République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année: 2014 2015

Variétés Statistiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

Aicha Dekich [1]

Sous la direction de

Mr D. Djebbouri

Soutenu le 15 Juin 2015 devant le jury composé de

R. Nasri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
D. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. aichadekich@gmail.com

Dédicaces

Je dédie ce travail; A Allah qui m'ont donné la vie, symbole de beauté, de fierté, de sagesse et de patience. A ceux qui sont la source de mon inspiration et de mon courage, à qui je dois de Lamour et la reconnaissance.
A celui qui m'a donné la confiance et le courage : Mon père Mohamed.
A celui qui m'a donné l'amour et l'affection : Ma mère Arbia.
A mon très cher Mari : Mr Derkaoui Houari, reçois à travers ce travail tous mes respects, ma gratitude et ma profonde reconnaissance.
A mes frères Abd elkader, Boualame et Djamel.
A mes soeurs Khiera, Djamila, Karima et Sara.
A mes anges de la maison : Lamice, Ghefrane, Ritadje, Ahmed, Youcef, Abd elkader et Ayoube.
A Toute la famille Dekich, la famille Aidoud et la famille Derkaoui
A ma grand mère Fatima et mon grand père Mosetafa.
A ceux qui sont précieux à mes yeux et à Lemaire de mon a vie : Hanane, Soumia, A.Fatima, T.Fatima, Fariha, Salima.
A mes amies : Khiera, Mokhtaria, Fouzia, Khadra, Nacira, Saliha, Zohra, Sara et Oum Ameur.
A la promotion Analyse, Géométrie et application.
A tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

AICHA DEKICH

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon Dieu, notre créateur de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste de travail.
J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Mr D. Djebbouri qui a proposé le théme de ce mémoire, pour ses conseils du début à la fin de ce travail.
Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de siéger à ma soutenance, tout particulièrement :
Mr R. Nasri pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.
Je souhaite exprimer ma gratitude à Mr S. Ouakkas et Mr K. Djerfi pour avoir accepté d'examiner ce mémoire. Je vous remercie pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour vos précieux conseils et remarques.
Finalement, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et à tout ce qui ont participé à réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Table des matières

Introduction

Les variétés statistiques sont des abstractions géométriques utilisées pour modéliser l'information, leur domaine d'études appartenant à la géométrie de l'information, une branche relativement récente de mathématiques, qui utilise des outils de géométrie différentielle pour étudier l'inférence statistique, la perte de l'information, et l'estimation.
Dans ce mémoire, on se restreint à une introduction aux variétés statistiques qu'on peut les voir comme une généralisation des variétés riemanniennes. Ce mémoire est consacré à un domaine spécialisé purement géométrique. Il est structuré en trois chapitres homogènes.
Dans le premier chapitre, on s'intéresse à une étude détaillée à la théorie des variétés différentielles, applications différentiables, espaces tangents et cotangents, différentielle d'une application, crochet de Lie et tenseurs.
Le deuxième chapitre est consacré à la notion de variétés riemanniennes qui est une variété sur laquelle on est capable de mesurer les distances entre les points, les angles entre les vecteurs, la longueur des courbes et des volumes. Tout simplement, une variété riemannienne est une variété munie d'une métrique.
On s'intéresse aussi à définir sur ce type de variétés quelques outils géométriques, en particulier les notions de connexions, de courbure.
Dans le troisième chapitre, nous allons définir et étudier les principales propriétés de" connexion conjugué" et platitude de la connexion duale. Après avoir donnée le champ de tenseur de torsion relatif.
Le but de ce mémoire est introduit dans le troisième chapitre où on expose les propriétés fondamentales des variétés statistiques en présentant la notion de connexion

duale introduite par A.P. Norden et la notion de courbure relativement à ce type de connexion.

Chapitre 1

Variétés différentiables

1.1 Définitions et Exemples

On considère un espace topologique M (c'est-à-dire un espace de point muni d'une topologie). On suppose que cet espace est
-à base dénombrable : la topologie de M a une base dénombrable d'ouverts. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un sous-ensemble dénombrable dense (par exemple $\mathbb{Q}^n$ pour $\mathbb{R}^n$)
-séparé : deux points distincts ont des voisinages distincts.

Définition 1.1.1. *Une carte de dimension n sur M est couple (U, φ) formé de*
-Un ouvert $U \subset M$;
-Un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. [1]

L'ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U, \varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^m(p)) \in \mathbb{R}^m$: φ est ce que l'on appelle une fonction coordonnées.
Un point de M peut appartenir à deux domaines différents corespondant à deux cartes (U, φ) et (V, ψ).

Définition 1.1.2. *Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur M sont compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si $\varphi o \psi^{-1}$ est un difféomorphisme entre les ouverts de $\mathbb{R}^n$ que sont $\psi(U \cap V)$ et $\varphi(U \cap V)$.*

1. Un homéomorphisme est une application continue et inversible dont l'inverse est continue

(Rappels : Une application $f : U \subset E \longrightarrow F$, E et F sont des espaces vectoriels normés et U un ouvert de E, est un difféomorphisme de U dans $f(U)$ s'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, inversible et si son inverse est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Une condition nécessaire et suffisante est que f soit injective et que $Df(x)$ soit un isomorphisme $\forall x \in U$).

Remarque 1.1.1. *1. A priori les dimensions des cartes n'ont pas été fixées. On pourrait donc avoir $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ et $\psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ avec $m \neq n$. Cependant, si $U \cap V \neq \emptyset$, le fait que $\varphi o \psi^{-1}$ et $\psi o \varphi^{-1}$ soient des difféomorphismes impose que les deux cartes soient de même dimension.*

2. Signification en coordonnées. Une carte (U, φ) donne un système local de coordonnées. Sur $U \cap V$, ona donc deux système de coordonnées : $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^m)$. Comme ce sont des homéomorphismes, l'applications $\varphi o \psi^{-1}$ est une bijection et son inverse est $\psi o \varphi^{-1}$. ces deux applications s'écrivent :

$$\varphi o \psi^{-1} : y = (y^1, \dots, y^m) \mapsto (x^1 = f^1(y), \dots, x^m = f^m(y))$$

$$\psi o \varphi^{-1} : x = (x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1 = g^1(x), \dots, y^m = g^m(x)). \qquad (1.1)$$

la compatibilité singnifie que les fonctions f^i et g^i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 1.1.3. *Un atlas de dimension m de M est un ensemble $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de dimension m tel que :*

1. *les ouverts U_i recouvrent M ;*
2. *toutes les cartes de A sont compatibles deux à deux.*

Un atlas permet, donc, de définir des coordonnées locales partout sur M. On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas, c'est-à-dire que $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ et $A' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ sont équivalents si toutes les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont compatibles deux à deux.

Définition 1.1.4. *Une structure différentiable de dimension m sur M est une classe d'équivalence d'atlas de dimension m de M.*

En pratique on définit une structure différentiable en donnant un atlas représentant la classe.

Définition 1.1.5. *Une variété différentiable de dimension m est un espace topologique M séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension m.*

Exemples de variétés différentiables

1. $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seulle carte $(\mathbb{R}^n, id)$.
2. tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n est une variété de même dimension; tout isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définit un atlas $\{(E, \varphi)\}$. De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant $\{(U, \varphi)\}$.
3. L'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est une variété de dimension n : il est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ via le choix d'un système de coordonnées x. L'atlas à une carte $(\mathbb{R}^n, x)$ y définit donc un structure diffirentiable.
   Tous ces exemples sont triviaux puisqu'il s'agit d'espaces homéomorphes à $\mathbb{R}^n$.
4. le cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1; cependant il n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (puiseque S^1 est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas. On définit deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2);

   $U_1 = S^1 \backslash \{(1, 0)\}$ $\qquad$ $U_2 = S^1 \backslash \{(-1, 0)\}$

   $$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & U_1 & \longrightarrow &]0, 2\pi[\\ & (\cos\theta, \sin\theta) & \longmapsto & \theta \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \varphi_2 : & U_2 & \longrightarrow &]-\pi, \pi[\\ & (\cos\theta, \sec\theta) & \longmapsto & \theta \end{array}$$

   les domaines de ces cartes recouverent clairement le cercle : $U_1 \cup U_2 = S^1$. De plus $\varphi_1 o \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles. Ainsi $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas et définit une structure différentiable sur S^1.
5. La sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une variété de dimension 2; on peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique.
   Les points S, N désignant respectivement les pôles sud et nord, on considère les ouverts $U_N = S^2 \backslash N$ et $U_S = S^2 \backslash S$ et les applications

   $$\begin{array}{cccc} \varphi_N : & U_N & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & p = (x, y, z) & \longmapsto & (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \varphi_S : & U_S & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}) \end{array}$$
6. La sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété de dimension n : pour y définir une structure différentiable, on peut utiliser soit la projection stéréographique (deux

carte), soit la projections sur les hyperplans $\{x_i = 0\}$ $(2n + 2\,cartes)$.

Remarque 1.1.2. *Tout sous-ensemble ouvert Ω d'une variété différentiable M est lui même une variété différentiable. Sa structure différentiable est définie par la restriction à Ω d'un atlas de M, c'est-à-dire par l'atlas $A_\Omega = \{(U_i \cap \Omega, \varphi_i|U_i \cap \Omega)\}_{i\in I}$, où $A\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ est un atlas de M. On dit parfois que Ω est sous-variété ouverte de M.*

Exemple 1.1.1. *L'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{R}^n)$ est une variété en tant qu'ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ (qui est un espace vectoriel donc une variété).*

Définition 1.1.6. *Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement et d'atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ et $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$. Alors la variétés $M \times N$ de dimension $m+n$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme $\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$, où $(\varphi_i \times \psi_j)(p, q) = (\varphi_i(p), \psi_j(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$. est appelée variété différentiable produit.*

Exemples 1.1.1.

1. *Le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est une variété, de même que le tore plat de dimension n, $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.*
2. *Le cylindre $\mathbb{R} \times S^1$ et le cylindre de dimension $1 + 1$, $\mathbb{R} \times S^n$ sont des variétés.*

1.2 Applications différentiables

On connaît les notions de différentiabilité et de difféomorphismes pour les applications entre espaces vectoriels normés. On va définir ces notions pour les applications entre variétés. Le principe est toujours le même ; on dira qu'une application entre variétés est différentiable (ou est un difféomorphisme) si, lue dans une carte, elle l'est. Formalisons cette définition.

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement et $F : M \longrightarrow N$ une application. Si (U, φ) est une carte de M contenant p et (V, ψ) une carte de N contenant $F(p)$, avec $F(U) \subset V$, on dit que :

$$F^{\varphi\psi} = \psi o F o \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

est l'application F lue dans les cartes (U, φ) et(V, ψ). Dans le cas particulier où M ou N est égal à $\mathbb{R}^n$, l'application de carte correspondante est l'idenité et on note

$$g^{\varphi} = g^{\varphi id} = go\varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

si $g : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et

$$h^{\psi} = h^{id\psi} = \psi oh : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

si $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$.

Définition 1.2.1. *L'application F est différentiable (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) en $p \in M$ s'il existe une carte (U, φ) de M contenant p et une carte (V, ψ) de N contenant $F(p)$, avec $F(U) \subset V$, telles que $F^{\varphi\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

On dit que F est une application différentiable de M dans N s'elle est différentiable en tout point $p \in M$.
Cette définition est correcte car la notion de différentiabilité ne dépend pas des cartes choisies dans les variétés. En effet, s'on choisit deux systèmes de coordonnées locales différents φ_1, φ_2 ($resp.\, \psi_1$, ψ_2) sur $M(resp.\, N)$ on a

$$\psi_2 oFo\varphi_2^{-1} = \psi_2 o\psi_1^{-1} o(\psi_1 oFo\varphi_1^{-1})o\varphi_1 o\varphi_2^{-1} \tag{1.3}$$

et les applications entre espaces vectoriels normés $\psi_2 o\psi_1^{-1}$ et $\varphi_1 o\varphi_2^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Donnons quelques propriétés des applications différentiables.

