République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année universiteur:2014/2015

Théorie des C_0-semi-groupes et applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : Mathématiques
Spécialité : Analyse, Géométrie et Application

par

Amara Mohamed Amine[1]

Sous la direction de

Pr.Belmekki Mohammed

Soutenu le 16 Juin 2015 devant le jury composé de

Mr. Djebbouri Djelloul	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr. Belmekki Mohammed	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Mr. Bennihi Omar	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Melle. Mostefai Fatima Zohra	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : aamine36@yahoo.com

Remerciements

Au début et avant tout, je rends grâce à dieu tout puissant qui m'a aide à terminer ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à **Mr.Belmakki Mohamed** avoir encadré ce travail et pour les conseils efficaces et les encouragements et encore plus pour tout le temps qu'il m'a consacré pour me suivre pendant la rédaction de ce travail.

En outre, je reste et resterai fort reconnaissant à **Mr.Djebbouri Djelloul** qui me fera honneur de présider ce jury, ainsi qu'à **Mr.Bennihi Omar** et **Me.Mostefai Fatima zohra** d'avoir bien voulu accepter d'être examinateurs de ce même jury.

Enfin je remercie tous ceux que j'ai pu côtoyer durant les cinq anneés d'études, et tous ceux qui ont contribué de prés ou loin à l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

C'est avec plaisir que je présente mes meilleurs voeux et sentiments à toute ma famille, en particulier mes parents.

Je dédie ce travail à tous mes chers amis sans exception.

Résumé

Dans ce mémoire on s'est intéressé à la théorie bien connue de C_0-semi groupes et son application aux équations différentielles abstraites.

Mots clés. C_0-semi-groupe, l'approximation généralisée de Yosida, générateur infinitésimal.

Abstract

Here we are concerned with C_0-semigroups theory and its application to abstract differential equations.

Key words. C_0-semi-groupe, l'approximation généralisée de Yosida, la partie du générateur.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle réalise, en autre, l'isomorphisme fondamental algébrique et topologique entre le groupe topologique aditif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs, on peut constater que la fonction $t \longmapsto e^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$, est une solution réele continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$. Cette équation a été etudiée par beaucoup de mathématiciens commençant avec Cauchy même. D'autre part, il est trés bien connu que la fonction exponentielle $t \longmapsto e^{ta}$ est la solution unique sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x' = ax$ avec la condition initiale $x(0) = 1$. L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance apres l'année 1888, quand le grand mathématicien Giuseppe Peano a eu l'inspiration d'écrire la solution du probléme de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = I, \end{cases}$$

où A est une matrice quadratique, sous la forme

$$t \longmapsto e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles $X' = AX$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach $\mathcal{X}$, qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle $t \longrightarrow e^{tA}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modéle général dans le cadre des algébres de Banach abstraites. Plus précisément, si $\mathcal{B}$ est une algébre de Banach avec l'unité

I et $a \in \mathcal{B}$, alors la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{ta} \in \mathcal{B}$$

$$e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!}$$

est dérivable et elle est l'unique solution du probléme de Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = I, \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité des solutions du probléme de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(t) = e^{ta}$ satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation fonctionnelle de Cauchy. Le probléme reciproque de savoir si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premier ordre $x' = ax$, s'est avéré être plus dfficile, mais il a été résolu par Nathan et Yosida . Donc la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéeaire de premier ordre a été établie pour le cas géneral des algébres de Banach abstraites. Ces caractérisations importantes ont sugéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle. De cette maniére est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $x' = Ax$ où A n'est pas un opérateur de l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, mais un opérateur linéaire non-borné dans un espace de Banach $\mathcal{X}$. La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été realisée par l'introduction des semi-groupes de classe C_0. Mais, dans ce cas-là, l'équation fonctionnelle de Cauchy se référe aux fonctions

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t+s) = T(t)T(s)$ et qui sont fortement continues, c'est-à-dire ayant la propriété

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Chapitre 2

Semi-groupes de classe $\mathcal{C}_0$

2.1 Définitions. Propriétés élémentaires

Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. on note par $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{E}$ et par I l'unité de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. Pour un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ on note par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathrm{C} | \lambda I - A \ est\ inversible\ dans\ \mathcal{B}(\mathcal{E})\}$$

l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et par :

$$\mathcal{R}(\cdot; A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$\mathcal{R}(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Définition 2.1.1. *On appelle* C_0*-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* $\mathcal{E}$ *une famille* $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *vérifiants les propriétés suivantes :*

1. $T(0) = I$;
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \quad (\forall)t, s \geq 0;$
3. $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$

Définition 2.1.2. *On appelle générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$*, un opérateur* A *défini sur l'ensemble :*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{E} \Big| \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \ existe \right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \ (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 2.1.1. *Il est clair que le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe est un opérateur linéaire.*

Exemple 2.1.1. *Soit :*

$$\mathcal{C} = \{f : [0, \infty) \to \mathbf{R} |\ f \text{ est uniformément continue et bornée } \}.$$

Avec la norme $||f||_{\mathcal{C}} = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |f(\alpha)|$*, l'espace* $\mathcal{C}$ *devient un espace de Banach.*
Définissons :

$$(T(t)f)\alpha = f(t + \alpha), \ (\forall) t \geq 0 \text{ et } \alpha \in [0, \infty).$$

Evidemment $T(t)$ *est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :*

1. $(T(0)f)\alpha = f(0 + \alpha) = f(\alpha)$. *Danc* $T(0) = I$;

2. $(T(t + s)f)\alpha = f(t + s + \alpha) = (T(t)f)(s + \alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha)$,
   $(\forall) f \in \mathcal{C}$. *Danc* $T(t + s) = T(t)T(s)$, $(\forall) t, s \geq 0$;

3. $\lim_{t \searrow 0} \|T(t)f - f\|_{\mathcal{C}} = \lim_{t \searrow 0} \{\sup_{\alpha \in \mathcal{C}} |f(t + \alpha) - f(\alpha)|\} = 0, \ (\forall) f \in \mathcal{C}$.

De même, on a :

$$\begin{aligned} |T(t)f|_{\mathcal{C}} &= \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |(T(t)f)(\alpha)| \\ &= \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |f(t + \alpha)| \\ &= \sup_{\beta \in [t,\infty)} |f(\beta)| \\ &\leq \sup_{\beta \in [0,\infty)} |f(\beta)| = \|f\|_{\mathcal{C}}, \ (\forall) t \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1, \ (\forall) t \geq 0$. *Par conséquent* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe d'opérateurs linéaires borneés sur* $\mathcal{C}$*, nommé le* C_0*-semi-groupe de translations à droite.*

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *le genérateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.
Si $f \in \mathcal{D}(A)$, *alors on a :*

$$Af(\alpha) = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α. *Par conséquent :*

$$\mathcal{D}(A) \subset \{f \in \mathcal{C} \mid f' \in \mathcal{C}\}.$$

Si $f \in \mathcal{C}$ *tel que* $f' \in \mathcal{C}$, *alors :*

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|.$$

Mais :

$$\begin{aligned} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} f(\tau)|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} [f'(\tau) - f'(\alpha)] d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)| \, d\tau \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

uniformément par rapport à α *pour* $t \searrow 0$. *Par suite :*

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}} \longrightarrow 0 \text{ si } t \searrow 0,$$

d'ou $f \in \mathcal{D}(A)$ *et :*

$$\{f \in \mathcal{C} \mid f' \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{D}(A)$$

Par conséquent $\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{C} \big| f' \in \mathcal{C}\}$ *et* $Af = f'$. *Comme cet opérateur est non borneé, il ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu.*

On note par $\mathcal{SG}(M, \omega)$ l'ensemble des $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que :

$$\{T(t)\} \leq Me^{\omega t}, \quad (\forall)t \geq 0$$

Dans ce cas, on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe exponentiellement borné.

