p dans la direction X . on écrit $X = a^i \frac{d}{dx^i}$.

Alors

$$\nabla_X V = a^i \frac{dV}{dx^i} \in T_p \mathbb{R}^n$$

2/ On peut voir la connexion canonique sur \mathbb{R}^n comme $\nabla_X Y = X(Y^j) \frac{d}{dx^i} = X^i \frac{dY^j}{dx^i} \frac{d}{dx^i}$. les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k de la connexion par rapport à la base $\frac{d}{dx^i}$ sont identiquement nuls.

1.3.1 Aspect géométrique

Cette dérivée covariante permet de définir une dérivation covariante le long d'une courbe dans M , elle nous donnera une interprétation géométrique de la connexion. Pour cela, soit donné un champ de vecteurs $Y(t)$ le long d'une courbe γ . C'est à dire que $Y(t)$ n'est défini qu'au dessus des points $\gamma(t)$ de M . Alors la dérivation covariante de $Y(t)$ le long de γ , notée $\frac{D}{dt}Y$, est par définition

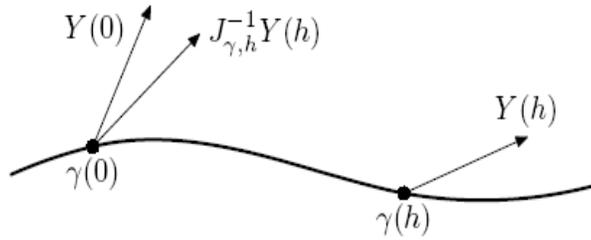
$$\frac{DY}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y(t)$$

c'est une dérivation le long d'un paramètre t . On remarque que la donnée de la dérivation covariante le long de toute courbe est équivalente à la donnée de la connexion linéaire ∇ , puisque tout vecteur est tangent à au moins une courbe.

Nous dirons que le champ $Y(t)$ est parallèle le long de γ si pour tout t , $\frac{DY}{dt}(t) = 0$. Pour une condition initiale $Y(0) \in T_{\gamma(0)}M$ donnée, il existe un unique champ de vecteurs $Y(t)$ parallèle le long de γ qui admet cette valeur en $t = 0$. Ceci définit alors une application

$$J_{\gamma,h} : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(h)}M$$

qui à $Y(0)$ associe $Y(h)$ où le champ $Y(t)$ est l'unique solution ci-dessus, de valeur initiale $Y(0)$. Cette application est linéaire et inversible, elle porte le nom de transport parallèle le long de γ .



Définition 1.46 Soit ∇ une connexion sur une variété différentiable M . Alors, 1/ le tenseur de torsion T de ∇ est une application

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

2/ le tenseur de courbure R de ∇ est une application

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposition 1.47 1) T et R sont linéaires.

Pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ on a

2) $T(X, Y) = -T(Y, X)$

3) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

4/ Si $T = 0$, alors $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$,

qui est appelée l'identité de Bianchi.

5/ Si on pose $\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i$, $i = 1, \dots, n$ où x^1, \dots, x^n sont les coordonnées locales de la carte (U, φ) sur M , alors $R(X^i, X^j)X^k = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l X^l$ où

$$R_{ijk}^l = \sum_{m=1}^n (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) + X^i(\Gamma_{jk}^l) - X^j(\Gamma_{ik}^l)$$

1.4 Sous-variétés d'une variété différentiable

1.4.1 Théorème du rang constant

On note $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ atlas de la variété M_1 et $\mathcal{A}_2 = \{(V_j, \psi_j) \mid j \in J\}$ atlas de la variété M_2 .

Théorème 1.48 (Théorème du rang constant) Soient (M_1, \mathcal{A}_1) et (M_2, \mathcal{A}_2) deux variétés différentiables de classe C^k ($k \geq 1$), de dimensions n et m respectivement, f une application de M_1 dans M_2 de rang constant p de classe C^l avec $l \leq k$, et, soit x_0 un point de M_1 . Alors, il existe une carte (U, φ) en x_0 , une carte (V, ψ) en $y_0 = f(x_0)$, telles que l'expression locale de f dans les cartes φ et ψ se réduit à :

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : (u_1, \dots, u_n) \mapsto (u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0)$$

1.4.2 Immersions, Submersion, Plongement

Définition 1.49 Soit $f \in C^\infty(M, N)$. On dit que f est

1/ une immersion si f_*p est injective pour tout $p \in M$;

2/ une submersion si f_*p est surjective pour tout $p \in M$;

3/ un plongement si ;

3.1/ f est une immersion injective,

3.2/ $f : M \rightarrow f(M)$ est un homéomorphisme vers $f(M) \subset N$ muni de la topologie induite.

Soient M_1 et M_2 deux variétés différentiables de classe C^k de dimensions n et m respectivement et $f : M_1 \rightarrow M_2$ une application de classe C^l ($1 \leq l \leq k$).

(i) On dit que f est une immersion, si elle est de $\text{rang}n = \dim M_1$ en tout point de M_1 ; et dans ces conditions on a

$$\dim M_1 = n \leq \dim M_2 = m.$$

(ii) On dit que f est une submersion, si elle est de $\text{rang}m = \dim M_2$ en tout point de M_1 ; ce qui entraîne que l'on a :

$$\dim M_1 = n \geq \dim M_2 = m.$$

(iii) On dit que f est un étalement , si elle est de $\text{rang}n = \dim M_1 = m = \dim M_2$.

Il résulte du théorème du rang constant que l'on a :

Théorème 1.50 Soit $f \in C^\infty(M, N)$ avec $f(p) = q$. Si $f_*p : T_pM \rightarrow T_qN$ est injective, alors il existe une carte (U, φ) de M en p , de coordonnées x_1, \dots, x_m , et une carte (V, ψ) de N en q , de coordonnées y_1, \dots, y_n , telles que

(i) $f(U) \subset V$,

(ii) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m})$

Théorème 1.51 Soit $f \in C^\infty(M, N)$ avec $f(p) = q$. Si $f_*p : T_pM \rightarrow T_qN$ est surjective, alors il existe une carte (U, φ) de M en p , de coordonnées x_1, \dots, x_m , et une carte (V, ψ) de N en q , de coordonnées y_1, \dots, y_n , telles que

(i) $f(U) \subset V$,

(ii) $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.

1.4.3 Sous-variétés

Soit M une variété différentiable de dimension n de classe C^k avec ($k \geq 1$), soit p un entier naturel inférieur ou égal à n ($p \leq n$), et soient X un espace topologique et $f : X \rightarrow M$ une application qui vérifie la propriété suivante

(P) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x , une carte locale (V, φ) au point $y = f(x)$ telle que $f(U) \subset V$ et $\varphi \circ f$ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(V) \cap \mathbb{R}^p$, en identifiant \mathbb{R}^p au sous-espace $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ de \mathbb{R}^n .

Les couples $(U, \varphi \circ f)$ forment un atlas de classe C^k sur X , définissant ainsi une structure de variété différentiable de dimension p de classe C^k sur X ; appelée image inverse par f de la structure de variété de M de classe C^k , pour laquelle f est une immersion.

On distingue les cas suivants :

1. Si X est un sous-espace topologique de M ($X \subset M$), f est l'injection canonique $x \mapsto x$ vérifiant la propriété (P), on dit que X est une sous-variété (plongée) de M .
2. Si X est un sous-ensemble de M muni d'une topologie qui n'est pas nécessairement la topologie induite par celle de M , mais qui est telle que l'injection canonique $f : x \mapsto x$ soit continue et possède la propriété (P), X est appelée sous-variété immergée dans M .

Remarque 1.52 1/ On remarque qu'une même partie de M peut être munie parfois de plusieurs structures différentes de sous-variété immergée.

2/ Toute partie ouverte d'une variété différentiable M de dimension n et de classe C^k est une sous-variété de M de dimension n et de classe C^k .

Proposition 1.53 Soit M une variété différentiable de dimension m et N un sous ensemble de M . N est dite sous variété de M de dimension n si et seulement si $\forall x \in N$, il existe une carte $(U, \varphi) \in \text{atl}(M, x)$ tel que

$$\begin{aligned} x \in U \cap N &\Leftrightarrow \varphi_{1+n}(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0 \\ y \in \varphi(U \cap N) &\Leftrightarrow y_{1+n} = \dots = y_m = 0 \end{aligned}$$

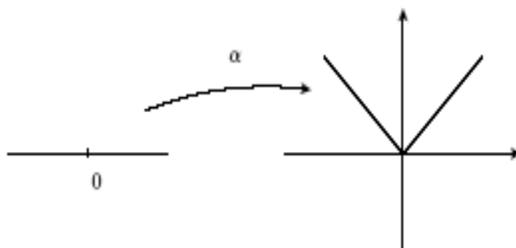
Proposition 1.54 Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m, n respectivement et $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ . Si f est de rang constant r sur M , alors ;

1/ $\forall y \in f(M)$, l'ensemble $K = f^{-1}(y)$ est sous-variété fermée régulière de M de dimension $m - r$.

