Table des matières

.

0.1 Introduction

Les distributions sont utilisées depuis longtemps par les physiciens (distribution de DIRAC,...) mais une théorie mathématique rigoureuse n'est apparue que récemment dans les travaux de Sobolev (1936) et surtout L.SCHWARTZ (1950) (en parallèle : GELFAND (1964)).

LAURENT SCHWARTZ (1915-2002) est l'un des grands mathématiciens français du XXe siècle, le premier à obtenir la médaille Fields, en 1950 pour ses travaux sur la théorie des distributions.

C'est la théorie la plus adaptée à l'étude de nombreux systèmes physiques et notamment à celle des systèmes linéaires continus. Avec la notion de distribution, la convolution et la transformée de FOURIER deviennent des outils mathématiques d'une grande puissance.

La transformation de FOURIER a une définition simple pour des fonctions intégrables, et bon nombre d'ouvrages commencent par définir cette opération pour des fonctions $L^1(\mathbb{R}^n)$, avant de considérer d'autres espaces fonctionnels. Nous suivons dans ce travail une approche classique, qui consiste à définir la transformation de Fourier sur des espaces de fonctions régulières et décroissant rapidement (l'espaces de SCHWARTZ) et définir la transformée de FOURIER dans un sous-espace des distributions (distributions tempérées).

Notre mémoire se compose de quatre chapitres

Dans le premier chapitre, On donne quelques rappels sur les distributions sur l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ainsi que quelque opérations sur $\mathcal{D}'$ et la transformation de Fourier sur l'espace L^1.

Au deuxième chapitre, On définit l'espace de SCHWARTZ comme une extension de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on le muni d'une topologie et on étudie quelque propriétés

Dans le troisième chapitre, on définit l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'$ comme un sous espace des distributions $\mathcal{D}'$ et on donne quelques opérations, notamment, le produit de convolutions.

Finalement, dans le quatrième chapitre, on montre qu'on peut définir la transformation de FOURIER sur $\mathcal{S}'$ mais pas sur $\mathcal{D}'$, on donne ces propriétés comme pour la dérivée et le produit de convolution. Une application de l'équation de la chaleur est donnée en plus de l'exemple de l'équation des cordes vibrantes.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espace L^p

Définition 1.1 *L'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω dans $\mathbb{R}^n$ et pour tous $p \in \mathbb{N}^*$, la norme de f est notée $||f||_p$ soit finie. On a*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telque : } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\} \text{ et } ||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

$(L^p(\Omega), ||.||_{L^p})$ est un espace de Banach.

Si $p \to \infty$, L^∞ est donné par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telque : } \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\} \text{ et } ||f||_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Définition 1.2 *On rappelle que les fonctions de $L^p_{loc}(\Omega)$ (les fonctions localement L^p sur Ω dans $\mathbb{R}^n$) sont les fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont mesurables et intégrables sur tout compact de Ω.*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telque : } \forall K \subset \Omega, K \text{ compact, } \int_K |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Exemple 1.3 $\Omega =]0, \infty]$ *on a la fonction* $f(x) = \frac{1}{x}$, $f \in L^1_{loc}(]0, \infty])$ *et* $f \notin L^1(]0, \infty])$

1.2 Espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.4 *Le support d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est la fermeture de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}$ i.e le complémentaire du plus grand ouvert d'annulation.On le note*

$$suppf = \overline{\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}}$$

Définition 1.5 *On appelle $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ définies sur $\mathbb{R}^n$ indéfiniments dérivables à supports compacts.*

Propriété 1.6 *L'ensemble $\mathcal{D}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est un espace vectoriel topologique ses sous espaces vectoriels sont de type*

$$\mathcal{D}(U,K) = \{f : U \to \mathbb{C} : f \text{ est } C^\infty, suppf \text{ est compact} \subset K\}$$

et on a

$$\mathcal{D}(U) = \bigcup_{K \text{ compact } \subset U} \mathcal{D}(U,K)$$

Les éléments de $\mathcal{D}(U)$ sont appelés fonctions de tests

1.3 Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Notations générales

Quel que soit le n-uplet d'entiers naturels $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, quel que soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on note

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n},$$

et ∂^α désigne la dérivée partielle d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_n$ définie par

$$\partial^\alpha \varphi = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \varphi$$

si φ est une fonction $|\alpha|$ fois différentiable (on utilisera aussi la notation ∂^α pour les distribution).

Définition 1.7 *Une distribution T sur un ouvet U de $\mathbb{R}^n$ est une forme lineaire continue sur*

$\mathcal{D}(U)$ *i.e pour tout compact* $K \subset U$: $\exists\ M_K > 0$ *et* $k_K \in \mathbb{N}$ *telle que* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(U, K)$

$$|T(\varphi)| \leq M_K \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq k_K}} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

on note par $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$, $\mathcal{D}'(U)$ est l'ensemble des distributions et k_K l'ordre de T.

Propriété 1.8 *Le support d'une distribution noté* $suppT$ *est le complémentaire du plus grand ouvert d'annulation de* T

$$x \in suppT \Leftrightarrow \forall V \in V(x);\ \exists \varphi \in \mathcal{D}(U, K),\ et\ \langle T, \varphi \rangle \neq 0$$

Exemple 1.9 (Distribution régulières) *Soit* f *une fonction localement intégrable. Une distribution régulières est définie par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

Exemple 1.10 (Distribution de Dirac) *La distribution de Dirac notée par* δ_a *est définie par*

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \end{aligned}$$

On note $\delta_0 = \delta$ et $supp(\delta) = \{0\}$.

Exemple 1.11 (Distribution de Héaviside) *La distribution d'Héaviside associée à la fonction Héaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

est définie par

$$\begin{aligned} &H : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \\ &\varphi \mapsto H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \end{aligned}$$

On a $supp(H) = \mathbb{R}_+$.

Exemple 1.12 *La distribution* $Vp(\frac{1}{t})$ *appellée valeur principale, est définie par*

$$\langle Vp(\frac{1}{t}), \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|t|>\epsilon}\frac{\varphi(t)}{t}dt$$

1.3.1 Opérations sur les distributions

Soient T, S deux distributions sur $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- La somme et le produit par un scalaire

  $\langle T + S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi\rangle$

  $\langle \alpha T, \varphi\rangle = \alpha\ \langle T, \varphi\rangle$
- La dérivée ; si $\alpha \in \mathbb{N}^n$; $\quad \langle T^{(\alpha)}, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \varphi^{(\alpha)}\rangle$ où $|\alpha| = \sum\limits_{i=1,n} \alpha_i$
- Multiplication par une fonction C^∞ : Si $f \in C^\infty$ on définit la distribution $f\ T$ par

  $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(U), \quad \langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle$
- Produit tensoriel de deux distributions : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement. Pour $T \in \mathcal{D}'(U)$ et $S \in \mathcal{D}'(V)$, on définit une distribution $T \otimes S$ sur $U \times V$ par

  $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(U)$ et $\forall\ \psi \in \mathcal{D}(V)$,

  $$\langle T \otimes S, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\ \langle T, \psi\rangle$$

- Produit de convolution

  Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$. Le produit de convolution de f par g est la fonction

  $$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$$

  si h est une fonction bornée, on a alors, d'aprés le théorème de Fubini

  $$\langle f * g, h\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x + y)f(x)g(y)dxdy$$

  On définit alors le produit de convolution de deux distributions à support compact S et T par

  $$\langle S * T, \varphi\rangle = \langle S \otimes T, \varphi(x + y)\rangle \qquad \text{pour } \varphi \in C^\infty$$

1.4 Transformation de Fourier dans L^1

Définition 1.13 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *on appelle une transformation de fourier de* f *la fonction notée* $\hat{f}$ *ou* $\mathcal{F}(f)$ *définie par*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x.\xi) f(x) dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

où $x.\xi$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

$\hat{f}$ est bien définie quand $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.14 *On peut écrire la transformation de fourier par la formule*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix.\xi}\, dx.$$

Propriété 1.15 *Soit* f *une fonction de classe* C^m *dans* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *telle que, pour tout multi-indice* α *où* $|\alpha| \leq m$ *on a :*

1/ la transformée $\hat{f}$ *est continue et bornée sur* $\mathbb{R}^n$.