Proposition 2.1.1. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathrm{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité :*

$$T(t)Ax = AT(t)x, \ (\forall)t \geq 0.$$

preuve. *Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, on a :*

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t) \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h}. \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x, \ (\forall)t \geq 0$.

Remarque 2.1.2. *On voit que :*

$$T(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A), \ (\forall)t \geq 0.$$

Proposition 2.1.2. *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathrm{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}.$$

est dérivable sur $[0,\infty)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \ (\forall)t \geq 0.$$

preuve. *Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax \right\| &\leq \|T(t)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| \\ &\leq Me^{wt} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax,$$

d'où :

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \ (\forall)t \geq 0.$$

Si $t-h>0$, *alors on a :*

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax\right\| \\ &\leq Me^{(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \|T(h)Ax - Ax\|\right).\end{aligned}$$

Par suite :

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} = T(t)Ax.$$

et :

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \ (\forall)t \geq 0.$$

Alors l'application considérée dans l'enoncé est dérivable sur $[0,\infty)$, *quel que soit* $x \in \mathcal{D}(A)$. *De plus, on a l'égalité :*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \ (\forall)t \geq 0.$$

Lemme 2.1.1. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{C}_0$*-semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ *et* $t \geq 0$.

preuve. *L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation :*

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\ ds - T(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s)-T(t))x\ ds\right\| \\ &\leq \sup_{s\in[t,t+h]}\|T(s)x - T(t)x\|\end{aligned}$$

et de la continuité de l'application $[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$.

Proposition 2.1.3. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in \mathcal{E}$, *alors :*

$$\int_0^t T(s)x\, ds \in \mathcal{D}(A),$$

et on a l'égalité :

$$A\int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x - x,\ (\forall)t \geq 0.$$

preuve. *Soient* $x \in \mathcal{E}$ *et* $h > 0$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\, ds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\, du - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\, ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)x\, du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\, du - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\, du \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)x\, du - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\, du
\end{aligned}$$

Par pasage à limite pour $h \searrow 0$ *et compte tenu du lemme 2.1.1, on obtient :*

$$A\int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x - x,\ (\forall)t \geq 0$$

et :

$$\int_0^t T(s)x\, ds \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 2.1.1. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$ *si seulement si*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\, ds,\ (\forall)t \geq 0.$$

preuve. $\Longrightarrow$ *si* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$*, alors on a :*

$$\frac{d}{ds}T(s)x = T(s)Ax = T(s)y, \ (\forall)s \in [0,t], \ t \geq 0,$$

d'où :

$$\int_0^t T(s)y \ ds = \int_0^t \frac{d}{ds}T(s)x \ ds = T(t)x - x, \ (\forall)t \geq 0,$$

$\Longleftarrow$ *Soient* $x, y \in \mathcal{E}$ *tel que :*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \ ds, \ (\forall)t \geq 0,$$

Alors on a :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y \ ds, \ (\forall)t \geq 0,$$

d'où

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y \ ds = T(0)y = y, \ (\forall)t \geq 0,$$

compte tenu du lemme 2.1.1. Finalement on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$*.*

Théorème 2.1.2. *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.
2. A *est un opérateur fermé.*

preuve. *1) Soient* $x \in \mathcal{E}$ *et* $t_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$*. Alors :*

$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds \in \mathcal{D}(A), \ (\forall)n \in \mathbf{N},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x \ ds = T(0)x = x.$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *et* $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. *Alors :*

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\|\|Ax_n - y\| \leq Me^{wt}\|Ax_n - y\|$$

quel que soit $s \in [0,t]$. *Par suite* $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$, *pour* $n \to \infty$, *uniformément par rapport à* $s \in [0,t]$. *D'autre part, puisque* $x_n \in \mathcal{D}(A)$, *on a :*

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds,$$

d'où :

$$\lim_{n\to\infty}[T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n \, ds,$$

où bien

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \, ds.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)y \, ds = y.$$

Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax = y$, *d'où il résulte que* A *est un opérateur fermé.*

On montre maintenant un résultat qui concerne l'unicité de l'engendrement pour les $\mathcal{C}_0$-semi-groupe.

Théorème 2.1.3. ***[l'unicité de l'engendrement]*** *Soient deux* C_0*-semi-groupes* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *et* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur* A. *Alors :*

$$T(t) = S(t), \ (\forall)t \geq 0.$$

preuve. *Soient* $t > 0$ *et* $x \in \mathcal{D}(A)$. *On définit l'application :*

$$[0,t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0. \end{aligned}$$

quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. *Par suite* $U(0)x = U(t)x$, *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$, *d'où :*

$$T(t)x = S(t)x, \ (\forall)x \in \mathcal{D}(A) \ \textit{et} \ t \geq 0.$$

Puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ *et* $T(t), S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, *pour tout* $t \geq 0$,*il résulte que :*

$$T(t)x = S(t)x, \ (\forall)t \geq 0, \ \textit{et} \ x \in \mathcal{E}.$$

ou bien :

$$T(t) = S(t), \ (\forall)t \geq 0.$$

2.2 Transformée de Laplace d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ on désigne par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in C | Re\lambda > \omega\}$. Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. On a :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ (\forall)t \geq 0.$$

et on voit que :

$$\|e^{-\lambda t}T(t)x\| \leq e^{Re\lambda t}\|T(t)\|\|x\| \leq Me^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|, \ (\forall)x \in \mathcal{E}$$

On définit l'application :

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

par

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt.$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus, on a :

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\|dt \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|x\|, \ (\forall)x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Définition 2.2.1. *L'opérateur :*

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$.

