

Table des matières

0.1	Introduction	2
1	Préliminaire	3
1.1	Equations intégrales	3
1.1.1	Equation intégrale de VOLTERRA	3
1.1.2	Equation intégrale de FREDHOLM	6
1.1.3	Nombres Caractéristiques et Fonctions Propres	9
1.1.4	Equation Intégrales de Fredholm à Noyau Dépendant de la Différence des Arguments	17
1.1.5	Propriétés Extrémales des Nombres Caractéristiques et des Fonctions Propres	18
2	Méthode de Résolution Approchée	21
2.1	Remplacement d'un noyau par un noyau dégénéré	21
2.2	Remplacement de l'intégrale par une somme finie	25
2.3	Méthode des approximations successives	27
2.3.1	Equations intégrales de VOLTERRA de seconde espèce	27
2.3.2	Equation intégrales de FREDHOLM de seconde espèce	31
3	Méthode de Boubnov-Galerkin	33
3.1	Méthode de Ritz	35
3.2	Méthode des traces	36
3.3	Méthode de Kellog	37

0.1 Introduction

Les premières équations intégrales furent obtenues par DANIEL BERNOULLI vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du XIX^e siècle, avec les travaux de H.A. SCHWARZ, de H. POINCARÉ, de V. VOLTERRA et surtout ceux de I. FREDHOLM, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisit D. HILBERT à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans lequel F. RIESZ développa la théorie des opérateurs compacts (1918). Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles. Nous allons voir dans ce mémoire que, pour des équations intégrales linéaires, une fois réalisée la discrétisation de ces équations, on se ramène au problème de la recherche de solutions.

Notre mémoire se compose en trois chapitres :

Le premier chapitre aborde des notions sur les équations intégrales linéaires et leurs classifications, la relation entre les équations différentielles et les équation intégrales, et les méthodes analytiques de résolutions des Equations Intégrales.

Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes de résolutions approchées des équations intégrales telle que la méthode de remplacement du noyau d'une équation intégrale par un noyau dégénéré et méthode des approximations successives.

Au troisième chapitre on va expliquer la méthode de BOUBNOV-GALERKIN et les méthodes de RITZ, TRACES, et KELLOG, et on cherche une solution approchée.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Equations intégrales

1.1.1 Equation intégrale de Volterra

Une équation à un inconnu $\varphi(x)$ de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.1)$$

où $f(x)$, $k(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre numérique, est appelée une équation intégrale linéaire de VOLTERRA de second espèce. La fonction $k(x, t)$ est le noyau de l'équation de VOLTERRA.

Si $f(x) = 0$, l'équation (1.1) s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.2)$$

et elle s'appelle une équation intégrale homogène de VOLTERRA du second espèce.

Une équation à un inconnu $\varphi(x)$ de la forme

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.3)$$

est appelée une équation intégrale de VOLTERRA de première espèce.

On appelle solution de l'équation intégrale de (1.1), (1.2) ou (1.3), une fonction $\varphi(x)$ qui,

dés qu'elle est portée dans 1.3, la change en identité (en x).

Résolution direct

Transformation de l'équation de Volterra en Equation Différentielle Soit l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x) \quad (1.4)$$

à coefficients continus $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, \dots, y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \quad (1.5)$$

L'équation (1.4) peut être ramener à une résolution d'une équation intégrale de VOLTERRA de seconde espèce.

On se limite à un exemple d'équation différentielle du second ordre

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x) \\ y(0) = C_0, y'(0) = C_1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Posons $\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x)$. D'où, vu les condition initiale (1.5), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x + C_0 \quad (1.7)$$

nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz$$

Compte tenu de (1.5) et (1.7), mettons l'équation différentielle (1.6) sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x) \varphi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x) (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)$$

où

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \quad (1.8)$$

Posant

$$\begin{cases} K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \\ f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \end{cases}$$

nous ramenons l'équation (1.8) à la forme suivante

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt + f(x)$$

i.e. Nous obtenons une équation intégrale de VOLTERRA de seconde espèce.

A l'aide de la Résolvante Soit l'équation intégrale de VOLTERRA de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (1.9)$$

où $K(x, t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$ et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.

Cherchons la solution φ de cette équation sous la forme d'une série entière illimitée suivant les puissances de λ

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots$$

le noyau itéré est de la forme

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, t) dz, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

La fonction $R(x, t; \lambda)$ définie par la série

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^v K_{v+1}(x, t)$$

est appelée la résolvante (ou le noyau résolvant) de l'équation intégrale (1.9). La résolvante est donnée par

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_0^x K(x, s)R(s, t; \lambda)ds$$

La solution de l'équation intégrale (1.9) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda)f(t)dt$$

1.1.2 Equation intégrale de Fredholm

On appelle une équation intégrale linéaire de FREDHOLM de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.10)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue $K(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions données en x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle (a, b) et λ un facteur numérique. La fonction $K(x, t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale (1.10).

On suppose que le noyau $K(x, t)$ est défini dans le carré $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ du plan (x, t) et continu dans Ω , ou avec des discontinuités finies telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dxdt$$

soit finie.

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.10) est dite non homogène, dans le cas contraire l'équation intégrale (1.4) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0$$

et dite homogène.

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de FREDHOLM de première espèce.

Résolution direct

Méthode de Fredholm La solution de l'équation de FREDHOLM de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.11)$$

est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda)f(t)dt$$

où $R(x, t; \lambda)$ est dite la résolvante de FREDHOLM de l'équation (1.11) et est définie par l'égalité

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

Sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x, t; \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissances de λ tels que

$$\begin{aligned} D(x, t; \lambda) &= K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t)\lambda^n \\ D(\lambda) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n\lambda^n \end{aligned} \quad (1.12)$$

Les fonctions $D(\lambda)$ et $D(x, t; \lambda)$ sont respectivement le déterminant de FREDHOLM et le mineur du déterminant de FREDHOLM. Si le noyau $K(x, t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dxdt$$

est finie, les séries (1.12) convergent quel que soit λ et elles sont des fonctions analytiques entières de λ .

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$. Ces derniers sont des poles de la résolvante $R(x, t; \lambda)$. Avec les coefficients ainsi définies :

$$B(x, t) = \int_b^a \cdots \int_b^a \begin{vmatrix} K(x; t) & K(x; t_1) & K(x; t_2) & \cdots & K(x; t_n) \\ K(t_1; t) & K(t_1; t_1) & K(t_1; t_2) & \cdots & K(t_1; t_n) \\ K(t_2; t) & K(t_2; t_1) & K(t_2; t_2) & \cdots & K(t_2; t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n; t) & K(t_n; t_1) & K(t_n; t_2) & \cdots & K(t_n; t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n$$

et $B_0(x; t) = K(x; t)$

$$C(x, t) = \int_b^a \cdots \int_b^a \begin{vmatrix} K(t_1; t_1) & K(t_1; t_2) & K(t_1; t_3) & \cdots & K(t_1; t_n) \\ K(t_2; t_1) & K(t_2; t_2) & K(t_2; t_3) & \cdots & K(t_2; t_n) \\ K(t_3; t_1) & K(t_3; t_2) & K(t_3; t_3) & \cdots & K(t_3; t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_n; t_1) & K(t_n; t_2) & K(t_n; t_3) & \cdots & K(t_n; t_n) \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_n$$

Cas des Noyaux Dégénérés

Définition 1.1 *Le noyau $k(x, t)$ d'une équation intégrale de FREDHOLM de seconde espèce est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de x seul par des fonctions de t seul, i.e. il est de la forme*

$$k(x, t) = \sum_{h=1}^n a_h(x) b_h(t)$$

Les fonctions $a_k(x)$ et $b_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes.