1. Toute application différentiable est continue. (car sur tout ouvert de carte U, on a $F|U = \psi^{-1}o(\psi oFo\varphi^{-1})o\varphi)$.
2. Soit $\bigcup_{i\in I} U_i$ un recouvrement ouvert de M. Alors F est différentiables si seulement si chaque restriction $F|U_i, i \in U_i$, l'est.
3. La composition d'applications différentiables est différentiable. En effet, soient $F : M \longrightarrow M'$, $G : M' \longrightarrow M''$ et $GoF : M \longrightarrow M''$. Alors, dans des cartes de M, M' et M''
$$\varphi'' o(GoF)o\varphi^{-1} = (\varphi'' oGo\varphi'^{-1})o(\varphi' oFo\varphi^{-1}) \tag{1.4}$$

Définition 1.2.2. *Une application* $F : M \longrightarrow N$ *est un difféomorphisme de* M *sur* N *si* F *est une bijection et si* F *et* F^{-1} *sont différentiables. On a alors nécessairement* $\dim M = \dim N$.

Notons que (U, φ), avec U ouvert de M, est une carte de la variété si et seulement si φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Rang d'une application

Rappel : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une application dérivable en $x \in \mathbb{R}^n$. le rang de f en x est défini comme le rang de l'application linéaire $Df(x)$. (C'est-à-dire $\dim ImDf(x)$ ou encore $n - \dim \ker Df(x)$).
Soient $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable et $p \in M$.

Proposition 1.2.1. *Le rang de* $\psi oFo\varphi^{-1}$ *en* $\varphi(p)$ *ne dépend pas des cartes* (U, φ) *de* M *et* (V, ψ) *de* N *telles que* $p \in U$ *et* $F(p) \in V$. *Cette quantité est appelée le rang de* F *en* p *et est notée* rg_pF.

Preuve 1.2.1. *Soient* (U', φ') *et* (V', ψ') *d'autres cartes. Sur l'intersection des domaines :*

$$\psi' oFo\varphi'^{-1} = (\psi' o\psi^{-1})o(\psi oFo\varphi^{-1})o(\varphi' o\varphi^{-1})$$

et donc

$$D(\psi' oFo\varphi'^{-1})(x) = D(\psi' o\psi^{-1})oD(\psi oFo\varphi^{-1})oD(\varphi' o\varphi^{-1})(x)$$

Comme $D(\psi' o\psi^{-1})$ *et* $D(\varphi' o\varphi^{-1})$ *sont des isomorphismes, on obtient*

$$rgD(\psi' oFo\varphi'^{-1})(\varphi'(p)) = rgD(\psi oFo\varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

Lue en coordonnées locales, l'application F *devient :*

$$F^{\varphi\psi}(x^1, \dots, x^m) = (F^1(x^1, \dots, x^m), \dots, F^n(x^1, \dots, x^m))$$

et le rang de F *en* p *est celui de la matrice jacobienne*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}_{x(p)}$$

Le rang permet de caractériser les difféomorphismes.

Remarque 1.2.1. *Une application différentiable de M dans N est un difféomorphisme s'et seulement s'elle est bijective et de rang $n = \dim M = \dim N$ en tout point de M.*

Il y a d'autres classes importantes d'applications différentiables caractérisées par leur rang.

Définition 1.2.3. *$F : M \longrightarrow N$ est une immersion si F est différentiable et $rgF = \dim M$ en tout point de M (autrement dit, en coordonnées locales $DF^{\varphi\psi}(x)$ est injective pour tout x). Dans ce cas, on a nécessairement $\dim M \leq \dim N$.*

Définition 1.2.4. *$F : M \longrightarrow N$ est une submersion si F est différentiable et $rgF = \dim N$ en tout point de M (autrement dit, en coordonnées locales, $DF^{\varphi\psi}(x)$ est surjective pour tout x) On a alors $\dim M \geq \dim N$.*

Une immersion n'est pas forcément injective.

Exemple 1.2.1. *$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, est une immersion mais n'est pas injective puisque $F(t+k) = F(t)$ pour tout entier k.*
De même pour $F(t) = \Big(2\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin(2t - \pi)\Big)$.
Considérons maintenant une immersion injective $F : M \longrightarrow N$. C'est une bijection de M dans $\tilde{M} = F(M)$. Si on utilise F pour munir $\tilde{M}$ d'une topologie et d'une structure différentiable, F devient un difféomorphisme entre les variétés M et $\tilde{M}$. Cependant la structure différentaible et la topologie sur $\tilde{M}$ ne dépendent que de M et de F. Il n'y a donc aucune raison en général pour que $\tilde{M}$ soit un sous-espace de la variété N (pour la topologie induite).

Exemple 1.2.2. *L'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = \Big(2\cos(2\cot t + \frac{\pi}{2}), \sin(4\cot t + \pi)\Big)$ n'est pas un homéomrphisme de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R})$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}^2$.*
On introduit donc une nouvelle définition qui permet d'éviter ces problèmes.

Définition 1.2.5. *On dit que $F : M \longrightarrow N$ est un plongement si F est un immersion injective et un hoémomorphisme de M dans $F(M)$ pour la topologie induite.*

Remarquons qu'une immersion injective est déjà une bijection de M dans $F(M)$ et est continue, car différentiable. Pour qu'elle soit de plus un homéomrphisme, il suffit donc que F^{-1} soit continue sur $F(M)$.

Exemple 1.2.3. *Les applications $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ et G : $]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$,*
$G(t) = (\frac{1}{t}\cos 2\pi t, \frac{1}{t}\sin 2\pi t)$ sont des plongements.

1.3 Espaces tangent et cotangent

1.3.1 Vecteurs tangents

Le but de cette section est de formaliser dans une variété la notion de direction de déplacement ou en encore de mouvements possibles à partir d'un point donné.
Considérons maintenant une variété différentiable M et un point p de M. On s'intéresse aux courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par p.

$$\begin{array}{rccc} \gamma : &]-\epsilon, \epsilon[& \longrightarrow & M \qquad\qquad \textit{avec}\, \gamma(0) = p \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array}$$

Définition 1.3.1. *Deux courbes γ_1 et γ_2 sont tangentes au point p si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ et s'il existe une carte locale (U, φ) telle que $p \in U$ et*

$$\frac{d}{dt}(\varphi o \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi o \gamma_2)(0)\cdot \tag{1.5}$$

La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si (V, ψ) est une autre carte autour de p, on a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\psi o \gamma_1)(0) & = & \frac{d}{dt}[(\psi o \varphi^{-1}) o (\varphi o \gamma_1)](0) \\ & = & D(\psi o \varphi^{-1}) o \frac{d}{dt}(\varphi o \gamma_1)(0) \\ & = & D(\psi o \varphi^{-1}) o \frac{d}{dt}(\varphi o \gamma_2)(0) \\ & = & \frac{d}{dt}(\psi o \gamma_2)(0)\cdot \end{array}$$

On définit ainsi une relation d'équivalence [2] sur l'ensemble des courbes passent par $p : \gamma_1 \sim \gamma_2$ s'elles sont tangentes en p.

Définition 1.3.2. *Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p.*
L'espace tangent à M en p, noté T_pM, est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p.

Exemple 1.3.1. *Dans $\mathbb{R}^n$, il est clair que deux courbes γ_1, γ_2 sont tangentes au point x des que $\dot{\gamma_1}(0) = \dot{\gamma_2}(0)$. Il y a donc un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes de courbes tangentes $T_x\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des directions $\dot{\gamma}(0)$. Ce qui est propre à $\mathbb{R}^n$ c'est que cet isomorphisme ne dépend pas du point x.*
On peut montrer que T_pM est un espace vectoriel en utilisant une carte. La structure vectorielle n'apparaît cependant pas clairement. De plus la définition de T_pM fait intervenir un espace très gros, l'ensemble des courbes passent par p, qui n'est pas aisé à manipuler. Nous allons voir maintenant qu'on peut donner une autre définition -équivalente des vecteurs tangents qui résoudra ces difficultés.

1.3.2 Dérivations

Considérons l'ensemble des fonction à valeur réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$, définies sur un ouvert de M contenant un voisinage de p, dans lequel on identifie les fonctions qui sont égales sur un voisinage de p (on obtient ainsi des germes de fonction). On note $\mathcal{C}^\infty(M,p)$ cet ensemble. Notons que c'est une algèbre, c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'une opération interne (La multiplication).
Sur cet ensemble de fonction on définit des opérateurs.

Définition 1.3.3. *Une dérivation en p est une application linéaire $D_p : \mathcal{C}^\infty(M,p) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_p est une dérivation si, pour tous réels α, β et toutes fonctions f, g dans $\mathcal{C}^\infty(M,p)$*

1. $D_p \cdot (\alpha f + \beta g) = \alpha D_p \cdot f + \beta D_p \cdot g$ *(linéarité)*
2. $D_p \cdot (fg) = g(p) D_p \cdot f + f(p) D_p \cdot g$ *(Leibniz)*

2. c'est-à-dire une relation qui est transitive,symétrique et réflexive

L'ensemble $\mathcal{D}(p)$ des dérivations en p forme un espace vectoriel pour les opérations :

$$\begin{cases} (D_p + D'_p) \cdot f = D_p \cdot f + D'_p \cdot f \\ D_p \cdot (\alpha f) = \alpha D_p \cdot f \end{cases} \tag{1.6}$$

Remarque 1.3.1. *Toute dérivation vérifie $D_p \cdot cte = 0$ (car $D_p \cdot 1 = D_p \cdot (1 \times 1) = 0$) Nous allons montrer que l'espace vectoriel tangent T_pM s'identifie à $\mathcal{D}(p)$. La première étape est de déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{D}(p)$. Nous avons besoin pour cela du résultat suivant.*

Lemme 1.3.1. *(Lemme d'Hadamard) Soit (U, φ), $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$, une carte de M centrée en p. Pour toute fonction $g \in C^\infty(M, p)$, il existe $\chi_1, \dots, \chi_n \in C^\infty(M, p)$ telles que :*

$$g = g(p) + \sum_{i=1}^{m} x^i \chi_i \tag{1.7}$$

$\Big($*autrement dit* $g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^m x^i(q)\chi_i(q)$ *pour tout* $q \in U\Big)$

Preuve 1.3.1. *Pour la preuve voir* [3]

Remarque 1.3.2. *Dire qu'une carte (U, φ) est centrée en p signifie simplement que $\varphi(p) = 0$.*

Ainsi la donnée de D_p est équivalent à la donnée de $D_p \cdot x^i$, $i = 1, ..., m$

Lemme 1.3.2. $\dim \mathcal{D}(p) = m = \dim M$.

Remarque 1.3.3. *Ce lemme montre que, sur $\mathbb{R}^n$, toute dérivation est une dérivée directionnelle. En effet, à toute direction $v \in \mathbb{R}^n$ est associée une dérivation en x*

$$g \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(g(x + tv) - g(x)\Big), \tag{1.8}$$

qui est la dérivée directionnelle en x dans la direction v. L'ensemble des dérivées directionnelles en x est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(x)$ de dimension m et est donc égal à $\mathcal{D}(x)$.
Faisons maintenant le lien entre les dérivations et les vecteurs tangents.