Théorème 2.2.1. *Soit* $T : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une application fortement continue pour laquelle il existe* $M \geq 0$ *et* $\omega \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \ (\forall) t \geq 0.$$

Alors l'application

$$R : \Lambda_\omega \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E}),$$

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

est une pseudo-résolvante si et seulement si on a :

$$T(t + s) = T(t)T(s), \ (\forall) t, s \geq 0.$$

preuve. *Soient $\lambda, \mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\lambda \neq \mu$. Alors on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda} &= \frac{1}{\mu-\lambda}R(\lambda) - \frac{1}{\mu-\lambda}R(\mu) \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}R(\lambda)d\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}R(\mu)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}\int_0^\infty e^{-\mu r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\mu r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}e^{\lambda r}T(r)drd\tau \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)(\tau+r)}dre^{-\lambda r}T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}e^{-\lambda r}T(r)drd\tau - \int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-(\mu-\lambda)(v}dve^{-\lambda r}T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^\tau e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau + \int_\tau^\infty e^{-(\mu-\lambda)\tau}d\tau - \int_\tau^\infty e^{-(\mu-\lambda)v}dv\right)e^{-\lambda r}T(r)dr \\
&= \int_0^\infty\int_0^\tau e^{-(\mu-\lambda)s}dse^{-\lambda r}T(r)dr = \int_0^\infty\int_0^\tau e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}T(r)dsdr \\
&= \int_0^\infty\int_s^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}e^{-\lambda r}T(r)drds = \int_0^\infty e^{-(\mu-\lambda)s}\int_s^\infty e^{-\lambda r}T(r)drds \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu s}\int_s^\infty e^{-\lambda(r-s)}T(r)drds = \int_0^\infty e^{-\mu s}\int_s^\infty e^{-\lambda t}T(t+s)dtds \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}T(t+s)dtds.
\end{aligned}$$

D'autre part, il est clair que

$$R(\lambda)R(\mu)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}T(t)T(s)dtds.$$

et par conséquent :

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\mu-\lambda}-R(\lambda)R(\mu)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-\mu s}[T(t+s)-T(t)T(s)]dtds$$

d'où on déduit facilement les affirmations de l'énoncé.

Théorème 2.2.2. *Soient $A:\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ un opérateur linéaire fermé densement définit et $\{T(t)\}_{t\geq 0}\subset\mathcal{B}(\mathcal{E})$ une famille fortement continue pour laquelle il existe $M\geq 0$ et $\omega\in\mathbb{R}$ tel que*

$$\|T(t)\|\leq Me^{\omega t},\ (\forall)t\geq 0.$$

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe exponentiellement borné ayant pour génerateur infinitésimal L'opérateur A ;*
2. *$\Lambda_\omega\in\rho(A)$ et pour tout $\lambda\in\Lambda_\omega$ et tout $x\in\mathcal{E}$ on a $R(\lambda)x=R(\lambda;A)x$.*

preuve. 1) $\Longrightarrow$ 2) *$\lambda\in\Lambda_\omega$ et tout $x\in\mathcal{E}$, On a :*

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R(\lambda)x-R(\lambda)x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)xdt-\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{T}(t)xdt\\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds-\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds-\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds-\int_0^h e^{-\lambda s}T(s)xds\right)-\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)xds.
\end{aligned}$$

Par passage à limite, on obtient :

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)R(\lambda)x-R(\lambda)x}{h}=\lambda R(\lambda)x-x.$$

Il en résulte que $R(\lambda)x\subset D(A)$ *et*

$$AR(\lambda)x=\lambda R(\lambda)x-x,\ (\forall)x\in\mathcal{E},$$

ou bien

$$(\lambda I-A)R(\lambda)x=x,\ (\forall)x\in\mathcal{E}.$$

Si $x\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$*, alors on obtient :*

$$\begin{aligned}R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt\\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)xdt\\ &= [e^{-\lambda t}T(t)x]|_0^\infty+\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt=x+\lambda R(\lambda)x,\end{aligned}$$

d'où :

$$R(\lambda)(\lambda I-A)x=x,\ (\forall)A\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Finalement, on voit que $\lambda\in\rho(A)$ *et* $R(\lambda)x=R(\lambda;A)x$*, pour tout* $x\in\mathcal{E}$*.*
2) $\Longleftarrow$ 1) *soit* $\lambda\in\Lambda_\omega$ *et* $R(\lambda;A)=R(\lambda)$ *Compte tenu du théorème 2.2.1 il en résulte :*

$$T(t+s)=T(t)T(s),\ t,s\geq 0.$$

De plus, si $T(0)x=0$*, alors* $T(t)x=T(t)T(0)x=T(t)0=0$*, pour tout* $t>0$*.*
Par conséquent $R(\lambda)x=0$*, d'où il résulte* $x=0$ *et, par suite,* $T(0)=I$*.*
Il en découle $T(t)_{t\geq 0}\in\mathcal{SG}(M,\omega)$*.*
Soit maintenant B *le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $T(t)_{t\geq 0}$*. Alors, en appliquant la première partie de la preuve, on a :*

$$R(\lambda;B)=R(\lambda)=R(\lambda;A)$$

d'où il s'ensuit que $B=A$*.*

Remarque 2.2.1. *On voit que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a :*

$$R(\lambda; A) = R(\lambda) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et

$$\mathcal{I}m\ R(\lambda; A)D(A) = \mathcal{I}m\ R(\lambda)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A).$$

Remarque 2.2.2. *Soient $T(t)_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors on a*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} | Re\lambda > \omega \subset \rho(A)\},$$

et

$$\{\sigma(A) \subset \lambda \in \mathbf{C} | Re\lambda \leq \omega\}.$$

Théorème 2.2.3. *Soient $T(t)_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a :*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n},\ (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

preuve. *Soit $T(t)_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$. Alors*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ (\forall) t \geq 0.$$

Compte tenu du théorème 2.2.2, si $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et :

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt,\ (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

De plus :

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{Re\ \lambda - \omega}.$$

Il est clair que :

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A)x = -\int_0^\infty te^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad (\forall) x \in \mathcal{E}$$

et par récurrence on peut montrer que :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A)x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad (\forall) x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

D'autre part, on a :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)x = (-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1}x, \quad (\forall)x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

Par suite, on a :

$$(-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1}x = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad (\forall)x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

d'où il résulte que :

$$R(\lambda;A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)x dt, \ (\forall)x \in \mathcal{E} \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

De plus :

$$\begin{aligned}\|R(\lambda;A)^n x\| &\leq \frac{M\|x\|}{(n-1)} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(Re\lambda-\omega)t} dt \\ &= \frac{M\|x\|}{n-1} \frac{n-1}{Re\lambda-\omega} \int t^{n-2} e^{-(Re\lambda-\omega)t} dt \\ &= \cdots = \frac{M\|x\|}{Re\lambda-\omega}^n\end{aligned}$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Par conséquent :

$$\|R(\lambda;A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n}, \ (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Chapitre 3

Théorème de Hille-Yosida

3.1 Théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida nous permet de caractériser les opérateurs qui génèrent des C_0-semi-groupes.