Soit l'équation intégrale de FREDHOLM de seconde espèce définie par

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

la solution est donnée par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x)$$

où les coefficients C_k sont défini par

$$C_k = \int_a^b b_k(t)\varphi(t)dt$$

1.1.3 Nombres Caractéristiques et Fonctions Propres

L'équation intégrale non homogène de FREDHOLM de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.13)$$

admet toujours la solution évidente $\varphi(x) = 0$ appelée solution nulle (triviale).

Un nombre λ tel que cette équation admette des solutions non nulles $\varphi(x) \neq 0$ s'appelle nombre caractéristique de (1.13) ou du noyau $K(x,t)$, et chaque solution non nulle de l'équation (1.13) est une fonction propre correspondant au nombre caractéristique λ . La valeur $\lambda = 0$ n'est pas un nombre caractéristique puisque pour $\lambda = 0$ (1.13) entraîne $\varphi(x) = 0$.

Exemple 1.2 (*Vitesse critique d'un arbre*) Il est connu que dès qu'un arbre en rotation atteint une vitesse dite critique, il commence à osciller autour de axe longitudinal. On utilise pour définir la vitesse critique des arbres le résultat suivant de la théorie des poutres élastiques : aux extrémités soumises à des condition quelconques, il existe une fonction d'influence $G(x, \xi)$ qui décrit sa flèche en M (x une direction donnée par exemple suivant l'axe Oy (fig1), produite par la charge unité appliquée en $N(\xi)$ et agissant dans la même direction.

Conformément au principe de réciprocité de BETTI-MAXWELL, la fonction d'influence $G(x, \xi)$ est symétrique, i.e

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

Soit $p(x)$ la répartition continue de la charge sur toute la longueur de la poutre. La charge entre x et $x + dx$ est alors $p(x)dx$. Selon le principe de superposition de la théorie de l'élasticité l'écart de l'axe de la poutre par rapport à la position d'équilibre s'exprime par l'égalité

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi)p(\xi)d\xi; \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Pour arbre de densité linéique $\mu(x)$ en rotation autour de l'axe Ox à une vitesse angulaire ω , la répartition de charge est

$$p(x) = \omega^2 \mu(x) y(x)$$

où $y(x)$ est l'écart du centre de gravité de la section de coordonnée x .

Portons l'expression de $p(x)$ dans l'équation obtenue, il vient

$$y(x) = \omega^2 \int_0^1 G(x, \xi) \mu(\xi) y(\xi); (0 \leq x \leq 1)$$

ou, en notant $\omega^2 = \lambda$

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \mu(\xi) y(\xi); (0 \leq x \leq 1)$$

Le calcul de la vitesse critique d'un arbre en rotation se ramène donc à celui des λ pour lesquels la dernière équation admet une solution non nulle. Si le noyau $K(x, t)$ est continu dans $\Omega \{a \leq x, t \leq b\}$ ou s'il est de carré sommable dans Ω , a et b étant finis, il correspond à chaque nombre caractéristique λ un nombre de ces fonctions s'appelle multiplicité du nombre caractéristique. Des nombres caractéristiques distincts peuvent être de multiplicité différente. Dans le cas de l'équation à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = 0 \quad (1.14)$$

les nombres caractéristiques sont racines de l'équation algébrique

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

de degrés $p \leq n$. $\Delta(\lambda)$ est le déterminant du système linéaire homogène

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n = 0 \\ -\lambda a_{21}C_1 - 1 - \lambda a_{22}C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n = 0 \\ \dots \\ (-\lambda a_{n1})C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \dots + (1 - \lambda a_{nn})C_n = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

où les qualités a_{nk} et C_m ($k, m = 1, 2, \dots, n$) ont le même sens qu'au paragraphe précédent. Si l'équation (1.15) possède p racines ($1 \leq p \leq n$), l'équation intégrale (1.14) a p nombres caractéristiques, à chaque nombre caractéristique λ_m ($m = 1, 2, \dots, p$) correspond une solution non triviale

$$\begin{aligned} C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots, C_n^{(1)} &\rightarrow \lambda_1, \\ C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots, C_n^{(2)} &\rightarrow \lambda_2, \\ &\dots \\ C_1^{(p)}, C_2^{(p)}, \dots, C_n^{(p)} &\rightarrow \lambda_p, \end{aligned}$$

du système (1.16). Les solutions non nulles de (1.14) associées à ces solutions (i.e. Les fonctions propres) sont de la forme

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(1)} a_k(x), \quad \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(2)} a_k(x), \dots, \quad \varphi_p(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(p)} a_k(x)$$

Une équation intégrale à noyau dégénéré possède au plus n nombres caractéristiques et fonctions propres correspondantes. Dans le cas d'un noyau quelconque (non dégénéré), les nombres caractéristiques sont zéros du déterminant de FREDHOLM $D(\lambda)$, i.e. des pôles de la résolvante $R(x, t, \lambda)$. Il en découle en particulier que l'équation intégrale de VOLTERRA

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt = 0$$

avec $K(x, t) \in L_2(\Omega_0)$, est sans nombres caractéristique.

Remarque 1.3 Les fonctions propres sont définies à un facteur constant près, c'est-à-dire, si $\varphi(x)$ est une fonction propre associée à un nombre caractéristique λ , alors $C\varphi(x)$, où C est une constante arbitraire, l'est également.

Exemple 1.4 On trouve les nombre caractéristiques et les fonctions propres de l'équation in-

tégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t) \varphi(t) dt = 0$$

On a

$$\varphi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos 2t dt + \lambda \cos 3x \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos^3 t dt$$

Introduisons les notations

$$C_1 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos 2t dt; C_2 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos^3 t dt \quad (1.17)$$

nous avons, alors,

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos^2 x + C_2 \lambda \cos 3x \quad (1.18)$$

Portons (1.18) dans (1.17), nous obtenons un système linéaire d'équations homogènes

$$\begin{aligned} C_1 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t dt \right) - C_2 \lambda \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t dt &= 0 \\ -C_1 \lambda \int_0^{\pi} \cos^5 t dt + C_2 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t dt \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t dt &= \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t dt = 0 \\ \int_0^{\pi} \cos^5 t dt &= 0, \quad \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t dt = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

le système (1.19) s'écrit

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda\pi}{4} \right) C_1 &= 0 \\ \left(1 - \frac{\lambda\pi}{8} \right) C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

l'équation permettant de trouver les nombres caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix} = 0$$

les nombres caractéristiques sont $\lambda_1 = \frac{\pi}{4}$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{8}$.