Proposition 1.3.1. *Soient $g \in \mathcal{C}^\infty(p)$ et X_p un vecteur tangent en p. Alors la dérivée $\frac{d}{dt}(go\gamma)(0)$ est la même pour toutes les courbes $\gamma(s)$ passant par p et appartenant à la classe d'équivalence X_p.*

Preuve 1.3.2. *Choisissons des coordonnées locales φ et écrivons $go\gamma$ comme la composée de $g^\varphi = go\varphi^{-1}$ avec $\gamma^\varphi = \varphi o\gamma$.*
On obtient alors

$$\frac{d}{dt}(go\gamma)(0) = D(go\varphi^{-1})o\frac{d}{dt}(\varphi o\gamma)(0)\cdot$$

La proposition résulte alors du fait que $\frac{d}{dt}(\varphi o\gamma)(0)$ ne dépend que de la classe d'équivalence X_p.

On note $X_p \cdot g$ la valeur de cette dérivée.

Proposition 1.3.2. *L'application $g \mapsto X_p \cdot g$ est une dérivation.*

Preuve 1.3.3. *Il suffit de choisir des coordonnées locales φ et un représentant $\gamma(t)$ de la classe X_p. La linéarité et Leibniz se déduisent aisément de l'expression :*

$$X_p \cdot g = \frac{d}{dt}(g^\varphi o\gamma^\varphi)(0)\cdot$$

Cette dérivation est en fait une généralisation des dérivées directionnelles. En effet on a vu que dans $\mathbb{R}^n$ un vecteur tangent v_x est associé canoniquement à une direction $v = \dot\gamma(0)$. La dérivation $g \mapsto v_p{\cdot}g$ est alors clairement égale à la dérivée directionnnelle. D'ailleurs on appellera parfois $g \mapsto X_p \cdot g$ dérivée directionnelle de g dans la direction X_p.

Théorème 1.3.1. *L'ensemble des vecteurs tangents T_pM s'identifie à l'espace vectoriel $\mathcal{D}(p)$ de dimension m des dérivations en p.*

Cette identification permet de définir une structure vectorielle sur l'espace tangent $T_p(M)$. Notons que cette structure vectorielle coincide avec celle que l'on peut obtenir à partir de la lecture dans une carte.

Preuve 1.3.4. *Soit* $\Psi : T_pM \longrightarrow \mathcal{D}(p)$ *qui à une vecteur tangent* X_p *fait correspondre la dérivation définie par* $X_p \cdot g$. *Ainsi, si* γ *est un représentant de la classe d'équivalence* $X_p = [\gamma]_p$, $\Psi(X_p)$ *est la dérivation* $X_p \cdot g = \frac{d}{dt}(go\gamma)(0)$.
Montrons d'abord que Ψ *est injective. Soient* $X_p = [\gamma]_p$ *et* $X'_p = [\gamma'_p]$ *des vecteurs de* T_pM *tels que* $\Psi(X_p) = \Psi(X'_p)$, *c'est-à-dire que, pour toute fonction* $g \in C^\infty$, *on a*

$$\frac{d}{dt}(go\gamma)(0) = \frac{d}{dt}(go\gamma')(0).$$

Fixons des coordonnées locales $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$. *On a, pour chaque i,*

$$\frac{d}{dt}(x^i o\gamma)(0) = \frac{d}{dt}(x^i o\gamma')(0),$$

ce qui implique $\dot{\gamma}^\varphi(0) = \dot{\gamma}'^\varphi(0)$ *et donc* $X_p = X'_p$. *Ainsi l'application* Ψ *est injective.*
Montrons qu'elle est aussi surjective. Soit D_p *une dérivation. On a vu que, dans une carte* φ *donnée,* D_p *est déterminée par les réels* $d^i = D_p \cdot x^i, i = 1, \ldots, m$. *Considérons alors la courbe* $\gamma(t) = \varphi^{-1}o(td^1, \ldots, td^m)$ *et notons* X_p *son vecteur tangent en p.*
On a

$$X_p \cdot x^i = \frac{d}{dt}(x^i o\gamma)(0) = d^i = D_p \cdot x^i,$$

ce qui montre que $D_p = \Psi(X_p)$ *et donc* Ψ *est surjective.*

Dans la suite nous identifierons systématiquement T_pM et $\mathcal{D}(p)$. Ainsi le terme vecteur tangent désignera indifférement la classe d'équivalence de courbes tangentes ou la dérivation associée alors que l'éspace tangent T_pM sera employé à la place de $\mathcal{D}(p)$

1.3.3 Différentielle d'une application

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement et $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable. Si $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction sur N, F permet de lui faire correspondre une fonction sur M, $F^*g = goF$, appelée image réciproque de g par F. On définit ainsi l'application :

$$\begin{array}{rccc} F^* : & C^\infty(N, F(p)) & \longrightarrow & C^\infty(M, p) \\ & g & \longmapsto & F^*g = goF \end{array} \tag{1.9}$$

Remarquons que le sens de F^* est l'inverse de celui de F.

Proposition 1.3.3. *(et définition). L'application $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ définie par :*

$$d_pF(X_p) \cdot g = X_p \cdot (F^*g), \qquad \forall g \in C^\infty(F(p)) \tag{1.10}$$

est linéaire.
On l'appelle la différentielle de F en p (ou encore application linéaire tangente à F en p).

Remarque 1.3.4. *L'élément $d_pF(X_p)$ de $T_{F(p)}N$ est donc un vecteur tangent à N On peut également la caractériser de la façon suivante : soit la courbe $\gamma(s) \subset M$ passant par p de vecteur tangent X_p en p. Alors $d_pF(X_p)$ est le vecteur tangent en $F(p)$ de la courbe $Fo\gamma$ incluse dans N.*

Preuve 1.3.5. *La linéarité de d_pF découle immédaitement de celle de X_p. En effet :*

$$\begin{aligned} d_pF(\lambda x_p + \mu Y_p) \cdot g &= (\lambda X_p + \mu Y_p) \cdot (F^*g) \\ &= \lambda X_p \cdot (F^*g) + \mu Y_p \cdot (F^*g) \\ &= \lambda d_pF(X_p) \cdot g + \mu d_pF(Y_p) \cdot g \cdot \end{aligned}$$

La définition de la différentielle ne fait appel qu'a des propriétés locales de la variété et de l'application. Comme localement une variété est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, toute les propriétés des applications différentiables dans les espaces vectoriels normés sont vraies localement pour les applications différentiables sur les variétés (c'est le principe de base pour obtenir des résultats locaux dans les variétés). Citons les plus importantes de ces propriétés.

Théorème 1.3.2. *(Théorème de composition). Soient $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable en $p \in M$ et $G : N \longrightarrow W$ une application différentiable en $F(p) \in N$. alors GoF est différentiable en p et*

$$d_p(GoF) = d_{F(p)}God_pF \tag{1.11}$$

Corollaire 1.3.1. *Si $F : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme, alors, pour tout $p \in M, d_pF$ est un isomorphisme.*

La réciproque à ce corollaire n'est vraie que localement. Elle nécessite d'introduire la notion de difféomorphisme local.

Définition 1.3.4. *Une application $F : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme local en p s'il existe un voisinage $U \subset M$ de p et un voisinage $V \subset N$ de $F(p)$ tells que l'application $F|_U : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme.*

Théorème 1.3.3. - *(Théorème d'inversion locale). Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable en $p \in M$ telle que $d_pF : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ est un isomorphisme.*

Alors F est un difféomorphisme local en p. De plus la réciproque du difféomorphisme $F|_U$ a pour différentielle

$$d_{F(p)}(F|_U^{-1}) = (d_pF)^{-1}. \tag{1.12}$$

Ce théorème a une conséquence importante pour la détermination de coordonnées locales. En effet, un système de coordonnées locales n'est rien d'autre qu'un difféomorphisme local de M dans $\mathbb{R}^m$. Ainsi une application différentiable $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définit des coordonnées locales en p si et seulement si $d_p\varphi$ est un isomorphisme.

1.3.4 Coordonnées sur l'espace tangent

En utilisant les différentielles des cartes, nous allons étendre le calcul en coordonnées locales à l'espace tangent. On commence par traiter le cas de $\mathbb{R}^m$.

Description de $T_x\mathbb{R}^m$

On a vu plusieurs propriétés de $T_x\mathbb{R}^m$: il est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^m$ et il peut être identifié à l'ensemble des dérivées partielles en x. Il est temps maintenant d'en donner une discription facile à utiliser.
Soit $x \in \mathbb{R}^m$. Considérons les dérivées partielles en x, c'est-à-dire les dérivations sur $\mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_x : g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}(x), \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1.13}$$

Ces dérivées partielles forment une base de l'ensemble des dérivées directionnelles en x et donc une base de $T_x\mathbb{R}^m$ dite base naturelle. Ainsi tout vecteur tangent $v_x \in T_x\mathbb{R}^m$

s'écrit :

$$v_x = v^1 \frac{\partial}{\partial x_1}|_x + \cdots + v^m \frac{\partial}{\partial x_m}|_x. \tag{1.14}$$

Ce vecteur est aussi la classe d'équivalence des courbes $\gamma(t)$ passant par x telles que $\dot{\gamma}(t) = (v^1, \ldots, v^m)$.
L'identification canonique $T_x\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$ est définie alors comme l'isomorphisme

$$v_x \mapsto (v^1, \ldots, v^m)$$

.

Coordonnées de T_pM

Soient $p \in M$ et (U, φ), $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, une carte de M dont le domaine contient p. Comme φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$, sa différentielle $d_p\varphi : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ est inversible et $(d_p\varphi)^{-1} = d_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})$ est un isomorphisme de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ sur T_pM.
Nous allons nous servir de cet isomorphisme pour définir des coordonnées sur T_pM. Soient $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ et $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_x\right)$ la base naturele de $T_x\mathbb{R}^m$. L'image de cette base définit des vecteurs tangents à M en p, que l'on note

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p = d_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\Big). \tag{1.15}$$

Ces vecteurs tangents $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p\right)$ forement une base de T_pM, appelée naturelle associée aux coordonnées locales φ.
Remarquons que, si $g \in \mathcal{C}^\infty(p)$, ona :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_p \cdot g = d_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\Big) \cdot g = \frac{\partial}{\partial x_i}|_x \cdot (go\varphi^{-1}) = \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(\varphi(p)). \tag{1.16}$$

où $g^\varphi = go\varphi^{-1}$ est la fonction g lue dans les coordonnées x^i.