Lemme 3.1.1. *Si A est le générateur infintésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ avec $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de A. Alors $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{E}$ et A est un opérateur linéaire fermé.*

preuve. *Soit $x \in \mathcal{E}$. On pose $x_t = \frac{1}{t}\int\limits_0^t T(s)xds$, d'après la proposition 2.1.2 $x_t \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et d'après le lemme 3.1.1 $x_t \to x$ comme $t \to 0$. Ainsi $\mathcal{D}(A) = \mathcal{E}$.*
Soit $(x, y) \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ alors il existe $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$ de telle sorte que $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$ i.e $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$.
D'après la proposition 2.1.3, on a :

$$T(t)x_n - x_n = \int\limits_0^t T(s)Ax_n ds \tag{3.1}$$

Proposition 3.1.1. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors pour $x \in \mathcal{D}(A)$ on a :*

$$T(t)x - T(s)x = \int\limits_s^t T(\tau)Axd\tau = \int\limits_s^t AT(\tau)xd\tau. \tag{3.2}$$

preuve. *En intégrant l'équation de la proposition 2.1.2, on obtient 3.2 .*

Théorème 3.1.1. (**Hille − Yosida**) *: Soit A Un opérateur linéaire. A est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contraction si et seulement si :*

1. *A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.*
2. *L'ensemble de A resolvante ,$\rho(A)$ contient $\mathbb{R}_*^+$ et pour chaque $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

3.2 Preuve du théorème (condition nécessaire)

Si A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe puis par le lemme 3.1.1, A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ par conséquent (1) est prouvée.

Maintenant, pour $\lambda > 0$, definie $R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt$.

L'intégrale est bien définie puisque $\|T(t)\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)\| = \|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt\| &\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t} T(t)\| dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} \|e^{-\lambda t}\| \|T(t)\| dt \\
&= \lim_{\eta \to +\infty} \int_0^{\eta} e^{-\lambda t} dt = \lim_{\eta \to +\infty} -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\bigg|_0^{\eta} = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

alors $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$. Il s'ensuit que $R(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.
On a

$$\|R(\lambda)\| = R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

On doit montrer que $R(\lambda)(\lambda I - A) = Id_{\mathcal{D}(A)}$ et $(\lambda I - A)R(\lambda) = Id_{\mathcal{E}}$.

Montrons que $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$.

Soit $x \in \mathcal{E}$ et $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt
\end{aligned}$$

Soit $t+h=u$ alors $dt=du$ et $t=u-h$;
Il s'ensuit que

$$\begin{cases} u=h & \text{si } t=0 \\ u=+\infty & \text{si } t=+\infty \end{cases}$$

$$\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(u-h)}T(u)xdu = \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)}T(t)xdt.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt &= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda(t-h)}T(t)xdt \\
&- \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\left(e^{-\lambda t}e^{\lambda h}T(t) - e^{-\lambda t}T(t)\right)xdt \\
&- \frac{1}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t}e^{\lambda h}T(t)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&- \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t}T(t)xdt
\end{aligned}$$

et comme $h \to 0^+$ le coté droit tend vers $\lambda R(\lambda)x - x$.
Alors :

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

On peut écrire :

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x \Longrightarrow (\lambda I - A)R(\lambda) = I_{\mathcal{E}}. \tag{3.3}$$

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)(Ax)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} AT(t)xdt \\ &= A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)xdt \\ &= AR(\lambda)x. \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé la proposition 2.1.2, et le fait que A est fermé.
En utilisant 3.3, on a :

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax = \lambda R(\lambda)x - x &\Longrightarrow \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax = x \\ &\Longrightarrow R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \\ &\Longrightarrow R(\lambda)(\lambda I - A) = Id_{\mathcal{D}(A)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Alors il s'en suit de 3.3 et 3.4 que $R(\lambda) = R(\lambda; A)$.
En conclusion, on a :
$\lambda > 0$, $R(\lambda) = R(\lambda; A)$ et $\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Pour prouver que les conditions (1) et (2) du théorème 3.1.1 sont suffisantes pour que A soit un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction, nous aurons besoin de certains lemmes.

Lemme 3.2.1. *Soit A satisfaisant aux conditions (1) et (2) du théorème 3.1.1, et $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Alors :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \lambda R(\lambda; A)x = x, \ (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

preuve. *Supposons d'abord que* $x \in \mathcal{D}(A)$.
On peut écrire

$$R(\lambda; A)(\lambda I - A)x = x,$$

ce qui implique :

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = R(\lambda; A)Ax,$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|R(\lambda; A)Ax\| & (3.5) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \lambda \longrightarrow +\infty. & (3.6) \end{aligned}$$

Mais $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* $\mathcal{E}$ *et* $\|\lambda R(\lambda; A)\| \leq 1$. *Donc* $\lambda R(\lambda; A)x \longrightarrow x$ *quand* $\lambda \longrightarrow +\infty$ *pour chaque* $x \in \mathcal{E}$.

On définit maintenant, pour chaque $\lambda > 0$, l'approximation de Yosida de A par

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I. \tag{3.7}$$

Lemme 3.2.2. *Soit* A *satisfaisant aux conditions (1) et (2) du théorème 3.1.1, si* A_λ *est l'approximation de Yosida de* A*, alors :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \ (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

preuve. *Soit* $x \in \mathcal{D}(A)$ *; alors*

$$A_\lambda x = \lambda A R(\lambda; A)x = \lambda R(\lambda; A)Ax$$

, puisque la resolvante et l'opérateur commutent.
Quand λ *tend vers* $+\infty$ *le coté droit de l'égualité précédente converge vers* Ax *par le lemme 3.2.1. Ceci complète la preuve.*

Lemme 3.2.3. *Soit* A *satisfaisant aux conditions (1) et (2) du théorème 3.1.1. Si* A_λ *est l'approximation de Yosida de* A*, alors* A_λ *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contraction* e^{tA_λ}. *De plus pour chaque* $x \in \mathcal{E}$, $\lambda, \mu > 0$ *on a :*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|; \ t \geq 0.$$

preuve. *D'après 3.7 il est clair que A_λ est un opérateur linéaire borné, il est donc le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe e^{tA_λ} d'opérateurs linéaires bornés.*
On affirme que

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1; \ (\forall)t \geq 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned} e^{tA_\lambda} &= e^{(\lambda^2 tR(\lambda;A)-\lambda tId_{\mathcal{E}})} \\ &= e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)} e^{-\lambda tId_{\mathcal{E}}} \end{aligned}$$

En prenant la norme, on a :

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 tR(\lambda;A)}\| \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t\|R(\lambda;A)\|} \leq 1.$$

et donc e^{tA_λ} est un C_0-semi-groupe de contraction. Il est clair à partir de la définition que e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ et A_μ commutent entre eux.
Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right),$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x &= tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x \\ &= t(A_\lambda x - A_\mu x)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

3.3 Preuve du théorème (Condition suffisante)

preuve. *Soit* $x \in \mathcal{D}(A)$. *Alors :*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|. \tag{3.8}$$

On affirme que pour $x \in \mathcal{E}$, *on a*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \ (\forall)t \geq 0. \tag{3.9}$$

En effet.

Soit $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *d'après* 3.8 *et lemme* 3.2.2 *on obtient* $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$ *est une suite de Cauchy pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$.