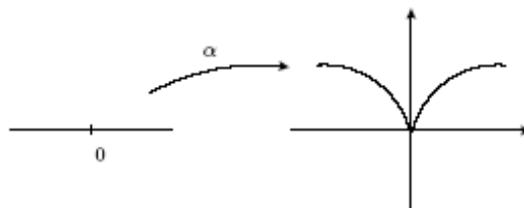
2/ $\forall x \in K$, $T_x K = \text{Ker}(T_x f)$.

Exemple 1.55 a) Si M_1, \dots, M_k sont des variétés différentiables, alors toutes les projections $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ sont des submersions.

b) ($M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}^2$) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, |t|)$ n'est pas différentiable au point $t = 0$



c) $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ est de classe C^∞ mais n'est pas une immersion puisque $\alpha'(0) = 0$



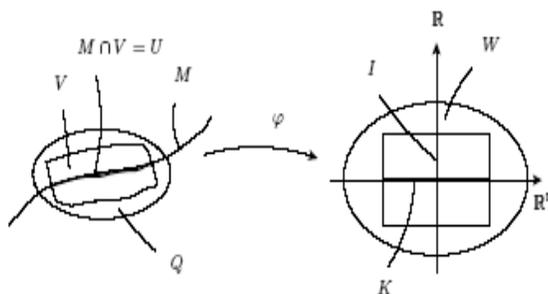
d) Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ telle que $\nabla f(p) = (D_1 f(p), \dots, D_{n+1} f(p)) \neq 0$ pour tout $p \in M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = 0\} \neq \emptyset$. Alors M est une sous-variété de \mathbb{R}^{n+1} de dimension n .

Preuve. Soit $p \in M$. On applique une transformation et une rotation telle que $p = 0$ et $\nabla f(0) = (0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0))$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \neq 0$.

On définit une application $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, f(x))$, alors

$$\det \varphi'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0) \neq 0$$

par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $Q \ni p$ et $W \ni \varphi(0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telle que $\varphi : Q \rightarrow W$ est un difféomorphisme.



On prend un ouvert $0 \in K \subset \mathbb{R}^n$, et l'intervalle ouvert $0 \in I \subset \mathbb{R}$, telle que $K \times I \subset W$. Soit $V = \varphi^{-1}(K \times I) \cap Q$ et $U = V \cap M$, alors $\varphi : V \rightarrow K \times I$ est un difféomorphisme.

Pour $y = \varphi|_U$ répéter l'opération pour tout $p \in M$ et conclure que les couples (U, y) forment un atlas de classe C^∞ de M . Puisque $i : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfait à $i|_U = y^{-1} \circ \varphi|_U$, alors, i est un plongement.

(1) La sphère \mathbb{S}^n est définie comme la préimage de 1. par la submersion $x \mapsto \|x\|^2$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ dans \mathbb{R} (où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne usuelle de \mathbb{R}^n). Donc le sous-espace tangent à \mathbb{S}^n en x est le noyau de l'application linéaire $v \mapsto \langle v, x \rangle$, i.e. $T_x \mathbb{S}^n$ est l'orthogonal de x (pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n). ■

Chapitre 2

Variété Riemannienne

Soient V_1, V_2, \dots, V_k et W des espaces vectoriels, soit F une application de $V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$. On dit que l'application F est k -linéaire ou (multilinéaire) si elle est linéaire sur chaque variable i.e.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, F(v_1, \dots, \alpha v_{i_1} + \beta v_{i_2}, \dots, v_k) = \alpha F(v_1, \dots, v_{i_1}, \dots, v_k) + \beta F(v_1, \dots, v_{i_2}, \dots, v_k)$$

pour tout $i = 1, \dots, k$.

Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} , l'application $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée un covecteur, l'ensemble des covecteurs est appelé le dual de V noté V^* .

On va considérer que $\langle \omega, v \rangle = \langle v, \omega \rangle = \omega(v) \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $\omega \in V^*$.

Proposition 2.1 *Si (v_1, \dots, v_n) est une base de V espace vectoriel de dimension n , alors (w^1, \dots, w^n) est une base de V^* et on a $w^j(v_i) = \delta_{ij}$.*

En particulier, $\dim V = \dim V^$.*

2.1 Notions de Tenseur

Définition 2.2 1/ Un k -tenseur covariant sur V est une application k -linéaire $V^k \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $V^k = \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ fois}}$. On note $T^k(V)$ l'ensemble des tenseurs k -covariante sur V

2/ Un l -tenseur contravariant est une application linéaire sur $V^{*l} \rightarrow \mathbb{R}$. On note $T_l(V)$ l'ensemble des tenseurs l -contravariant sur V

3/ Un k -tenseur covariant et l -tenseur contravariante est une application $(k + l)$ -linéaire sur

$V^k \times V^{*l} \rightarrow \mathbb{R}$.

un tenseur de type (k, l) est k -covariante et l -contravariante. On note $T_l^k(V)$ l'ensemble des tenseurs de type (k, l) .

4/ Par convention $T^0(V) = T_0(V) = \mathbb{R}$.

Définition 2.3 le produit tensoriel de deux tenseurs $F \in T_l^k(V)$ et $G \in T_q^p(V)$ est le tenseur noté $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_{k+p}, w^1, \dots, w^{l+q}) = F(v_1, \dots, v_k, w^1, \dots, w^l)G(v_{k+1}, \dots, v_{k+p}, w^{l+1}, \dots, w^{l+q})$$

Lemme 2.4 Si (v_1, \dots, v_n) est la base de V et $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ la base duale correspondante à V (i.e. $\omega^i(v_j) = \delta_j^i$), alors le tenseur

$$w^{i_1} \otimes \dots \otimes w^{i_k} \otimes v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_l}, \quad 1 \leq j_p, \quad i_q \leq n$$

forme une base de $T_l^k(V)$. Par conséquent, $\dim T_l^k(V) = n^{k+l}$.

2.1.1 Fibré Cotangent

Soit $f \in C_p^\infty(M)$ une fonction différentiable en $p \in M$, alors

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto df_p(v) = v(f) \end{aligned}$$

et $df_p \in T_p^* M$ (dual de $T_p M$). On appelle $T_p^* M$ l'espace cotangent de M en p . Si (U, φ) , $x = (x^1, \dots, x^n)$ est une carte en p et $((\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p)$ est la base de $T_p M$, la différentielle dx_p^i , $i = 1, \dots, n$, des fonctions x^i en p forme une base duale de $T_p^* M$ i.e. $df_p = (\partial_i)_p(f) dx_p^i$.

On définit le fibré cotangent de M par $T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$ tel que $\pi : T^* M \rightarrow M$, $\omega \in T_p^* M : \pi(\omega, p) = p \in M$ est la projection canonique, et une section (champs covecteurs sur M ou 1-forme différentielle), une application $\omega : M \rightarrow T^* M$, avec $\pi \circ \omega = id$. On note par $\mathfrak{X}^1(M)$ (ou $\mathfrak{X}_0^1(M)$, $\mathfrak{X}^*(M)$, $\mathfrak{X}^{0,1}(M)$) l'ensemble des champs covecteurs sur M .

Si (U, φ) est une carte et ω un champs covecteurs sur U , alors il existe des fonctions $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tel que $\omega = \omega_i dx^i$.

2.1.2 Tenseurs sur une variété

Définition 2.5 Pour tout $p \in M$, définissons l'espace vectoriel $T_p^{(s,r)}M = T_pM \otimes \dots \otimes T_pM \otimes$
 $\underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{s \text{ fois}}$

$$\underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{r \text{ fois}}$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)}M$ est un tenseur de type (s, r) au dessus de p . Dans une base associée à des coordonnées (x_i) au voisinage de p , il s'écrit

$$T|_p = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}(p) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx_{|p}^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{|p}^{j_r}$$

2.2 Métrique Riemannienne

Définition 2.6 On appelle métrique Riemannienne de classe C^p sur M la donnée pour tout $m \in M$ d'un produit scalaire g_m (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur T_mM dépendant de façon C^p de m (i.e. pour toute carte (U, φ) de classe C^{p+1} sur M , on suppose que la fonction $m \mapsto g_m(\frac{\partial}{\partial x_i}(m), \frac{\partial}{\partial x_j}(m)) = g_{ij}(m)$ est C^p de U dans \mathbb{R} . Les coefficients de la matrice $g_{ij}(m)$ sont appelés les coefficients de la métrique dans la carte (U, φ) .

Définition 2.7 On appelle variété Riemannienne toute variété munie d'une métrique Riemannienne.

Exemple 2.8 sur $M = \mathbb{R}$, on pose $g(m) = h(m)dx^2$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est une fonction C^p et dx^2 est la forme quadratique sur $\mathbb{R} \simeq T_m\mathbb{R}$ définie par $dx^2(u, u) = u^2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Alors g est une métrique Riemannienne C^p sur \mathbb{R} (on construit ainsi toutes les métriques possibles sur \mathbb{R}).