Lemme 1.3.3. *Dans la base naturelle associée aux coordonnées locales φ, un vecteur tangent $X_p \in T_pM$ s'écrit :*

$$X_p = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1}|_p + \cdots + X^m \frac{\partial}{\partial x^m}|_p \qquad \textit{avec} \quad X_i = X_p \cdot x^i. \tag{1.17}$$

Preuve 1.3.6. *Il suffit de remarque que* $\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$ *et que* $X_p \cdot x^i = \sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\cdot$

Changement de coordonnées :
Le lemme ci-dessus permet de trouver assez simplement les formules de changement de coordonnées dans l'espace tangent. Soient $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ et $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ des coordonnées locales autour p et X_P un vecteur tangent en p de coordonnées $X^1, \ldots, X^m$ dans la base naturelle associée à φ :
$X_p = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. On note

$$\psi o \varphi^{-1} = \Big(y^1(x), \ldots, y^m(x)\Big). \tag{1.18}$$

l'application ψ lue dans la carte φ.
Dans la base naturelle associée à ψ, X_p a pour coordonnées $Y^j = X_p \cdot y^j, j = 1, \ldots, m$.
En écrivant tout dans les coordonnées φ, on obtient

$$Y^j = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial\Big((y^j)^\varphi\Big)}{\partial x^i}(\varphi(p)) = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial y^j(x)}{\partial x_i}|_{x=\varphi(p)}\cdot \tag{1.19}$$

ou encore, en écriture matricielle,

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^i(x)}{\partial x_i}|_{\varphi(p)} \end{pmatrix}_{1\leq i,j\leq m} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

On peut enfin calculer la différentielle d'une application F en coordonnées locales. Soit $F : M \longrightarrow N$ une application difféerentiable en $p \in M$. Choisissons $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$ des coordonnées locales sur M centrées en p et $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ des coordonnées locales sur N centrées en $F(p)$. Enfin soit $X_p = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ un élément de T_pM. pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty(N, F(p))$, on écrit :

$$d_pF(X_p) \cdot g = X_p \cdot (goF) = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial\Big((goF)^\varphi\Big)}{\partial x^i}(0)\cdot \tag{1.21}$$

Écrivons $(goF)^{\varphi} = g^{\psi} o F^{\varphi\psi}$ où $F^{\varphi\psi} = \psi o F o \varphi^{-1}$ et $g^{\psi} = go\psi^{-1}$ sont les applications F et g lues dans les cartes. Notons $F^{\varphi\psi}(x) = \Big(F^1(x), \dots, F^n(x)\Big)$. pour $i = 1, \dots, m$, on a :

$$\frac{\partial((goF)^{\varphi})}{\partial x^j}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g^{\psi}}{\partial y^j}(0)\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0)\frac{\partial}{\partial y^j}(0)|_{F(p)} \cdot g\cdot \tag{1.22}$$

En insérant cette valeur dans (1.21), qui est valable pour tout $g \in \mathcal{C}^{\infty}(F(p))$, on obtient l'expression suivante pour la différentielle de F en p :

$$d_pF(X_p) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) X^i\Big) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_{F(p)}. \tag{1.23}$$

On peut réécrire cette expression de façon matricielle en faisant intervenir la matrice jacobienne de $F^{\varphi\psi}$.

Lemme 1.3.4. *Si $X_p = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ dans la naturelle de T_pM associée aux coordonnées locales φ, alors $d_pF(X_p) = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial y^j}|_p$ dans la base naturelle de $T_{F(p)}N$ associée à ψ, avec*

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^m \end{pmatrix} = JF^{\varphi\psi}(0) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^m \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

Cette formulation en coordonnées permet de calculer le rang de F.

Corollaire 1.3.2. *Le rang de F en p est égal à la dimension de $d_pF(T_pM)$. Ceci nous donne d'ailleurs une définition intrinséque du rang d'une application.*

1.3.5 Espace cotangent

On définit maintenant le dual de l'espace tangent à une variété M.

Définition 1.3.5. *Une 1-forme (où couvecteur) en $p \in M$ est une forme linéaire sur T_pM, c'est-à-dire une application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} \omega_p : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X_p & \longmapsto & \omega_p(X_p)\cdot \end{array} \tag{1.25}$$

On note $\omega_p(X_p) = \langle \omega_p, X_p \rangle$, le crochet étant ici le crochet de dualité.

L'espace cotangent à M en p, noté T_p^*M, est l'espace vectoriel des 1-formes en p.

C'est l'espace vectoriel dual de T_pM $\Big($c'est-à-dire $T_p^*M = (T_pM)^*\Big)$.

Exemple 1.3.2. *Soit $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur M. Alors, en identifiant $T_x\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}$, la différentielle de g en p, $d_pg : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, peut être vue comme une 1-forme. Cet exemple justifie les notations ci-dessous en coordonnées.*

Rappelons d'abord que, si $e_1, \dots, e_m$ est la base d'un espace vectoriel V, il existe une unique base dual $e^{*1}, \dots, e^{*m}$ du dual V^* telle que $e^{*i}(e_j) = \delta_{ij}$.
Considérons maintenant des coordonnées locales $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ en p et $dx_p^i : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$.
La différentielle de la i-ème coordonnées (on identifie de nouveau $T_x\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}$). Par définition, $dx_p^i(X_p) = X_p \cdot x^i$. En particulier, pour tout couple i, j,

$$\Big\langle dx_p^i, \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \Big\rangle = dx_p^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\Big) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}|_p = \delta_{ij}. \tag{1.26}$$

Ainsi $dx_p^1, \dots, dx_p^m$ est une base de T_p^*M, dual de la base $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p$ de T_pM.
Dans cette base, toute 1-forme de T_p^*M s'écrit :

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_p^i, \qquad ou \quad \omega_i = \omega_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p\Big). \tag{1.27}$$

Puisque $\omega_p(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p) = \sum_{j=1}^m \omega_j \langle dx_p^j, \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \rangle$. De même, tout vecteur de T_pM s'écrit :

$$X_p = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \qquad ou \quad X^i = dx_p^i(X_p). \tag{1.28}$$

Les formules de changement de coordonnées pour les 1-formes s'obtiennent comme les formules (1.20) pour les vecteurs tangents : on choisit des coordonnées locales $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^m)$ et on note $\varphi o \psi^{-1} = \Big(x^1(y), \dots, x^m(y)\Big)$ l'application φ lue dans la carte ψ. Soit ω_p une 1-forme, $\omega_1, \dots, \omega_m$ ses coordonnées dans la base

T_p^*M associée à φ et $\mu_1, \dots, \mu_m$ ses coordonnées dans la base associée à ψ. En écrivant que $\mu_j = \omega_p(\frac{\partial}{\partial y^j}|_p)$, on obtient, en écriture matricielle,

$$(\mu_1 \dots \mu_m) = (\omega_1 \dots \omega_m)\Big(\frac{\partial x^i(y)}{\partial y^j}\Big|_{\psi(p)}\Big)_{1\leq i,j\leq m}. \tag{1.29}$$

Remarque 1.3.5. *Cette formule est l'inverse de celle pour les vecteurs tangents. En effet, en notant A la matrice des dérivées partielles des y^i par rapport 'à x (c'est-à-dire la matrice qui intervient dans (1.20)), on obtient :*

$$Y = AX \quad et \quad \mu = \omega A^{-1}. \tag{1.30}$$

X, Y étant des vecteurs colonnes et μ, ω des vecteures lignes.

On a vu dans la section (1.20) qu'à une application différentiable correspond une application linéaire entre espaces tangents, la différentielle. De la même façon, il lui correspond également une application linéaire entre espaces cotangents. Soit $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable et $p \in M$.

Définition 1.3.6. *L'application réciproque de F en p est l'application linéaire*

$$F^* : T^*_{F(p)}N \longrightarrow T^*_pM$$

telle que :

$$F^*\omega_{F(p)}(X_p) = \omega_{F(p)}(d_pF(X_p)). \tag{1.31}$$

C'est l'application dual de dF_p :

$$\Big\langle (F^*\omega)_p, X_p\Big\rangle = \Big\langle \omega_{F(p)}, d_pF(X_p)\Big\rangle. \tag{1.32}$$

le membre de droite utilisant le crochet de dualité dans T_pM alors que celui de gauche utilise celui dans $T_{F(p)}M$.

1.4 Champs de vecteurs

Jusqù à maintenant nous avons vu les notions d'espace et de vecteur tangents en un point, qui correspondent aux mouvements infinitésimaux à partir d'une configuration

donnée. En considérant toutes les configurations possibles, nous sommes maintenant en mesure de définir des mouvements sur toute la variété : ces mouvements vont être introduits comme des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des équations différentielles. Du point de vue des espaces de configurations, cela signifie que l'on caractérise les mouvements par la donnée en tout point de la vitesse.
L'outil principal sera ainsi la notion de champ de vitesse, où plutôt de champ de vecteurs : il s'agit d'une application assignant à chaque point p de la variété un vecteur X_p de l'espace tangent. Avant d'aller plus loin dans la définition, il faut préciser l'espace auquel appartient l'image de cette application.

1.4.1 Fibrés tangent et cotangent

On s'intéresse à l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tous les points de la variété.

Définition 1.4.1. *L'ensemble $TM = \{(p, X_p), p \in M, X_p \in T_pM\}$ est appelé le fibré tangent de la variété M.*
De même l'ensemble $T^*M = \{(p, \omega_p), p \in M, \omega_p \in T^*M\}$ est appelé le fibré cotangent de M.

Le fibré tangent est l'union des espaces tangents.

$$TM = \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM \textit{ ou simplement } \bigcup_{p\in M} T_pM. \tag{1.33}$$

Mais il faut bien préeciser que cette union est disjointe : on ne peut pas additionner des éléments X_p et$Y_{p'}$ appartenant à des espaces tangents différents.
On appelle projection canonique sur TM la projection :

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \longrightarrow & M \\ & (p, X_p) & \longmapsto & p \end{array}$$

et le fibré au-dessus de p la pré-image $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM$ d'un point p.

1.4.2 Champs de vecteurs

Considérons une variété M de dimension m.

Définition 1.4.2. *Un champ de vecteurs différentiable (où champ de vecteurs) sur M est une application différentiable $X : M \longrightarrow TM$ qui, à un point $p \in M$, associe un couple formé de p et d'un vecteur tangent à M en p : $X(p) = (p, X_p)$. Autrement dit, $\pi o X = id_M$.*

On notera $\Gamma(TM)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M.
De même qu'un vecteur tangent en p définit une dérivation sur l'ensemble des germes $\mathcal{C}^\infty(p)$, un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(M)$ des fonctions de M dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet l'application :

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ g & \longmapsto & X \cdot g, \ t.q. \ X \cdot g(p) = X_p \cdot g \end{array} \tag{1.34}$$

définie par un champ de vecteurs X est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble $\Gamma(TM)$ s'identifiera donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Exemple 1.4.1. *(champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$). En utilisant la base naturelle de $T_x\mathbb{R}^m$, tout champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ s'écrit comme :*

$$X(x) = \Big(x, \sum_{i=1}^{m} X^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\Big); \tag{1.35}$$

où X^i est une fonction différentiale de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, pour $i = 1, \ldots, m$, L'application :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : x \longmapsto \Big(x, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\Big).$$

Est un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$. Bien entendu, en tant que dérivation, ce champ est tout simplement la dérivée partielle par rapport à x_i, c'est-à-dire l'application $g \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x_i}$. On pourra donc réécrire le champ de vecteur X donné en (1.35) comme la *dérivation*

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X^m \frac{\partial}{\partial x^m} : g \longmapsto \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Enfin un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ peut aussi être considéré comme une application de $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en l'identifiant à $x \longmapsto \Big(X^1(x), \ldots, X^m(x)\Big)$.

Considérons maintenant une carte (U, φ) de M, avec $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$. Sur le domaine U de la carte, tout champ de vecteurs X sur M s'écrit :

$$X : p \in U \longmapsto \Big(p, \sum_{i=1}^{m} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big); \tag{1.36}$$

où $X^i = X.x^i \in \mathcal{C}^\infty$.

En particulier, comme U est lui-même une variété, l'application de U sur $\pi^{-1}(U)$

$$\frac{\partial^M}{\partial x^1} = d\varphi^{-1} o \frac{\partial}{\partial x^i} o\varphi : p \longmapsto \Big(p, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) \in T_pM = T_pU;$$

définit un champ de vecteurs sur U. On l'appelle champ de coordonnées.