2/ Si $\hat{f}$ *est de classe* C^m, *alors*

$$\partial^{(\alpha)} \hat{f}(\xi) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x) \exp(-2i\pi x.\xi) dx$$

ou

$$\partial^{(\alpha)} \mathcal{F}(f) = (-2i\pi)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f(x))$$

3/

$$\mathcal{F}(\partial^{(\alpha)} f)(\xi) = (2i\pi)^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$$

Proposition 1.16 *Soient* f *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *alors*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

Preuve. *On a*

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x.\xi) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right] dx$$

effectuant le changement de variable $(x,y) \to (x-y;y)$ on aura

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[-2i\pi(y+z).\xi\right]\; f(z)g(y)dydz$$

La fonction à intégrée est sommable dans $\mathbb{R}^{2n}$, en appliquant le théorème de FUBINI, on obtient

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi z.\xi)\; f(z)\; dz\right] \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi y.\xi)\; g(y)\;\; dy\right]$$

■

Définition 1.17 (Inversion de Fourier) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors pour*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-ix.\xi}\, dx$$

on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f(x)$$

où $\overline{\mathcal{F}}$ est l'analogue de la transformation de FOURIER *obtenue en remplaçant i par $-i$ dans $\mathcal{F}(f)$.*

Transformation de FOURIER des distributions

On va essayer de définir la transformation de FOURIER pour les distributions régulières. Soit f une fonction intégrable qui définit une distribution régulière T_f et intéressons nous à la distribution régulière associée à $\hat{f}$.

On a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_{\hat{f}}, \varphi\rangle = \langle T_f, \hat{\varphi}\rangle$$

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_{\hat{f}}, \varphi\rangle &= \int \hat{f}(t)\varphi(t)dt \\ &= \int \left(\int f(x)\mathrm{e}^{-2i\pi xt}dx\right)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

et en utilisant le théorème de FUBINI pour intervertir les deux intégrales :

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_{\hat{f}}, \varphi\rangle &= \int f(x)\left(\int \mathrm{e}^{-2i\pi xt}\varphi(t)dt\right)dx \\ &= \int f(x)\hat{\varphi}(t)dx \\ &= \langle T_f, \hat{\varphi}\rangle\end{aligned}$$

Le problème ici est que si φ appartient à $\mathcal{D}$, il n'y a aucune raison pour que sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ appartienne à $\mathcal{D}$ et $\langle T_f, \hat{\varphi} \rangle$ n'a, en générale, pas de sens.

Pour obtenir une définition satisfaisante de la transformée de Fourier des distributions, on doit donc se placer sur un espace plus grand que $\mathcal{D}$ ce qui est l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 2

Espace des fonctions à décroissance rapide

2.1 Espace de Schwartz

Définition 2.1 (Fonction à décroissance rapide) *Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est dite à décroissance rapide si pour tout entier positif k,on a*

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^k |f(x)| = 0$$

Définition 2.2 *L'espace des fonctions indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide est appellé espace de* Schwartz *et est noté par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cette dernière propriété signifie que,*

$$\forall(\beta,\alpha) \qquad \lim_{x \to \pm\infty} x^\beta |\partial^\alpha f(x)| = 0$$

β et α étant des multi-indices d'ordre n

Exemple 2.3 *1/ e^{-x^2}, e^{-x^4} sont des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

2/ les fonctions $\mathrm{e}^{-|x|}$ et $\frac{1}{x^2+1}$ ne sont pas des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, La premiére n'est pas $\mathcal{C}^\infty$, la seconde n'est pas à décroissance rapide à l'infini.c-à-d $|x^3 \frac{1}{x^2+1}|$ n'est pas majoré quand $x \to \infty$.

3/ Une fonction polynôme (non nulle) n'appartient pas à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.2 Topologie sur $\mathcal{S}$

On définit l'espace de SCHWARTZ par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n); \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty\}$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel sur lequel les $p_{\alpha,\beta}$ forment une famille dénombrable de semi-normes. On le munit de la topologie (métrisable) induite par ces semi-normes. Cela signifie qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $p_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi)$ tend vers zéro quel que soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$.

La méme topologie est induite par les semi-normes $q_{l,m}(\varphi)$ définies par

$$q_{l,m}(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq l} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

En effet ; pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\| \leq \sqrt{n} \max_{|\beta|=1} |x^\beta|$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $c_m > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $(1 + t)^m \leq c_m(1 + t^m)$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(1 + \|x\|)^m \leq c_m(1 + n^{m/2} \max_{|\beta|=m} |x^\beta|),$$

ce qui implique

$$q_{l,m}(\varphi) \leq c_m \max_{|\alpha|\leq l}(p_{\alpha,0}(\varphi) + n^{m/2} \max_{|\beta|=m} p_{\alpha,\beta}(\varphi)).$$

D'autre part, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$

$$|x^\beta| \leq \|x\|^{|\beta|} \leq (1 + \|x\|)^{|\beta|}$$

et

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq q_{|\alpha|,|\beta|}(\varphi).$$

2.3 Propriétés de $\mathcal{S}$

Proposition 2.4 *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1, +\infty]$.*

Preuve. Pour $p = +\infty$, on remarque que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\varphi\|_{L^\infty} = p_{0,0}(\varphi) = q_{0,0}(\varphi).$$

Pour $p < +\infty$, on utilise que $x \mapsto (1 + \|x\|)^{-s}$ est intégrable en dimension n si $s > n$. Par suite, en choisissant un entier $m > n/p$ on a pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^{-mp} |(1 + \|x\|)^m \varphi(x)|^p dx$$

$$\leq q_{0,m}(\varphi)^p \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^{-mp} dx,$$

d'où

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C q_{0,m}(\varphi), \quad C = (\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|)^{-mp} dx)^{1/p}$$

■

Propriété 2.5 *1/ L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par dérivation à tout ordre.*
2/ L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par des fonctions polynômiales de n'importe quel degré.

Preuve. Pour (1), elle écoule immédiatement du fait que

$$p_{\alpha,\beta}(\partial^\gamma \varphi) = p_{\alpha+\gamma,\beta}(\varphi),$$

cette égalité impliquant de plus que la dérivation ∂^γ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quel que soit $\gamma \in \mathbb{N}^n$.
Il suffit pour (2) de le vérifier pour le monômes x^η. Pour cela, on va faire appel à la formule de Leibniz multidimensionnelle :

$$\partial^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha - \gamma)!} (\partial^\gamma \psi)(\partial^{\alpha-\gamma}\varphi). \tag{2.1}$$

L'inégalité $\gamma \leq \alpha$ ci-dessus signifie $\gamma_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, et $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Or pour $\psi(x) = x^\eta$, on a

$$\partial^\gamma \psi(x) = \frac{\eta!}{(\eta-\gamma)!} x^{\eta-\gamma}$$

si $\gamma \leq \eta$ et 0 sinon. Donc, si on note M^η l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto x^\eta$,

$$\partial^\gamma (M^\eta \varphi)(x) = \sum_{\gamma \leq \alpha, \eta} \frac{\alpha! \eta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\eta-\gamma)!} x^{\eta-\gamma} \partial^{\alpha-\gamma} \varphi(x).$$

Par suite,

$$p_{\alpha,\beta}(M^\eta \varphi) \leq \sum_{\gamma \leq \alpha, \eta} \frac{\alpha! \eta!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!(\eta-\gamma)!} p_{\alpha-\gamma, \beta+\eta-\gamma}(\varphi).$$

Ainsi, M^η est une application linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposition 2.6 *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une algébre pour :*
i/ Le produit (ordinaire) des fonctions définies par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & \varphi\psi \end{array}$$

ii/ Le produit de convolution défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & \varphi \star \psi \end{array}$$

cette application est aussi une application bilinéaire continue.