1/ Lorsque $\lambda = \frac{\pi}{4}$, le système (1.20) se met sous la forme suivante

$$\begin{aligned} 0.C_1 &= 0 \\ \frac{1}{2}.C_2 &= 0 \end{aligned}$$

d'où $C_2 = 0$, C_1 étant arbitraire. La fonction propre correspondante est $\varphi_1(x) = C_1\lambda \cos^2 x$ ou, en posant $C_1\lambda = 1$, $\varphi_1(x) = \cos^2 x$.

2/ Lorsque $\lambda = \frac{\pi}{8}$, le système s'écrit

$$\begin{aligned} (-1).C_1 &= 0 \\ 0.C_2 &= 0 \end{aligned}$$

d'où $C_1 = 0$, C_2 est arbitraire, et la fonction propre associée est $\varphi_2(x) = C_2\lambda \cos 3x$. Ainsi, les nombres caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{4}, \lambda_2 = \frac{\pi}{8}$$

et les fonctions propres associées

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \varphi_2(x) = \cos 3x$$

Une équation intégrale homogène de FREDHOLM peut, en général, être sans nombres caractéristiques et fonctions propres ou sans nombres caractéristique réels et fonctions propres.

Exemple 1.5 L'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (3x - 2)t\varphi(t)dt = 0$$

ne possède pas de nombres caractéristiques et de fonctions propres.

En effet

$$\varphi(x) = \lambda(3x - 2) \int_0^1 t\varphi(t)dt$$

Posons

$$C = \int_0^1 t\varphi(t)dt \quad (1.21)$$

il vient

$$\varphi(x) = C\lambda(3x - 2) \quad (1.22)$$

Portons (1.22) dans (1.21); nous obtenons

$$\left[1 - \lambda \int_0^1 (3t^2 - 2t)dt \right] . C = 0 \quad (1.23)$$

Puisque $\int_0^1 (3t^2 - 2t)dt = 0$, l'équation (1.23) donne $C = 0$ et donc $\varphi(x) = 0$. Ainsi, l'équation homogène donnée possède pour n'importe quel λ seulement la solution nulle $\varphi(x) = 0$ et elle n'a donc pas de nombres caractéristiques ni de fonctions propres.

Exemple 1.6 L'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (\sqrt{xt} - \sqrt{tx})\varphi(t)dt = 0$$

n'a pas de nombres caractéristiques réels et de fonctions propres.

En effet, on a

$$\varphi(x) = C_1\lambda\sqrt{x} - C_2\lambda x \quad (1.24)$$

où

$$C_1 = \int_0^1 t\varphi(t)dt, C_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\varphi(t)dt \quad (1.25)$$

La substitution de (1.24) dans (1.25) donne par des transformations peu compliquées le système

d'équation algébriques

$$\begin{aligned} (1 - \frac{2}{5}\lambda)C_1 + \frac{\lambda}{3} &= 0 \\ -\frac{\lambda}{2}C_1 + (1 + \frac{2}{5}\lambda)C_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

dont le déterminant est

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}$$

Pour λ réels, se déterminant ne s'annule pas, de sorte que (1.26) donne $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$, donc pour tous les λ réels, l'équation donnée admet une solution unique, à savoir la solution nulle $\varphi(x) = 0$. Ainsi, elle n'a pas de nombres caractéristiques réels et de fonctions propres.

Si le n -ième itéré $K_n(x, t)$ du noyau $K(x, t)$ est symétrique, on démontre que $K(x, t)$ possède au moins un nombre caractéristique (réels ou complexe) et que les puissances n -ièmes de tous les nombres caractéristiques sont des nombres réels. En particulier, s'agissant du noyau symétrique gauche $K(x, t) = -K(t, x)$, tous les nombres caractéristiques sont imaginaires purs : $\lambda = \beta i$ avec β réel.

Le noyau $K(x, t)$ d'une équation intégrale est dit symétrique si $K(x, t) = K(t, x)$, ($a \leq x$, $t \leq b$).

Pour l'équation intégrale de FREDHOLM

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.27}$$

à noyau $K(x, t)$ symétrique, on a les théorèmes suivants

Théorème 1.7 L'équation (1.27) a au moins un nombre caractéristique réel.

Théorème 1.8 A chaque nombre caractéristique λ correspond un nombre fini q de fonctions propres linéairement indépendantes de l'équation (1.27) et

$$q \leq \lambda^2 B^2$$

où

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt$$

Le nombre q s'appelle multiplicité d'un nombre caractéristique.

Théorème 1.9 Deux fonctions propres $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ correspondant respectivement à deux nombres caractéristiques distincts λ_1, λ_2 sont orthogonales, i.e.

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0$$

Théorème 1.10 Chaque intervalle fini de l'axe des λ contient un nombre fini de nombres caractéristiques. Le nombre m de nombres caractéristiques de l'intervalle $-l \leq \lambda \leq l$ est défini par l'inégalité

$$m \leq l^2 B^2$$

Dans le cas où le noyau $K(x, t)$ de l'équation intégrale (1.27) est la fonction de GREEN d'un problème homogène de STURM-LIOUVILLE, la recherche des nombres caractéristiques et des fonctions propres se ramène à la résolution de ce problème.

Théorème 1.11 (Théorème de MERCER) Si le noyau symétrique $K(x, t) \in L_2(a, b)$ est continu et a tous ses nombres caractéristiques positifs (ou au plus un nombre fini de nombres caractéristiques négatifs), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

Ici $\varphi_n(x)$ sont les fonctions propres orthonormées du noyau $K(x, t)$. Dans le cas général du noyau $K(x, t) \in L_2(a, b)$ symétrique, la série bilinéaire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

converge en moyenne vers $K(x, t)$.

1.1.4 Equation Intégrales de Fredholm à Noyau Dépendant de la Différence des Arguments

Considérons l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt \quad (1.28)$$

où le noyau $K(x, t)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) est une fonction paire prolongée par périodicité sur tout l'axe OX , i.e.

$$K(x-t) = K(t-x)$$

On montre que les fonction propres de l'équation (1.28) sont

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \cos nx, (n = 1, 2, \dots)$$

$$\varphi_n^{(2)}(x) = \sin nx, (n = 1, 2, \dots)$$

et les nombres caractéristiques associés

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n}, (n = 1, 2, \dots)$$

où a_n sont les coefficients de FOURIER de la fonction $K(x, t)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

A toute valeur λ_n correspondent donc deux fonctions propres linéairement indépendantes $\cos nx$, $\sin nx$ si bien que chaque λ_n est un nombre caractéristique double. La fonction $\varphi_0(x) = 1$ est également fonction propre de l'équation (1.28) correspondant au nombre caractéristique

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi a_0}, \text{ où } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) dx$$

Montrons par exemple que $\cos nx$ est fonction propre de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)dt \quad (1.29)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx dx$$

par le changement de variable $x-t=z$ nous trouvons

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos x t dt &= - \int_{x+\pi}^{x-\pi} K(z) \cos n(x-z) dz \\ &= \cos nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \cos nz dz + \sin nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \sin nz dz = \pi a_n \cos nx \end{aligned}$$

puisque la deuxième intégrale est nulle, $K(x)$ étant pair et la première est le coefficient de Fourier a_n multiplié par π dans le développement de la fonction paire $K(x)$.