En utilisant les champs de coordonnées, le champ X donné par (1.36) s'écrit également, en tant que dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(M)$

$$X = X^1 \frac{\partial^M}{\partial x^1} + \cdots + X^m \frac{\partial^M}{\partial x^m} : g \longmapsto \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial^M}{\partial x^i} \cdot g.$$

Définissons le champ X lu dans la carte φ comme le champ de vecteur sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$

$$X^\varphi(x) = d\varphi o X o\varphi^{-1}(x) = X^1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X^m(x) \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

Considérons alors d'autres coordonnées locales $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$, dans lesquelles le champ X se lit

$$X^\psi(y) = Y^1(y) \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + Y^m(y) \frac{\partial}{\partial y_m}.$$

Alors, en notant $y(x) = \psi o \varphi^{-1}(x)$, on obtient la formule suivante pour le changement de coordonnées :

$$Y^j(y) = X^{\varphi} \cdot y_j(\varphi o \psi^{-1})(y).$$

Exemple 1.4.2. *Champ de gravité d'un objet de masse m : la variété est ici $M = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ et le champ de vecteurs est*

$$X(x) = \frac{m}{r^3}\Big(x^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x_3}\Big);$$

où $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$.

On peut enfin se demander s'il est possible de "transporter" un champ de vecteurs : étant donnée une application différentiable $F : M \longrightarrow N$ et un champ de vecteurs X sur M, existe-t-il un champ de vecteurs sur N dont les valeurs soient les images de celles de X par dF ?
En général la réponse est non (prendre par exemple $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}, F =$la projection sur la première coordonnée et $X(x) = (x^2, 0)$). Ce n'est possible que dans certains cas, en particulier quand F est un difféomorphisme.

Définition 1.4.3. *Soient $F : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme et X un champ de vecteurs sur M.Alors le transport de X par F, noté F_*X, est le champ de vecteurs sur N défini par :*

$$F_*X = dF(X)oF^{-1} \text{ ou } F_*X(q) = dF_{F^{-1}(q)}\Big(X(F^{-1}(q))\Big) \tag{1.37}$$

1.5 Crochet de Lie

Cette section traite une opération importante sur les champs de vecteurs, appelé le crochet de Lie, qui est donnée par : $[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$,

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf), \qquad \forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(M),\ p \in M. \tag{1.38}$$

Le crochet de Lie sera utilisé dans les sections suivantes du chapitre 2 pour définir les concepts de torsion et courbure d'une connexion linéaire.

Les champs de vecteurs X et Y commutent si $[X,Y]=0$. Le crochet de Lie mesure la non commutativité entre les champs de vecteurs. En coordonnées locales, le crochet de Lie prend la forme

$$[X,Y]=\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}X^j-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j\Big)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.39}$$

Le crochet de Lie est verifié les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{R}$-linéaire : $\forall a,b\in\mathbb{R}$

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z];$$

$$[Z,aX+bY]=a[Z,X]+b[Z,Y];$$

2. Antisymétrie :

$$[X,Y]=-[Y,X];$$

3. La somme cyclique est zéro (identité de jacobi) :

$$\Big[X,[Y,Z]\Big]+\Big[Y,[Z,X]\Big]+\Big[Z,[X,Y]\Big]=0.$$

Le crochet de Lie n'est pas $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire, parce que $[fX,gY]\neq fg[X,Y]$. Nous avons

$$[fX,gY]=fg[X,Y]+f(X_g)Y-g(Y_f)X, \qquad \forall g,f\in\mathcal{C}^\infty(M).$$

Exemple 1.5.1. *Considérons sur $\mathbb{R}^2$ le champs de vecteurs $X=\partial_1, Y=x^1\partial_2$, appelé les champs de vecteurs Grushin . Alors $[X,Y]=\partial_2\neq 0$, et donc X et Y ne commutent pas.*

1.6 Formes différentielles

La différentiel d'une fonction $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ est défine en tout point p par

$$(df)_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(df)_p(v) = v(f) \qquad\qquad \forall v \in T_pM. \tag{1.40}$$

En coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^m)$ cela prend la forme $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, où $\{dx^i\}$ la base duale de $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ de T_pM, c'est-à-dire :

$$dx^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. L'éspace engendré par $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ est appelé l'éspace cotangent de M en p, et est notée T_p^*M. Les éléments de T_p^*M sont appelés covecteurs. La différentiel df est un exemple de 1-forme.

En général, une forme différentielle ω sur une variété M est une application qui assigne à chaque point $p \in M$ un élément $\omega_p \in T_p^*M$. une 1-forme peut être écrit en coordonnées locales comme :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i \tag{1.41}$$

où $\omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i})$ est le i éme coordonnée de la forme par rapport à la base $\{dx^i\}$ L'ensemble des 1-formes sur la variété M sera notée par $\Gamma(T^*M)$.

1.7 Tenseurs

Soient T_pM et T_p^*M l'espace tangent et l'espace cotangent de M au point p. Nous adoptons les notations utiles suivantes :

$$(T_p^*M)^r = \underbrace{T_p^*M \times \ldots \times T_p^*M}_{s\ foix}, \quad (T_pM)^s = \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{r\ foix}.$$

Définition 1.7.1. *Un tenseur de type (r,s) en un point $p \in M$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinéaire $T : (T_pM)^r \times (T_p^*M)^s \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Définition 1.7.2. *Un champ de tenseur $\mathcal{T}$ de type (r,s) est une application différentiable, qui a tout point $p \in M$ associé un tenseur de type (r,s) $\mathcal{T}_p$ sur M au point p.*

Comme $\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}\}_{i_1<\ldots<i_s}$ et $\{dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_r}\}_{j_1<\ldots<j_r}$ sont des bases des espaces vectoriels $(T_pM)^r$ et $(T_p^*M)^s$, respectivement, le champ de tenseur $\mathcal{T}$ peuvent être écrit à l'aide des coordonnées locales (avec sommation sur les indices répétés)

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1 i_2 \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}; \tag{1.42}$$

où " $\otimes$ " désigne le produit tensoriel d'habitude. Cela signifie que $\mathcal{T}$ agit sur les r champs vecteurs et les s 1-formes

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) &= \mathcal{T}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{i_1 i_2 \ldots i_s} \tfrac{\partial}{\partial x^{i_1}}(\omega^1) \otimes \cdots \otimes \tfrac{\partial}{\partial x^{i_r}}(\omega^r) \otimes dx^{j_1}(X_1) \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}(X_s) \\ &= \mathcal{T}^{i_1 \ldots ir}_{i_1 \ldots i_s} X_1^{j_1} \ldots X_s^{j_s} \omega^1_{i_1} \ldots \omega^r_{i_r}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Nous disons que le tenseur $\mathcal{T}$ est r covariant et s contra-variant. Il est intéressant de noter les exemples particuliers de tenseurs suivants :

1. Tout 1-forme ω est un champ de tenseur de type $(0, 1)$. pour tout champ de vecteur X

$$\omega(X) = \omega_i dx^i(X) = \omega_i dx^i(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \omega_i X^i;$$

   avec une sommation de l'indice répété. En particulier, la différentielle, df, est champ de tenseur de type $(0, 1)$;
2. Tout champ de vecteurs X est un champ de tenseur de type $(1, 0)$ sur M, avec $X(\omega) = \omega(X) = \omega_i X^i, \quad \forall \omega;$
3. Une s- forme différentielle est un champ de tenseur antisymétrique de type $(0, s)$. En particulier, une 2-forme est un champ de tenseur Ω 2-covariant dans les coordonnées satisfait :

$$\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}; \tag{1.44}$$

4. Une forme de volume sur une variété de dimension n est une n-forme, c'est-à-dire un champ de tenseur antisymétrique de type $(0, n)$.

Afin de montrer que $\mathcal{T}$ est un champ de tenseur, dans la pratique, nous vérifions la $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité pour chaque argument. Par exemple, si, $\mathcal{T}$ est 2-covariant, alors nous avons bessoin de montrer que pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et de champs de vecteures X_1, X_2, Y_1, Y_2 nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(f_1X_1, f_2X_2) &= f_1f_2\mathcal{T}(X_1, X_2) \\ \mathcal{T}(X_1 + Y_1, X_2) &= \mathcal{T}(X_1, X_2) + \mathcal{T}(Y_1, X_2) \\ \mathcal{T}(X_1, X_2 + Y_2) &= \mathcal{T}(X_1, X_2) + \mathcal{T}(X_1, Y_2). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Dans le cas d'un champ de tenseur symétrique, $\mathcal{T}(X, Y) = \mathcal{T}(Y, X)$, il suffit de montrer les relations antérieures que dans le premièr argument. Si nous aimons montrer qu'un champ de tenseur, où une expression tensorielle nulle, alors dans la vertu des propriétés précédentes, il suffit de montrer qu'il est nulle dans un système de coordonnées.

Chapitre 2

Variétés Riemanniennes

Une variété riemannienne est une variété sur laquelle on est capable de mesurer les distances entre les points, les angles entre les vecteurs, la longueur des courbes et des volumes. En gros, elle est une variété munie d'une structure métrique. Les définitions précises sont indiquées dans ce qui suivante :

2.1 Métriques Riemanniennes

Définition 2.1.1. *Une métrique riemannienne g sur une variété différentiable M est un champ de tenseur 2-covariant symétrique, non dégénéré et définie positif.*

Définition 2.1.2. *Une variété riemannienne est une variété différentiable M doté d'une métrique riemannienne g.*

Une variété riemannienne sera notée à partir du maintenant par le couple (M, g). La métrique riemannienne g peut être considéré comme un produit scalaire positif $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ qui dépend de manière différentielle sur le point $p \in M$. En coordonnées locales nous écrivons :

$$g = g_{ij}dx^i dx^j; \tag{2.1}$$

avec $g_{ij} = g_{ji} = g(\partial_i, \partial_j)$. Les métriques riemanniennes g agit sur un pair de champs de vecteurs comme $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$, où nous supposons que la convention de

sommation sur les indices répétés.
L'exemple le plus évident de variété riemannienne est l'espace euclidien de dimension n, $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$, ce qui induit le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \sum_i X^i Y^i$.
Une métrique g induit une correspondance biunivoque naturelle entre les 1-formes et les champs de vecteurs sur une variété riemannienne M. Si X est un champ de vecteurs, alors on peut lui associer la 1-forme ω telle que :

$$\omega(Y) = g(Y, X), \quad \forall X \in \Gamma(TM). \tag{2.2}$$

En coordonnées locales cela devient $\omega_k = g_{jk}X^j$, où $\omega = \omega_i dx^i$ et $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

2.2 Connexions Linéaires

Une connexion linéaire permet la différenciation d'une fonction, un champ de vecteurs, où, en général, un tenseur par rapport à un champ de vecteurs donné. Elle peut être vue comme une extension de la dérivée directionnelle du cas euclidien. La définition précise suivante.
Rappelons que $\Gamma(TM)$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Définition 2.2.1. *Une connexion linéaire ∇ sur une variété différentiable M est une application linéaire $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ avec les propriétés suivantes :*

1. *$\nabla_X Y$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire par a rapport X ;*
2. *$\nabla_X Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire par a rapport Y ;*
3. *Vérifie la régle de Leibniz :*

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Pour deux champs de vecteurs X et Y, l'objet $\nabla_X Y$ est aussi un champ de vecteurs sur M, qui mesure la variation des taux de vecteur de Y dans la direction de X. Dans un système de coordonnées locales $(X^1, \ldots, X^n)$ nous pouvons écrire :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k. \tag{2.3}$$

Où Γ_{ij}^k les coordonnées de la connexion par rapport à la base locale $\{\partial_i\}$, où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.
Si $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$, alors un calcul simple permet de trouver la formule

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^k \partial_k \tag{2.4}$$

où $(\nabla_X Y)^k = X^i(\partial_i Y^k + Y^j \Gamma_{ij}^k)$, avec sommation sur i et j.
Un exemple d'une connexion linéaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est donnée par :
$\overline{\nabla}_X Y = X(Y^j)e_j$, où $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ est le j-éme vecteur de la base de $\mathbb{R}^n$ et $Y = (Y^1, \ldots, Y^n) = Y^j e_j$. Les coordonnées de cette conexionn sont à zéro, $\overline{\Gamma}_{ij}^k = 0$.
Une connexion peut aussi être utilisée pour différencier les tenseurs. Si T est un champ de tenseur r-covariante, nous pouvons différencier le long d'un champ de vecteurs X par rapport à la connexion linéaire ∇ comme :

$$(\nabla_X T)(Y_1, \ldots, Y_r) = XT(Y_1, \ldots, Y_r) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r). \tag{2.5}$$

En particulier, nous avons la définition suivante :

Définition 2.2.2. *Soit g le champ de tenseur métrique de Riemann. Une connexion linéaire ∇ est appelé connexion métrique si g est parallèle par rapport à ∇, c'est-à-dire*

$$\nabla_Z g = 0, \quad \forall Z \in \Gamma(TM). \tag{2.6}$$

Cela peut être déclaré comme équivalent :

$$Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{2.7}$$

Soit $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^j\partial_j$ et $Z = Z^k\partial_k$. Choisir $X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ et $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$, un simple calcul transforme l'équation (2.7) en

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki}^p g_{pj} + \Gamma_{kj}^r g_{ir}. \tag{2.8}$$

2.3 Champs de tenseurs de torsion et de courbure

Une connexion linéaire est écrite par deux autres champs de tenseurs, la torsion et la courbure, qui sont définies prochainement.