Preuve. Pour (i), cette application est bilinéaire continue d'aprés la formule de Leibniz (2.1),

$$p_{\alpha,\beta}(\psi\varphi) \leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} p_{\gamma,\beta}(\psi) p_{\alpha-\gamma,0}(\varphi).$$

Pour (ii), d'aprés la proposition(1-16), on a

$$\mathcal{F}(\varphi \star \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi),$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{cccc} & (\varphi,\psi) & \mapsto & \varphi\star\psi \\ \mathcal{F} & \downarrow & & \downarrow \\ & (f,g) & \mapsto & fg. \end{array}$$

$\mathcal{F}$ est l'opérateur $(\varphi,\psi)\mapsto(\widehat{\varphi},\widehat{\psi}).)$, si $\prod$ désigne le produit ordinaire et Γ le produit de convolution, on a

$$\Gamma=\overline{\mathcal{F}}\Pi\mathcal{F},$$

d'où $\overline{\mathcal{F}}$ est la transformée de Fourier inverse (tout aussi continue que $\mathcal{F}$), définie par

$$\overline{\mathcal{F}}(g)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}g(\xi)\mathrm{e}^{ix.\xi}\,d\xi.$$

■

Proposition 2.7 *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par la transformation de Fourier i.e*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F} & : & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\\ \mathcal{F}(\varphi)(\xi) & = & \widehat{\varphi}(\xi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\mathrm{e}^{-ix.\xi}\,dx.\end{array}$$

l'application $\mathcal{F}$ est linéaire continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrons que pour tous multi-indices α et $\beta\in\mathbb{N}^n$ on a

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\xi^\beta\partial^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)|<\infty$$

d'aprés la propriété :

$$\partial^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)=(-2i\pi)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)(\xi)$$

donc

$$\begin{array}{rcl}\xi^\beta\partial^\alpha\widehat{\varphi}(\xi) & = & (-2i\pi)^{|\alpha|}\xi^\beta\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)(\xi)\\ & = & (-2i\pi)^{|\alpha|}\dfrac{1}{(2i\pi)^{|\beta|}}\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha\varphi))(\xi)\\ & = & (-2i\pi)^{|\alpha|-|\beta|}\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha\varphi))(\xi)\end{array}$$

d'où

$$p_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}) \leq \|\partial^{\beta}(M^{\alpha}\varphi)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

puisque $\partial^{\beta}(M^{\alpha}\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$. $\blacksquare$

Propriété 2.8 *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ contient l'espace des fonctions C^{∞} à support compact $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et contenu dans l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions C^{∞}, au sens où l'on a des injections continues*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n).$$

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ étant muni d'une topologie telle q'une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ converge si et seulement s'il existe un compact fixe $K \subset \mathbb{R}^n$ contenant tous les supports des φ_n et (φ_n) converge uniformément sur K ainsi que toutes ses dérivées, alors φ_n sont nulles au voisinage de $\pm\infty$ donc est à décroissance rapide.

En effet ; $x^k\varphi_n^{(l)}$ est uniformément continue sur $supp\varphi_n$, donc sur $\mathbb{R}^n$, ce pour tout $k,\ l$ et donc $||x^k\varphi_n^{(l)}||_{\infty}$ est atteint dans $\mathbb{R}$ alors la suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque (φ_n) d'éléments de C^{∞} alors elles sont d'élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. De plus, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, qui est lui-même dense dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Chapitre 3

Distributions tempérées

On peut voir l'espace de SCHWARTZ comme un ensemble de fonctions test permettant de définir des fonctions généralisées que l'on appellera les distributions tempérées. Celles-ci n'auront pas nécessairement des valeurs ponctuelles mais seront définies au travers de leurs valeurs contre les fonctions test.

Les distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$ comprennent tout d'abord toutes les fonctions f telles que $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

Soit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. (Notons que puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est métrisable, la continuité d'une forme linéaire équivaut à sa continuité séquentielle)

Propriété 3.1 *1/ Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $p \in [1, +\infty]$, d'aprés l'inégalité de Hölder, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

2/ Pour une fonction f localement intégrable et à croissance au plus polynômiale, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^k|\varphi(x)|dx\\ &\leq Cq_{0,k+m}(\varphi)\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|)^{-m}dx\end{aligned}$$

pour $m > n$.

Définition 3.2 *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *i.e. une forme linéaire* T *sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *telle qu'il existe* α, β *et* C *pour lesquels*

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leq Cp_{\alpha,\beta}(\varphi) \qquad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

L'ensemble des distributions tempérées est un espace vectoriel, que l'on note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 3.3 *1/ On identifie la fonction* f *avec la distribution (tempérée)* T_f *définie par*

$$\langle T_f,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

2/ l'ensemble des distributions tempérées comprend aussi des objets qui ne sont pas des fonctions.

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0)$$

elle est une distribution tempérée puisque

$$|\langle\delta,\varphi\rangle| \leq p_{0,0}(\varphi)$$

On définit de même δ_y, *quel que soit* $y \in \mathbb{R}^n$, *par*

$$\langle\delta_y,\varphi\rangle = \varphi(y)$$

La masse de DIRAC *est, en fait, une mesure de* RADON, *i.e. une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues bornées.*
3/ Une distribution basé sur la fonction $f : x \neq 0 \mapsto 1/x$, *qui n'est pas localement intégrable. De ce fait, on ne peut pas la voir comme une distribution tempérée. Cependant, on lui associe*

une distribution tempérée appelée valeur principale de $1/x$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Notons tout d'abord que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction $f\varphi$ est bien intégrable sur $]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, +\infty[$. Pour l'existence de la limite, on peut utiliser le critére de Cauchy. Si $\varepsilon' > \varepsilon > 0$,

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx - \int_{|x|<\varepsilon'}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon'\geq|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Or (d'aprés la formule de Taylor à l'ordre 1)

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(0)}{x} + \int_0^1 \varphi'(\theta x)d\theta$$

Le premier morceau étant fonction impaire de x, son intégrale sur $]-\varepsilon', -\varepsilon[\cup]\varepsilon, \varepsilon'[$ est nulle. Il reste donc

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx - \int_{|x|<\varepsilon'}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon'\geq|x|>\varepsilon}\int_0^1 \varphi'(\theta x)d\theta \leq 2|\varepsilon'-\varepsilon|\|\varphi'\|_{L^\infty}.$$

Ceci tend vers zéro lorsque ε' et ε tendent vers zéro (puisque $\|\varphi'\|_{L^\infty} = p_{1,0}(\varphi) < +\infty$). La limite existe donc. Cependant, il n'est pas tout à fait évident de voir qu'elle définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour cela, introduisons une *fonction plateau* $\mathcal{X} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, valant 1 sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$. On suppose en outre que $\mathcal{X}$ est *paire*, de sorte que

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\mathcal{X}(x)}{x}dx = 0$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. Ainsi, en écrivant $\varphi = \mathcal{X}\varphi + (1-\mathcal{X})\varphi$, on a pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx &= \int_{|x|>\varepsilon}\mathcal{X}(x)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx \\ &\quad + \int_{|x|\geq 1}(1-\mathcal{X}(x))\frac{\varphi(x)}{x}dx,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx \;=\; \int_{\mathbb{R}}\mathcal{X}(x)\int_0^1 \varphi'(\theta x)dx + \int_{|x|\geq 1}(1-\mathcal{X}(x))\frac{\varphi(x)}{x}dx,$$

et par suite

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx \leq \|\varphi'\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{X}(x)\,dx + \|\varphi\|_{L^1}.$$

On conclut en utilisant l'injection continue $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ et à nouveau le fait que $\|\varphi'\|_{L^\infty} = p_{0,1}(\varphi)$

On note

$$\langle Vp(1/x),\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

■

Remarque 3.4 *L'exponentielle* e^{x^2} *ne définit pas une distribution tempérée, puisque* $\mathrm{e}^{-x^2} \in \mathcal{S}$ *et*

$$\int_{\mathbb{R}}^{x^2} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} dx = \infty$$

n'est pas borné pour tout $C > 0$*, pour tout* $k,\ l \in \mathbb{N}$*,*

$$\varphi = \mathrm{e}^{-x^2} \in \mathcal{S}$$

donne

$$\langle T,\varphi\rangle \geq C p_{\alpha,\beta}(\varphi)$$

3.1 Espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées

Proposition 3.5 *L'ensemble des distributions tempérées forme un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

3.1.1 Convergence dans $\mathcal{S}'$

Il est naturellement muni de la *topologie duale faible*, définie par la convergence faible des suites, Une suite de distributions tempérées $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si, quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la suite numérique $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle T, \varphi\rangle$.