Donc

$$\cos nx = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos n t dt$$

autrement dit, $\cos nx$ est fonction propre de l'équation (1.29). On établit de même que $\sin nx$ est fonction propre de (1.29) associée au même nombre caractéristique $\frac{1}{\pi a_n}$.

1.1.5 Propriétés Extrémales des Nombres Caractéristiques et des Fonctions Propres

La valeur absolue de l'intégrale double (intégrale de HILBERT)

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_a^b \int_a^b K(x,t) \varphi(x) \varphi(t) dx dt \right|$$

où $K(x, t) = K(t, x)$ est le noyau symétrique d'une équation intégrale, atteint sur l'ensemble de fonctions $\varphi(x)$ normées, i.e telles que

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b \varphi^2(x) dx = 1$$

un maximum égal à

$$\max |(K\varphi, \varphi)| = \frac{1}{|\lambda_1|}$$

avec λ_1 le nombre caractéristique le plus petit en module du noyau $K(x, t)$. Ce maximum est réalisé pour $\varphi(x) = \varphi_1(x)$, fonction propre du noyau associée à λ_1 .

Exemple 1.12 *On va maximiser*

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_0^\pi \int_0^\pi K(x, t) \varphi(x) \varphi(t) dx dt \right|$$

dans la condition

$$(\varphi, \varphi) = \int_0^\pi \varphi^2(x) dx = 1$$

si

$$K(x, t) = \cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1$$

Résolvant l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi (\cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1) \varphi(t) dt$$

comme une équation à noyau dégénéré, nous trouvons les nombres caractéristiques $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ et $\lambda_{2,3} = \pm \frac{2}{\pi}$ et les fonctions propres correspondantes $\varphi_1(x) = C_1$, $\varphi_2(x) = C_2 (\cos x + \cos 2x)$, $\varphi_3(x) = C_3 (\cos x - \cos 2x)$, où C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires. Le nombre caractéristique de plus petit module est $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ auquel correspond la fonction propre $\varphi_1(x) = C_1$. A partir de la condition de normalisation $(\varphi, \varphi) = 1$, on obtient $C_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Par conséquent

$$\max \left| \int_0^\pi \int_0^\pi (\cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1) \varphi(x) \varphi(t) dx dt \right| = 2\pi$$

et ce maximum est atteint pour les fonctions $\varphi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Chapitre 2

Méthode de Résolution Approchée

2.1 Remplacement d'un noyau par un noyau dégénéré

Soit l'équation integrale de FREDHOLM suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.1)$$

avec un noyau $k(x, t)$ continu quelconque.

En se rappelant (section 2-1-2 page 8) que la résolution d'une équation à noyau dégénéré s'avère simple, on pense naturellement à remplacer de façon approchée le noyau $k(x, t)$ donné par un noyau dégénéré $L(x, t)$ et à accepter la solution $\varphi(x)$ de la nouvelle équation

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b L(x, t) \tilde{\varphi}(t) dt$$

pour la solution approchée de l'équation proposée (2.1) on peut prendre pour ce noyau dégénéré $L(x, t)$ une série partielle de TAYLOR ou de FOURIER de la fonction $k(x, t)$ par rapport à tout système de fonction $\{u_n(x)\}$ complet orthonormé dans $L_2(a, b)$.

Indiquons certaines estimation d'erreurs sur la solution de (2.1) dues au remplacement du noyau donné par un noyau dégénéré. Soient $L(x, t)$ et $k(x, t)$ deux noyaux tels que

$$\int_a^b |k(x, t) - L(x, t)| dt < h$$

et telle que la résolvante $R_L(x, t; \lambda)$ de l'équation à noyau $L(x, t)$ vérifie l'inégalité

$$\int_a^b |R_L(x, t; \lambda)| dt < R$$

et que $|f(x) - f_1(x)| < \eta$, sous l'hypothèse

$$1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R) > 0$$

l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt + f(x)$$

possède alors une seule solution $\varphi(x)$, et l'écart entre $\varphi(x)$ et $\tilde{\varphi}(x)$ solution de l'équation

$$\tilde{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b L(x, t) \tilde{\varphi}(x) dt$$

est inférieur à

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \frac{N |\lambda| (1 + |\lambda| R)^2 h}{1 - |\lambda| h(1 + |\lambda| R)} + \eta$$

où N est la borne supérieure de $|f(x)|$ pour le noyau dégénéré $L(x, t)$. La résolvante $R_L(x, t; \lambda)$ se calcule si

$$L(x, t) = \sum_{h=1}^n X_h(x) T_h(t)$$

et si l'on pose

$$\int_a^b X_k(x) T_s(x) dx = a_{sk}$$

on a

$$R_L(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

où

$$D(x, t; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & \dots & X_n(x) \\ T_1(t) & 1 - \lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(t) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

et

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

Les racines de $D(\lambda)$ sont les nombres caractéristiques du noyau $L(x, t)$, effectuons une autre évaluation ($\lambda = 1$), soit

$$k(x, t) = L(x, t) + \Lambda(x, t)$$

$L(x, t)$ étant le noyau dégénéré et $\Lambda(x, t)$ possédant une petite norme dans une métrique. Supposons ensuite que $R_k(x, t)$ et $R_L(x, t)$ sont les résolvantes respectives des noyaux $k(x, t)$, $L(x, t)$ et $\|\Lambda\|$, $\|R_L\|$ les normes des opérateurs aux noyaux correspondants, alors

$$\|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)\| \leq \|\Lambda\| (1 + \|R_k\|)(1 + \|R_L\|) \|f\| \quad (2.2)$$

la norme dans (1.12) pouvant être prise dans n'importe quel espace fonctionnel, la norme de la résolvante R de tout noyau $k(x, t)$ est évaluée par

$$\|R\| \leq \frac{\|k\|}{1 - |\lambda| \cdot \|k\|}$$

dans l'espace $C(0, 1)$ des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$, on a

$$\|k\| = \max_{0 \leq x \leq 1} \int_a^b |k(x, t)| dt$$

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

et dans l'espace des fonctions de carrés sommables sur $\Omega \{a \leq x, t \leq b\}$, on a

$$\|k\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt \right)^{1/2}$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