Définition 2.3.1. *Soit* ∇ *une connexion linéaire. La torsion est définie comme :*

$$\begin{array}{rrcl} T: & \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & T(X,Y) & = & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \end{array} \tag{2.9}$$

La torsion mesure non commutativité de la dérivation par rapport à deux champs de vecteurs. Le dernièr terme, $[X,Y]$, est nécessaire car il confère des propriétés tensorielles à $T(\cdot,\cdot)$:

$$\begin{array}{rcl} T(fX,hY) & = & fhT(X,Y),\ \forall X,Y,Z\in\Gamma(TM), \forall f,h\in\mathcal{C}^\infty(M) \\ T(X,Y+Z) & = & T(X,Y)+T(X,Z). \end{array}$$

Comme $T(X,Y) = -T(Y,X)$, alors T est un tenseur antisymétrique 2-covariant. Etant donné que dans les coordonnées locales nous avons

$$\begin{array}{rcl} T_{ij} & = & T(\partial_i,\partial_j) = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i - \underbrace{[\partial_i,\partial_j]}_{=0} \\ & = & (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k. \end{array}$$

Il en résulte que les coordonnées de torsion sont donnés par $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ Une connexion ∇ est appelé sans torsion si $T = 0$. Cela peut être écrit comme équivalente $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, qui est une relation de symétrie pour les coefficients de connexion. Ceci est la raison pour laquelle ces types de connexions sont également appelés symétrique.

Définition 2.3.2. *La courbure de la connexion linéaire* ∇ *est donnée par :*

$$\begin{array}{rrcl} R: & \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & R(X,Y,Z) & = & \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z. \end{array} \tag{2.10}$$

Si nous écrivons la courbure

$$R(X,Y,Z) = \Big([\nabla_X,\nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\Big)Z. \tag{2.11}$$

Il en résulte que R mesure la non commutativité des connexions par rapport à X et Y. On peut montrer que R vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} R(f_1X, f_2Y, f_3Z) &= f_1f_2f_3R(X,Y,Z) \\ R(X_1+X_2,Y,Z) &= R(X_1,Y,Z)+R(X_2,Y,Z) \\ R(X,Y_1+Y_2,Z) &= R(X,Y_1,Z)+R(X,Y_2,Z) \\ R(X,Y,Z_1+Z_2) &= R(X,Y,Z_1)+R(X,Y,Z_2). \end{aligned}$$

Pour tous $f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $X_i, Y_j, Z_k \in \Gamma(TM)$, R est un champ de tenseur 3-covariant. Le tenseur R est antisymétrique dans le premiér pair d'arguments, c'est-à-dire,

$$R(X,Y,Z) = -R(Y,X,Z).$$

Comme le premiér pair est plus particulier, le tenseur de courbure est parfois désigné par $R(X,Y)Z$. Dans un système local de coordonnées on écrit

$$R\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^p_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^p}.$$

2.3.1 Courbure de Ricci

Définition 2.3.3. *La courbure de Ricci associé à la connexion linéaire ∇ est donnée par :*

$$\begin{aligned} Ric: \ \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ Ric(X,Y) &= Trace\Big(Z \longmapsto R(Z,X)Y\Big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Cela signifie que si $\{e_1,\dots,e_m\}$ est une base de vecteurs tangents orthonormé en p, alors $Ric(X,Y)_p = \sum_{j=1}^m g_p\Big(R(e_j,X_p,Y_p),e_j\Big)$, en coordonnées locales nous écrivons $R_{ij} = Ric(\partial_i,\partial_j)$. Nous pouvons montrer que $R_{ij} = R^k_{ikj}$, avec sommation sur k. Il est intéressant de noter que Ric est un champ de tenseur 2-covariant.
Autrement dit :

$$\begin{aligned} Ric_p: \ T_pM\times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_p,Y_p) &\longmapsto Ric_p(X_p,Y_p) = \textstyle\sum_{i=1}^m g_p\Big(R(X_p,e_i)e_i,Y_p\Big); \end{aligned} \tag{2.13}$$

d'une autre façon, on peut écrire :

$$\begin{array}{rrcl} Ric: & \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & Ric(X,Y)=\sum_{i=1}^m g\Big(R(X,E_i)E_i,Y\Big) \end{array};$$

tel que $(E_i)_{i=1,\ldots,m}$ est une frame orthonormée de $\Gamma(TM)$.
Cela nous permet d'écrire ;

$$\begin{array}{rrcl} Ric(X,Y): & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & Ric(X,Y)|_p = Ric_p(X_p,Y_p). \end{array}$$

2.3.2 Courbure scalaire

Définition 2.3.4. *La courbure scalaire d'une variété riemannienne (M,g) par rapport à une base orthonormée locale $(e_i)_{i=1,\ldots,m}$ est la fonction sur M donnée par ;*

$$\sigma(p)=\sum_{i=1}^m Ricc_p(e_j,e_j)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m g_p\Big(R_p(e_j,e_i)e_i,e_j\Big);$$

L'expression de la définition précédente équivaut à ;

$$\sigma=\sum_{j=1}^m Ricc(E_j,E_j)=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m g\Big(R(E_j,E_i)E_i,E_j\Big).$$

Où $(E_i)_{i=1\ldots m}$ est une frame orthonormée de $\Gamma(TM)$.

2.3.3 Courbure sectionnelle

Soit (M,g) une variété Riemanienne de dimension $m\geq 2$. Pour tout $p\in M$; Soit $G_2(T_pM)$ l'ensemble de tous les sous espaces vectoriels de T_pM de dimension 2. ($G_2(T_pM)$ est appelé le Grassmannien).

Lemme 2.3.1. *Soient $X_p,Y_p,Z_p,W_p\in T_pM$ des vecteurs tangents de M au point p tels que :*

$$Span\{X_p,Y_p\}=Span\{Z_p,W_p\};$$

alors la quantité

$$\frac{g_p\Big(R(X_p,Y)Y)_p, X_p\Big)}{\mid X_p \mid^2\mid Y_p \mid^2 - g_p(X_p,Y_p)^2}$$

est bien définie et ne dépend pas de la base choisie, c'est-à-dire ;

$$\frac{g\Big(R(X,Y,Y)_p, X_p\Big)}{\mid X_p \mid^2\mid Y_p \mid^2 - g_p(X_p,Y_p)^2} = \frac{g\Big(R(Z,W,W)_p, Z_p\Big)}{\mid Z_p \mid^2\mid W_p \mid^2 - g_p(Z_p,W_p)^2}.$$

Le lemme précédent nous permet de poser la définition suivante :

Définition 2.3.5. *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$. On définit la courbure sectionnelle du 2-plan de T_pM engendré par deux vecteurs X_p et Y_p, où $p \in M$ La fonction*

$$K_p : G_2(T_pM) \longrightarrow \mathbb{R}$$

donnée par :

$$Span_{\mathbb{R}}\{X_p,Y_p\} \longmapsto \frac{g_p\Big(R(X,Y,Y)_p, X_p\Big)}{\mid X_p \mid^2\mid Y_p \mid^2 - g_p(X_p,Y_p)^2};$$

Définition 2.3.6. *Une variété riemannienne (M,g) est dite à courbure sectionnelle constante si la fonction K_p est constante pour tout point $p \in M$ et tous $X_p, Y_p \in T_pM$.*

Définition 2.3.7. *La variété riemannienne (M,g) est dite plate si sa courbure sectionnelle constante est égale à zéro.*

Dans le cas de courbure sectionnelle constante ; le champ de tenseur de courbure riemannienne a une forme assez simple.

Lemme 2.3.2. *Soit (M,g) une variété riemannienne de courbure sectionnelle constante k, alors le tenseur de courbure riemannienne R de (M,g) est donnée par :*

$$R(X,Y,Z) = k\Big(g(Y,Z)X - g(Z,X)Y\Big) \qquad \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM). \tag{2.14}$$

C'est-à-dire au point $p \in M$:

$$R(X,Y,Z)_p = k\Big(g_p(Y_P,Z_p)X_p - g_p(Z_p,X_p)Y_p\Big) \qquad X_p,Y_p,Z_p \in T_pM. \tag{2.15}$$

Corollaire 2.3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne a courbure sectionnelle constante k alors*

$$\sigma(p) = m(m-1)k.$$

Preuve 2.3.1. *Pour la preuve on applique la définition 2.3.5 et le lemme 2.3.2.*

2.4 Tenseur de Ricci

Définition 2.4.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, $p \in M$ et $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base orthonormée de T_pM. Le champ de tenseur de Ricci au point p, est donnée par :*

$$\begin{array}{rccl} Ricc_p : & T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & X_p & \longmapsto & Ricc_p(X_p) = \sum_{i=1}^m R_p(X_p, e_i)e_i. \end{array} \tag{2.16}$$

On peut reformuler la définition précédente comme suit ;

$$\begin{array}{rccl} Ricc : & M & \longrightarrow & T_1^1(TM) \\ & p & \longmapsto & \begin{array}{rccl} Ricc_p : & T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & X_p & \longmapsto & Ricc_p(X_p) = \sum_{i=1}^m R_p(X_p, e_i)e_i; \end{array} \end{array} \tag{2.17}$$

D'une façon générale si $\{E_i\}_{i=1\dots m}$ est une frame orthonormée de $\Gamma(TM)$ c'est-à-dire $(E_i|_p)_{i=1\dots m}$ base orthonormée de T_pM, le tenseur de Ricci s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{rccl} Ricc : & \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & X & \longrightarrow & Ricc(X) = \sum_{i=1}^m R(X, E_i)E_i \end{array} \tag{2.18}$$

2.5 Connexion de Levi-Civita

Un des faits les plus remarquables de la géométrie riemannienne est l'existence et l'unicité d'une connexion métrique sans torsion. Ceci est appelé la connexion de Levi-Civita de la variété riemannienne (M, g). Parfois, cela est aussi appelé la connexion riemannienne.
Le théorème suivant, aussi connu sous le lemme fondamental de la géométrie Riemannienne, assure la connexion de Levi-Civita comme une expression explicite en

termes de métrique riemannienne g. Ceci est un résultat utile qui permet d'éliminer la connexion à partir d'une formule et d'écrire en termes de la métrique riemannienne seulement.