Un exemple fondamental de convergence au sens des distributions est celui des *approximations de l'unité*, qui donnent une représentation de la masse de Dirac comme limite de suites de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Définition 3.6 *On appelle approximation de l'unité une famille de fonctions ρ_ε pour $\varepsilon > 0$ telle que*

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

avec $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ d'intégrale 1*. (On suppose souvent de plus $\rho \geq 0$.)*

Noter que si $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation d'unité alors par changement de variable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

C'est cette propriété fondamentale qui permet de montrer que ρ_ε tend vers δ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lorsque ε tend vers zéro.

En effet ; quelque soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx - \varphi(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)(\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0))dy.\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est en fait prise sur un compact fixe (le support de ρ) et comme φ est continue, elle converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro d'aprés le théoréme de Lebesgue.

3.1.2 Distributions non tempérées

D'aprés les injections continues et denses $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

où $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions i.e. les formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des *distributions à support compact*, qui s'avèrent être les formes linéaires continues sur $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 3.7 *Le support d'une distribution (tempérée) T est le complémentaire de l'union de tous les ouverts ω tels que*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n);\ supp\varphi \subset \omega$$

(sachant que le support d'une fonction φ continue est l'adhérence de l'ensemble des points où φ ne s'annule pas).

Cette définition d'apparence ambigue est cohérente avec la notion de support pour les fonctions : si f est une fonction continue à support compact K, cela signifie que le complémentaire de K, Ω est l'intérieur de l'ensemble des points où f s'annule ; autrement dit si $x \in \Omega$ il existe un ouvert $\omega \subset \Omega$ tel que $f_{|}\omega \equiv 0$, de sorte que $\int f\varphi = 0$ quelle que soit$\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$; réciproquement, si $x \in \omega$ tel que $\int f\varphi = 0$ quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ alors $f_{|}\omega \equiv 0$ et donc $x \in \Omega$.

Exemple 3.8 *Le support de de la masse de Dirac δ est réduit au singleton $\{0\}$ et généralement*

$$supp\ \delta_x = \{x\}$$

On peut identifier une fonction localement intégrable à une distribution par l'application injective

$$\begin{array}{l} L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ f \to \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\ dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \end{array}$$

La fonction $f(x) = e^{x^2}$ peut être vue comme une distribution mais pas comme une distribution tempérée.

3.2 Opérations sur les distributions de $\mathcal{S}'$

3.2.1 Multiplication d'une distribution par une fonction

Pour généraliser le produit de fonctions, on peut définir le produit d'une distribution T par une fonction ψ en posant

$$\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle$$

à condition que l'ensemble des fonctions test φ soit stable par multiplication par ψ . C'est le cas pour toute fonction ψ de classe C^∞ lorsque les fonctions test sont C^∞ à support compact : autrement dit, quelles que soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\psi T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Si de plus T est une distribution tempérée, rien ne dit que ψT soit encore une distribution tempérée. D'aprés les résultats de stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vus plus haut, ce sera le cas si ψ est elle même une fonction C^∞ à décroissance rapide, ou si c'est une fonction polynomiale.

Si T est à support compact, alors quelle que soit $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, ψT est à support compact.

À titre d'exemple, notons que $x\delta$ n'est rien d'autre que la distribution nulle, tandis que xv.p.$(1/x)$ s'identifie avec la fonction constante égale à 1.

Remarque 3.9 *Il est impossible de définir un produit entre distributions : il n'y a en tous cas aucune chance pour qu'il prolonge le produit des distributions par les fonctions tout en étant associatif, car sinon on aurait*

$$0 = v.p(1/x)(x\delta) = (v.p(1/x)x)\delta = \delta?$$

Remarque 3.10 *Une distribution T vérifie $xT = 0$ si et seulement si $T = c\delta$, où c est une constante arbitraire. On en déduit que $xT = 1$ si et seulement si $T = v.p.(1/x) + c\delta$, où c est une constante arbitraire.*

3.2.2 Dérivation au sens des distributions

La puissance de la théorie des distributions réside sans doute dans le fait que l'on puisse dériver n'importe quelle distribution à n'importe quel ordre. La définition de la dérivée d'une distribution est simplement obtenue par généralisation de l'intégration par parties.

Définition 3.11 *Soient T une distribution (tempérée ou non) et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Alors la formule*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

définit une unique distribution $\partial^\alpha T$ (tempérée si T l'est). Il faut prendre garde à ce qu'en général, la dérivée d'une fonction au sens des distributions ne coincide pas avec sa dérivée au sens classique. C'est le cas notamment pour les fonctions dérivables par morceaux.

Exemple 3.12 *L'exemple de base est celui de la fonction de Heaviside*

$$\langle T'_H, \varphi\rangle = -\langle T_H, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

c'est-à-dire que $T'_H = \delta$ (tandis qu'au sens des fonctions, H' est définie et vaut 0 partout sauf en 0, c'est-à-dire que H' se confond avec la fonction nulle). Plus généralement, on a le résultat suivant

Proposition 3.13 *(Formule des sauts). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$, éventuellement discontinue en* 0 *mais ayant des limites finies à gauche et à droite de* 0. *On note*

$$[f] = \lim_{x \searrow 0} f(x) - \lim_{x \nearrow 0} f(x).$$

Alors sa dérivée au sens des distributions est donnée par

$$T'_f = T_{f'} + [f]\delta.$$

Preuve. On a pour toute fonction test φ

$$\begin{aligned} \langle T'_f, \varphi\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}^*} f(t)\varphi'(t)\ dt \\ &= -\lim_{x\to o_+} \int_{|t|\geq x} f(t)\varphi'(t)\ dt \end{aligned}$$

puisque f et localement integrable sur $\mathbb{R}$

or

$$\int_{|t|\geq x} f(t)\varphi'(t)\ dt = \int_{t\geq x} f(t)\varphi'(t)\ dt + \int_{t\leq -x} f(t)\varphi'(t)\ dt$$

d'après l'intégration par parties, on a pour le premier l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{t\geq x} f(t)\varphi'(t)\ dt &= [f(t)\varphi(t)]_x^{+\infty} - \int_{t\geq x} f(t)'\varphi(t)\ dt \\ &= -f(x)\varphi(x) - \int_{t\geq x} f(t)'\varphi(t)\ dt \end{aligned}$$

pour le deuxième l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{t\leq -x} f(t)\varphi'(t)\, dt &= [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{-x} - \int_{t\leq -x} f(t)'\varphi(t)\, dt \\ &= f(-x)\varphi(-x) - \int_{t\leq -x} f(t)'\varphi(t)\, dt \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle T_f', \varphi\rangle &= \lim_{x\to o_+} [f(x)\varphi(x) - f(-x)\varphi(-x)] \\ &\quad + \lim_{x\to o_+} \int_{|t|\geq x} f(t)'\varphi(t)\, dt \\ &= \lim_{x\to o_+} f(x)\varphi(x) - \lim_{x\to o_-} f(x)\varphi(x) \\ &\quad + \lim_{x\to o_+} \int_{|t|\geq x} f(t)'\varphi(t)\, dt \\ &= \lim_{x\to o_+} f(x)\varphi(0) - \lim_{x\to o_-} f(x)\varphi(0) \\ &\quad + \lim_{x\to o_+} \int_{|t|\geq x} f(t)'\varphi(t)\, dt \end{aligned}$$