Exemple 2.1 Soit l'équation

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x \cos xt) \varphi(x) dt$$

en remplaçant son noyau par un noyau dégénéré par un développement en série du noyau $k(x, t) = 1 - x \cos xt$. On aura

$$k(x, t) = 1 - x + \frac{x^3 t^2}{2} - \frac{x^5 t^4}{24} + \dots$$

prenons pour noyau dégénéré $L(x, t)$ les trois premiers termes du développement

$$L(x, t) = 1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}$$

et on se propose de résoudre une nouvelle équation

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}\right) \varphi(t) dt$$

celle-ci donne d'après (section 2-1-2)

$$\varphi(x) = \sin x + C_1(1 - x) + C_2 x^3 \tag{2.3}$$

où

$$C_1 = \int_0^1 \varphi(t) dt; \quad C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \varphi(t) dt \tag{2.4}$$

en rapportant (2.3) dans (2.4) on aura un système pour déterminer C_1 et C_2 . Nous avons

$$C_1 = \int_0^1 [\sin t + C_1(1 - t) + C_2 t^3] dt = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_2 + 1 - \cos 1$$

$$\frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4} C_2 = 1 - \cos 1$$

$$-\frac{1}{24} C_1 + \frac{11}{12} C_2 = \sin 1 + \frac{1}{2} \cos 1 - 1$$

Résolvons ce système :

$$C_1 = 1,0031; \quad C_2 = 0,1674$$

donc

$$\tilde{\varphi}(x) = 1,0031(1-x) + 0,1674x^3 + \sin x$$

La solution exact est $\varphi(x) = 1$.

Evaluons $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|$ d'après la formule (2.2), nous obtenons dans la métrique de L_2

$$\|\Lambda\| \leq \frac{1}{24} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 x^{10} t^8 dx dt \right\}^{1/2} = \frac{1}{72\sqrt{11}} < \frac{1}{238}$$

$$\|K\| \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1 - x \cos xt)^2 dx dt \right\}^{1/2} = \left\{ 2 \cos 1 - \frac{1}{8} \cos 2 + \frac{1}{16} \sin 2 - \frac{5}{6} \right\}^{1/2} < \frac{3}{5}$$

$$\|L\| \leq \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}\right) dx dt \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} < \frac{3}{5}$$

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 \sin^2 x dx \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2 - \sin 2}}{2} < \frac{3}{5}$$

Les normes des résolvantes R_k et R_L sont évaluées par

$$\|R_k\| \leq \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|} \text{ et } \|R_L\| \leq \frac{\|L\|}{1 - |\lambda| \cdot \|L\|}$$

où $|\lambda| = 1$, par conséquent, $\|R_k\| \leq \frac{3}{2}$, $\|R_L\| \leq \frac{3}{2}$ et

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \frac{1}{238} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{3}{2}\right) \frac{3}{5} < 0,016$$

2.2 Remplacement de l'intégrale par une somme finie

Soit l'équation de FREDHOLM de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.5)$$

où $K(x,t)$ et $f(x)$ admettent des dérivées continues d'ordre requis et λ est un nombre donné.

Prenons une formule de quadrature

$$\int_a^b \Phi(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(x_k) \quad (2.6)$$

avec x_1, x_2, \dots, x_n les abscisses des points de $[a, b]$ et A_1, A_2, \dots, A_n les coefficients indépendants de la forme de la fonction $\Phi(x)$.

Posons $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) dans l'équation (2.5), elle devienne

$$\varphi(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, t) \varphi(t) dt = f(x_k); \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Utilisant (2.6), l'intégrale de la dernière équation devienne une somme

$$\varphi(x_k) - \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x_k, x_m) \varphi(x_m) = f(x_k); \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Nous avons obtenu un système linéaire de n équations algébriques à n inconnues $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ valeurs approchées de la solution $\varphi(x)$ aux points de base x_1, x_2, \dots, x_n , on peut prendre pour solution approchée de l'équation (2.5) sur le segment $[a, b]$.

Soit la fonction

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^n A_m K(x, x_m) \varphi(x_m)$$

dont les valeurs aux points x_1, x_2, \dots, x_n sont respectivement $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$.

Voici les valeurs des coefficients A_k et des abscisses x_k de (2.5) :

1) formule des rectangles

$$\begin{aligned} x_1 &= a; \quad x_2 = a + h, \dots, x_n = a + (n-1)h \\ A_1 &= A_2 = \dots = A_n = h \quad \text{où } h = \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

2) formule des Trapèzes

$$\begin{aligned} x_1 &= a; \quad x_2 = a + h, \dots, x_n = a + (n-1)h = b \\ A_1 &= A_2 = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h, \quad \text{où } h = \frac{b-a}{n-1}. \end{aligned}$$

3) formule de Simpson ($n = 2m + 1$)

$$\begin{aligned}x_1 &= a, x_2 = a + h, \dots, x_{2m+1} = a + 2mh = b; \\A_1 &= A_{2m+1} = \frac{h}{3}, A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3}; \\A_3 &= A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}, \text{ où } h = \frac{b-a}{2m}.\end{aligned}$$

Pour le choix de la formules de quadrature et l'évaluation de l'erreur résultant de la méthode, voir ([6]).

2.3 Méthode des approximations successives

2.3.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce

Soit l'équations intégrale de VOLTERRA de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \cdot \varphi(t) \cdot dt \quad (2.7)$$

Supposons que $f(x)$ est continue dans $[0, a]$ et que le noyau $K(x, t)$ l'est pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$. Prenons une fonction $\varphi_0(x)$ continue dans $[0, a]$ et substituons-la à $\varphi(x)$ du second membre de (2.7)

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \cdot \varphi_0(t) \cdot dt$$

la fonction $\varphi_1(x)$ ainsi définie est continue elle aussi sur le segment $[0, a]$. En continuant le processus nous aboutissons à la suite $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

où

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \cdot \varphi_{n-1}(t) \cdot dt \quad (2.8)$$

sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x, t)$, la suite $\{\varphi_n(x)\}$ converge pour $n \rightarrow \infty$ vers la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale (2.7) ([?]).

Si l'on prend, en particulier, pour $\varphi_0(x)$ la fonction $f(x)$, $\varphi_n(x)$ seront justement les sommes partielles de la série (2.8) donnant la solution de (2.7). Un choix de l'approximation «d'ordre

zéro» $\varphi_0(x)$ peut avoir pour résultat la convergence rapide de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ vers la solution de l'équation intégrale.

Exemple 2.2 Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t).dt$$

par la méthode des approximations successives en posant $\varphi_0(x) \equiv 0$.

Du moment que $\varphi_0(x) \equiv 0$, on a $\varphi_1(x) \equiv 1$. Puis, de proche en proche

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1.dt = 1 + x,$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x (1+t+\frac{t^2}{2}).dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

On a

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Donc $\varphi_n(x)$ est la n -ième somme partielle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. D'où $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$ est solution de l'équation proposée.