Théorème 2.5.1. *Sur une variété riemannienne (M, g) il existe une unique connexion métrique ∇ sans torsion, donnée par la formule de Koszul suivante :*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &+ g([X,Y]Z) - g([X,Z]Y) - g([Y,Z]X). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Preuve 2.5.1. *La preuve comporte deux parties, l'existence et l'unicité.*
Existence *: Nous allons montrer que la connexion ∇ défini par la formule(2.19) est une connexion métrique et sans torsion.*
Premièrement, nous devons montrer que ∇ est une connexion linéaire. En utilisant les propriétés de champs de vecteurs et crochets de Lie nous pouvons montrer par un calcul direct que

$$2g(\nabla_{fX} Y, Z) = 2fg(\nabla_X Y, Z), \qquad \forall Z \in \Gamma(TM),$$

Donc

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

C'est-à-dire ∇ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire dans le premier argument.
Ensuite, nous vérifions la deuxième propriété de connexions :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X(fY), Z) &= Xg(fY,Z) + fYg(X,Z) - Zg(X,fY) \\ &+ g([X,fY],Z) - g([X,Z],fY) - g([fY,Z],X) \\ &= X(f)g(X,Y) + fXg(Y,Z) + fYg(X,Z) \\ &- Z(f)g(X,Y) - fZg(X,Y) \\ &+ fg([X,Y],Z) + X(f)g(Y,Z) - fg([X,Z],Y) \\ &- fg([Y,Z],X) + Z(f)g(Y,X) \\ &= 2fg(\nabla_X Y, Z) + 2X(f)g(Y,Z) \\ &= 2g(f\nabla_X Y + X(f)Y, Z). \end{aligned}$$

par conséquent,∇ est une connexion linéaire.

Le calcul suivant vérifie que la connexion est sans torsion. Utilisation (2.19) donnée

$$\begin{aligned}
2g(T(X,Y),Z) &= 2g(\nabla_X Y, Z) - 2g(\nabla_Y X, Z) - 2g([X,Y],Z) \\
&= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&+ g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \\
&- Yg(X,Z) - Xg(Y,Z) + Zg(Y,X) \\
&- g([Y,X],Z) + g([Y,Z],X) + g([X,Z],Y) \\
&- 2g([X,Y],Z) \\
&= g(2[X,Y] - 2[X,Y],Z) = 0, \qquad \forall Z \in \Gamma(TM).
\end{aligned}$$

Le fait que $g(\cdot,\cdot)$ est non dégénérée cela nous donne $T(X,Y) = 0$, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

L'application de la formule (2.19) deux fois, nous avons

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_Z X, Y) + 2g(X, \nabla_Z Y) &= Zg(X,Y) + Xg(Z,Y) - Yg(Z,X) + g([Z,X],Y) \\
&- g([Z,Y],X) - g([X,Y],Z) \\
&+ Zg(Y,X) + Yg(Z,X) - Xg(Z,Y) + g([Z,Y],X) \\
&- g([Z,X],Y) - g([Y,X],Z) \\
&= 2Zg(X,Y).
\end{aligned}$$

Par conéquent $g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X,Y)$ c'est-à-dire ∇ est une connexion métrique.

***Unicité** : Nous devons prouver que toute connexion métrique et symétrique ∇ est donnée par la formule (2.19). Il suffit de faire la vérification dans un système de coordonnées locales $(X^1, \ldots, X^m)$. Soit $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k$. Utilisation $\Gamma_{ij}^k = g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k)$ et $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, alors la formule (2.19) devient*

$$2\Gamma_{ij}^p g_{pk} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}. \tag{2.20}$$

Écrit que ∇ est une connexion métrique de trois manières différentes, en utilisant *permutation cyclique des indices, voir la formule (2.8), nous avons*

$$\begin{aligned}\partial_i g_{jk} &= \Gamma^p_{ij} g_{pk} + \Gamma^r_{ik} g_{jr}\\ \partial_j g_{ki} &= \Gamma^p_{jk} g_{pi} + \Gamma^r_{ji} g_{kr}\\ \partial_k g_{ij} &= \Gamma^p_{ki} g_{pj} + \Gamma^r_{kj} g_{ir}.\end{aligned}$$

En additionnant les deux premières équations et en soustrayant la dernière, en utilisant la symétrie $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, nous donne exactement l'équation (2.20). Ceci termine la preuve de l'unicité.

De l'équation (2.20), nous obtenons :

$$\Gamma^p_{ij} = \frac{1}{2} g^{pk}\Big(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\Big), \tag{2.21}$$

où g^{pk} désigne la matrice inverse de g_{ij}. Les coordonnées Γ^p_{ij} de la connexion de Levi-Civita,voir (2.21), sont appelés les symboles de Christoffel de deuxiéme type. Les symboles de Christoffel de premiér type sont obtenus en abissant les indices

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma^p_{ij} g_{pk}.$$

Inversement, si les coordonnées d'une connexion linéaire sur une variété riemannienne (M, g) sont données par la formule (2.21), la connexion doit être la connexion de Levi-Civita.

Le champ de tenseur de courbure de type $(1, 3)$ associé à la connexion de Levi-Civita par la formule (2.10) est appelé le champ de tenseur de courbure de Riemann de type $(1, 3)$. Si en coordonnées locales, nous avons $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^p_{ijk}\partial_p$, alors la coordonnée R^p_{ijk} peut être exprimée en termes de symboles de Christoffel comme suivante :

$$R^r_{ijk} = \partial_i \Gamma^r_{jk} - \partial_j \Gamma^r_{ik} + \Gamma^r_{ih}\Gamma^h_{jk} - \Gamma^r_{jh}\Gamma^h_{ik}.$$

Dans la géométrie riemannienne le champ de tenseur de courbure de type $(0, 4)$ est également utile

$$\begin{aligned} R :\ \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)\\ R(X, Y, Z, W) &= g\Big(R(X, Y, Z), W\Big).\end{aligned}$$

Si en coordonnées locales nous écrivons : $R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}$, alors nous avons $R_{ijkl} = R_{ijk}^{p} g_{pl}$. Les coordonnées R_{ijkl} satisfont plusieurs relations, les plus utiles sont données dans ce qui suivante :

1. Anti-symétrie dans le premiér et le deuxiéme indice : $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$;
2. Echange de symétrie entre indices : $R_{ijkl} = R_{klij}$;
3. Première identité Bianchi $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

Un autre champ de tenseur 2-covariant important est le champ de tenseur de Ricci, qui est définie par :

$$Ric(X,Y) = Trace\Big(V \longrightarrow R(X,V,Y)\Big) = Trace\Big(V \longrightarrow R(V,X,Y)\Big).$$

Chapitre 3

Variétés Statistiques

3.1 Connexions duales :(conjuguées)

Dans cette section, nous allons définir et étudier les prinsipales propriétés des connexions duales. Ces connexions ont été introduites par A.P. Norden dans littérature de la géométrie différentielle affine sous le non de "connexions conjuquées" avaient, également, été independament introduites par Nagaoka et Amari et utilisés par Lauritzen dans la définition des structure statistiques.

Définition 3.1.1. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne, deux connexions linéaires* ∇ *et* ∇^* *sont dites duales (conjuguées) par rapport à la métrique* g *si :*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \ \ \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{3.1}$$

l'équation (3.1) est appellé la condition de la symétrique duale (dualité).
En coordonées locales $(x^1, \ldots, x^m)$ la condition de la dualité peut être exprimée comme suit :

$$\partial_i g(\partial_j, \partial_k) = g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) + g(\partial_j, \nabla^*_{\partial_i}\partial_k);$$

cela implique que : pour tout $l, s = 1 \ldots m$

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk} &= g(\Gamma^l_{ij}\partial_l, \partial_k) + g(\partial_j, \Gamma^{*s}_{ik}\partial_s) \\ &= \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^{*s}_{ik} g_{js}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

où Γ_{ij}^{l} etΓ_{ik}^{*s} sont les symboles de christoffel de la connexions ∇ et ∇^* respectivement. On note que les deux connexions ∇ et ∇^* sont des version faibles de la connexion métrique, en particulier, une connexion linéaire métrique est auto-duale.

Définition 3.1.2. *le triplet (g, ∇, ∇^*) est appelé structure dualistique sur M.*

Les prochaines résultats portent sur les propriétés de base des connexions duales, telles que l'existence, l'unicité, involitivité, tonseur de tortion et le tenseur de courbure.

Proposition 3.1.1. *Etant donné une connexion linéaire ∇ sur une variété riémaniènne M, alors il existe une unique connexion ∇^* duale de ∇.*

Preuve 3.1.1. *Il suffit de prouver la propriété localement, c'est-à-dire en coordonnées locales.*
Existance : comme la connexion ∇ est donnée, ses composantes Γ_{ij}^{k} connues. Posons

$$\Gamma_{ij,l}^{*} = \partial_{x^i} g_{lj} - \Gamma_{il,j} \quad et \quad \Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij,l}^{*} g^{lk};$$

et on construite la connexion duale par :

$$\nabla^*_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^{*k} \partial_{x^k}.$$

En vertu de la relation (3.2) il s'ensuit que ∇^* est duale de ∇.
Unicite :
de la relation (3.2), les composantes Γ_{ij}^{*k} de la connexion ∇^* sont uniquement déterminer par la donnée de la métrique g_{ij} est les coefficient Γ_{ij}^{k} de la connexion ∇.

Proposition 3.1.2. *1. La dualité est involutive, c'est-à-dire $(\nabla^*)^* = \nabla$;*

2. ∇ est une connexion métrique sur la variété (M, g) si et seulement si $\nabla = \nabla^*$.

Preuve 3.1.2. *1. Il résulte de la symétrie des indices i et j de l'équation (3.2) ;*

2. Le fait que ∇ est une connexion métrique, on écrit :

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \qquad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM); \tag{3.3}$$

Puis soustraction des deux équations (3.1) et (3.3) nous donne :

$$g(Y, \nabla_X Z) = g(Y, \nabla^*_X Z) \qquad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM);$$

ce qui équivant à $\nabla = \nabla^*$.