Remarque 2.9 Si $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont deux champs de vecteurs sur M , alors on a

$$g_m(X(m), Y(m)) = \sum_i g_{ij}(m) X_i(m) Y_j(m)$$

Exemple 2.10 Si (U, x) une carte sur M , alors $\partial_1, \dots, \partial_n$ forme une base pour T_pM sa base duale est $dx_{j,j=1,\dots,n}$, alors la métrique g est donnée par

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

2.2.1 Isométrie

Définition 2.11 Soit $f : M \rightarrow (N, h)$ un difféomorphisme local sur M et h une métrique sur N . On définit une métrique $g = f^*h$ sur M , appelée métrique tirée en arrière de h par f , en posant, pour tout $(u, v) \in T_m M$

$$(f^*h)_m(u, v) = h(d_m f(u), d_m f(v))$$

Définition 2.12 $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une isométrie (resp. une isométrie locale) ssi f est un difféomorphisme (resp. difféomorphisme local) et $g = f^*h$.

Exemple 2.13 $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ et $(\mathbb{T}^n, g_{\mathbb{T}^n})$ sont localement isométriques, mais pas isométriques.

2.2.2 Connexion de Levi-Civita d'une métrique Riemannienne

Théorème 2.14 Sur toute variété Riemannienne (M^n, g) , il existe une unique connexion linéaire ∇ telle que pour tout $(X, Y, Z) \in \mathfrak{X}(M)^3$ on a

$$\begin{aligned} 1/\nabla_X Y &= \nabla_Y X + [X, Y], \quad \nabla \text{ a torsion libre } (T \equiv 0) \\ 2/Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \nabla \text{ compatible avec } g \end{aligned}$$

∇ est appelée connexion de Levi-Civita de la métrique g .

Preuve. Unicité : Si une telle connexion existe ,on a

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) + 2g(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

parceque $\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X, Z]$, $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$, $\nabla_X Y + \nabla_Y X = [X, Y] + 2 \nabla_Y X$.

On a donc

$$g(Z, \nabla_X Y) = \frac{1}{2} [Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [X, Y])] (*)$$

ce qui prouve que $\nabla_X Y$ est défini de façon unique.

Existence : L'identité (*) implique qu'il y'a une relation entre les symboles de Christoffel de ∇ et les coefficients de matrice de g

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

de cette expression suit la définition des Γ_{ij}^k en termes des g_{ij}

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) g^{lk}.$$

■

Calculs en coordonnées locales

Soit (U, φ) une carte sur M et (g_{ij}) les coefficients de la métrique g dans la carte on définit sur $\varphi(U)$ des fonctions

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

où les coefficients g^{ij} sont ceux de la matrice $(g_{ij})^{-1}$. On a alors $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Les fonctions Γ_{ij}^k sont appelées les symboles de Christoffel de la métrique g dans la carte (U, φ) .

Remarque 2.15 1/ Pour tout (i, j, k) , on a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

2/ $(\nabla_X Y)(m)$ ne dépend que des $\Gamma_{ij}^k(m)$, de $X(m)$ et de la connaissance de Y le long d'une courbe γ de M vérifiant $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = X(m)$.

Exemple 2.16 1/ On définit une connexion linéaire $\bar{\nabla}$ sur \mathbb{R} en posant $\bar{\nabla}_X Y = \sum_{i,j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} e_j$, où

$X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$ et $Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i$. Cette connexion vérifie

$$1/ \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = \sum_{i,j=1}^n (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}) e_j = [X, Y],$$

$$\begin{aligned} 2/ Z \cdot g_{\mathbb{R}^n}(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^n (Z_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} Y_j - Z_i X_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}) \\ &= g_{\mathbb{R}^n}(\bar{\nabla}_Z X, Y) + g_{\mathbb{R}^n}(X, \bar{\nabla}_Z Y) \end{aligned}$$

2/ Si $M = \mathbb{R}^n$ et $g = g_{\mathbb{R}^n}$, alors dans la carte $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ on a $g_{ij} = \delta_{ij}$ et donc $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour tout (i, j, k) . La connexion de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ est donc $\bar{\nabla}$.

3/ On utilise les coordonnées polaires $(\theta, \varphi) = (x, y, z) = p$, on obtient la formule

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta$$

On projete p sur le plan engendré par x et y , soit p' . Alors $\text{angle}(x, p') = \varphi$ et $\text{angle}(z, p) = \theta$

$$g_{\mathbb{S}^2} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$\text{Alors } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

On rappelle la formule des symboles de christoffel $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right)$, on trouve

$$\Gamma_{11}^1 = 0 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^2$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

2.2.3 Courbure Riemannienne

Définition 2.17 Soit (M, g) une variété Riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. On appelle tenseur de courbure de (M, g) l'application suivante

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (W, X, Y, Z) &\mapsto \underbrace{g(\nabla_W(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_W Z) - \nabla_{[W, X]}Z, Y)}_{=R(W, X, Y, Z)} \end{aligned}$$

Si $m \in M$ et (U, φ) est une carte de M au voisinage de m , alors $R(W, X, Y, Z)$ se calcule en fonction des coordonnées de W, X, Y, Z et de g (et des symboles de Christoffel) dans la carte

suivant la formule suivante :

$$R(W, X, Y, Z)(m) = \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{ijkl}(m)W_i(m)X_j(m)Y_k(m)Z_l(m)$$

où

$$W = \sum_i W_i \frac{\partial}{\partial x_i}, X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Z = \sum_i Z_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$R_{ijk} = \sum_{p=1}^n g_{lp} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^p}{\partial x_i} + \sum_{q=1}^n (\Gamma_{ik}^q \Gamma_{jq}^p - \Gamma_{jk}^q \Gamma_{iq}^p) \right)$$

Exemple 2.18 1/ On considère $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ alors $R(X, Y)Z = 0$ pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. En effet; on rappelle que $\nabla_{\frac{d}{dx^i}} \frac{d}{dx^j} = 0$ pour tout i, j et $[\frac{d}{dx^i}, \frac{d}{dx^j}] = 0$, alors

$$R\left(\frac{d}{dx^i}, \frac{d}{dx^j}\right)V = \nabla_{\frac{d}{dx^i}} \nabla_{\frac{d}{dx^j}} V - \nabla_{\frac{d}{dx^j}} \nabla_{\frac{d}{dx^i}} V$$

pour $V = V^k \frac{d}{dx^k}$. On sait que $\nabla_{\frac{d}{dx^j}} V = V^k \nabla_{\frac{d}{dx^j}} \frac{d}{dx^k} = 0$, alors $R\left(\frac{d}{dx^i}, \frac{d}{dx^j}\right) = 0$.

2/ Dans la carte $\varphi : (r, \theta) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow (\sin r \cos \theta, \sin r \sin \theta, \cos r) \in \mathbb{R}^3$, la métrique $g|_{\mathbb{S}^2}$ vérifie $(\varphi^* g|_{\mathbb{S}^2}) = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2$ et on trouve

$$R_{g_{\mathbb{S}^2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \sin^2 r$$

2.3 Sous-Variété Riemannienne

2.3.1 Métrique Induite

Définition 2.19 Soient (M, g) une variété Riemannienne et N une sous-variété de M , alors elle induit une structure de variété Riemannienne sur N par

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) &\longrightarrow \mathfrak{X}(N) \\ (X, Y) &\longmapsto \tilde{g}(X, Y) \end{aligned}$$

tel que pour tout $p \in M : \tilde{g}_p(X_p, Y_p) = g_p(d_p i(X_p), d_p i(Y_p))$, où $i : N \rightarrow M$ est un plongement régulier.

Comme $d_p i(T_p N) \simeq T_p N$, on peut écrire : $\tilde{g}_p(X_p, Y_p) = g_p(X_p, Y_p)$.

En coordonnées locales : $\tilde{g}(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = g_{ij} dy^i(\frac{\partial}{\partial y^i}) dy^j(\frac{\partial}{\partial y^j}) = g_{ij}$.

Soit N une sous-variété d'une variété Riemannienne (M, g) . Alors, $\forall p \in M$, le produit scalaire sur $T_p N$ se décompose en une somme directe $T_p M|_N = T_p N \oplus T_p^\perp N$ où

$$T_p^\perp N = \{X_p \in T_p M \mid g_p(X_p, Y_p) = 0; \forall Y_p \in T_p N\}$$

est le complément orthogonal de $T_p N$ dans $T_p M$.