Exemple 2.3 La méthode des approximations successives à l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (x-t).\varphi(t)dt; \varphi_0(x) \equiv 0$$

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-t).\varphi(t)dt; \varphi_0(x) \equiv 0$$

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x-t).\varphi(t)dt; \varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi(x) = x + 1 - \int_0^x \varphi(t).dt$$

a) $\varphi_0(x) = 1$; b) $\varphi_0(x) = x + 1$

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \varphi(t).dt$$

a) $\varphi_0(x) = 1$; b) $\varphi_0(x) = x$; c) $\varphi_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t).\varphi(t).dt; \varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi(x) = 2x + 2 - \int_0^x \varphi(t).dt$$

a) $\varphi_0(x) = 1$; b) $\varphi_0(x) = 2$

$$\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t).dt;$$

a) $\varphi_0(x) = 2$; b) $\varphi_0(x) = 2x$

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \int_0^x \varphi(t).dt; \varphi_0(x) = x^2$$

Si on suppose que $K(x, t)$ vérifie la condition

$$\int_0^a \int_0^x K^2(x, t)dt.dx < +\infty$$

l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t).dt = 0$$

admet, quel que soit λ , une seule solution $\varphi(x) \equiv 0$ dans la classe $L_2(0, a)$.

Pour cela, on utilisera également la méthode étudiée pour les équations intégrales non li-

néaires de VOLTERRA de la forme

$$y(x) = y_0 + \int_0^x F[t, y(t)] dt \quad (2.9)$$

ou des équations plus générales

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.10)$$

sous des hypothèses très larges sur les fonctions $F(x, t, z)$ et $f(x)$, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y|_{x=0} = y_0,$$

se ramène par exemple à une équation de la forme (2.9). Comme dans le cas d'équations intégrales linéaire, nous cherchons la solution de (2.10) sous forme de limite de la suite $\{\varphi_n(x)\}$, où par exemple $\varphi_0(x) = f(x)$ et les termes suivants $\varphi_k(x)$ se calculent de proche en proche d'après la formule

$$\varphi_k(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi_{k-1}(t)) dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.11)$$

Si $f(x)$ et $F(x, t, z)$ sont de carrée sommable et satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} |F(x, t, z_2) - F(x, t, z_1)| &\leq a(x, t) |z_2 - z_1| \\ \left| \int_0^x F(x, t, f(t)) dt \right| &\leq n(x) \end{aligned}$$

avec $a(x, t)$ et $n(x)$ tels qu'on ait dans le domaine fondamental ($0 \leq t \leq x \leq a$) :

$$\int_0^a n^2(x) dx \leq N^2, \quad \int_0^a dx \int_0^x a^2(x, t) dt \leq A^2$$

alors l'équation intégrale non linéaire de VOLTERRA de seconde espèce (2.7) possède une solution et une seule, à savoir $\varphi(x) \in L_2(0, a)$, définie comme la limite de $\varphi_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x)$$

les fonctions $\varphi_n(x)$ étant calculées par les formules de récurrences (2.11). On peut prendre pour $\varphi_0(x)$ n'importe quelle fonction de $L_2(0, a)$ (en particulier, une fonction continue) qui remplit la condition (5). Notons q'un bon choix de l'approximation initiale est susceptible de faciliter la résolution de l'équation.

2.3.2 Equation intégrales de Fredholm de seconde espèce

Soit l'équation intégrale de FREDHOLM de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)\varphi(x)dt. \quad (2.12)$$

Construisons la suite fonctionnelle $\{\varphi_n(x)\}$ moyennant la formule de récurrence

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)\varphi_{n-1}(x)dt \quad (2.13)$$

On considère les fonctions $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) comme les valeurs approchées de la solution cherchée de(2.12), l'approximation initiale $\varphi_0(x)$ pouvant être arbitraire dans la condition

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \text{ où } B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)dxdt},$$

la suite (2.13) converge vers la solution de l'équation (6) dans la métrique de $L_2(a, b)$. L'erreur sur la $(m + 1)$ -ième approximation est évaluée en module par l'inégalité

$$|\varphi(x) - \varphi_{m+1}(x)| \leq AB^{-1} |\lambda B|^{m+1} \left(\Phi + \frac{F}{1 - |\lambda B|} \right)$$

$$F = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}, \Phi = \sqrt{\int_a^b \varphi_0^2(x)dx}$$

$$A = \sqrt{\max_{a \leq x \leq b} \int_a^b K^2(x, t)dt}$$

Equation intégrales des FREDHOLM de Première espèce

Soit l'équation de FREDHOLM de première espèce

$$\int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.14)$$

à $K(x, t)$ symétrique, de carré sommable, défini positif et $f(x) \in L_2[a, b]$.

Supposons que (2.14) admet une solution unique, alors la suite $\{\varphi_n(x)\}$ définie par la relation

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \lambda \left[f(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi_n(t)dt \right] \quad (2.15)$$

où $\varphi_0(x) \in L_2[a, b]$ et $0 < \lambda < 2\lambda_1$ (λ_1 étant le plus petit nombre caractéristique du noyau $K(x, t)$) converge en moyenne vers la solution de l'équation proposée.)

Considérons l'équation intégrale

$$\int_0^1 K(x, t)\varphi(t)dt = \sin \pi x$$

a noyau

$$K(x, t) = \begin{cases} (1-x)t, & 0 \leq t \leq x \\ (1-t)x, & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

il est immédiat de vérifier qu'elle admet une seule solution $\varphi(x) = \pi^2 \sin \pi x$. Son noyau a pour le plus petit nombre caractéristique la valeur $\lambda_1 = \pi^2$.

Formons les approximations selon la formule (11) en portant de $\varphi_0(x) = 0$ et $\lambda = 1 < 2\lambda_1$, nous obtenant de proche en proche

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \sin \pi x, \\ \varphi_2(x) &= \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin \pi x, \\ \varphi_3(x) &= \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right) \sin \pi x + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^2 \sin \pi x, \\ &\dots \\ \varphi_{n+1}(x) &= \sin \pi x \left[1 + \left(-1 \frac{1}{\pi^2}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{\pi^2}\right)^n \right] \end{aligned}$$

On voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \pi^2 \sin \pi x$$

ce qui est la solution exacte de l'équation proposée.

Chapitre 3

Méthode de Boubnov-Galerkin

On cherche une solution approchée de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt \quad (3.1)$$

par la méthode de Boubnov-Galerkin. On choisit un système de fonctions $\{u_n(x)\}$ complet dans $L_2(a,b)$ et tel que, quel soit n , les fonctions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, soient linéairement indépendantes, et on cherche une solution approchée $\varphi_n(x)$ de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x). \quad (3.2)$$

les coefficients a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) se définissent à partir du système linéaire

$$(\varphi_n(x), u_k(x)) = (f(x), u_k(x)) + \lambda \left(\int_a^b K(x,t) \varphi_n(t) dt, u_k(x) \right) \quad (3.3)$$

où (f, g) désigne $\int_a^b f(x)g(x)dx$ et où on remplace $\varphi_n(x)$ par $\sum_{k=1}^n a_k u_k(x)$. Si la valeur de λ dans (1) n'est pas un nombre caractéristique, alors pour n suffisamment grands, le système (3.3) admet une solution unique et, lorsque $n \rightarrow \infty$, la solution approchée $\varphi_n(x)$ de (3.2) tend vers la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.1) avec la métrique de $L_2(a,b)$.