Soit ∇ une connexion linéaire, on rappel que le champ de torsion de type $(1,2)$ et le champ de tenseur de courbure de type $(1,3)$ sont définie respectivement par :

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ R(X,Y,Z) &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \end{aligned}$$

Ceux-ci peuvent être s'écrit localement comme suit :

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k; \tag{3.4}$$

$$R_{i,j,k}^r = \partial_i \Gamma_{jk}^r - \partial_j \Gamma_{ik}^r + \Gamma_{is}^r \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{js}^r \Gamma_{ik}^s. \tag{3.5}$$

Avec les composantes des champs de tenseurs sont donnés par :

$$T(\partial_i, \partial_j) = T_{ij}^k \partial_k;$$

$$R(\partial_i, \partial_j, \partial_k) = R_{i,j,k}^r \partial_r.$$

La relation entre les courbures de deux connexions conjigués (duales)est donnée dans la proposition suivante ;

Proposition 3.1.3. *Soient R et R^* les tenseur de courbure de ∇ et ∇^* respectivement. Alors*

1. $g\Big(R(X,Y,Z),W\Big) + g\Big(R^*(X,Y,W),Z\Big) = 0$;
2. *(M,g,∇) a courbure sectionnelle constante si et seulement si (M,g,∇^*) a courbure sectionnelle constante, et dans ce cas les tenseurs de courbure sont égales, en particulier $R=0$ si et seulement si $R^*=0$.*

Preuve 3.1.3. *1. Etant donné que la relation est linéaire par rapport aux X,Y,Z et W, il Suffit de la prouver dans une base locale. par conséquent nous supposons $X,Y,W,Z \in \{\partial_1,\ldots,\partial_m\}$, et profitez de calcul des crochets de Lie suivants sont nules :*

$$[X,Y] = [Y,Z] = [Z,W] = 0 \ldots = 0;$$

De la definition du tenseur de courbure et l'équation (3.1), nous allons les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
0 &= g(R(X,Y)Z,W) + g(R^*(X,Y)W,Z) \Longleftrightarrow \\
0 &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z, W) + g(\nabla^*_X\nabla^*_Y W - \nabla^*_Y\nabla^*_X W, Z) \Longleftrightarrow \\
0 &= g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) - g(\nabla_Y\nabla_X Z, W) + g(\nabla^*_X\nabla^*_Y W, Z) \\
&- g(\nabla^*_Y\nabla^*_X W, Z) \Longleftrightarrow \\
0 &= Xg(\nabla_Y Z, W) - g(\nabla_Y Z, \nabla^*_X W) - Y_g(\nabla_X Z, W) \\
&+ g(\nabla_X Z, \nabla^*_Y W) \\
&+ Xg(\nabla^*_Y W, Z) - g(\nabla^*_Y W, \nabla_X Z) - Yg(\nabla^*_X W, Z) \\
&+ g(\nabla^*_X W, \nabla_Y Z) \Longleftrightarrow \\
0 &= Xg(\nabla_Y Z, W) - Yg(\nabla_X Z, W) + Xg(\nabla^*_Y W, Z) \\
&- Yg(\nabla^*_X W, Z) \Longleftrightarrow \\
0 &= XYg(Z,W) - Xg(Z, \nabla^*_Y W) - YXg(Z,W) - Yg(Z, \nabla^*_X W) \\
&+ Xg(\nabla^*_Y W, Z) - Yg(\nabla^*_X W, Z) \Longleftrightarrow \\
0 &= [X,Y]g(Z,W)
\end{aligned}
$$

qui est vraie, puiseque $[X,Y] = 0$

2. *Supposons que* (M, g, ∇) *a courbure constante égale à* k. *Alors en utilisant* (1) *du lemme (2.3.2) on obtient :*

$$
\begin{aligned}
-g\Big(R^*(X,Y,W), Z\Big) &= g\Big(R(X,Y,Z), W\Big) \\
&= k\Big(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)\Big) \\
&= -k\Big(g(Y,W)g(X,Z) - g(X,W)g(Y,Z)\Big);
\end{aligned}
$$

et donc $R^*(X,Y)W = k\Big(g(Y,W)X - g(X,W)Y\Big)$

ce qui signifie que (M, g, ∇^*) *à courbure constante* k.

Remarque 3.1.1. 1. *La connexion* ∇ *a courbure nulle si et seulement si la connexion* ∇^* *a courbure nulle ;*

2. *En coordonnées locales, nous avons* $(R = R^*)$. *Nous notons que l'antisymétrie travaille pour l'échange dans le premiér pair d'indices,* $(R_{ij} = R_{ji})$, $(R^*_{ij} = R^*_{ji})$, *mais il ne fonction pas pour le deuxiéme pair d'indices.*

3.2 Platitude de la connexion duale

Définition 3.2.1. *Une connexion ∇ est dite plate dans un systéme de coordonnées locales données, si ses composants sont tous nules, c'est-à-dire $\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \forall i, j, k$. Par conséquent, si $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ sont deux champs de vecteurs, alors la dérivée covariante par rapport à une connexion plate est*

$$\nabla_X Y = X^i\Big(\partial_i Y^k + Y^j\Gamma_{ij}^k\Big)\partial_k = X^i\partial_i Y^k\partial_k = X(Y^k)\partial_k. \tag{3.6}$$

Les relations (3.4),(3.5) impliquent que la torsion et la courbure d'une connexion plate sont nulles. On peut montrer que l'inverse est partiellement vraie dans le sens suivant :
si la torsion et la courbure sont à zéro, $T = 0$, $R = 0$, alors pour tout point p dans M, il existe un voisinage ouvert U de p telle que : ∇ est plate sur M.

Proposition 3.2.1. *Soit (g, ∇, ∇^*) une structure dualistique sur M tell que ∇ et ∇^* sont plate, alors*

1. *Dans n'importe qu'elle systéme de coordonnées locales, les coefficients métrique g_{ij} sont constants ;*
2. *Si γ est une courbe ∇- où ∇^*-auto-paralléle, alors $\gamma^k(t) = a^k t + b^k t$, avec a^k, b^k des constantes.*

Preuve 3.2.1.
1. *En remplaçant $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^{*k} = 0$ dans la relation (3.2), on obtient $\partial_k g_{ij} = 0$, et donc les coefficients métrique g_{ij} ne dependent pas de p.*
2. *Les connexion ∇-auto-parallele sont caractérises par l'équation $\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) = 0$, ce qui devient $\ddot{\gamma}^k(t) = 0$, cela implique que le degré en t égale à 1 pour chaque composant $\gamma^k(t)$.*

3.3 Variétés Statistiques

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m. ∇ est une connexion linéaire sur M telle que (∇g) est symétrique si :

$$(\nabla g)(X, Y, Z) = (\nabla g)(Y, X, Z). \tag{3.7}$$

Définition 3.3.1. *Une variété statistique est une variété riemannienne munie d'une connexion linéaire* ∇ *sans torsion et* ∇g *symétrique. C'est-à-dire un triplet* (M, ∇, g) *tells que :* ∇ *sons torsion et* ∇g *symétrique.*

Proposition 3.3.1. *Soit* ∇ *une connexion linéaire sur une variété riemannienne* (M, g) *sans torsion, alors on a les équivalences suivantes ;*

$$\begin{aligned} \nabla g \ symtrique &\iff T^* = 0 \\ &\iff \nabla^* g \ symtrique \end{aligned}$$

Corollaire 3.3.1. *Soit* (M, ∇, g) *une variété statistique, alors les propriétés suivantes sont vérifier*

1. ∇^* *sans torsion c'est-à-dire* $T^*(X,Y) = \nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X - [X,Y] = 0$ *;*
2. ∇g^* *est symetrique c'est-à-dire* $(\nabla g^*)(X,Y,Z) = (\nabla g^*)(Y,X,Z)$ *;*

Ce lemme nous permet de posé la nouvelle définition suivantes :

Définition 3.3.2. *La variété statistique* (M, ∇^*, g) *est appelé variété statistique duale de la variété statistique* (M, ∇, g).

Preuve 3.3.1. *(propostion 3.3.1)*

1. *pour* 1) *ona*
   $T^*(X,Y) = \nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X - [X,Y]$. *alors pour tout* $Z \in \Gamma(TM)$ *ona,*

$$\begin{aligned} g(T^*(X,Y),Z) &= g(\nabla^*_X Y, Z) - g(\nabla^*_Y X, Z) - g([X,Y],Z) \\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Z, Y) - Yg(X,Z) + g(\nabla_Y Z, X) - g([X,Y],Z) \\ &= Xg(Y,Z) - Yg(X,Z) - g(\nabla_X Z, Y) \\ &+ g(\nabla_Y Z, X) - g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) \\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &- Yg(X,Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Y X, Z) \\ &= (\nabla g)(X,Y,Z) - (\nabla g)(Y,X,Z); \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $T^*(X,Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$ *;*

2. *Ona :* $(\nabla g^*)(X,Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla^*_X Y, Z) - g(Y, \nabla^*_X Z)$
de la condition de la dualité, on trouve :

$$\begin{aligned}
(\nabla g^*)(X,Y,Z) &= Xg(Y,Z) - [Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Z, Y)] - [Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z)] \\
&= -Xg(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
&= -(\nabla g)(X,Y,Z) \\
&= -(\nabla g)(Y,X,Z) \\
&= (\nabla g^*)(Y,X,Z).
\end{aligned}$$

3.4 Champ de Tenseur de Torsion relatif

Considérons deux connexions conjuguées ∇ et ∇^*. Alors il est logique de définir la quantite non nulle

$$U(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla^*_Y X - [X,Y]$$

Comme U est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport aux deux variables, alors pour toute fonction lisse $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, ona :

1. $$\begin{aligned}
U(fX,Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla^*_Y (fX) - [fX,Y] \\
&= f\nabla_X Y - f\nabla^*_Y X - Y(f)X - (fXY - Y(f)X - fYX) \\
&= fU(X,Y)
\end{aligned}$$

2. $U(X,fY) = fU(X,Y)$

alors, l'application U devient un champ de tenseur de type $(1,2)$ sur M.
Le champ de tenseur conjugué de U est definie par :

$$U^*(X,Y) = \nabla^*_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Les champs de tenseurs U et U^* sont appelés les champs de tenseurs de torsion relatifs aux connexions ∇ et ∇^*.

Proposition 3.4.1. *1.* $U^*(X,Y) = -U(Y,X)$ *;*

2. $(U^*)^* = U$ *;*
3. $U + U^* = T + T^*$
où T et T^* sont les champs de tenseurs de torsion de ∇ et ∇^* respectivement.

Preuve 3.4.1. *1. Nous avons*

$$\begin{aligned} U^*(X,Y) &= \nabla^*_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ &= -(\nabla_Y X - \nabla^*_X Y - [Y,X]) \\ &= -U(Y,X); \end{aligned}$$

2. En utilisant 1) *ona :*

$$(U^*)^*(X,Y) = (-U(Y,X))^* = -U^*(Y,X) = U(X,Y);$$

3. En additionant les relations

$$\begin{aligned} U(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla^*_Y X - [X,Y] \\ U^*(X,Y) &= \nabla^*_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \end{aligned}$$

On obtient :

$$(U+U^*)(X,Y) = (T+T^*)(X,Y);$$

pour tous champs de vecteurs X et Y.

Corollaire 3.4.1. *Nous avons $U + U^* = 0$ si et seulement si $T + T^* = 0$.*

Nous notons que les connexion ∇, ∇^* verifient la condition de la symétrie duale si $U = 0$, on a la proposition suivante :

Proposition 3.4.2. *Si ∇ et ∇^* sont deux connexions duales et $U = 0$, alors $\nabla = \nabla^*$, et ∇ est la connexion de Levi-Civita.*

Proposition 3.4.3. *Soient ∇ et ∇^* deux connexions duales sans torsion, $T = T^* = 0$, alors la relation symetrique suivante est vérifie :*
$g(U^*(X,Y),Z) = g(U^*(X,Z),Y) = g(U^*(Z,Y),X) = g(U^*(Y,X),Z)$.

Preuve 3.4.2. *La preuve résulte de la formule $g(U^*(X,Y),Z) = C(X,Y,Z)$ et la symetriee totale de C.*

Bibliographie

[1] S. I. Amari and H. Nagaoka Methods of Information Geometry. volum 191.
AMS AMERICAN MATHEMATICAL SOCIRTY
OXFORD UNIVERSITY PRESS.

[2] O.Calin C. Udriste Geometric Modeling in Probability and Statistics ISBN 978-3-319-07778-9 DOI 10.1007/978-3-319-07779-6 Spring Cham Heidelberg New York Dorderchet London
Springer International Publishing Switzerland 2014

[3] F.Jean AOT13 Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique Édition 2009/2010

[4] T.MASSON Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions Version du 19 décembre 2001 Laboratiore de Physique Théorique Université Paris XI,Bâtiment 210 91 405 Orsay Cedex, France