Définition 2.20 Un vecteur ζ_p est dit normal à N dans M en $p \in N$ si

$$\tilde{g}(X_p, \zeta_p) = 0$$

pour tout vecteur X_p de N . De plus on a

$$TM|_N = TN \oplus T^\perp N$$

où $T^\perp N$ est l'ensemble des champs de vecteurs normaux de N dans M , et

$$X_p = X_p^T + X_p^\perp$$

pour tout $X_p \in T_p M$; X_p^T s'appelle la partie tangentielle et X_p^\perp la partie normale. Le sous-espace $T_p^\perp N$ de $T_p M$ est appelé l'espace normal de N . Le fibré

$$T^\perp N = \cup_{p \in M} T_p^\perp N$$

est appelé le fibré normal de N .

2.3.2 Connexion de Levi-Civita

On note $\tilde{\nabla}$ la connexion Riemannienne sur M compatible avec la métrique g (i, e)

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}(g(\tilde{Y}, \tilde{Z})) = g(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}) + g(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z})$$

où $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}(M)$. Pour $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, il existe une extension $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, on définit $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_N = \tilde{\nabla}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$. En utilisant $\tilde{\nabla}$, on peut définir ∇ sur N par

$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$; $\nabla_X Y$ est la composante tangentielle de $\tilde{\nabla}_X Y$, donc, si on note la partie normale de $\tilde{\nabla}_X Y$ par $S(X, Y)$, on a

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$$

Proposition 2.21 *Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ et \tilde{X}, \tilde{Y} leurs extension respectives. Alors $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})|_N$ ne dépend pas de l'extension.*

$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$ où ∇ est la connexion Riemannienne définie sur la sous-variété de N par rapport à la métrique \tilde{g} et $S(X, Y)$ un champ de vecteurs normal sur N symétrique, bilinéaire par rapport à X et Y .

Maintenant, on va montrer les propriétés concernant les composantes normales $S(X, Y)$. On note par $\mathfrak{X}^\perp(N)$ l'ensemble des champs de vecteurs normaux sur N .

Remarque 2.22 *Si N est de codimension 1 immergée dans M , on choisit un champ de vecteurs normal unitaire ζ dans un voisinage U de $p \in N$,*

$$S(X, Y) = h(X, Y) \cdot \zeta$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, où h est une application symétrique définie par

$$h : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow C^\infty(U)$$

bilinéaire sur $C_p^\infty(U)$, et définie en tout point $p \in U$ de $T_p N \times T_p N$ dans \mathbb{R} . h est dite seconde forme fondamentale sur N pour le choix de ζ .

L'application

$$S : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \longrightarrow \mathfrak{X}^\perp(N)$$

est symétrique et bilinéaire sur $C^\infty(N)$. Par conséquent $S_p(X, Y)$ dépend seulement de X_p et Y_p et ça induit une application bilinéaire symétrique

$$S_p : T_p N \times T_p N \longrightarrow T_p^\perp N$$

pour ζ un champ de vecteurs normal sur N et $X \in \mathfrak{X}(N)$. On peut décomposer $\tilde{\nabla}_X \zeta$ en

$$\tilde{\nabla}_X \zeta = -(A_\zeta(X)) + \nabla_X^\perp \zeta$$

où $-A_\zeta(X)$ et $\nabla_X^\perp \zeta$ sont, respectivement, les parties tangentielle et normale de $\tilde{\nabla}_X \zeta$.

De plus, pour tout champ de vecteurs normal ζ sur N , on a

$$\tilde{g}(A_\zeta(X), Y) = g(S(X, Y), \zeta)$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(N)$.

2.3.3 Hypersurface

Sient l'immersion injective $i : (N, g) \longrightarrow (M, \tilde{g})$, N est une hypersurface i.e. $\dim M = \dim N + 1$, et ζ un champ de vecteurs normal unitaire le long de N i.e. $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ tel que $g(\zeta, \zeta) = 1$, dans ce cas, on a

- 1/ $\tilde{\nabla}_X \zeta \in \mathfrak{X}(N)$, pour tout $X \in \mathfrak{X}(N)$
- 2/ $g(\tilde{\nabla}_X \zeta, Y) = -g(\zeta, \tilde{\nabla}_X Y) = -g^\perp(\zeta, S(X, Y))$, pour $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$
- 3/ $g(\tilde{\nabla}_X \zeta, Y) = g(\tilde{\nabla}_Y \zeta, X)$.
- 4/ $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y)$ est appelé formule de GAUSS.
- 5/ $\tilde{\nabla}_X \zeta = -A_\zeta(X) + \nabla_X^\perp(\zeta)$ est appelé formule de WEINGARTEN

Exemple 2.23 (Métriques induites) Si M est une sous-variété de \mathbb{R}^n de classe C^p alors le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ de \mathbb{R}^n induit une métrique sur M en posant, pour $m \in M$ et $(u, v) \in T_m M^2$

$$g_m(u, v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Cette métrique est bien C^p car si (U, φ) est une carte locale de M alors

$$g_{ij}(m) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(m), \frac{\partial}{\partial x_j}(m) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1}(m), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \circ \varphi^{-1}(m) \right\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

est de classe C^p comme composée d'applications de classe C^p .

Exemple 2.24 On note $g_{\mathbb{S}^n}$ la métrique induite sur \mathbb{S}^n par la métrique canonique de \mathbb{R}^{n+1} . Cette métrique est appelée métrique canonique de \mathbb{S}^n . Si on considère

$$\begin{aligned} \varphi_N : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left(\frac{2x_1}{1+|x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{1+|x|^2} \right) \end{aligned}$$

la carte locale donnée par la projection stéréographique de pôle nord alors on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \varphi_N(x) = -\frac{2x_i}{1+|x|^2} \varphi_N(x) + \frac{2}{1+|x|^2} e_i + \frac{2x_i}{1+|x|^2} e_{n+1},$$

où (e_1, \dots, e_{n+1}) désigne la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . Ce qui nous donne

$$g_{ij}(m) = g_{\mathbb{S}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + |\varphi_N^{-1}(m)|^2)^2}$$

dans la carte associée à la projection stéréographique du pôle nord. De même, dans la carte associée à la projection du pôle sud, on trouve aussi

$$g_{ij}(m) = g_{\mathbb{S}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + |\varphi_n^{-1}(m)|^2)^2}$$

Chapitre 3

Structure géométrique du fibré tangent (Unitaire)

La géométrie du fibré tangent revient à l'article fondamental de S.SAKI publié en 1958. Il utilise une métrique Riemannienne donnée g sur une variété différentiable M pour construire une métrique \hat{g} sur le fibré tangent TM de M . Cette métrique est devenue une notion standard dans la géométrie différentielle, appelée la métrique de SASAKI. Sa construction est basée sur une décomposition naturelle du fibré tangent TTM de TM en deux sous-fibrés verticaux et horizontal par rapport à la connexion de LEVI-CIVITA ∇ sur (M, g) .

L'expression explicite pour le crochet de Lie sur TM est donnée par DOMBROWSKI. La connexion de LEVI-CIVITA $\hat{\nabla}$ par rapport à la métrique de SASAKI sur TM et son tenseur de courbure R sont calculés par KOWALSKI. KOWALSKI, ASO, MUSSO et TIRCERRI dérivent des rapports intéressants entre les propriétés géométriques de M et TM .

3.1 Structure Géométrique du fibré tangent TM

Dans tout ce qui suit on suppose que M est une variété différentielle de dimension m munie d'un atlas maximal

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

Pour $p \in M$ on note par $T_p M$ l'espace tangent de M au point p . Pour les coordonnées locales (U, x) sur M et $p \in M$ on définit $(\frac{\partial}{\partial x_k})_p \in T_p M$ par

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = \partial_{e_k}(f \circ x^{-1})(x(p))$$

où $\{e_k \mid k = 1, \dots, m\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^m . Alors $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p \mid k = 1, \dots, m\right\}$ est la base de $T_p M$. L'ensemble

$$TM = \{(p, u) \mid p \in M, u \in T_p M\}$$

est dit le fibré tangent de M et l'application fibré $\pi : TM \rightarrow M$ est donnée par $\pi : (p, u) \rightarrow p$.

Théorème 3.1 *Soit M une variété différentielle de dimension m . Alors le fibré tangent peut être donné par une structure de variété différentielle de dimension $2m$.*

Remarque 3.2 *Une conséquence directe de la construction d'un atlas maximal \mathcal{A}^* et que l'application $\pi : TM \rightarrow M$ est différentiable. Pour tout point $p \in M$ la fibre $\pi^{-1}(p)$ est l'espace tangent $T_p M$ de M au point p . Pour les coordonnées locales $(U, x) \in \mathcal{A}$ on définit*

$$\bar{x} : \left(p, \sum_{k=1}^m u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Big/ \Big|_p\right) \mapsto (p, (u_1, \dots, u_m))$$

La restriction $\bar{x}_p = \bar{x} \Big/ \Big|_{T_p M} : T_p M \mapsto \{p\} \times \mathbb{R}^m$ à l'espace tangent $T_p M$ est donnée par

$$\bar{x} : \sum_{k=1}^m u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Big/ \Big|_p \mapsto (u_1, \dots, u_m)$$

Donc c'est un isomorphisme d'espace vectoriel, alors $\bar{x} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ est la carte fibré pour TM et $\{(\pi^{-1}(U), \bar{x}) \Big/ \Big|_{(U, x)} \in \mathcal{A}\}$ est l'atlas fibré transformant (TM, M, π) en un fibré vectoriel topologique de dimension $2m$. Puisque la variété (M, \mathcal{A}) est différentiable, le fibré vectoriel (TM, M, π) muni de l'atlas maximal \mathcal{B} contenant $\{(\pi^{-1}(U), \bar{x}) \Big/ \Big|_{(U, x)} \in \mathcal{A}\}$ est un fibré vectoriel.