On se donne $\epsilon > 0$, $(\exists)$ $\delta > 0$ *tel que* $\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| < \frac{\epsilon}{3}(\forall)$ λ, $\mu > \delta$, *et* $(\forall)$ $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Notons sa limite par $T(t)x$ *i.e* $T(t)x := \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x$.

$\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* $\mathcal{E}$ *on peut alors écrire,*

Soit $x \in \mathcal{E}$ *arbitraire, et* $\epsilon > 0$ *donné,* $(\exists)x_0 \in \mathcal{D}(A)$ *tel que* $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{3}$.

On a,

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\lambda}x_0\| + \|e^{tA_\lambda}x_0 - e^{tA_\mu}x_0\| + \|e^{tA_\mu}x_0 - e^{tA_\mu}x\|, \ (\forall)\lambda, \mu > \delta$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq \|x - x_0\| + \frac{\epsilon}{3} + \|x - x_0\|, \ (\forall)\lambda, \mu > \delta \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \ (\forall)\lambda, \mu > \delta \end{aligned}$$

C'est-à-dire, soit $x \in \mathcal{E}$:

$(\forall)$ $\epsilon > 0$, $(\exists)$ $\delta > 0$ *tel que* $\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| < \epsilon$, $(\forall)$ $\lambda, \mu > \delta$.

Alors, $(e^{tA_\lambda x})_{\lambda>0}$ *est une suite de Cauchy,* $(\forall)x \in X$. *D'autre part* $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$; $(\forall)t \geq 0$ *(évidemment* $e^{tA_\lambda} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$*). Donc,*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x, \ (\forall)t \geq 0, \ (\forall)x \in X.$$

Alors par le théorème de Banach Steinhaus on a $T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

Maintenant, Soit $\lambda > 0$ *et* $x \in \mathcal{E}$. *Alors*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x$$

est uniforme par rapport à t dans chaque ensemble compact de $\mathbb{R}^+$.
En effet,
On a $(e^{tA_\lambda}x)_{\lambda>0}$ est une suite de Cauchy, $(\forall)$ $x \in \mathcal{E}$ et $t > 0$.
Soit λ, $\mu > 0$ et $x \in \mathcal{E}$.
Soit $\epsilon > 0$ donné, $(\exists)$ $\delta > 0$ tel que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \epsilon; t \in [0 : \alpha], \ (\forall)\alpha > 0; \ \lambda, \mu > \delta.$$

Par le critère de Cauchy uniforme $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformément dans $[0, \alpha]$ pour tout $\alpha > 0$.
Maintenant, on va vérifier que la limite $T(t)$ est un C_0-semi-groupe de contraction.

1. $T(0)x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^0 x = x$ *qui implique* $T(0) = I$ *et puisque* $\|T(t)x\| \leq \|T(t)\|\|x\|$, *alors* $\|T(t)\| \leq 1$.
2. $T(t+s)x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = T(t)T(s)$.
3. $t \longmapsto T(t)x$ *est continu pour* $t \geq 0$ *comme une limite uniforme des fonctions continues* $t \longmapsto e^{tA_\lambda}x$.

Ainsi $T(t)$ est un C_0-semi-groupe de contraction de $\mathcal{E}$.
Pour conclure la preuve, on montre que A est un générateur infinitésimal de $T(t)$.
Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, puis à l'aide de 3.9 et la proposition 3.1.1 on a :

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds = \int_0^t T(s)Ax ds \tag{3.10}$$

La dernière égalité suit de la convergence uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ à $T(t)Ax$ sur tout intervalle borné i.e

$$\begin{aligned} \|A_\lambda e^{sA_\lambda}x - T(s)Ax\| &\leq \|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - e^{sA_\lambda Ax}\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \\ &\leq \|e^{sA_\lambda}\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \\ &\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|e^{sA_\lambda}Ax - T(s)Ax\| \end{aligned}$$

Comme $\lambda \longrightarrow +\infty$, le coté droit tend vers zéro.
Donc

$$\sup_{s\in[0,t]} \|A_\lambda e^{sA_\lambda}x - T(s)Ax\| = 0.$$

Maintenant, Soit B le générateur infintésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et soit $x \in \mathcal{D}(A)$. On affirme que,

$$A = B.$$

En effet,

Divisons 3.10 *par* $t > 0$ *alors pour* $t \longrightarrow 0$ *on voit que* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et que* $Bx = Ax$*. Ainsi* $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$*.*

Puisque B *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contraction* $T(t)$*, il résulte de la condition nécessaire que* $1 \in \rho(B)$ *et avec le fait que* $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$*, on a* $(I-B)\mathcal{D}(A) = (I-A)\mathcal{D}(A) = \mathcal{E}$ *(*A *et* B *sont égaux dans* $\mathcal{D}(A)$ *et* $I - A$ *est bijective).*

Par conséquent $(I-B)\mathcal{D}(A) = \mathcal{E}$ *implique que* $(I-B)^{-1}\mathcal{E} = \mathcal{D}(A)$ *et donc* $A = B$*, qui est* A *est le générateur infinitésimal D'un* C_0*-semi-groupe de contraction.*

Cela achève la démonstration.

Chapitre 4

Problème de Cauchy

4.1 Problème de Cauchy Homogène

Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach et A un opérateur linéaire de $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Étant donné $x \in \mathcal{E}$ le problème de Cauchy pour A avec données initiales x consiste à la détermination d'une solution $x(t)$ au problème à valeur initiale

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x \end{cases} \tag{4.1}$$

Où par solution on veut dire une fonction $x(t)$ à valeur dans $\mathcal{E}$ tel que $x(t)$ est continue pour $t \geq 0$ continuement différentiable et $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et 4.1 est satisfaite.
Notez que quand $x(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et x est continu à $t = 0$ 4.1 ne peut pas avoir une solution pour $x \notin \mathcal{D}(A)$.

Théorème 4.1.1. *Soit $T(t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe dans $\mathcal{E}$ un générateur infinitésimal A. Alors pour chacun $x \in \mathcal{D}(A)$. Le système 4.1 à une solution unique $x(t)$ dans $\mathcal{C}^1([0, \infty); \mathcal{E}) \cap \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{D}(A))$ et*

$$x(t) = T(t)x, \ (\forall)t \geq 0.$$

preuve. *L'existence suit à partir de la proposition 2.1.2.*
Pour prouver l'unicité soit v une autre solution dans $\mathcal{C}^1([0, \infty); \mathcal{E}) \cap \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{D}(A))$. Fixons $t > 0$ et posons :

$$z(t) = T(t-s)v(s), \ s \in [0, t].$$

d'après la proposition 3.1.1 et les propriétés de v et $z \in \mathcal{C}^1([0,\infty);\mathcal{E}) \cap \mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{D}(A))$, on a pour tous $s \in [0,t]$,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds}(s) &= -AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= T(t-s)Ax(s) - AT(t-s)x(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite $z \in \mathcal{C}^1([0,t];\mathcal{E})$ et $z(s) = z(0)$ pour tout $s \in [0,t]$; Ceci implique $v(t) = z(t) = T(t)v(0) = T(t)x$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 4.1.1. *Si A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe ce qui n'est pas différentiable, alors en général si $x_0 \notin \mathcal{D}(A)$, alors le problème de valeur initiale 4.1 n'a pas de solution. La fonction $t \longrightarrow T(t)x_0$ est alors appelée "mild solution" du problème à valeur initiale 4.1.*