comme f' est supposée localement intégrable sur $\mathbb{R}$ on obtient

$$\langle T_f', \varphi\rangle = [f]\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} f(t)'\varphi(t)\, dt$$

$$\langle T_f', \varphi\rangle = [f]\delta + \int_{\mathbb{R}} f(t)'\varphi(t)\, dt$$

finalement

$$T_f' = [f]\delta + T_{f'}$$

■

On vérifie facilement que la formule de LEIBNIZ s'étend au produit d'une distribution par une fonction de classe C^∞. La dérivation fournit de nouveaux exemples de distributions, avec notamment les dérivées de la masse de Dirac. En particulier, la dérivée premiére de $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie par

$$\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0).$$

Remarque 3.14 *D'aprés la formule de* LEIBNIZ *généralisée, on a pour tout* $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$

$$(\psi\delta)' = \psi'\delta + \psi\delta'$$

Il faut toutefois prendre garde au fait que $\psi\delta'$ ne se réduit pas simplement à $\psi(0)\delta'$. Le calcul montre que

$$\psi\delta' = \psi(0)\delta' - \psi'(0)\delta$$

de sorte que la formule de dérivation du produit ci-dessus s'écrit aussi

$$(\psi\delta)' = (\psi' - \psi'(0))\delta + \psi(0)\delta' = \psi(0)\delta'.$$

Le résultat général suivant montre que les dérivées de la masse de Dirac jouent un rôle trés important.

Théorème 3.15 *Toute distribution dont le support est réduit au singleton $\{0\}$ est une combinaison linéaire finie de dérivées (au sens des distributions) de la masse de Dirac en 0.*

3.2.3 Convolution des distributions tempérées

On généralise facilement la convolution des fonctions à la convolution d'une distribution tempérée avec une fonction C^∞ à décroissance rapide. En effet, si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto \psi(x-y)$ appartient aussi à la classe de SCHWARTZ.

Définition 3.16 *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit le produit de convolution de T et ψ par*

$$(T * \psi)(x) = \langle T, \psi(x - .)\rangle.$$

Exemple 3.17 *L'exemple fondamental est la convolution par la masse de* DIRAC *est*

$$(\delta * \psi) = \psi(x).$$

Propriété 3.18 *On a $T * \psi = \psi * T$ (la convolution est comutative).*
La dérivée de la convolution est donnée par $\partial^\alpha(T * \psi)(x) = \langle T, \partial^\alpha\psi(x - .)\rangle$ et généralement

$$\partial^\alpha(T * \psi)(x) = \langle T, \partial^\alpha\psi(x - .)\rangle.$$

Toutefois son comportement à l'infini n'est pas évident. La réponse est heureusement affirmative. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T * \psi)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \psi(x - .)\rangle\varphi(x)\,dx$$

$$\left\langle T, \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - .)\varphi(x)\,dx \right\rangle$$

par linéarité de T et de l'intégrale (ceci demanderait quelque justification), c'est-à-dire encore

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T * \psi)(x)\varphi(x)\,dx = \langle T, \check{\psi} * \varphi\rangle,$$

où $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$. Ceci est en fait un moyen de définir $T * \psi$ directement comme une distribution tempérée, en posant

$$\langle T * \psi, \varphi\rangle = \langle T, \check{\psi} * \varphi\rangle,\ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Chapitre 4

Transformation de Fourier au sens des distributions

Définition 4.1 *La transformation de Fourier sur l'espace $\mathcal{S}'$ est la transposée de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$. On a la transformation de Fourier*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

s'étend naturellement à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en posant

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *et* $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ceci n'est autre qu'une généralisation d'une distribution tempérée associée à une fonction de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(\eta)\widehat{\varphi}(\eta)\, d\eta$$

qui découle directement du théoréme de Fubini et de la définition de $\widehat{f}$ et $\widehat{\varphi}$ lorsque f et φ sont intégrables et de carré intégrable.

Proposition 4.2 (Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ et opérations) *Soit une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.Alors*

1/ pour tout $k = 1, ..., n$, on a

$$\mathcal{F}(\delta_{xk}T) = i\xi_k \mathcal{F}T$$

2/ pour tout $k = 1, ..., n$, on a

$$\mathcal{F}(x_k T) = i\partial_{\xi_k}\mathcal{F}T$$

3/ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, en notant τ_a :$x \mapsto x + a$, on a

$$\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = e^{ia.\xi}\mathcal{F}T$$

4/ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(e^{-ia.x}\, T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a$$

Exemple 4.3 *Transformation des distributions de* DIRAC

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a)$$

et par la définition de la transformation dans $\mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(a) &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp(-2i\pi x.a)\, dx \\ &= \langle \exp(-2i\pi x.a), \varphi \rangle \end{aligned}$$

on en déduit

$$\mathcal{F}(\delta_a) = [\exp(-2i\pi x.a)]$$

en particulier $\mathcal{F}(\delta) = [1]$, (la distribution associée à la fonction constante égale à 1)

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$$

Exemple 4.4 *La transformation de* FOURIER *au sens des distributions de la fonction de Heaviside*

Puisque $H' = \delta$, on a $\widehat{H'} = \widehat{\delta} = 1$. Par ailleurs, on a $\widehat{H'} = i\xi\widehat{H}$ (voir (4.1) ci-aprés). D'aprés le résultat mentionné dans la remarque (3-10), on en déduit que

$$\widehat{H} = -iVp(1/\xi) + c\,\delta,$$

où c est une constante à déterminer. Pour cela, on observe que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est paire, sa *transformée de* FOURIER *l'est aussi et par conséquent*

$$\langle \widehat{H}, \varphi \rangle = c\,\varphi(0) = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$\langle H, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi$$

Ces deux quantitées étant égales par définition de $\widehat{H}$, on en déduit $c = \pi$.

En combinant la définition de $\widehat{T}$ et celle des dérivées au sens des distributions avec les formules (2), valables pour les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, on voit que ces dernières s'étendent aux distributions tempérées :

$$\partial^\alpha \widehat{T} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha T}, \quad \widehat{\partial^\alpha T} = (i\xi)^\alpha \widehat{T}. \tag{4.1}$$

Exemple 4.5 *La transformée de* FOURIER *d'une gaussienne*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\sigma^2\pi)^n}}\, \mathrm{e}^{-\|x-m\|^2/2\sigma^2},$$

où $\sigma > 0$ *et* $m \in \mathbb{R}^n$ *est3*

$$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-2i\pi\xi.m} \mathrm{e}^{-2\pi\sigma^2\|\xi\|^2}$$

Pour le calcul, on se ramene par des changements de variables appropriés au cas $m = 0$, $n = 1$, *puis en résolvant, par exemple, une équation différentielle, au calcul de* $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$
En effet, il est évident que f *est intégrable, sa transformée de Fourier est donc définie par*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x-m\|^2/2\sigma^2} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi.x} dx$$

et le théorème de FUBINI *montre que*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x_1-m_1)^2/2\sigma^2} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi_1.x_1} dx_1 ... \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x_n-m_n)^2/2\sigma^2} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi_n.x_n} dx_n$$

pour calculer

$$g_m(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi.x} dx$$

il suffit de faire le calcule pour $m = 0$

$$g_0'(\xi) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi.x} dx$$

Par une intégration par partie

$$\begin{aligned} g_0'(\xi) &= -4\pi^2\sigma^2\xi \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi.x} dx \\ &= -4\pi^2\sigma^2\xi g_0(\xi) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$g_0'(\xi) + 4\pi^2\sigma^2\xi g_0(\xi) = 0$$

En résolvant l'equation différentielle satisfaite par g_0 :

$$g_0(\xi) = g_0(0)\mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$$

il reste à calculer

$$g_0(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Par un changement de variable évident on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{y^2} dy$$

Enfin, il y a une astuce bien connue pour calculer

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{y^2} dy$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\|x\|^2} dx = I^2$$

Par le théorème de Fubini *et on calcule l'intégrale sur* $\mathbb{R}^2$ *en passant en coordonnées polaires :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\|x\|^2} dx &= 2\pi \int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2} dr \\ &= \pi \end{aligned}$$