3.1.1 Relèvement horizontal et vertical

Soit (M, g) une variété riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita . Le tenseur de courbure R est défini par.

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. La différentielle de $\pi : TM \longrightarrow M$ est l'application différentielle

$$d\pi : TTM \longrightarrow TM$$

Pour tout point $(x, u) \in TM$ on note le noyau au point (x, u) par $VTM_{(x,u)} = \ker(d\pi|_{(x,u)})$ est dit le sous espace vectoriel de $T_{(x,u)}TM$ au point (x, u) .

Notre prochaine étape est d'introduire le sous espace horizontal de TM . Pour cela nous avons besoin de l'application $K_{(x,u)} : T_{(x,u)}TM \longrightarrow T_{(x,u)}M$ induite par la connexion de Levi-Civita ∇ sur (M, g) .

Définition 3.3 Soit V un voisinage ouvert de $p \in M$ tel que l'application exponentielle $\exp : T_p M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert \bar{V} de 0 dans TM sur V .

En outre soit $\tau : \pi^{-1}(V) \longrightarrow T_p M$ une application lisse dans $T_p M$ qui translate chaque $Y \in \pi^{-1}(V)$ d'une façon parallèle de $q = \pi(Y)$ à p le long d'un arc d'une géodésique sur V reliant p et q . Pour $u \in T_p M$. Soit $R_{-u} : T_p M \longrightarrow T_p M$ une translation définie par $R_{-u}(X) = X - u$ pour tout $X \in T_p M$. Alors l'application connexion

$$K_{(x,u)} : T_{(x,u)}TM \longrightarrow T_p M$$

de la connexion de Levi-Civita est définie par

$$K(Z) = d(\exp_p \circ R_{-u} \circ \tau)(Z)$$

pour tout $Z \in T_{(x,u)}TM$.

Lemme 3.4 Soit (M, g) une variété Riemannienne munie d'une connexion de Levi-Civita ∇ . Alors l'application connexion satisfait à

$$K(dZ_p(X_p)) = (\nabla_X Z)_p$$

où $Z \in \mathfrak{X}(M)$ est vu comme une application $Z : M \longrightarrow TM$ et $X_p \in T_p M$.

Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe sur M tel que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = u$ et $X : I \longrightarrow TM$ un champ de vecteur de long de γ , i.e une courbe sur TM tel que $\pi \circ X = \gamma$. D'autre part $X(t) = (\gamma(t), U(t))$ avec $U(t) \in T_{\gamma(t)}M$ et $U(0) = u$. Alors l'application connexion K de ∇ satisfait à

$$K_{(x,u)} : X(t) \mapsto (\nabla_\gamma U)(0)$$

Celà veut dire que les courbes horizontales sur TM correspondent aux champs de vecteurs parallèles sur la variété (M, g, ∇) . De cette relation on peut définir le sous-espace horizontal.

Proposition 3.5 L'espace tangent $T_{(x,u)}TM$ au point (x, u) est une somme directe d'un sous-espace horizontal et vertical

$$T_{(x,u)}TM = VTM_{(x,u)} \oplus HTM_{(x,u)}.$$

Pour $X \in T_x M$, il existe un unique vecteur X^H au point $(x, u) \in TM$ tel que $X^H \in HTM_{(x,u)}$ et $d\pi(X^H) = X$. X^H est dit le relèvement horizontal de X au point (x, u) .

Il existe un unique vecteur X^V au point $(x, u) \in TM$ tel que $X^V \in VTM_{(x,u)}$ et $X^V(df) = X(f)$ pour toute fonction f sur M . X^V est dit le relèvement vertical de X au point (x, u) .

Le relèvement horizontal (respectivement vertical) du champ de vecteurs X de M sur TM est le champ de vecteurs X^H (resp X^V) sur TM tel que sa valeur au point (x, u) est le relèvement horizontal (resp vertical) de X_x au point (x, u) . Pour tout champ de vecteurs X sur M les relèvements horizontaux et verticaux X^H, X^V sont les uniques champs de vecteurs qui satisfassent à

$$\begin{aligned} d\pi(X^H)_Z &= X_{\pi(Z)}, & KX^H_Z &= 0_{\pi(Z)} \\ d\pi(X^V)_Z &= 0_{\pi(Z)}, & KX^V_Z &= X_{\pi(Z)} \end{aligned}$$

pour tout $Z \in TM$. Notons que les applications

$$\begin{array}{ccc} T_x M & \rightarrow & VTM_{(x,u)} \\ X & \mapsto & X^V \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} T_x M & \rightarrow & HTM_{(x,u)} \\ X & \mapsto & X^H \end{array}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels entre $T_p M$ et les sous-espaces $VTM_{(x,u)}$ et $HTM_{(x,u)}$, respectivement, et tout champ de vecteurs $\widehat{Z} \in T_{(x,u)} M$ peut-etre décomposer en

$$\widehat{Z} = X^H + Y^V$$

où X, Y sont déterminés uniquement par $X = d\pi(\widehat{Z})$ et $Y = K(\widehat{Z})$.

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable, alors

$$X^H(f \circ \pi) = X(f) \circ \pi \quad \text{et} \quad X^V(f \circ \pi) = 0$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Relèvement en coordonnées locales

Définition 3.6 Prenant maintenant le système de coordonnées locales (x^1, \dots, x^m) sur un ouvert U de M .

Sur $\pi^{-1}(U)$ on définit les coordonnées $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m; u^1, \dots, u^m)$ comme suite

$$\begin{aligned} \bar{x}^i(x, u) &= (x^i \circ \pi)(x, u) = x^i(x) \\ u^i(x, u) &= dx^i(u) = ux^i \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, m$ et $(x, u) \in \pi^{-1}(U)$. Par rapport à ce système de coordonnées, le relèvement horizontal et vertical du champ de vecteurs $X = \sum_{i=1}^m X \frac{\partial}{\partial x^i}$ sur U est donné par

$$\begin{aligned} X^H &= \sum_{i=1}^m (X^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} - \sum_{i=1}^m (u^b (X^a \Gamma_{ab}^i) \circ \pi) \frac{\partial}{\partial u^i} \\ X^V &= \sum (X^i \circ \pi) \frac{\partial}{\partial u^i} \end{aligned}$$

où Γ_{jk}^i est le symbole de Christoffel de ∇ .

Corollaire 3.7 Soit (x^1, \dots, x^m) les coordonnées locales de M et $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^m; u^1, \dots, u^m)$ les coordonnées locales de TM . Si $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ alors

$$\begin{aligned}(X_i)^H &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} - \sum_{j,k=1}^m (\Gamma_{ik}^j \circ \pi) u^k \frac{\partial}{\partial u^j} \\ (X_i)^V &= \frac{\partial}{\partial u^i}\end{aligned}$$

3.1.2 Crochet de Lie

On calcule les crochets de Lie des relèvement horizontaux et verticaux.

Théorème 3.8 Soit (M, g) une variété Riemannienne, ∇ est la connexion de Levi-Civita et R le tenseur de courbure de ∇ . Alors le crochet de Lie sur le fibré tangent TM de M satisfait à

$$\begin{aligned}1) [X^H, Y^H] &= [X, Y]^H - \{R(X, Y)u\}^V, \\ 2) [X^H, Y^V] &= (\nabla_X Y)^H, \\ 3) [X^V, Y^V] &= 0.\end{aligned}$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et tout point (x, u) de TM .

3.1.3 Métrique naturelle

Définition 3.9 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Une métrique Riemannienne \bar{g} sur le fibré tangent TM de M est dite naturelle par rapport à g si

$$\begin{aligned}\bar{g}_{(x,u)}(X^H, Y^H) &= g_x(X, Y), \\ \bar{g}_{(x,u)}(X^H, Y^V) &= 0.\end{aligned}$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

On peut utiliser la formule de KOSZUL

$$\begin{aligned}2\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^i} Y^j, Z^k) &= X^i \bar{g}(Y^j, Z^k) + Y^j \bar{g}(Z^k, X^i) - Z^k \bar{g}(X^i, Y^j) \\ &\quad - \bar{g}(X^i, [Y^j, Z^k]) + \bar{g}(Y^j, [Z^k, X^i]) + \bar{g}(Z^k, [X^i, Y^j])\end{aligned}$$

pour calculer la connexion de LEVI-CIVITA $\overline{\nabla}$ du fibré tangent (TM, \widehat{g}) équipé d'une métrique naturelle \widehat{g} par rapport à g sur M .