Définition 4.1.2. *Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach $\mathcal{E}$. Le semi-groupe $T(t)$ est dit différentiables pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$; $t \longrightarrow T(t)x$ est différentiables pour $t > t_0$; $T(t)$ est dit différentiable s'il est différentiables pour $t > 0$.*
Notez que nous avons vu dans la proposition 2.1.2 que si $T(t)$ est un C_0-semi-groupe avec un générateur infinitésimal de A et $x \in \mathcal{D}(A)$ alors $T \longrightarrow T(t)x$ est différentiable pour $t \geq 0$. Si $T(t)$ est de plus différentiable alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, $t \longrightarrow T(t)x$ est différentiables pour $t > 0$.
Notez que $t \longrightarrow T(t)x$ est différentiable pour tout $x \in \mathcal{E}$ et $t > 0$, alors $\mathcal{D}(A) = \mathcal{E}$ et puisque A est fermé, il est nécessairement borné.

4.2 Problème Cauchy Linéaire Nonhomogène

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{E}$ est continue. Nous supposerons dans cette section que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de sorte que l'équation homogène correspondante, i.e avec $f \equiv 0$, a une solution unique pour chaque valeur initiale $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Définition 4.2.1. *Une fonction* $x : [0; a[\longrightarrow \mathcal{E}$ *est une solution (classique) de 4.2 sur* $[0; a[$ *si et Seulement si*

1. x *est continu dans* $[0; a[$ *;*
2. $x(t)$ *est continûment différentiables sur* $]0; a[$ *;*
3. $x(t) \in \mathcal{D}(A)$*, pour* $t \geq 0$ *et 4.2 est satisfaite sur* $[0; a[$.

Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe engendré par A et soit x une solution de 4.2. Alors la fonction $g(s) = T(t-s)x(s)$ est différentiables pour $0 < s < t$ et :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)x'(s) \\ &= T(t-s)(Ax) + f(s)) - AT(t-s)x(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)Ax(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Si $f \in L^1([0; a]; \mathcal{E})$ alors $T(t-s)f(s)$ est intégrable et en intégrant 4.3 de 0 à t on a

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Donc,

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \tag{4.4}$$

En particulier si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, alors $(\forall)\ x_0 \in \mathcal{E}$, l'équation 4.2 a une solution unique x sur $\mathbb{R}^+$.
donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds.$$

Corollaire 4.2.1. *Si* $f \in L^1([0; a]; \mathcal{E})$ *alors pour chaque* $x \in \mathcal{E}$ *le problème de valeur initial 4.2, au plus une solution. S'il a une solution, cette solution est donnée par 4.4.*

Pour chaque $f \in L^1([0; a]; \mathcal{E})$ le côté droit de 4.4 est une fonction continue sur $[0; a]$. Il est naturel de considérer comme une solution généralisée de 4.2, même si elle n'est pas différentiable et ne satisfait pas à l'équation strict dans le sens de la définition 4.2.

Définition 4.2.2. *Soit A le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $T(t)_{t\geq 0}$.
Soit $x \in \mathcal{E}$ *et* $f \in L^1([0;a];\mathcal{E})$. *La fonction* $x \in \mathcal{C}([0;a];\mathcal{E})$ *donnée par :*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \ , \ 0 \leq t \leq a,$$

est la solution "mild" du problème à valeur initiale 4.2 sur $[0;a]$.

Remarque 4.2.1. *La continuité de f, en général, ne suffit pas à assurer l'existence de solutions de 4.2 pour* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Exemple 4.2.1. *Soit A le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $T(t)$, *et soit* $y \in X$ *telle que* $T(t)y \notin \mathcal{D}(A)$ *pour tout* $t \geq 0$, *soit* $f(s) = T(s)y$.
Alors f est continue pour $s \geq 0$. *Considérons le problème de valeur initiale :*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + T(t)y, & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Proposition 4.2.1. *4.5 n'a pas de solution, même si* $x(0) = 0 \in \mathcal{D}(A)$.
La solution "mild" de 4.5 est :

$$x(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)yds = \int_0^t T(t)yds = tT(t)y$$

mais $tT(t)y$ *est non dérivable pour* $t > 0$ *puisque* $y \notin \mathcal{D}(A)$, *et par conséquent ne peut pas être la solution de 4.5.*

Théorème 4.2.1. *Soit A le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *Soit* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ *et* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{E}$ *est fonction de* C^1 *alors la solution "mild" devient une solution classique de l'équation 4.2.*

preuve. *La solution "mild solution" est :*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds = T(t)x_0 + v(t).$$

Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$; alors

$$v(t) = Ax(t) + T(t)y, \forall t \geq 0 \ et \ v(0) = 0.$$

En effet,

Soit $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+1} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^{t+1} T(t+h-s)f(s)ds \\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+1} T(t+h-s)f(s)ds \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

De la continuité de f il est clair que le deuxième terme sur le côté droit de 4.6 à la limite $f(t)$ comme $h \longrightarrow 0$.

Mais nous avons aussi :

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds$$

Alors,

$$\begin{aligned}
D^+v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds \textit{ comme } h \to 0^+ \\
&= \int_0^t T(s)f'(t-s)ds \\
&= \int_0^t T(t-s)f'(s)ds \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Comme f' est continue alors : $t \to \int_0^t T(t-s)f'(s)$ est continue dans $\mathbb{R}^+$.

Finalement,

$$Av(t) = D^+v(t) - f(t), \ t \geq 0.$$

Lemme 4.2.1. *Soit* $u : [a, b] \to \mathcal{E}$.
Supposont que $D^+u(t)$ *existe sur* $[a.b]$, *et* $t \to D^+u(t)$ *est continu sur* $[a.b]$, *alors* u *est de classe* C^1 *sur* $[a.b]$.
En utilisant ce lemme alors v *est de classe* C^1 *et :*

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t), & t \geq 0. \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

La solution "mild" de l'équation 4.2 est :

$$x(t) = v(t) + T(t)x_0.$$

Nous devons montrer que $x \in \mathrm{C}^1$.
Soit $x_0 \in D(A)$, *alors :*

$$\frac{d}{dt}T(t)x_0 = AT(t)x_0,$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} x'(t) &= v'(t) + AT(t)x_0 \\ &= Av(t) + f(t) + AT(t)x_0 \\ &= A[v(t) + T(t)x_0] + f(t) \\ &= Ax(t) + f(t), t \geq 0; \end{aligned} \tag{4.8}$$

le côté droit de 4.8 est continu puisque x *et* f *sont continus.*
Donc $x \in \mathrm{C}^1$.