D'où finalement

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Exemple 4.6 *La transformée de* FOURIER *au sens des distributions de*

$$x \mapsto \mathrm{e}^{is\|x\|^2}$$

pour $s > 0$ s'indentifie avec la fonction

$$\xi \mapsto \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{4}} \mathrm{e}^{\frac{-i\pi^2\|\xi\|^2}{s}}$$

En effet ; on sait que la Gaussienne

$$x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-a\|x\|^2}$$

qui est une fonction de $\mathcal{S}$ pour $a > 0$, admet pour transformée de Fourier

$$\xi \mapsto \hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\frac{-\pi^2\|\xi\|^2}{a}}$$

Par suite, on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-a\|x\|^2} \hat{\varphi}(x)dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{-\pi^2\|\xi\|^2}{a}} \varphi(\xi)d\xi$$

considérons alors les fonctions de la variable complexe z définies par

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-z\|x\|^2} \hat{\varphi}(x)dx \\ G(z) &= \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{-\pi^2\|\xi\|^2}{z}} \varphi(\xi)d\xi \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $z^{\frac{1}{2}}$ désigne la racine carrée de z de partie réelle positive pour $\operatorname{Re} z > 0$.
D'aprés la formule ci-dessus (4.2), ces deux fonctions coïncident pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$. De plus, elles sont analytiques dans le demi -plan ouvert $\{z; \operatorname{Re} z > 0\}$. Donc elles coïncident en fait sur tout le demi-plan. Enfin, elles admettent toutes deux un prolongement par coninuité à $i\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pour

G, on remarque que pour $s > 0$,

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} (x + is)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s}\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}, \qquad \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} (x - is)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s}\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}$$

D'où à la limite,

$$\begin{aligned} F(-is) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{is\|x\|^2} \hat{\varphi}(x)dx \\ &= G(-is) = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{-i\pi^2\|\xi\|^2}{s}} \varphi(\xi)d\xi \end{aligned}$$

pour $s > 0$. Ceci étant vrai quelle que soit la fonction f, on en déduit le résultat annoncé.

4.1 Transformation de Fourier du produit de convolution

On voit que le lien entre produit de convolution et produit ordinaire via la transformation de Fourier, exprimé dans la formule

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi), \tag{4.3}$$

se généralise au produit de convolution entre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}(T * \psi) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\psi).$$

En effet ;

$$\langle \mathcal{F}(T * \psi), \varphi \rangle = \langle T * \psi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle T, \check{\psi} * \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{T}, \mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\varphi}) \rangle.$$

Or, d'aprés (4.3) et la formule d'inversion de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = (\frac{1}{2\pi})^n \mathcal{F}(\phi)(-x),$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\varphi}) = (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1}(\check{\psi})\varphi = (\mathcal{F}(\check{\psi}))\check{}\,\varphi = \widehat{\psi}\varphi.$$

On en déduit la relation attendue : $\langle \mathcal{F}(T * \psi), \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}(\psi)\mathcal{F}(T), \varphi \rangle$.

Remarque 4.7 *En posant $\Phi = \widehat{\varphi}$, $\Psi = \widehat{\psi}$ et en appliquant la transformation de Fourier inverse* *à la formule (4.3), on obtient*

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi) * \mathcal{F}^{-1}(\Psi) = \mathcal{F}^{-1}(\Phi\Psi)$$

d'où l'on déduit

$$\mathcal{F}(\Phi\Psi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}(\Phi) * \mathcal{F}(\Psi)$$

Comme (4.3), cette formule s'étend au cas d'une distribution tempérée T et d'une fonction $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}(T\Psi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}(T) * \mathcal{F}(\Psi)$$

Cependant, sachant que l'on ne peut pas multiplier les distributions, cette dernière formule fournit un argument contre l'extension du produit de convolution à deux distributions tempérées quelconques.

Il reste néanmoins possible de définir le produit de convolution d'une distribution tempérée avec une distribution à support compact.

En effet, si T est une distribution à support compact et S est une distribution tempérée, on peut définir $\check{S} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\langle \check{S}, \varphi\rangle = \langle S, \check{\varphi}\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

puis $\check{S} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et enfin

$$\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T, \check{S} * \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En particulier, on voit immédiatement que $T * \delta = T$, c'est-à-dire que la formule $\psi * \delta = \psi$ s'étend aux distributions (tempérées). Autrement dit, δ est l'élément neutre pour le produit de convolution.

4.2 Applications

La fonction $\frac{\sin|\xi|}{|\xi|}$ est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact dans $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ si $n = 1$ ou 3 et ceci assure l'existence d'une solution élémentaire à support dans le cône d'onde d'avenir $\{t \geq 0, |x| \leq t\}$. En fait ceci est vrai pour tout n. Le théorème de Paley-

Wiener permet de reconnaître qu'une fonction est la transformée de Fourier d'une distribution à support compact.

Théorème 4.8 (Paley-Wiener) *Soit f une distribution tempérée, $\hat{f}$ sa transformée de* FOURIER. *Alors f est une distribution (resp. une fonction test) à support dans la boule de rayon R si et seulement si*

i) f se prolonge en une fonction holomorphe de $\xi = \zeta + i\eta$, dans C^n tout entier.

(ii) Il existe N tel que $\left|\hat{f}\right| < cste(1 + |\xi|^N)e^{R|\eta|}$.

(iii) Pour tout N on a $\left|\hat{f}\right| < cste(1 + |\xi|)^{-N}e^{R|\eta|}$

Preuve. Voir directement ([3]). ■

Corollaire 4.9 *La solution élémentaire avancée E_+ de l'opérateur des ondes est portée par le cône d'onde d'avenir*

$$\Gamma = \{(x,t)/ \quad 0 \leqslant |x| \leqslant t\}$$

et est l'unique solution élémentaire à support dans le demi-espace $t \geqslant 0$.

Définition 4.10 *Une solution élémentaire d'un opérateur P est une distribution E telle que $PE = \delta$ où δ est la distribution de* DIRAC *concentrée au point 0.*

Exemple 4.11 *La distribution élémentaire du Laplacien est :*

1/ A une dimention $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est $E = \frac{|x|}{2}$.

2/ En dimension supérieur le Laplacien a pour solution élémentaire la fonction localement intégrable

$$E = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln r & si\ n = 2 \\ \frac{c}{r^{n-2}} & si\ n > 2 \end{cases}$$

avec $c = -(n-2)\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

Remarque : $v_{n-1} = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ est le (n-1)-volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$

4.2.1 Equation de la chaleur

On considère le problème de Cauchy suivant :

Etant donnée $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, on veut trouver $u : \mathbb{R}^n \times [0; \infty[$ telle que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^n \times [0, \infty[, \tag{4.4}$$

$$u(x, 0) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.5}$$

Supposons que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une unique fonction $u \in C^\infty([0, \infty[; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ satisfaisant (4.4)et.(4.5) La solution u est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{||x - y||^2}{4t}\right) f(y)dy \qquad \forall t > 0 \tag{4.6}$$

On note par $(\mathcal{F}_x u)(\xi, t)$ la transformée de Fourier partielle de u i.e

$$(\mathcal{F}_x)u(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix.\xi} u(x, t)dx.$$

Si $u \in C^\infty([0, \infty[; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ satisfont (4.4) et (4.5) alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(\mathcal{F}_x u)(\xi, t)\right] = -||\xi||^2 \left[(\mathcal{F}_x u)(\xi, t)\right], \qquad (\mathcal{F}_x u)(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$$

d'où, on déduit que

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \exp(-t||\xi||^2) \qquad \forall t > 0$$

donc

$$u(x, t) = \mathcal{F}_x^{-1} \left[\widehat{f}(\xi) \exp(-t||\xi||^2)\right] \tag{4.7}$$

La formule (4.7) implique que

$$u(x, t) = \mathcal{F}_x^{-1} \left[\exp(-t||\xi||^2)\right] * f$$

Sachant que pour la fonction

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad R^n \to R \\ x \quad &\longmapsto \quad \exp(-a\|x\|^2) \end{aligned}$$

avec $a > 0$ sa transformée est

$$\widehat{f}(\xi) = (\frac{\pi}{a})^{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{||\xi||^2}{4a})$$

d'où le résultat de l'équation .