Définition 3.10 Soit (M, g) une variété Riemannienne et TM le fibré tangent de M . Alors pour tout point $(p, u) \in TM$ et toute métrique naturelle \bar{g} sur TM , la connexion de LEVI-CIVITA correspondante satisfait à

- 1) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) = g_x(\nabla_X Y, Z),$
- 2) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) = -\frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(X, Y)u\}^V, Y^V),$
- 3) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) = -\frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(Z, X)u\}^V, Y^V),$
- 4) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) = \frac{1}{2}(X^H(\bar{g}_{(x,u)}(Y^V, Z^V) + \bar{g}_{(x,u)}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) - \bar{g}_{(x,u)}(Y^V, (\nabla_X Z)^V)),$
- 5) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) = \frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(Y, Z)u\}^V, X^V),$
- 6) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) = \frac{1}{2}(Y^H(\bar{g}_{(x,u)}(Z^V, X^V) - \bar{g}_{(x,u)}(Z^V, (\nabla_Y X)^V) - \bar{g}_{(x,u)}(X^V, (\nabla_Y Z)^V)),$
- 7) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) = \frac{1}{2}(-Z^H(\bar{g}_{(x,u)}(X^V, Y^V)) + \bar{g}_{(x,u)}(Y^V, (\nabla_Z X)^V) + \bar{g}_{(x,u)}(X^V, (\nabla_Z Y)^V)),$
- 8) $\bar{g}_{(x,u)}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) = \frac{1}{2}(X^V(\bar{g}_{(x,u)}(Y^V, Z^V) + Y^V(\bar{g}_{(x,u)}(Z^V, X^V) - Z^V(\bar{g}_{(x,u)}(X^V, Y^V))).$

Définition 3.11 Soit (M, g) une variété Riemannienne et $\overline{\nabla}$ la connexion de LEVI-CIVITA du fibré tangent (TM, \widehat{g}) , équipé d'une métrique naturelle. Soit $F : TM \rightarrow TM$ une application différentielle qui conserve les fibres, et linéaire sur chaque fibre. Alors on définit le relèvement vertical et horizontal de F par

$$F(\eta)^V = \sum_{i=1}^m \eta_i F(\partial_i)^V \text{ et } F(\eta)^H = \sum_{i=1}^m \eta_i F(\partial_i)^H$$

où $\eta = \sum_{i=1}^m \eta_i \partial_i \in \pi^{-1}(U)$ est la représentation locale de $\eta \in \mathfrak{X}(M)$.

On a

$$\begin{aligned}
1) (\nabla_{X^V} F^V)_\zeta &= F(X_x)_\zeta^V + \sum_{i=1}^m \eta_i(x) (\bar{\nabla}_{X^V} F(\partial_i)^V)_\zeta, \\
2) (\bar{\nabla}_{X^H} F^H)_\zeta &= F(X_x)_\zeta^H + \sum_{i=1}^m \eta_i(x) (\bar{\nabla}_{X^V} F(\partial_i)^H)_\zeta, \\
3) (\bar{\nabla}_{X^H} F^V)_\zeta &= (\bar{\nabla}_{X^H} F(u)^V)_\zeta, \\
4) (\bar{\nabla}_{X^H} F^H)_\zeta &= (\bar{\nabla}_{X^H} F(u)^H)_\zeta.
\end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\zeta = (x, u) \in TM$ en $\eta = \sum_{i=1}^m \eta_i \partial_i \in \pi^{-1}(U)$.

3.1.4 Métrique de SASAKI

Définition 3.12 *Le fibré tangent TM d'une variété Riemannienne (M, g) peut être munie d'une métrique Riemannienne \hat{g} dite de SASAKI, qui dépend seulement de la structure Riemannienne de g de la base M , déterminée par*

$$\begin{aligned}
1) \hat{g}(X^H, Y^H) &= g(X, Y) \circ \pi, \\
2) \hat{g}(X^H, Y^V) &= 0, \\
3) \hat{g}(X^V, Y^V) &= g(X, Y) \circ \pi.
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3.1.5 La connexion de Levi-Civita

Proposition 3.13 *La connexion de LEVI-CIVITA $\hat{\nabla}$ de \hat{g} est donnée par*

$$\begin{aligned}
1) (\hat{\nabla}_{X^H} Y^H)_{(x,u)} &= (\nabla_X Y)_{(x,u)}^H - \frac{1}{2} \{R_x(X, Y)u\}^V, \\
2) (\hat{\nabla}_{X^H} Y^V)_{(x,u)} &= (\nabla_X Y)_{(x,u)}^V + \frac{1}{2} \{R_x(u, Y)X\}^V, \\
3) (\hat{\nabla}_{X^V} Y^H)_{(x,u)} &= \frac{1}{2} \{R_x(u, X)Y\}^H, \\
4) (\hat{\nabla}_{X^V} Y^V)_{(x,u)} &= 0.
\end{aligned}$$

Pour tout champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3.1.6 Tenseur de Courbure

Proposition 3.14 Soit (M, g) une variété Riemannienne et \widehat{R} le tenseur de courbure du fibré tangent (TM, \widehat{g}) équipé de la métrique de SASAKI on a

$$\begin{aligned}
1) \widehat{R}_{(x,u)}(X^V, Y^V)Z^V &= 0, \\
2) \widehat{R}_{(x,u)}(X^V, Y^V)Z^H &= \{R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(u, X)(R(u, Y)Z) \\
&\quad - \frac{1}{4}R(u, Y)(R(u, X)Z)\}_x^H, \\
3) \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^V)Z^V &= -\{\frac{1}{2}R(Y, Z)X + \frac{1}{4}R(u, Y)(R(u, Z)X)\}_x^H, \\
4) \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^V)Z^H &= \{\frac{1}{4}R((R(u, Y)Z), X)u + \frac{1}{2}R(X, Z)Y\}_x^V \\
&\quad + \frac{1}{2}\{(\nabla_X R)(u, Y)Z\}_x^H, \\
5) \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^H)Z^V &= \{R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(R(u, Z)Y, X)u \\
&\quad - \frac{1}{4}R(R(u, Z)X, Y)u\}_x^V \\
&\quad + \frac{1}{2}\{(\nabla_X R)(u, Z)Y - (\nabla_Y R)(u, Z)X\}_x^H, \\
6) \widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^H)Z^H &= \frac{1}{2}\{(\nabla_Z R)(X, Y)u\}_x^V + \{R(X, Y)Z \\
&\quad + \frac{1}{4}R(u, R(Z, Y)u)X + \frac{1}{4}R(u, R(X, Z)u)Y \\
&\quad + \frac{1}{2}R(u, R(X, Y)u)Z\}_x^H.
\end{aligned}$$

Proposition 3.15 Soit (M, g) une variété Riemannienne et TM son fibré tangent muni de la métrique de Sasaki \widehat{g} . Alors, TM est plat si et seulement si M est plate.

Preuve. \Leftarrow C'est une conséquence directe de la proposition précédente, Si $R \equiv 0$, alors $\widehat{R} \equiv 0$.

\Rightarrow Si $\widehat{R} \equiv 0$, alors $\widehat{R}_{(x,u)}(X^i, Y^j)Z^k = 0$, pour tout $X^i, Y^j, Z^k \in \mathfrak{X}(TM)$ et $(x, u) \in TM$, en particulier si on pose $u = 0$ dans la formule $\widehat{R}_{(x,u)}(X^H, Y^H)Z^H$, on obtient

$$\widehat{R}_{(x,0)}(X^H, Y^H)Z^H = R(X, Y)Z = 0$$

Par conséquent, $R \equiv 0$. ■

3.2 Structure Géométrique du fibré tangent Unitaire T_1M

Dans cette partie, nous étudions le fibré tangent unitaire qui est une hypersurfaces du fibré tangent d'une variété Riemannienne M . Nous allons étudier certaines propriétés de courbure du fibré muni de la métrique de SASAKI induite.

De nombreux articles ont été publiés à propos de la géométrie du fibré tangent unitaire T_1M muni de la métrique \tilde{g} induite par la métrique Sasaki \hat{g} sur TM . la géométrie (T_1M, \tilde{g}) n'est pas aussi rigide que celle de (TM, \hat{g}) et les résultats dérivées peuvent être plus intéressant.

Dans cette section, on introduit la notion de fibré tangent de la sphère et le fibré tangent de la sphère unitaire. On dérive quelques formules basique pour le fibré tangent unitaire muni de la métrique induite de SASAKI.

Définition 3.16 1/ Soit r un nombre positif. Alors le fibré tangent de la sphère de rayon r au dessus d'une variété Riemannienne (M, g) est l'hypersurface

$$T_rM = \{(p, u) \in TM \mid g_p(u, u) = r^2\} \text{ de } TM$$

2/ Si $r = 1$ alors on appelle T_1M le fibré tangent unitaire de la sphère.