4.3 Equation d'évolution non linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Où A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach $\mathcal{E}$, et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est continue.

Définition 4.3.1. *On dit que x est une solution (solution classique) de l'équation 4.9 si et seulement si :*

1. $x \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{E})$, $x(t) \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$;
2. *x satisfait à l'équation 4.9.*

Théorème 4.3.1. *Si x est une solution de l'équation 4.9, alors :*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds, \ t \geq 0 \tag{4.10}$$

preuve. *Si x est une solution de l'équation 4.9, alors x est solution de l'équation suivante :*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + g(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mais $g(t) = f(t, x(t))$

$y(t) = x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds$, $t \geq 0$.

Remarque 4.3.1. *Si x satisfait 4.10 alors x n'est pas nécessairement une solution de 4.9.*

probléme 1. *Est-ce-qu'une solution "mild" de l'équation 4.9 existe ?*

Exemple 4.3.1. $A \equiv 0$ *,l'équation 4.9 devient :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La continuité de f ne suffit pas pour obtenir l'existence de solution "mild".

Théorème 4.3.2. *Supposons que $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est Lipschitz par rapport à la seconde variable alors pour tout $x_0 \in \mathcal{E}$, l'équation 4.9 a une solution "mild" unique sur $\mathbb{R}^+$.*

preuve. *Soit* $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds = (Hx)(t)$, $t \geq 0$.
Nous devons montrer que x est une solution "mild" de l'équation 4.9 si et seulement si $Hx = x$.
On définit $C_a := C([0, a], \mathcal{E})$ *tel que* $H : C_a \to C_a$.
Soient x_1, $x_2 \in C_a$:

$$(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))ds.$$

Soit $M_a = \sup_{t\in[0,a]} \|T(t)\| \leq Me^{\omega a} < +\infty$, $\omega > 0$.

$$\|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)\| \leq M_a K t \|x_1 - x_2\|$$

K étant la constante de Lipschitz pour f.
On a $H^2 = H \circ H$, alors

$$\begin{aligned}
\|H^2x_1(t) - H^2x_2(t)\| &\leq M_aK\int_0^t \|Hx_1(t) - Hx_2(t)\|ds \\
&\leq M_aK\int_0^t (M_aKs)\|x_1 - x_2\|ds,\ (\forall)t \in [0,a] \\
&= \frac{(M_aK)^2}{2!}t^2\|x_1 - x_2\|,\ (\forall)t \in [0,a] \\
\vdots\ &\ \vdots \\
\|H^nx_1(t) - H^nx_2(t)\| &\leq \frac{(M_aK)^n}{n!}a^n\|x_1 - x_2\|,\ (\forall)t \in [0,a] \\
\textit{Il s'ensuit que } \|H^nx_1(t) - H^nx_2(t)\| &\leq \frac{(M_aK)^n}{n!}a^n\|x_1 - x_2\|,\ (\forall)x_1, x_2 \in C_a.
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{(M_aK)^n}{n!}a^n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *donc* $(\exists)p \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{(M_aK)^p}{p!}a^p < 1$.
Il en résulte que $H^p = H \circ \cdots \circ H$ *est une contraction puis* $(\exists)!x \in C_a$ *tel que* $H^px = x$.

Proposition 4.3.1. *On a $Hx = x$*

En effet,
$H^p(x) = x$ implique que $H^{p+1}(x) = Hx$, on peut écrire $H^p(H(x)) = H(x)$ il s'ensuit que $H(x)$ est un point fixe de H^p et puisque le point fixe est unique nouss obtenons $H(x) = x$.
Nous concluons que $Hx = x$ est une solution "mild" de l'équation 4.9 sur $[0; a]$, cela est vrai pour tous $a > 0$.
D'où l'équation 4.9 a une solution "mild" unique sur $\mathbb{R}^+$.

4.4 Dépendance continue par rapport aux données initiales

$$(\mathcal{P}_n)\begin{cases} x'(t) = Ax_n(t) + f(t, x_n(t)), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_{0,n} \end{cases}$$

$$(\mathcal{P})\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Si $x_{0,n} \to x_0$ quand $n \to +\infty$, alors $x_n \to x$ uniformément dans chaque ensemble compact de $\mathbb{R}^+$.

Théorème 4.4.1. *Soit $x(t; x_0)$ désigne la solution "mild solution" de 4.9 à partir de x_0 ; $(\forall)a > 0$ $(\exists)\alpha(a) > 0$; $\beta(a) > 0$*

$$|x(t, x_0) - x(t, y_0)| \leq \alpha(a)e^{\beta(a)t}|x_0 - y_0|, \ (\infty)t \in [0, a].$$

preuve. *Soit $t \in [0, a]$ et $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds$*

$$\begin{aligned} x(t) = x(t, x_0) &= T(t)x_0 + \int\limits_0^t T(t-s)f(s, x(s)ds \\ y(t) = x(t, y_0) &= T(t)y_0 + \int\limits_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|T(t)(x_0 - y_0)\| + \|\int\limits_0^t T(t-s)(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds\| \\ &\leq \|T(t)\|\|x_0 - y_0\| + \int\limits_0^t \|T(t-s)\|\|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|ds \\ &\leq Me^{\omega t}\|x_0 - y_0\| + \int\limits_0^t Me^{\omega(t-s)}K\|x(s) - y(s)\|ds \\ &\leq Me^{\omega a}\|x_0 - y_0\| + KMe^{\omega a}\int\limits_0^t \|x(s) - y(s)\|ds. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Lemme 4.4.1. ***(lemme Gronwall)*** *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue tel que*

$$g(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)g(s)ds$$

Où $\alpha > 0$ et $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est continue. Alors

$$g(t) \leq \alpha \times \exp(\int_a^t \beta(s)ds).$$

Appliquant lemme de Gronwall à 4.11 cela suit $\|x(t)-y(t)\| \leq Me^{\omega a}\|x_0-y_0\| \exp(\int_0^t KMe^{\omega a}ds)$ qui implique

$$\|x(t) - y(t)\| \leq Me^{\omega a} \exp(KMe^{\omega a})$$

prendre $Me^{\omega a} = \alpha(a)$ et $KMe^{\omega a} = \beta(a)$, donc

$$\|x(t, x_0) - x(t, x_0)\| \leq \alpha(a)e^{\beta(a)t}, \ (\forall)t \in [0, a].$$

Lemme 4.4.2. *Soit x une solution "mild solution" de l'équation 4.9 sur $[0, a]$, si nous supposons*

1. *$x_0 \in \mathcal{D}(A)$;*
2. *$t \to f(t, x(t))$ est une fonction de classe C^1 .*

Alors x est une solution classique de l'équation 4.9.

preuve. *x peut être vu comme une solution "mild" de l'équation suivante :*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + g(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0, g(t) = f(t, x(t)) \end{cases} \tag{4.12}$$