Pour l'existence, on vérifie que u définie par (4.7) ou (4.6) satisfait les conditions.

4.2.2 Equation des cordes vibrantes (dimension 1+1)

Primitives dans $C^\infty(\mathbb{R})$

Une fonction test $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ est une dérivée si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \phi = 0$ (c'est la condition pour que la primitive soit à support compact).

Proposition 4.12 *Si $T \in C^\infty(\mathbb{R})$ il existe $S \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial S}{\partial x} = T$ (primitive de T). Deux primitives différent par une constante.*

Preuve. En effet 1) si $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, T est nulle sur le noyau de la distribution $1 : \phi \to \int_{\mathbb{R}} \phi$ donc (proportionnelle à la distribution 1 (constante).
2) Notons $H \subset C^\infty$, l'hyperplan des ϕ telles que $\int_{\mathbb{R}} \phi =< 1, \phi >= 0$; l'application

$$\phi \in H \to P(\phi) = \int_{-\infty}^{x} \phi(s)ds$$

est évidemment linéaire continue :$H \to C^\infty$. Alors si S est n'importe quelle forme linéaire sur C^∞, prolongeant la forme linéaire (continue sur H)

$$\phi \to - < T, P(\phi) >$$

S est une primitive de T. ■

Soit l'opérateur $P = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4.13 *Les distributions telles que $P(T) = 0$ sont les distributions de la forme*

$$T = T_1(x) + T_2(y) \text{ où } T = T_1 \otimes 1 + 1 \otimes T_2$$

P a pour solution élémentaire la distribution (fonction bornée) $E = Y(x)Y(y)$.

Preuve. Si T est une distribution telle que $\frac{\partial}{\partial x}T = 0$, elle est de la forme $T_1(y)$ (produit externe $T_1 \otimes 1$)
$\frac{\partial}{\partial x}T = 0$ signie que pour $< \frac{\partial}{\partial x}T, \phi >= 0$ pour toute fonction test ϕ, et les fonctions test ϕ qui sont des dérivées $\phi = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ sont exactement les ϕ telles que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)dx = 0$$

pour tout y.
Choisissons une fonction $\psi_0(x) \in C^\infty$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x)dx = 1$$

Soit S une distribution telle que

$$< S, u >=< T, \psi_0(x)u(y) >$$

D'aprés ce qui présède, toute $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, s'écrit comme

$$\phi(x) = \psi_0(x)\phi_0(x) + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

où

$$\phi_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)dy \text{ où } \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Donc on a $< T, \phi >=< S, \phi_0 >$ c'est-à-dire $T = 1$
Ceci étant, si $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0$, on a $\frac{\partial T}{\partial x} = 1 \otimes T_2'$ pour une distribution $T_2' \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, d'où, par le raisonnement ci-dessus,

$$T = T_1 \otimes 1 + 1 \otimes T_2$$

si T_1 est une primitive de T_2, et on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(Y \otimes Y) = \delta(x) \otimes \delta(y) = \delta$$

■

Corde vibrante

L'équation des cordes vibrantes (dimension $1+1$) est

$$Cv(f) = (\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})f = g$$

On se ramène a l'opérateur

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

par le changement de variables

$$X = x - tv, \ Y = x + tv$$

Tenant compte du déterminant jacobien dans la formule de changement de variables, on a

Proposition 4.14 *Les solutions de l'équation des cordes vibrantes $Cv(T) = 0$ sont les distributions de la forme*

$$T = T_{-}(x - tv) + T_{+}(x + tv)$$

L'opérateur des ondes a pour solution élémentaire la distribution (localement intégrable)

$$E = \frac{v}{2}Y(t, x); \ |x| \leqq vt$$

où Y est la fonction caractéristique du secteur angulaire $|x| \leqq vt$.

4.3 Transformation de Fourier et séries de Fourier

L'un des avantages du cadre des distributions tempérées pour y étudier la transformation de Fourier est que ce cadre est commun à la théorie des séries et des intégrales de Fourier,ce qui n'est pas le cas si on étudie la transformation de FOURIER sur $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$ que si elle est identiquement nulle. Cette difficulté n'existe pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ car toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et définit par conséquent une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$

Tous les énoncés ci-dessous ont évidemment des analogues dans $\mathbb{R}^n$, mais nous nous limiterons au cas $n = 1$ afins de n'avoir à manipuler que des séries de FOURIER usuelles au lieu de séries de FOURIER multiples, c'est à dire pour des fonctions de plusieurs variables.

Commençons par une identité remarquable de l'analyse de FOURIER.

Théorème 4.15 (Formule sommatoire de Poisson) *La distribution*

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \text{ appartient à } \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

et sa transformée de FOURIER *est*

$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Preuve. *Que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se vérifie en appliquant la Défnition de distribution tempérée voir aussi la proposition ci-dessous.*
La distribution T vérifie

$$T \circ \tau_1 = T$$

où on rappelle que

$$\tau_a : \mathbb{R} \ni x \mapsto x + a, \qquad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}$$

D'aprés la Proposition 4.2 (3), il s'ensuit que

$$\mathcal{F}(T \circ \tau_1) = e^{i\xi}\mathcal{F}T = \mathcal{F}T$$

ce qui montre en particulier que

$$supp(\mathcal{F}T) \subset 2\pi Z$$

Soit $\mathcal{X} \in C^\infty(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\mathcal{X}|_{\left[\frac{-\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]} = 1, \qquad et\ supp(\mathcal{X}) \subset \left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$$

Alors

$$\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{X}(.-2\pi k)\mathcal{F}T$$

D'autre part

$$0 = (e^{i\xi} - 1)\mathcal{X}(.-2\pi k)\mathcal{F}T = (\xi - 2\pi k)\frac{e^{i\xi}-1}{\xi - 2\pi k}\mathcal{X}(.-2\pi k)\mathcal{F}T$$

Ceci montre que

$$\frac{e^{i\xi}-1}{\xi-2\pi k}\mathcal{X}(.-2\pi k)\mathcal{F}TConct.\delta_{2k\pi}$$

de manière équivalente

$$\mathcal{X}(.-2\pi k)\mathcal{F}Tc_k.\delta_{2k\pi}$$

puisque $\frac{e^{i\xi}-1}{\xi-2\pi k} \to i$ *lorsque* $\xi \to 2k\pi$ *On en déduit que*

$$\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\delta_{2k\pi}$$

Calculons les coefficients c_k*. Observons que*

$$e^{i2\pi x}T = T \qquad dans\ \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

de sorte que, d'aprés la Proposition 4.2 (4)

$$\mathcal{F}T \circ \tau_{2\pi} = \mathcal{F}T$$

En confrontant cette identité avec la formule ci-dessus pour $\mathcal{F}T$*, on conclut qu'il existe une constante* $c \in \mathbb{C}$ *telle que*

$$c_k = c, \qquad pour\ tout\ k \in \mathbb{Z}$$

Autrement dit

$$\mathcal{F}T = c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$$

Identifions maintenant la constante c.Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *et tout* $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2\pi k + y) &= \langle \mathcal{F}T, \phi(.+y)\rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}\phi(.+y)\rangle = \langle T, e_y\mathcal{F}\phi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\phi(k)e^{iky} \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité découle de la Proposition 4.2 (3), en notant e_y *la fonction*

$$e_y : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{iyx}$$

Intégrant chaque membre de l'identité ci-dessus par rapport à y *sur* $[0, 2\pi]$, *on trouve que*

$$\begin{aligned} c\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx &= c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2\pi k + y)dy \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\phi(k)\int_0^{2\pi} e^{iky}dy = 2\pi\mathcal{F}\phi(0) = 2\pi\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx \end{aligned}$$

d'où $c = 2\pi$. *L'interversion intégrale-série se justifie sans difficulté, par exemple par convergence dominée, car les suites*

$$\mathcal{F}\phi(k)_{k\in\mathbb{Z}} \qquad \textit{ainsi que} \left(\sup_{y\in[0,2\pi]} |\phi(y + 2\pi k)|\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

sont sommables puisque ϕ*(et donc* $\mathcal{F}\phi$*) appartient à* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

La théorie des séries de FOURIER porte sur les fonctions périodiques. Commençons par étendre cette notion au cas des distributions.