Remarque 3.17 1/ Rappelons que le champs de vecteur vertical canonique sur TM est un champ de vecteurs U défini en termes de coordonnées locales par $U = \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, où $x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n$ sont les coordonnées locales sur TM qui correspondent aux coordonnées locales x^1, \dots, x^n sur M .

2/ Le vecteur \mathcal{U} ne dépend pas de la carte choisie.

Pour $u = \sum_{i=1}^m u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un vecteur de T_xM on a

$$\begin{aligned} u_{(x,u)}^V &= \sum_{i=1}^m u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x,u)}^V = \mathcal{U}_{(x,u)} \\ u_{(x,u)}^H &= \sum_{i=1}^m u^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{(x,u)}^H. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \hat{g}_{(x,u)}(X^H, \mathcal{U}) &= 0, \\ \hat{g}_{(x,u)}(X^V, \mathcal{U}) &= g_x(X, u) \quad X \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned}$$

Proposition 3.18 1) $\widehat{\nabla}_{X^H}\mathcal{U}=0$,

2) $\widehat{\nabla}_{X^V}\mathcal{U}=X^H=0$,

3) $\widehat{\nabla}_{\mathcal{U}}X^H=0$,

4) $\widehat{\nabla}_{\mathcal{U}}X^V=0$,

5) $\widehat{\nabla}_{\mathcal{U}}\mathcal{U}=\mathcal{U}$

pour tout champs de vecteurs X sur M et \mathcal{U} sur TM .

Preuve. Soient les formules suivantes

$$\widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^i})^H}(\frac{\partial}{\partial x^j})^V = (\nabla_{\partial_i}\partial_j)^V + \frac{1}{2}\{R(u,\partial_j)\partial_i\}^H$$

et

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})^H(u^j) = -\sum_{l,k=1}^m(\Gamma_{lk}^i \circ \pi)u^k \frac{\partial}{\partial u^i}(u^j)$$

alors

$$\begin{aligned} 1) \widehat{\nabla}_{X^H}\mathcal{U} &= \widehat{\nabla}_{X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^H}u^j(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \\ &= X^i \left\{ u^j \widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^j})^H}(\frac{\partial}{\partial x^j})^V + (\frac{\partial}{\partial x^i})^H(u^j)(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \right\} \\ &= X^i \left\{ u^j \Gamma_{ij}^k \cdot (\partial_k)^V - \sum_{l,k=1}^m (\Gamma_{lk}^i \circ \pi) u^k (\frac{\partial}{\partial x^j})^V \right\} = 0 \\ 2) \widehat{\nabla}_{X^V}\mathcal{U} &= \widehat{\nabla}_{X^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}u^j(\frac{\partial}{\partial x^j})^V = X^i \left\{ \widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}u^j(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \right\} \\ &= X^i \left\{ u^j \widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}(\frac{\partial}{\partial x^j})^V + (\frac{\partial}{\partial x^i})^V(u^j)(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \right\} = X^i(\partial_i)^V = X^V \\ 3) \widehat{\nabla}_{\mathcal{U}}X^H &= \widehat{\nabla}_{u^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}X^j(\frac{\partial}{\partial x^j})^H = u^i \left\{ X^j \widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}(\frac{\partial}{\partial x^j})^H + (\frac{\partial}{\partial x^i})^V(X^j)(\frac{\partial}{\partial x^j})^H \right\} \\ &= \frac{1}{2}\{R(u,u)\partial_j\}^H + \frac{\partial}{\partial u^i}(X^j) = 0 \\ 4) \widehat{\nabla}_{\mathcal{U}}X^V &= \widehat{\nabla}_{u^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}X^j(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \\ &= u^i \left\{ X^j \widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}(\frac{\partial}{\partial x^j})^V + (\frac{\partial}{\partial x^i})^V(X^j)(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \right\} = 0 \\ 5) \widehat{\nabla}_{\mathcal{U}}\mathcal{U} &= \widehat{\nabla}_{u^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}u^j(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \\ &= u^i \left\{ u^j \widehat{\nabla}_{(\frac{\partial}{\partial x^i})^V}(\frac{\partial}{\partial x^j})^V + (\frac{\partial}{\partial x^i})^V(u^j)(\frac{\partial}{\partial x^j})^V \right\} = 0 \end{aligned}$$

■

3.2.1 Structure géométrique de du fibré tangent unitaire

Soit l'ensemble

$$T_1M = \{(x, u) \in TM \mid g_x(u, u) = 1\}$$

On définit l'application

$$\begin{aligned} f : TM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) &\mapsto g_x(u, u) - 1 \end{aligned}$$

L'application f est de rang constante. En effet ;

- 1) f est de classe C^∞ .
- 2) Soient (U, φ) une carte de M , $(\pi^{-1}(U), \varphi^*)$ une carte de TM et le vecteur

$$u = \sum_{i=1}^m u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M$$

on a

$$g_x(u, u) = g_x\left(\sum_{i=1}^m u^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^m u^j \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m u^i \cdot u^j \cdot g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

On définit l'application différentielle de f au point (x, u)

$$\begin{array}{ccc} T_{(x,u)}TM & \xrightarrow{T_{(x,u)}f} & T_{f(x,u)}\mathbb{R} \\ \widetilde{\varphi}^* \downarrow & & \downarrow \widetilde{id}_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R}^{2m} & \xrightarrow{D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x,u))} & \mathbb{R} \end{array}$$

alors

$$T_{(x,u)}f = D(f \circ (\varphi^*)^{-1})(\varphi^*(x, u)) \circ \widetilde{\varphi}^*_{(x,u)}.$$

Le champ de vecteurs canonique \mathcal{U} est normal à T_1M dans (TM, \widehat{g}) en tout point $(x, u) \in T_1M$. En effet ;

Soient la métrique de SASAKI \widehat{g} définie en coordonnées locales par

$$\widehat{g} = (g_{ij})^v (dx^i)^v \otimes (dx^j)^v + (g_{ij})^v (dx^i)^H \otimes (dx^j)^H$$

et

$$\tilde{X} = \sum_{l=1}^m \tilde{X}^l \partial_l + \sum_{l=1}^m \tilde{X}^{\bar{l}} \partial_{\bar{l}}$$

un champ de vecteurs défini sur T_1M .

on a

$$(dx^i)^V \otimes (dx^i)^V (\mathcal{U}, \tilde{X}) = (dx^i)^V (\mathcal{U}) (dx^i)^V (\tilde{X}) = 0$$

$$\begin{aligned} (dx^i)^H \otimes (dx^j)^H (\mathcal{U}, \tilde{X}) &= (u^s \Gamma_{sr}^i dx^r + du^i) (u^k \partial_{\bar{k}}) (u^s \Gamma_{sr}^j dx^r + du^j) (\tilde{X}^l \partial_l + \tilde{X}^{\bar{l}} \partial_{\bar{l}}) \\ &= u^i (u^s \Gamma_{sr}^j \tilde{X}^r + \tilde{X}^{\bar{j}}) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \hat{g}(\mathcal{U}, \tilde{X}) &= ((g_{ij})^V (dx^i)^V \otimes (dx^j)^V + (g_{ij})^v (dx^i)^H \otimes (dx^j)^H) (\mathcal{U}, \tilde{X}) \\ &= g_{ij} \cdot (u^i u^s \Gamma_{sr}^j \tilde{X}^r + u^i \tilde{X}^{\bar{j}}). \end{aligned}$$

Puisque $\tilde{X}_{(x,u)} \in T_{(x,u)}T_1M = \text{Ker}(T_{(x,u)}f)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x^k} (g(\partial_i, \partial_j)) = g(\nabla_{\partial_x} \partial_i \partial_j) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j) \\ &= g(\Gamma_{ki}^h \partial_h, \partial_j) + g(\partial_i, \Gamma_{kj}^h \partial_h) \\ &= \Gamma_{ki}^h g(\partial_h, \partial_j) + \Gamma_{kj}^h g(\partial_i, \partial_h) = 2\Gamma_{ki}^h g(\partial_h, \partial_i) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_{(x,u)}f(\tilde{X}_{(x,u)}) &= (u^i u^j \frac{\partial}{\partial x^1} (g_{ij}), \dots, u^i u^j \frac{\partial}{\partial x^m} (g_{ij}); 2u^s g_{1s}, \dots, 2u^s g_{1s}) \tilde{X}_{(x,u)} \\ &= u^i u^j \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) \tilde{X}^k + 2u^s g_{rs} \tilde{X}^{m+r} \\ &= u^i u^j \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) \tilde{X}^k + 2u^s g_{rs} \tilde{X}^{m+r} \\ &= 2(u^i u^j \Gamma_{ki}^h g_{hi} \tilde{X}^k + 2u^s g_{rs} \tilde{X}^{m+r}) = 0 \end{aligned}$$

donc $\widehat{g}(\mathcal{U}, \widetilde{X}) = 0$.