Si $f \in \mathrm{C}^1([0, a], \mathcal{E})$ et $y_0 \in \mathcal{D}(A)$, alors $x = y \in \mathrm{C}^1([0, a]; \mathcal{E})$
De plus

$$\begin{aligned} x'(t) = y'(t) &= Ay(t) + g(t) \\ &= Ax(t) + f(t, x(t)) \end{aligned}$$

Théorème 4.4.2. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est continue et lipschitzienne par rapport à la second argument.*
De plus si $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{R}^+ \times \mathcal{E}, \mathcal{E})$ et les dérivées partielles $D_t f(t, x)$ et $D_x f(t, x)$ sont Lipschitz par rapport au second argument.
Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, alors l'équation 4.9 a une solution classique sur $\mathbb{R}^+$.

preuve. *Soit x une solution "mild" de l'équation 4.9 sur $\mathbb{R}^+$.*
On affirme que $t \to f(t, x(t))$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
Soit $a > 0$, $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds$, $t \in [0, a]$.
Considérons le problème de Cauchy abstrait suivant,

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + D_t f(t, x(t)) + D_x f(t, x(t))(y(t)), & t \in [0, a] \\ y(0) = Ax_0 + f(0, x_0) \end{cases} \tag{4.13}$$

De manière équivalente, on a :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + g(t, y(t)), & t \in [0, a] \\ y(0) = Ax_0 + f(0, x_0) \end{cases}$$

avec $g(t, y(t)) = D_t f(t, x(t)) + D_x f(t, x(t))(y(t))$, g est continue puisque f est une fonction de classe C^1.
D'autre part on a

$$\begin{aligned} |g(t, y_1) - g(t, y_2)| &= |D_x f(t, x(t))(y_1 - y_2)| \\ &\leq |D_x f(t, x(t))||(y_1 - y_2)| \\ &\leq \sup_{t \in [0,a]} |D_x f(t, x(t))||y_1 - y_2| \\ &\leq K|y_1 - y_2| \text{où} K = \sup_{t \in [0,a]} |D_x f(t, x(t))| \end{aligned}$$

g est lipschitzienne par rapport au second argument, alors 4.13 a une solution "mild" unique y sur $[0, a]$.
Soit $z = y(0) + \int_0^t y(s)ds$, $t \in [0, a]$, il s'ensuit que $z \in C^1([0, a], \mathcal{E})$ puisque y est continue.
Maintenant, on affirme que $x = z$. En effet,

$$y(t) = T(t)[Ax_0 + f(0, x_0)] + \int_0^t T(t-s)[D_x f(s, x(s)) + D_x f(s, x(s))(y(s))]ds$$

et

$$\begin{aligned}
z(t) &= x(0) + \int_0^t T(s)Ax_0 ds + \int_0^t T(s)f(0,x_0)ds \\
&+ \int_0^t \int_0^s T(s-\tau)[D_\tau f(\tau,x(\tau)) + D_x f(\tau,x(\tau))y(\tau)]d\tau ds \\
&= x_0 + T(t)x_0 - x_0 + \int_0^t T(s)f(0,x_0)ds \\
&+ \int_0^t \int_0^s T(s-\tau)[D_\tau f(\tau,x(\tau)) + D_x f(\tau,x(\tau))y(\tau)]d\tau ds \\
&= T(t)x_0 + \int_0^s T(s)f(0,x_0)ds \\
&+ \int_0^t \int_0^s T(s-\tau)[D_\tau f(\tau,x(\tau)) + D_x f(\tau,x(\tau))y(\tau)]d\tau ds \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

$z \in \mathcal{C}^1$ *Alors* $s \to f \to (s, x(s))$ *est une fonction de classe* C^1 *sur* $[0,a]$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} f(s,(z(s))) &= D_t f(s,z(s)) + D_x f(s,z(s))(z'(s)) \\
&= D_t f(s,z(s)) + D_x f(s,z(s))(y(s))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \int_0^t T(t-s)f(s,z(s))ds &= \frac{d}{ds} \int_0^t T(s)f(t-s,z(t-s))ds \\
&= T(t)f(0,x_0) + \int_0^t T(s)[D_t f(t-s,z(t-s)) \\
&+ D_x f(t-s,z(t-s))y(t-s)]ds \\
&= T(t)f(0,x_0) + \int_0^t T(t-s)[D_t f(s,z(s)) + D_x f(s,z(s))(y(s))]ds
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^t T(t-s)f(s,z(s))ds &= \int_0^t T(t-s)f(0,x_0)ds + \int_0^t\int_0^s T(t-\tau)[D_\tau f(\tau,z(\tau)) \\ &+ D_x f(\tau,z(\tau))(y(\tau))]dsd\tau.\end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}\int_0^t T(t-s)f(0,x_0)ds &= \int_0^t T(t-s)f(s,z(s))ds - \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)[D_\tau f(\tau,z(\tau)) \\ &+ D_x f(\tau,z(\tau))(y(\tau))]dsd\tau. \qquad (4.15)\end{aligned}$$

Finalement en combinant 4.14 et 4.15, on obtient :

$$\begin{aligned}z(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,z(s))ds &+ \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)[D_\tau f(\tau,x(\tau)) - D_\tau f(\tau,z(\tau))]d\tau ds \\ &+ \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)[D_x f(\tau,x(\tau)) - D_x f(\tau,z(\tau))(y(\tau))]dsd\tau.\end{aligned}$$

Maintenant comparons $z(t)$ et $x(t)$.
$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,x(s))ds$ *une solution "mild solution" de 4.13*

$$\begin{aligned}z(t)-x(t) &= \int_0^t T(t-s)(f(s,z(s)) - f(s,x(s)))ds \\ &+ \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)[D_\tau f(\tau,x(\tau)) - D_\tau f(\tau,z(\tau))]d\tau ds \\ &+ \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)[D_x f(\tau,x(\tau)) - D_x f(\tau,z(\tau))(y(\tau))]dsd\tau.\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, puisque f, et D_t, D_x sont lipschitziens alors il existe $K(a) > 0$ tel que

$$|z(t)-x(t)| \leq K(a)\int_0^t |z(s)-x(s)|ds, \ t \in [0,a]$$

Il s'ensuit que $z = x$ *donc* $x \in \mathrm{C}^1([0,a], X)$ *et* $s \to f(s, x(s))$ *est fonction de classe* C^1*.* *Par le lemme 4.4.2 on obtient que* x *est une solution classique sur* $[0; a]$*. La preuve est terminée.*

Chapitre 5

Bibliographie

[1] L. Dan Lemle. Lecturas Matemàticas, Volumen 26 (2005), pàginas 27 – 88 Une étude comparative concernat les semi-groupes de classe C_0 et les semi-groupes intégrés, Université Blaise Pascal, Aubiére, France Faculté d'Ingénierie, Université Politehnica, Hunedoara, Roumanie.

[2] K. Ezzinbi, Lecture notes in functional analysis and evolution equations, African University of Science and Technology, Garki,Abuja F.C.T Nigeria, Août 2010.