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite périodique de période a si

$$T \circ \tau_a = T$$

où τ_a désigne la translation de a :

$$\tau_a : x \mapsto x + a.$$

On sait que toute fonction continue périodique est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$. Voici, pour le cas des distributions, un énoncé qui va dans le même sens :

Proposition 4.16 *Toute distribution périodique sur $\mathbb{R}$ est tempérée sur $\mathbb{R}$*

Nous aurons besoin dans tout ce qui suit d'une fonction ϕ appartenant à $C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x+k) = 1, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Pour cela, on part d'une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\psi \geq 0, \qquad \psi_{[-1,1]} = 1, \qquad supp(\psi) \subset \,]-2,2[$$

de sorte que

$$\Psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(x+k) > 0, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Notons que la somme définissant $\Psi(x)$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes, grâce à la condition $supp(\psi) \subset \,]-2,2[$. Par construction, Ψ est une fonction périodique de période 1, et la fonction ϕ définie par

$$\phi(x) = \frac{\psi(x)}{\Psi(x)}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

répond à la question.
Passons maintenant à la

Démonstration de la proposition. Soit T distribution périodique de période 1 sur $\mathbb{R}$ Alors

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(.+k)T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\phi T)\circ\tau_k$$

Pour toute fonction test $\mathcal{X} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\langle T, \mathcal{X}\rangle &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle (\phi T)\circ\tau_k, \mathcal{X}\rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \phi T, \mathcal{X}(.-k)\rangle\end{aligned}$$

Comme ϕT est une distribution à support compact, elle vérifie la propriété de continuité suivante : il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| \geq 3$, l'on ait

$$|\langle \phi T, \mathcal{X}(.-k) \rangle| \leq C \max_{\alpha \leq p} \sup_{|x| \leq 2} |\partial^\alpha \mathcal{X}(x-k)| \leq \frac{C}{(|k|-2)^2} p_{\max(p,2)}(\mathcal{X})$$

et on conclut en remarquant que la série de terme général

$$\sum_{|k| \geq 3} |\langle \phi T, \mathcal{X}(.-k) \rangle| \leq C p_{\max(p,2)}(\mathcal{X}) \sum_{|k| \geq 3} \frac{1}{(|k|-2)^2} < \infty$$

est évidemment convergente en k. ■

Nous pouvons maintenant expliquer comment la théorie des séries de Fourier pour les fonctions continues périodiques s'inscrit dans le cadre de la transformation de Fourier des distributions tempérées.

Proposition 4.17 (Transformation et séries de Fourier) *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ distribution périodique de période 1. Pour toute fonction test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x+k) = 1, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

la transformée de Fourier *de u est donnée par la formule*

$$\mathcal{F}u = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{2k\pi} \qquad \textit{avec } c_k = \mathcal{F}(\phi u)(2k\pi)$$

le membre de droite étant une série convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Supposons que la distribution périodique u est en fait une fonction continue u périodique de période 1. Alors

$$\begin{aligned}
c_k &= \mathcal{F}(\phi u)(2k\pi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)u(x)e^{-i2\pi kx}dx \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \phi(x)u(x)e^{-i2\pi kx}dx \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^{1} \phi(x+l)u(x+l)e^{-i2\pi k(x+l)}dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi(x+l)\right) u(x)e^{-i2\pi kx}dx \\
&= \int_0^1 u(x)e^{-i2\pi kx}dx
\end{aligned}$$

ce qui est la formule usuelle donnant le k-iéme coefficient de Fourier de la fonction continue u.

Le point de vue classique sur les séries de Fourier consiste à associer à toute fonction u continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 1 la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier.

Démonstration de la Proposition 4.18. Pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}u, \psi\rangle &= \langle u, \mathcal{F}\psi\rangle = \left\langle \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x+k)\right) u, \mathcal{F}\psi \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\phi u)\circ\tau_k, \mathcal{F}\psi \right\rangle \\
&= \left\langle (\phi u), \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\psi)(.-k) \right\rangle \\
&= \left\langle (\phi u), \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}\psi)(.+k) \right\rangle.
\end{aligned}$$

D'aprés la formule sommatoire de Poisson (Théoréme 4.15)

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\mathcal{F}\psi)(x+k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\psi e_{-x})(k)\\
&= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k, \mathcal{F}(\psi e_{-x})\right\rangle\\
&= \left\langle \mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k\right), \psi e_{-x}\right\rangle\\
&= 2\pi\left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi k}, \psi e_{-x}\right\rangle\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(2\pi k)e^{-i2\pi kx}
\end{aligned}$$

où e_a désigne, pour tout $a\in\mathbb{R}$, la fonction

$$e_a : \mathbb{R}\ni x\mapsto e^{iax}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{F}u,\psi\rangle &= \left\langle (\phi u), 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(2\pi k)e_{-2\pi k}\right\rangle\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\phi u, e_{-2\pi k}\rangle\,\psi(2\pi k)\\
&= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\phi u)(2\pi k)\psi(2\pi k)\\
&= \left\langle 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}(\phi u)(2\pi k)\delta_{2\pi k}, \psi\right\rangle
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. ■

La formule d'inversion de Fourier donne alors

$$\begin{aligned}
u &= \mathcal{F}^{-1}\left(2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\delta_{2\pi k}\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k 2\pi\mathcal{F}^{-1}\delta_{2\pi k}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{i2\pi kx}
\end{aligned}$$

où on rappelle que

$$c_k = \mathcal{F}(\phi u)(2\pi k) \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

et où la série au membre de droite converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Comme on l'a rappelé aprés l'énoncé de la Proposition 4.17 dans le cas où la distribution u est en fait une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ de période 1, le nombre c_k est le coefficient de Fourier d'ordre k de u. Comme la fonction u définit un élément de $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, la théorie classique des séries de Fourier nous dit que la série de Fourier de u

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i2\pi kx}$$

converge dans $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ vers u. Le point de vue des distributions nous dit que cette même série converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (ce qui est évidemment une information plus faible.)

Conclusion 4.18 *La théories des équations différentielles ou les équations aux dérivées partielles n'a pas toujours une méthodes classique de résolutions, un outil fondamentale et la transformations de Fourier dans le cas fonctıonnelles. Les distributions contribuent dans la résolution des EDO et les EDP mais la transformation de Fourier ne stabilise pas l'espace des fonctions tests et qu'elle n'est pas bien définie pour toute les distributions. Laurent Schwartz introduit un nouveau espace $\mathcal{S}$ dans le quel la transformation de Fourier des distributions qui agissent sur $\mathcal{S}$ appeler les distributions tempérées noté $\mathcal{S}'$ sont bien définie est stable. De cela, beaucoup d'EDP sont résoluble au sens des distributions à travers la transformation de Fourier.*

Bibliographie

[1] J. Arsac, Transformation de Fourier et théorie des distributions, Dunod, 1961.

[2] L. Schwartz .Méthodes Mathématiques de la Physique. Hermann, Paris 1961.

[3] M. Tucsnak, Distributions et équations fondamentales de la physique. Cours pour les étudiants en maîtrise de mathémathiques, www.iecn.u-nancy.fr/~tucsnak/coursdibpol

[4] R. S.Strichartz. A guide to distribution theory and Fourier transforms. World Scientific Publishing Co. Inc. 2003.

[5] Zuily, C., Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles. Cours et problèmes résolus. Dunod, 2002

[6] J.-M. Bony. : Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier, Les Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.

[7] Vo-khac-Khoan : Distribution, analyse de Fourier, opérateur aux dérivées partielles, Vuibert 1972.