Exemple 3.1 *Le procédé de boubnov-galerkin, l'équation suivante*

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^1 xt\varphi(t)dt \quad (3.4)$$

et donner par :

Choisissons pour système complet sur $[-1, 1]$ un système de polynômes $P_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) et cherchons une solution approchée $\varphi_n(x)$ de (3.4) de la forme

$$\varphi_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Portons dans (3.4) $\varphi_3(x)$ à la place de $\varphi(x)$, il vient

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^1 xt(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2 - 1}{2}) dt$$

où

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + x \frac{2}{3} a_2$$

En multipliant successivement les deux membres de la dernière équation par 1, x , $\frac{3x^2 - 1}{2}$, et en intégrant à x de -1 à 1 , nous obtenons

$$\begin{cases} 2a_1 = 0 \\ \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2 \\ \frac{2}{5}a_3 = 0 \end{cases}$$

d'où $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$ et donc $\varphi_3(x) = 3x$, on vérifie de suite que c'est la solution exacte de (3.4).

Remarque 3.2 S'agissant de noyaux dégénérés, la méthode que nous étudions fournit la solution exacte et, dans le cas général, cette technique équivaut à remplacer le noyau $K(x, t)$ par celui dégénéré $L(x, t)$.

Exemple 3.3 Par l'exemple suivant, nous allons essayer de trouver, moyennant la méthode de Ritz, la valeur approchée du plus petit nombre caractéristique du noyau

$$K(x, t) = xt; \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Prenons pour système de fonctions $\varphi(x)$ un système de polynôme de Legendre : $\varphi(x) = P_n(2x -$

1). Bornons nous dans (1) à deux termes de sorte que

$$\varphi_2(x) = a_1 P_0(2x - 1) + a_2 P_1(2x - 1) = 2x - 1$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_1) &= \int_0^1 dx = 1, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = \int_0^1 (2x - 1) dx = 0 \\ (\varphi_2, \varphi_2) &= \int_0^1 (2x - 1)^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} (K\varphi_1, \varphi_2) &= \int_0^1 \int_0^1 xt(2x - 1) dx dt = \frac{1}{12} \\ (K\varphi_2, \varphi_2) &= \int_0^1 \int_0^1 xt(2x - 1)(2x - 1) dx dt = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Le système (3) prend, dans ce cas, la forme

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\sigma \end{pmatrix}$$

où

$$\sigma^2 - \sigma\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

D'où $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \frac{1}{3}$, la plus grande valeur propre est $\sigma_2 = \frac{1}{3}$, et donc le plus petit nombre caractéristique $\lambda = \frac{1}{\sigma_2} = 3$.

3.1 Méthode de Ritz

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

à noyau symétrique $k(x, t) = k(t, x)$. Prenons une suite de fonction $\{\psi_n(x)\}_n$, $\psi_n(x) \in L_2(a, b)$, telle que le système $\{\psi_n(x)\}$ soit complet dans $L_2(a, b)$ et que pour tout n , les fonctions

$\varphi(x)_1, \varphi(x)_2, \dots, \varphi(x)_n$ soient linéairement indépendantes sur $[a, b]$; posons

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x) \quad (3.5)$$

assujettissons les coefficients a_k à la condition $\|\varphi_n\| = 1$ et cherchons dans cette condition les valeurs stationnaires de la forme quadratique

$$(k\varphi_n, \varphi_n)$$

Nous aboutissons ainsi au système homogène en a_k (σ est le multiplicateur de LAGRANGE)

$$\sum_{k=1}^n \{ (k\varphi_j, \varphi_k) - \sigma(\varphi_j, \varphi_k) \} a_k = 0; \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.6)$$

Pour que le système (2) admette une solution non banale, son déterminant doit être nul :

$$\begin{vmatrix} (k\varphi_1, \varphi_1) - \sigma(\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (k\varphi_1, \varphi_n) - \sigma(\varphi_1, \varphi_n) \\ (k\varphi_2, \varphi_1) - \sigma(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (k\varphi_2, \varphi_n) - \sigma(\varphi_2, \varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (k\varphi_n, \varphi_1) - \sigma(\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (k\varphi_n, \varphi_n) - \sigma(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

les racines de l'équation (3.7) approchent les valeurs propres du noyau $k(x, t)$, la racine maximale approchant par défaut la plus grande valeur propre. Trouvons σ à partir de (3.7), portons-le dans (3.6) et cherchons la solution non nulle a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) du système (3.7). En substituant dans (3.5) les valeurs obtenues de a_k , nous obtenons une valeur approchée de la fonction propre correspondant à la valeur propre trouvée.

3.2 Méthode des traces

Appelons $m - i\grave{e}me$ trace du noyau $K(x, t)$ le nombre

$$A_m = \int_a^b K_m(t, t) dt \quad (3.8)$$

où $K_m(x, t)$ est le $m - i\grave{e}me$ itère de $K(x, t)$.

Le plus petit nombre caractéristique λ_1 vérifie, pour m suffisamment grand, la formule appro-

chée suivante

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}} \quad (3.9)$$

La formule (4) donne $|\lambda_1|$ par excès. Les traces d'ordre pair d'un noyau symétrique se calculent par la formule

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b K_m^2(x, t) dx dt = 2 \int_a^b \int_a^x K_m^2(x, t) dx dt \quad (3.10)$$

Par la technique des traces, voici la méthode pour trouver le premier nombre caractéristique du noyau :

$$K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geq t \\ x, & x \leq t \end{cases} \quad a = 0, b = 1$$

Vu le système de $K(x, t)$, il suffit d'obtenir $K_2(x, t)$ pour $t < x$. Nous avons

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, z)K(z, t) dz = \int_0^t z^2 dz + \int_t^x z t dz + \int_x^t x t dt = xt - \frac{x^2 t}{2} - \frac{t^3}{6}.$$

Ensuite, moyennant la formule (3.10), nous trouvons respectivement pour $m = 1$ et $m = 2$

$$A_2 = 2 \int_0^1 dx \int_0^x K_1^2(x, t) dt = 2 \int_0^1 dx \int_0^x t^2 dt = 2 \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x K_2^2(x, t) dt = 2 \int_0^1 dx \int_0^x \left(x^2 t^2 + \frac{x^4 t^2}{4} + \frac{t^6}{36} - x^3 t^2 - \frac{x t^4}{3} + \frac{x^2 t^4}{6} \right) dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{t^3 x^2}{3} + \frac{t^3 x^4}{12} + \frac{t^7}{7 \cdot 36} - \frac{x^3 t^3}{3} - \frac{x t^5}{15} - \frac{x^2 t^5}{30} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{12} + \frac{x^7}{7 \cdot 36} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^6}{15} + \frac{x^7}{30} \right) dx = \frac{17}{630} \end{aligned}$$

D'après la formule (3.9)

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{630}}} = 2.48$$

3.3 Méthode de Kellog

Soit $k(x, t)$ un noyau symétrique que nous supposons, défini positif et soit $\omega(x)$ une fonction quelconque de $L_2(a, b)$. Construisons la suite

$$\begin{aligned}
\omega_1(x) &= \int_a^b K(x,t)\omega(t)dt \\
\omega_2(x) &= \int_a^b K(x,t)\omega_1(t)dt \\
&\dots \\
\omega_n(x) &= \int_a^b K(x,t)\omega_{n-1}(t)dt
\end{aligned} \tag{3.11}$$

et considérons la suite numérique $\left\{ \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} \right\}$.

Admettons que $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ sont les fonctions propres orthonormées relatives au noyau $k(x, t)$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ les nombres caractéristiques correspondants, supposons de plus que la fonction $\omega(x)$ est orthogonale à $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$, mais ne l'est pas à la fonction propre $\varphi_k(x)$. La suite (3.11) a, alors, comme limite le k - ième nombre caractéristique à savoir λ_k .

La suite fonctionnelle $\left\{ \frac{\omega_n(x)}{\|\omega_n(x)\|} \right\}$ converge, alors, vers une fonction combinaison linéaire de fonction propres associées à λ_k .

La limite de la suite (3.11) est également celle de la suite $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}} \right\}$.

Si $(\omega_1, \varphi_1) \neq 0$, on a deux formules approchées pour le plus petit nombre caractéristique

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} \tag{3.12}$$

$$\lambda_2 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}$$

La formule (3.12) donnant une valeur approchée par excès, Dans le cas de $k(x, t)$ non défini positif, les formules (3.12) et (3.11) fournissent une valeur approchée du plus petit module du nombre caractéristique du noyau donné. A condition de bien choisir $\omega(x)$, la méthode de Kellog est relativement peu laborieuse .

Le défaut de ce procédé est qu'on ne connaît pas à l'avance lequel des nombre caractéristique est calculé.

$$(x, t) = x^2t^2, 0 \leq x, t \leq 1.$$

Posons $\omega(x) = x$, on a, alors,

$$\begin{aligned}\omega_1(x) &= \int_0^1 x^2 t^2 dt = \frac{x^2}{4} \\ \omega_2(x) &= \int_0^1 x^2 \frac{t^4}{4} dt = \frac{1}{4} x^2 \cdot \frac{1}{5} \\ \omega_3(x) &= \int_0^1 \frac{1}{4 \cdot 5} x^2 t^4 dt = \frac{1}{4 \cdot 5^2} x^2 \\ &\dots \\ \omega_n(x) &= \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} x^2\end{aligned}$$

Ensuite

$$\|\omega_n(x)\| = \frac{1}{4} \frac{1}{5^{n-1}} \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

donc conformément à (3.12)

$$\lambda_1 \approx \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5^{n-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

$$|\varphi(\chi) - \varphi_{m+1}(\chi)| \leq AB^{-1} |\lambda B|^{m+1} \left(\Phi + \frac{F}{1 - |\lambda B|} \right)$$

Où

$$\sqrt{\int_a^b f^2(\chi) d\chi} \text{ et } \Phi = \int_a^b \varphi_0^2(\chi) d\chi$$

$$A = \sqrt{\max_{a \leq x \leq b} \int_a^b f k^2(\chi, t) dt}$$

Exemple 3.4 *En procédant par approximations successives, nous allons trouver la solution de l'équation*

$$\varphi(x) = \int_0^1 x t^2 \varphi(t) dt + 1 \tag{3.13}$$

et évaluer l'erreur sur la solution approchée.

Acceptons comme approximations de départ la valeur $\varphi_0(\chi) = 1$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_1(\chi) &= \int_0^1 \chi t^2 \cdot 1 dt + 1 = 1 + \frac{\pi}{3} \\ \varphi_2(\chi) &= \int_0^1 \chi t^2 \left(1 + \frac{t}{3}\right) dt + 1 = 1 + \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{4}\right) \\ \varphi_3(\chi) &= \int_0^1 \chi t^2 \left[1 + \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{4}\right)\right] dt + 1 = 1 + \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right)\end{aligned}$$

On voit aisément que

$$\varphi_3(\chi) = 1 + \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^m}\right) \quad (3.14)$$

D'où

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{m+1}(\chi) = 1 + \frac{4}{9}\chi.$$

une vérification nous assure que

$$\varphi(\chi) = 1 + \frac{4}{9}\chi$$

est solution de l'équation (3.13).

L'erreur sur la $(m+1)$ -ième approximation est évaluée par l'inégalité (3.14) Dans notre cas

$$\lambda = 1, \Phi = 1, F = 1, A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

De sorte que $|\varphi(\chi) - \varphi_{m+1}(\chi)| \leq \frac{29 + \sqrt{15}}{14\sqrt{5}(\sqrt{15})}$.

Conclusion

Nous proposons une méthode numérique de résolution des équations intégrales. Notre objectif été de voir la performance de cette méthode et de contribuer à l'étude du comportement de l'erreur commise dans cette approche. Dans une première étape, nous avons proposé deux méthodes efficaces de résolution pour les équations intégrales, celle des trapèzes et une méthode adaptative, nous avons calculé les erreurs commises par les trois méthodes sous forme de valeur absolue de la différence entre la solution exacte connue d'avance et la solution numérique qu'on a trouvée, pour un choix divers de problèmes sous forme d'exemples numériques. nous a donné une illusion générale sur la méthode ainsi proposée, notre méthode est moins consistante, mais sur des problèmes a solutions d'une variation lente, la méthode est très efficace. Cela donnera un avantage de plus à la résolution numérique des équations intégrales.

Bibliographie

- [1] T.A. Burton, Volterra Integral and Differential Equation, Second Edition, Elsevier, 2005.
- [2] Petre J.Collins, Differential and Intégrale Equations, Senior Research Fellow, st Edmund Hall, Oxford, 2006.
- [3] Jean - Pierre Dedieu, Methods Numerique : Fonction d'une variable Réelle, MIP, Département de Mathématiques Université - Paul Sabatier-31062 Toulouse, Cedex 04.
- [4] Joshua H Gordis and Beni Neta. An adaptive method for the numerical solution of Volterra integral equations, article code ME / GO, CH 93943, USA.
- [5] L. Kantorovitch et G. Akilov. Analyse fonctionnelle, T1 & T2. idition Mir, 1981.
- [6] L.V Kantrovich et V.I Krylov. Approximate méthodes of higher analysis, Groningen 1958.
- [7] M. Krasnov, A .Kissélev et G. Makarenko. Equations intégrales, problèmes et exercices, Edition Mir. Moscou.
- [8] Beni Neta, Adapative method for the Numerical Solution of Fredholm Integral Equation of the second kind, Texas Tech University Lubbock, article Texas, 79409.
- [9] Beni Neta. Adaptive method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind. Texas Tech University Lubbock, article Texas 79409, 2002.
- [10] Hongchang Tian. Spectral methods for Volterra integral equations, Harbin Institute of Technology, Harbin, PR China. Thesis. 1995.