Le relèvement X^H est tangent au fibré T_1M au point $(x, u) \in T_1M$, pour tout champ de vecteurs X tangent à M . En effet ; soit $X^H \in T_{(x,u)}f(X_{(x,u)}^H) = 0$.

$$\begin{aligned} T_{(x,u)}f(X_{(x,u)}^H) &= D(f \circ \varphi^*)(\varphi^*(x, u)) \circ \widetilde{\varphi}_{(x,u)}^*(X_{(x,u)}^H) \\ &= D(f \circ \varphi^*)(\varphi^*(x, u))(X^i \partial_i - X^j u^k \Gamma_{jk}^h \partial_h) \\ &= X^1 u^i u^j \frac{\partial}{\partial x^1}(g_{ij}) + \dots + X^m u^i u^j \frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ij}) \\ &\quad + 2u^s g_{1s} X^j u^k \Gamma_{jk}^1 + \dots + 2u^s g_{ms} X^j u^k \Gamma_{jk}^m \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que

$$\Gamma_{jk}^r = \frac{1}{2} g^{rl} \sum_{l=1}^m \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} + \frac{\partial g_{lr}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^l} \right\}$$

on a

$$\begin{aligned} 2u^s g_{1s} X^j u^k \Gamma_{jk}^1 &= 2u^s u^k X^j g_{1s} \frac{1}{2} g^{1l} \sum_{l=1}^m \left\{ \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^l} \right\} \\ &= X^j u^s u^k \frac{\partial}{\partial x^1}(g_{kj}). \end{aligned}$$

d'où

$$T_{(x,u)}f(X_{(x,u)}^H) = 0$$

Par contre, le relèvement vertical n'est pas, en général, tangent à T_1M en (x, u) .

Définition 3.19 *Le relèvement tangentiel de X est un champ de vecteurs noté X^T tangent à T_1M défini par*

$$X_{(x,u)}^T = X_{(x,u)}^V - \widehat{g}_{(x,u)}(X^V, \mathcal{U}) \mathcal{U}_{(x,u)}$$

Le fibré $T(TM)|_{T_1M}$, se décompose en

$$TTM|_{T_1M} = TT_1M \oplus T^\perp T_1M$$

d'où si $\widehat{Z} \in T_{(x,u)}TM$ avec $(x, u) \in T_1M$, alors

$$\begin{aligned}\widehat{Z} &= X_{(x,u)}^H + Y_{(x,u)}^V \\ &= X_{(x,u)}^H + Y_{(x,u)}^T - \widehat{g}(Y^V, \mathcal{U})\mathcal{U}_{(x,u)}\end{aligned}$$

avec

$$X_{(x,u)}^H + Y_{(x,u)}^T \in T_{(x,u)}T_1M \text{ et } \widehat{g}(Y^V, \mathcal{U})\mathcal{U}_{(x,u)} \in T_{(x,u)}^\perp T_1M$$

Donc l'espace tangent T_1M au point (x, u) est engendré par des vecteurs de la forme X^H et X^T . On munit alors, l'hypersurface $T_1M \subset (TM, \widehat{g})$ par une métrique \widetilde{g} définie par

$$\begin{aligned}1) \widetilde{g}(X^H, Y^H) &= \widehat{g}(X^H, Y^H), \\ 2) \widetilde{g}(X^H, Y^T) &= 0, \\ 3) \widetilde{g}(X^T, Y^T) &= \widehat{g}(X^V, Y^V) - \widehat{g}(X^V, \mathcal{U}) \cdot \widehat{g}(Y^V, \mathcal{U}).\end{aligned}$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Remarque 3.20 On remarque que $u_{(x,u)}^T = u_{(x,u)}^T - \widehat{g}_{(x,u)}(u^V, \mathcal{U})\mathcal{U}_{(x,u)} = 0$.

3.2.2 Crochet de Lie

Proposition 3.21 Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$$\begin{aligned}1) [X^H, Y^H] &= (\nabla_X Y)^T, \\ 2) [X^T, Y^T] &= g(X, u)Y^T - g(Y, u)X^T\end{aligned}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
1) [X^H, Y^T]_{(x,u)} &= [X^H, Y^V - g_x(Y, u) \cdot \mathcal{U}]_{(x,u)} \\
&= [X^H, Y^V]_{(x,u)} - [X^H, g_x(Y, u) \cdot \mathcal{U}]_{(x,u)} \\
&= [X^H, Y^V]_{(x,u)} - X^H_{(x,u)} (\tilde{g}(Y^V, \mathcal{U})) \cdot \mathcal{U}_{(x,u)} \\
&= [X^H, Y^V]_{(x,u)} - g_x(\nabla_X Y, u) \cdot \mathcal{U}_{(x,u)} \\
&= (\nabla_X Y)_{(x,u)}^V - g_x(\nabla_X Y, u) \cdot \mathcal{U}_{(x,u)} \\
2) [X^T, Y^T]_{(x,u)} &= [X^V - g_x(X, u) \cdot \mathcal{U}, Y^V - g_x(Y, u) \cdot \mathcal{U}]_{(x,u)} \\
&= g_x(X, u) (Y_{(x,u)}^V - g_x(Y, u) \cdot \mathcal{U}_{(x,u)}) - g_x(Y, u) (X_{(x,u)}^V - g_x(X, u) \cdot \mathcal{U}_{(x,u)}) \\
&= g_x(X, u) Y_{(x,u)}^T - g_x(Y, u) X_{(x,u)}^T.
\end{aligned}$$

■

3.2.3 Connexion de Levi-Civita

Proposition 3.22 *Soit $\tilde{\nabla}$ la connexion de LEVI-CIVITA de T_1M équipé de la métrique \tilde{g} induite de la métrique de SASAKI définie sur TM , si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M , alors on a*

$$\begin{aligned}
1) \tilde{\nabla}_{X^T} Y^T &= -g(Y, u) X^T, \\
2) \tilde{\nabla}_{X^T} Y^H &= \frac{1}{2} \{R(u, X) Y\}^H, \\
3) \tilde{\nabla}_{X^H} Y^T &= (\nabla_X Y)^T + \frac{1}{2} \{R(u, Y) X\}^H, \\
4) \tilde{\nabla}_{X^H} Y^H &= (\nabla_X Y)^H + \frac{1}{2} \{R(X, Y) u\}^T.
\end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Bibliographie

- [1] Alessandra Frabetti, Géométrie différentielle appliquée à la physique, Cours M2, automne 2010.
- [2] Azzouz Awane, Cours de Géométrie Différentielle DESA. Géométrie Différentielle et Applications.
- [3] D. RENARD, Introduction à la géométrie différentielle, 25 juillet 2013.
- [4] E.Boeckx and L. Vanhecke, Characteristic reflection on unit tangent sphere bundles, Houston J.Math. 23(1997).
- [5] ELIAS KAPPOS, Natural Metrics on Tangent Bundles, Master's thesis.
- [6] E.Musso et F.Tricerri, Riemannian metrics on tangent bundls, Ann Mat. Pura Appl. (4), 150 (1988).
- [7] Erwann Aubry, Introduction à la géométrie Riemannienne, 2008.
- [8] F. Hathout, ;H.M. Dida. Diagonal lift in the tangent bundle of order two and its applications. (English) Turk. J. Math. 30, No. 4, 373-384 (2006).
- [9] Frédéric Jean, AOT 13, Géométrie Différentielle et application au contrôle Géométrique, Note de cours, 2011,2012.
- [10] Ilkka Holopainen and Tuomas Sahlsten, Riemannian géometry1, April 5, 2013.
- [11] Jacques LAFONTAINE,Introduction aux variétés différentielles, Presses Universitaires de Grenoble 1996.
- [12] M. H. Dida, F. Hathout and M. Djaa, On the Geometry of the Second Order Tangent Bundle with the Diagonal lift Metric, Int. Journal of Math. Analysis 3, 443–456 (2009).

- [13] M.Sekisawa, Curvature of tangent bundles with Cheeger Gromoll metric, Tokyo, J. Math. 14(1991).
- [14] O.Kowalski and M.Sekizawa, Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles A classification Bull. Tokyo Gakugei Univ. (4) 40(1988).
- [15] O.Kowalski and M.Sekizawa, On tangent sphere bundles with small or large constant radius. Ann. global Anal. Geom. 18 :2000.
- [16] P.Dombrowski, On the Geometry of the Tangent Bundle, J.Reine Angew. Math. 210 (1962).
- [17] Sigmundur Gudmundsson, An Introduction to Riemannian Geometry (Lund University) (version 1.295 - 4 March 2015).
- [18] S. Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 10 (1958) 338-358.
- [19] TAHANY AL-SHAMAN, Geometry of Tangent Bundle.
- [20] Thierry MASSON, Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions.