Table des matières

Introduction

Les problèmes de Sturm-Liouville (PSL) ont débuté dans une série de documents par ces deux auteurs en $1836 - 1837$. Des dizaines d'articles sont écrits sur les PSL chaque année. Le problème consiste a étudier les propriétés de base des problèmes de Sturm-Liouville (PSL) de type :

$$-(py')' + qy = wy \quad sur \quad (a; b)$$

avec les conditions aux limites (CB). La nature du CB dépend de la classification régulier ou singulier des points d'extrémité a et b. Pour les deux cas, les CB se divisent en deux grandes catégories : séparés et couplés. Les premiers constituent deux conditions distinctes, une à chaque extrémité ; ce dernier sont deux conditions couplés reliant les valeurs de la solution y et sa quasi-dérivé (py') près des deux extrémités.

Pour étudier le PSL en utilisant la théorie des opérateurs on associe un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert pondérée des fonctions carré sommable, par rapport au poids w, sur (a, b), chaque PSL de telle sorte que le spectre du problème est le spectre de l'opérateur.

Dans le cas d'un problème régulier le spectre est entièrement constitué de valeurs propres et ceux-ci sont minorés (où $p > 0$ et $w > 0$). C'est ainsi pour le cas où chaque point d'extrémité est soit régulière (R) ou singulier limite-cercle nonoscillatory ($LCNO$). Dans le cas d'un point d'extémité est limite-cercle oscillant (LCO) et l'autre n'est pas de point limite (PL), alors il n'y a toujours que les valeurs propres dans le spectre, mais elles ne sont pas minorés. (Le spectre n'est jamais minorés.).

Ces discussions ont tendance à être peu précis, en particulier dans le cas singulier. Même pour le cas ordinaire, une discussion générale sur les conditions aux limites auto-adjoint séparés et couplés n'est pas facile de trouver dans la littérature existante.

Si l'un ou les deux extrémités du spectre est PL peut être extrêmement compliqué. Il peut y avoir aucune valeurs propres, un nombre fini, ou un nombre infini. Certains peuvent être noyées dans le spectre continu. Par exemple pour $p = 1$, $w = 1$; $q(x) = \sin(x)$ sur $(-\infty; +\infty)$ il n'y a pas de valeurs propres et le spectre continu est constitué de l'union d'un nombre infini d'intervalles compacts disjoints. Les problèmes PSL sont classés en différentes catégories en fonction de la classification des extrémités et de savoir si les conditions aux limites sont séparés ou couplés.

Le but de ce mémoire est double : (i) de donner un aperçu de certaines propriétés de base de l'équation de Sturm-Liouville et (ii) d'amener le lecteur à la pointe des connaissances sur certains aspects de PSL.....

Nous avons fait un effort pour essayer de faire cette mémoire utile pour les étudiants ainsi que les chercheurs. Nous espérons que cette mémoire servir d'introduction lisible pour PSL.

Ce memoire est divisé en trois chapitres, le premier est consacrée à l'étude des propriétés de base des systèmes de premier ordre de dimension $n = 2$. le deuxième chapitre, nous appliquons les résultats du chapitre 1 à l'étude des problèmes de valeurs initiales (PVI) constitués de l'équation scalaire du second ordre

$$-(py')' + qy = f \quad sur \quad J$$

sous les conditions initiales

$$y(c) = h, \quad (py')(c) = k, \ c \in J, \ h, k \in \mathbb{C}$$

où

$$J = (a, \ b), \ -\infty \leq a < b \leq \infty, \quad et \ \ \frac{1}{p}, q, f : J \to \mathbb{C}$$

comme nous étudions les problèmes de Sturm-Liouville (PSL) régulié avec deux points de conditions aux limites (CB) auto-adjoint et non auto-adjoint, on divise les conditions aux bords auto-adjointes en trois sous-classes mutuellement exclusives et d'utiliser les représentations canoniques de ces sous-classes suivantes

1.CB Séparé auto-adjoint .

Ceux-ci sont

$$\begin{aligned} A_1 y(a) + A_2(py')(a) &= 0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}, (A_1, \ A_2) \neq (0,0), \\ B_1 y(b) + B_2(py')(b) &= 0, B_1, B_2 \in \mathbb{R}, (B_1, \ B_2) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Ces conditions séparés peuvent être paramétrées comme suit :

$$\begin{aligned} \cos\alpha y(a) - \sin\alpha(py')(a) &= 0, \ 0 \leq \alpha < \pi; \\ \cos\beta y(b) - \sin\beta(py')(b) &= 0, \ 0 < \beta \leq \pi. \end{aligned}$$

2. CB tous les couplé auto-adjoint réels .

Ceux-ci peuvent être formulés comme suit

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ (py')(b) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} y(a) \\ (py')(a) \end{pmatrix}$$

où $K \in SL_2(\mathbb{R})$, c-à-d K est donné par

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, k_{ij} \in \mathbb{R}, \det K = 1.$$

3. Tous couple CB complexe auto-adjoint .

Ceux-ci peuvent être formulés comme suit :

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ (py')(b) \end{pmatrix} = \exp(i\alpha) K \begin{pmatrix} y(a) \\ (py')(a) \end{pmatrix}$$

Où K satisfait (2.65) et $-\pi < \alpha < 0$,ou $0 < \alpha < \pi$.

Dans le dernier chapitre, nous discutons le PSL auto-adjoint singulier. C'est un domaine tellement vaste que nous ne pouvons espérer donner ici une brève introduction . Après un examen de la partie de la théorie de base, nous allons nous concentrer sur deux thèmes :(i) l'ossilation (ii) la nature de la singularité : point limite (PL) ou limite-cercle (LC). Sur ces deux sujets, nous nous efforçons d'amener le lecteur de voire derinière partie de ce chapitre pour illustrer certains des comportements de base du spectre de PSL nous discutons brievement 14 exemples.

Chapitre 1

Systèmes de premier ordre

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacrée à l'étude des propriétés de base des systèmes de premier ordre de dimension $n = 2$.

Pour tout intervalle J de la droite réelle, borné ou non borné, on note par $L(J, \mathbb{C})$ la variété linéaire des fonctions y à valeur complexe Lebesgue mesurable définies sur J pour lequel

$$\int_a^b |y(t)|\, dt \equiv \int_J |y(t)|\, dt \equiv \int_J |y| < \infty.$$

L'epace $L_{loc}(J, \mathbb{C})$ désigne la variété linéaire des fonctions y satisfaisant $y \in L([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ pour tous les compacts $[\alpha, \beta] \subseteq J$. Si $J = [a, b](a < b < \infty)$, alors $L_{loc}(J, \mathbb{C}) = L(J, \mathbb{C})$. En outre, on note par $AC_{loc}(J, \mathbb{C})$ l'ensembles des fonctions $y : J \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont absolument continue sur tous les intervalles compacts $[\alpha, \beta] \subseteq J$.

Pour un ensemble donné S, $M_{n,m}(S)$ désigne l'ensemble des matrices $n \times m$ des éléments de S. Si $n = m$ nous écrire $M_n(S)$, et aussi si $m = 1$ on écrit parfois S^n pour $M_{n,1}(S)$. La norme d'une matrice constante ainsi que la norme d'une fonction de matrice P est noté $|P|$. Cela peut être donnée par

$$|P| = \sum |P_{ij}|\,.$$

1.2 Existence et unicité des solutions.

Définition 1.1 *(solution) Soit J un intervalle, borné ou non borné ; $n, m \in \mathbb{N}$, soit $P : J \to M_n(\mathbb{C})$, $F : J \to M_{n,m}(\mathbb{C})$. On appelle une solution de l'équation*

$$Y' = PY + F \ \text{sur } J \tag{1.1}$$

une fonction $Y : J \to M_{n,m}(\mathbb{C})$ qui est absolument continue sur tous les sous-intervalles compacts de J et satisfait à l'équation (1.1) presque partous sur J .

Remarque 1.2 *Une matrice de fonctions est absoluments continues si chaqu' un de ses composant est absolument continue.*

Théorème 1.3 *(Existence et unicité) Soient J un intervalle ; $n, m \in \mathbb{N}$,Si*

$$P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C})) \tag{1.2}$$

et

$$F \in M_{n,m}(L_{loc}(J, \mathbb{C})) \tag{1.3}$$

alors chaque problème de valeur initiale (PVI)

$$Y' = PY + F \tag{1.4}$$

$$Y(u) = C, \ u \in J, \ C \in M_{n,m}(\mathbb{C}) \tag{1.5}$$

a une solution unique définie sur tous J. De plus, si C, P, F, sont tout à valeurs réelles, alors la solution est également à valeur réelle .

Preuve. Si Y est une solution de PVI (1.4), (1.5) alors par intégration on obtien

$$Y(t) = C + \int_u^t (PY + F), t \in J \tag{1.6}$$

Inversement, toute solution de l'équation intégrale (1.6) est également une solution de PVI (1.4),(1.5) .

Choisissons c dans J, avec $c \neq u$. Nous montrons que (1.6) , a une solution unique sur $[u, c]$ si $c > u$ et sur $[c, u]$ si $c < u$.

Supposons $c > u$.

Considérons l'espace B definie par

$$B = \{Y : [c, u] \longrightarrow M_{n,m}(\mathbb{C}), Y \in C[c, u]\}$$

D'après Bielecki [13], nous définissons la norme d'une fonction $Y \in B$ par :

$$\|Y\| = \sup\{e^{-K \int_u^t |P(s)| ds} |Y(t)|, t \in [u, c]\}, \tag{1.7}$$

où $K > 1$ est une constante positive fixe . Il est facile de voir que, avec cette norme, B est un espace de Banach.

Soit l'opérateur $T : B \longrightarrow B$ définie par

$$(TY)(t) = C + \int_u^t (PY + F)(s) ds, \ t \in [u, c], \ Y \in B. \tag{1.8}$$

Alors pour $Y, Z \in B$ nous avons

$$|(TY)(t) - (TZ)(t)| \leq \int_u^t |P(s)| |Y(s) - Z(s)| ds$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} e^{\left(-K \int_u^t |P(s)| ds\right)} |(TY)(t) - (TZ)(t)| &\leq \|Y - Z\| \int_u^t |P(s)| e^{\left(-K \int_s^t |P(r)| dr\right)} ds \\ &\leq \frac{1}{K} \|Y - Z\| . \end{aligned}$$

donc

$$\|TY - TZ\| \leq \frac{1}{K} \|Y - Z\|$$

alors l'application T est contractente donc a un unique point fixe et donc PVI (1.4),(1.5) a une solution unique sur $[u, c]$. La preuve est similaire pour le cas $c < u$, on prend la norme

$$\|Y\| = \sup\{e^{\left(K \int_u^t |P(s)| ds\right)} |Y(t)|, t \in [c, u]\},$$

Puisque, il existe une solution unique sur chaque sous-intervalle compact $[u, c]$ et $[c, u]$ pour $c \in J$ et $c \neq u$ il résulte qu'il existe une solution unique sur J. ■

Théorème 1.4 *(Invariance de rang). Soit $J = (a, b)$, et supposons que $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. Si $n \times m$, Y est une solution de l'équation*

$$Y' = PY \qquad sur \quad J, \tag{1.9}$$

alors on a

$$rang\ Y(t) = rang Y(u),\ \ t, u \in J. \tag{1.10}$$

de plus, si $m = n$ alors pour toute $u, t \in J$, nous avons

$$(\det Y)(t) = (\det Y)(u) \exp\left(\int_u^t trace\ P(s) ds\right) \tag{1.11}$$

Preuve. La formule (1.11) découle du fait que $y = \det\, Y$ satisfait l'équation scalaire de première ordre $y' - py = 0$ où $p = trace P$. Pour montrer le cas général soit $Y(u) = C$ et le $rang\ C = r$.

Si $r = 0$, alors $Y(t) = 0,\ \forall t$.

Si $r > 0$, soit $C_{i,}\ i = 1, ...r$ les colonnes linéairement indépendant de C et construisant une matrice $D, n \times n$ inversible en ajoutant $n - r$ vecteurs constants appropriées pour $C_{i,} i = 1, ...r$. Notons par Z la solution de (1.9) satisfaisant la condition initiale $Z(u) = D$. Alors par (1.11) $rang Z(t) = n,\ pour\ t \in J$. D'où, les r premières colonnes de $Z(t)$, $Z_1(t), ..., Z_r(t)$ sont linéairement indépendants . De ce et partie unicité du théorème 1.3 les n vecteurs (constantes) $Y_1(t), Y_2(t), ..., Y_r(t)$ sont linéairement indépendant puisque $Z_j = Y_j$ sur J. Donc $rang Y(t) \geq r$, pour $t \in J$.

Supposons maintenant que le $rang Y(c) > r$,$\forall\ c$ dans J. Ensuite, en répétant l'argument ci-dessus en remplacent u par c nous arrivons à la conclusion que $rang Y(t) > r$ pour tout $t \in J$. Mais cela contredit le fait que $rang Y(u) = r$ d'où 1.10 . ■

Remarque 1.5 *La formule (1.11) est parfois appelée, formule l'egalité d'Abel. Il résulte de cette formule que si, une solution est non singulière à un moment donné $u \in J$ alors il est inversible en tout point de J.*

Théorème 1.6 *(Everitt et Race). Soit* $P : J \longrightarrow M_n(C)$ *et* $F : J \longrightarrow M_{n,1}(C)$, $J = (a,b), -\infty \leq a < b \leq \infty$. *Si pour tout* $u \in J$ *et toutes vecteurs constants linéairement indépendants* $C_1, ..., C_n$ *chaque problème à valeur initiale*

$$Y' = PY + F,\ Y(u) = C_i,\ i = 1, .., n,$$

a une unique solution Y_i *sur* J, *alors* $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$ *et* $F \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. *En outre, si chaque* Y_i *est une solution de classe* C^1 , *alors il existe un* P *et* F *qui sont continues.*

Preuve. $1-$ Si $F = 0$ sur J.

Soit Y_i un vecteur solution satisfaisant $Y_i(u) = C_i$ et soit Y la matrice dont les $i^{ème}$ colonne est $Y_i, i = 1, ..., n$. Alors la matrice solution Y est inversible sur chaque voisinage N_u de u. Choisissons

$$P = Y'Y^{\ -1} \ \text{ sur } N_u$$

Soit K un sous-intervalle compact de J. Puisque l'ouvert $\{N_u :\ u \in J\}$ de K a un sous ouvert fini, nous pouvons conclure que Y est définie de façon unique et inversible sur K. comme Y est continue et inversible sur K il en résulte que Y^{-1}est continue et donc bornée sur K. De même, Y'est integrable sur K puisque Y est absolument continue sur K, en vertu du fait que c'est une solution sur J. Par conséquent $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$.

$2-$ $F \neq 0$ sur J .

Soit Y une solution de $Y' = PY + F$ avec $Y(u) = 0$ et choisissons une solution Z de cette équation telle que $Z(u) = C$ et soit $V = Z - Y$. Alors, $V' = PV$ et $V(u) = C$. Puisque cela est vrai pour C arbitraire, nous pouvons conclure du cas particulier établi ci-dessus que $P \in M_n L_{loc}(J, \mathbb{C})$. Donc $F = V' - PV \in M_n L_{loc}(J, \mathbb{C})$. d'où la preuve. ■

1.3 Variation des paramètres.

Soit $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. D'après le théorème 1.3, nous savons que pour chaque point u de J il ya exactement une solution X de 1.9 satisfaisant $X(u) = I_n$ où I_n désigne la matrice d'identité $n \times n$.

Définition 1.7 *(matrice fondamentale primaire* Φ *).Pour tout* $u \in J$ *,soit* $\Phi(., u)$ *la matrice* *fondamentale primaire de (1.9) satisfaisant*

$$\Phi(u,u) = I_n$$

notons que Pour tout $u \in J$, $\Phi(.,u) \in M_n(AC_{loc}(J,\mathbb{C}))$. *De plus, si* J *est compact et* $P \in M_n(L(J,\mathbb{C}))$, *alors* u *peut être une extrémité de* J *et* $\Phi(.,u) \in M_n(AC(J,\mathbb{C}))$. *D'après le théorème (1.4),* $\Phi(t,u)$ *est inversible pour tout* $t,u \in J$ *notons que*

$$\Phi(t,u) = Y(t)Y^{-1}(u) \tag{1.12}$$

pour n'importe quelle matrice fondamental Y *de (1.9) .*

Nous appelons Φ *la matrice fondamentale primaire de (1.9) et également nous écrivons*

$$\Phi = \Phi(P) = (\Phi_{rs})_{r,s=1}^{n}, \ \Phi(P)(t,u) = \Phi(t,u,P). \tag{1.13}$$

Le résultat suivant est appelé la formule de la variation des paramètres et est fondamentale dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Théorème 1.8 *(Formule de la Variation des paramètres) soient* $P \in M_n(L_{loc}(J,\mathbb{C}))$ *et* $\Phi = \Phi(.,.,P)$ *la matrice fondamentale primaire de (1.9) définie ci-dessus. Soit* $F \in M_{n,m}(L_{loc}(J,\mathbb{C}))$, $u \in J$ *et* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$. *Alors*

$$Y(t) = \Phi(t,u,P)C + \int_u^t \Phi(t,s,P)F(s)ds, \ t \in J \tag{1.14}$$

est la solution de (1.4), (1.5). Notons que si J *est compact et* $P \in M_n(L(J,\mathbb{C}))$, $F \in M_{n,m}(L(J,\mathbb{C}))$, *alors* $Y \in M_{n,m}(AC(J,\mathbb{C}))$, *et* u *peut être un point d'extrimité ou un point intérieur de* J.

Il est clair que $Y(u) = C$. Dérivé (1.14) et le remplacer dans l'équation (1.4).

1.4 L'inégalité de Gronwall.

Théorème 1.9 *(Inégalité de Gronwall) (i) (Inégalité de Gronwall «droit») Soit* $J = [a, b]$*. Supposons* $g \in L(J, \mathbb{R})$ *avec* $g \geq 0$ *p.p,* $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue. Si* $y : J \longrightarrow \mathbb{R}$*, et satisfait*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds, \quad a \leq t \leq b, \tag{1.15}$$

alor

$$y(t) \leq f(t) + \left(\int_a^t f(s)g(s) \exp\left(\int_s^t g(u)du \right) ds \right), \quad a \leq t \leq b, \tag{1.16}$$

Si $f(t) = c$*,* c *une constante, nous obtenons*

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t g(s)ds \right), \quad t \in J \tag{1.17}$$

Pour le cas où f *est croissante sur* $[a, b]$*, nous obtenons*

$$y(t) \leq f(t) \exp\left(\int_a^t g(s)ds \right), \; a \leq t \leq b, \tag{1.18}$$

(ii) (Inégalité de Gronwall "gauche") Soit $J = [a, b]$*. Supposons* $g \in L(J, \mathbb{R})$ *avec* $g \geq 0$ *p.p.et* $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$*. Si* $y,: J \longrightarrow \mathbb{R}$ *et satisfait*

$$y(t) \leq f(t) + \int_t^b g(s)y(s)ds, \; a \leq t \leq b, \tag{1.19}$$

alor

$$y(t) \leq f(t) + \left(\int_t^b f(s)g(s) \exp\left(\int_t^s g(u)du \right) ds \right), \; a \leq t \leq b. \tag{1.20}$$

Si $f(t) = c$*,* c *une constante, nous obtenons*

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_t^b g(s)ds \right), \; a \leq t \leq b. \tag{1.21}$$

Si f *est croissante sur* $[a, b]$*, nous avons*

$$y(t) \leq f(t) \exp\left(\int_t^b g(s)ds \right), \quad a \leq t \leq b. \tag{1.22}$$

Preuve. (i) Soit $z(t) = \int_a^t gy, \quad t \in J$ alors

$$z' = gy \leq gf + gz \ ; \ z' - gz \leq gf \ p.p$$

d'où nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\int_a^s g(u)du\right)[z'(s) - g(s)z(s)] &= \left[\exp\left(-\int_a^s g(u)du\right)z(s)\right]' \\
&\leq g(s)f(s)\exp\left(-\int_a^s g(u)du\right), \ a \leq s \leq b
\end{aligned}$$

par intégration de a à t on obtient

$$\exp\left(-\int_a^t g(u)du\right)z(t) \leq \int_a^t g(s)f(s)\exp\left(-\int_a^s g(u)du\right)ds, \quad a \leq t \leq b$$

De (1.15) et la ligne ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
y(t) &\leq f(t) + z(t) \leq f(t) + \exp\left(\int_a^t g(u)du\right)\int_a^t g(s)f(s)\exp\left(-\int_a^s g(u)du\right)ds \\
&= f(t) + \int_a^t g(s)f(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds, \ a \leq t \leq b
\end{aligned}$$

Ceqi achève la preuve de (1.16). Les deux cas particuliers découlent de (1.16).

Pour la partie (ii). Soit $z(t) = \int_t^b gy$ alors

$$z' + gz \geq -gf,$$

on procéder comme dans la partie (i). ■

1.5 Bornes et extensions aux points d'extrémité

Dans cette partie , nous étudions les bornes des solutions et l'extension continue des solutions aux extrémités de l'intervalle sous-jacent.

Théorème 1.10 *Soient $J = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$,soit $n, m \in N$. Supposons que $P \in M_n(L(J, \mathbb{C}))$, $F \in M_{n,m}(L(J, \mathbb{C}))$. Supposons que, pour certains $u \in J, C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, Nous* *avons*

$$Y' = PY + F \quad sur\ J,\ Y(u) = C \tag{1.23}$$

Alors

$$|Y(t)| \leq \left(|C| + \int_a^b |F| \right) \exp\left(\int_a^b |P| \right),\ a < t < b \tag{1.24}$$

Preuve. Notons que (1.23) est équivalent à

$$Y(t) = C + \int_u^t (P(s)Y(s) + F(s))\, ds,\ a < t < b \tag{1.25}$$

1) Si $u \leq t < b$. De (1.25), nous obtenons

$$\begin{aligned} |Y(t)| &\leq |C| + \left| \int_u^t (PY + F) \right| \leq |C| + \int_u^t |P|\,|Y| + |F|) \\ &\leq \left(|C| + \int_u^b |F| \right) + \int_u^t (|P|\,|Y|),\ u \leq t < b \end{aligned}$$

de plus en utilisent et l'inégalité de Gronwall on obtient

$$|Y(t)| \leq \left(|C| + \int_u^b |F| \right) \exp\left(\int_u^t |P| \right) \leq \left(|C| + \int_u^b |F| \right) \left(\int_u^b |P| \right), u \leq t < b$$

2) Si $a < t \leq u$. De (1.25)

$$\begin{aligned} |Y(t)| &\leq |C| + \left| \int_u^t (PY + F) \right| \leq |C| + \int_t^u (|P| \quad |Y| + |F|) \\ &\leq \left(|C| + \int_a^u |F| \right) + \int_t^u (|P| \quad |Y|),\ a \leq t < u \end{aligned}$$

en utilsent l'inégalité de Gronwall «gauche» on obtient

$$\begin{aligned} |Y(t)| &\leq \left(|C| + \int_a^u |F| \right) \exp\left(\int_t^u |P| \right) \\ &\leq \left(|C| + \int_a^u |F| \right) \exp\left(\int_a^u |P| \right),\ a < t \leq u \end{aligned}$$

En combinant les deux cas, on obtient (1.24) . ■

Ci-dessous nous allons montrer que, dans les conditions du théorème 1.10, l'inégalité $a < t < b$ peut être remplacé par $a \leq t \leq b$ dans (1.24).

Théorème 1.11 *(Extensions continues aux d'extrémité) Soit* $J = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$. *Supposons que*

$$P \in M_n(L_{loc}(a, b), \mathbb{C});\ \ F \in M_{n,m}(L_{loc}(a, b), \mathbb{C}) \tag{1.26}$$

i) On suppose, en plus de (1.26), que

$$P \in M_n(L(a, c), \mathbb{C});\ \ F \in M_{n,m}(L(a, c), \mathbb{C}) \tag{1.27}$$

pour certains $c \in (a, b)$. *pour certains* $u \in J$ *et* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, *soit* Y *la solution du* PVI *(1.4), (1.5) sur* J. *Alors*

$$Y(a) = \lim_{t \longrightarrow a^+} Y(t) \tag{1.28}$$

existe et est finie.

ii) On suppose que, en plus de (1.26), P, F *satisfont*

$$P \in M_n(L(c, b), \mathbb{C});\ \ F \in M_{n,m}(L(c, b), \mathbb{C}) \tag{1.29}$$

pour certains $c \in (a, b)$, $u \in J$ *et* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, *soit* Y *la solution du* PVI *(1.4), (1.5) sur* J. *Alors*

$$Y(b) = \lim_{t \longrightarrow b^-} Y(t) \tag{1.30}$$

existe et est finie.

Preuve. Nous établissons le théorème 1.11 pour b ; la preuve pour le point d'extrémité a est semblable et donc omis. Il découle de (1.24) que $|Y|$ est bornée sur $[c, b)$ pour $c \in J$, dire par B. Soit $\{b_i\}$ une suite strictement croissante convergeant vers b. Alors pour $j > i$ nous avons

$$|Y(b_j) - Y(b_i)| = \left| \int_{b_i}^{b_j} PY \right| \leq B \int_{b_i}^{b_j} |P| \, .$$

De plus t la continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue, il s'ensuit que $\{Y(b_i) : i \in \mathbb{N}\}$ est une suite de Cauchy et donc converge vers une limite finie . ■

Le résultat suivant établit l'invariance de rang du solution de système homogène aux extrémités de l'intervalle sous-jacent et établit l'existence et l'unicité de solutions de problème aux valeurs initiales lorsque la condition initiale est spécifiée à un point d'extrémité.

Théorème 1.12 *(Invariance du rang aux extrémités) Soit* $J = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *.Supposons que*

$$P \in M_n(L_{loc}(a,b),\mathbb{C}). \tag{1.31}$$

i) Supposons, en plus de (1.31), que

$$P \in M_n(L(a,c),\mathbb{C}). \tag{1.32}$$

pour certains $c \in (a,b), u \in J$ *et* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, *soit* Y *la solution du* PVI *(1.4), (1.5) avec* $F = 0$ *dans* J. *Alors*

$$rangY(a) = rangY(u) \tag{1.33}$$

où $Y(a)$ *est donnée par (1.28). De plus, pour certains* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, *il existe une unique solution* Y *du problème de la valeur d'etrémité.*

$$Y' = PY, \quad Y(a) = C. \tag{1.34}$$

ii) Supposons, en plus de (1.31), qui

$$P \in M_n(L(c,b),\mathbb{C}). \tag{1.35}$$

pour certains $c \in (a,b)$, $u \in J$ *et* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, Y *est la solution du* PVI *(1.4), (1.5) avec* $F = 0$ *sur* J. *Alors*

$$rangY(b) = rangY(u) \tag{1.36}$$

où $Y(b)$ *est donnée par (1.30). De plus, compte tenu de tout* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, *il existe une unique solution* Y *du problème de la valeur d'extrémité .*

$$Y' = PY, \quad Y(b) = C. \tag{1.37}$$

Notons que les paramètres a *et* b *dans le théorème 1.12 peuvent être finie ou infinie .*

Preuve. Notons que (1.33) ou (1.36) ne suivent pas directement à partir de (1.10) et (1.28) ou (1.30) puisque le rang d'une matrice n'est pas une fonction continue de la matrice. nous argumentons comme suit : Soit $Y(u) = C$, $rangC = r$. Si $r = 0$, alors $Y(t) = 0$ pour tout $t \in J$

et $Y(b) = 0$ par (1.30). Si $r > 0$, soit $C_1, ..., C_r$ les colonnes linéairement indépendantes de $Y(u)$ et la construction d'une matrice $n \times n$ inversible D en ajoutant $n - r$ colonnes appropriées pour $C_j,\ j = 1, ..., r$. Soit Z représentent la solution de (1.9) déterminée par la condition initiale $Z(u) = D$. Il résulte de (1.11) que $Z(t)$ est inversible pour tout $t \in J$ et donc $Z(b)$ est inversible par (1.30) et (1.11). (Notons qu'il ne résulte pas directement du (1.30) seul que $Y(b)$ est inversible puisque le rang d'une matrice n'est pas une fonction continue de ses coefficients.) Donc $Z_1(b), ..., Z_r(b)$ sont linéairement indépendants.De la partie l'unicité et l'existence du Théorème 1.3 $-Y_r(t) = Z_r(t)$ pour $t \in J$ et donc aussi pour $t = b$ par (1.30); ansi $rangY(b) \geq r$. Si $rangY(b) = k > r$ alors $\sum_1^k c_j Y_j(t) = 0$ pour $t \in J$ et donc aussi pour $t = b$, contraduction avec $k > r$. La preuve et similaire pour l'extrimité a. Ceci établit (1.33) et (1.36). Pour montrer de plus les parties du théorème considérons la matrice fondamentale primaire Φ voir Définition 1.7, choisissons $u \in J$ et déterminer la solution Y de (1.9) par la condition initial $Y(u) = \Phi(b, u)C$. Alors $Y(b) = C$. Notons que $\Phi(b, u)$ existe par (1.30). La preuve de (1.34) est similaire. ■

Avant d'énoncer le théorème suivant nous donnons deux lemmes. Ceux-ci peuvent être d'intérêt indépendant.

Lemme 1.13 *Soient $J = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty,$, $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$, et $u \in J$. Alors pour tout $t \in J$ Nous avons*

$$\Phi(t, u, P) = I + \int_u^t P + \int_u^t P(r) \int_u^r P(s)dsdr + \int_u^t P(r) \int_u^r P(s) \int_u^s P(x)dxdsdr \ + ... \quad (1.38)$$

Preuve. Cela découle directement de preuve de l'approximations successives du théorème d'existence et unicité : Commençons par la première approximation $\Phi_0 = I$, Alors $\Phi_1 = I + \int_u^t P$, $\Phi_2 = I + \int_u^t P + \int_u^t P(r) \int_u^r P(s)dsdt$. ■

Le prochain lemme établit une formule de produit pour les solutions fondamentales. Cela peut être considéré comme une extension de la loi exponentielle

Lemme 1.14 *(Formule de produit) .Soit $P, H \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. Alors pour tout $t, u \in J$ nous avons*

$$\Phi(t, u, P + H) = \Phi(t, u, P)\Phi(t, u, S) \quad (1.39)$$

où

$$S = \Phi^{-1}(., u, P)\ H\ \Phi(., u, P). \quad (1.40)$$

Preuve. La preuve consiste à montrer que les deux parties respectent le même problème de valeur initiale, puis en utilisant le théorème d'existenceet d'unicité. ■

Lemme 1.15 *(Loi exponentielle) Soit $P, H \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C})$.Si P commute avec l'intégrale de H dans le sens*

$$P(t)\left(\int_u^s H\right) = \left(\int_u^s H\right)P(t), \quad s, t, u \in J \tag{1.41}$$

alors la loi exponentielle est détient :

$$\Phi(t, u, P + H) = \Phi(t, u, P)\Phi(t, u, H) \tag{1.42}$$

Preuve. Il résulte de lemmes 1.13 , 1.14 et l'hypothèse (1.41) que $\Phi(., u, P)H = H\,\Phi(., u, P)$ et par conséquent $S = H$ dans (1.40). ■

Théorème 1.16 *Soit $J = [a, b]$ un intervale compact, fixons $t, u \in J$, $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, $F \in M_{n,m}(L(J, \mathbb{C}))$. Pour $P \in M_n(L(J, \mathbb{C}))$ soit $Y = Y(t, u, C, P, F)$ est l'unique solution de (1.4), (1.5). Alors, l'application $P \longrightarrow Y(t, u, C, P, F)$ de l'espace de Banach $M_n(L(J, \mathbb{C}))$ vers $M_{n,m}(\mathbb{C})$ est différentiable et sa dérivée*

$$Y'(P) = \frac{\partial Y}{\partial P}(t, u, C, P, F) \tag{1.43}$$

est la transformation linéaire bornée de l'espace de Banach $M_n(L(J, \mathbb{C}))$ vers l'espace de Banach $M_{n,m}(\mathbb{C})$ donnée pour tout $H \in M_n(L(J, \mathbb{C}))$ par

$$\begin{aligned} Y'(P)H &= \Phi(t, u, P)\left(\int_u^t \Phi^{-1}(r, u, P)H(r)\Phi(r, u, P)dr\right)C \\ &\quad + \int_u^t \Phi(t, r, P)\left(\int_r^t \Phi^{-1}(s, u, P)H(s)\Phi(s, u, P)ds\right)F(r)dr \end{aligned} \tag{1.44}$$

Théorème 1.17 *Soit les hypothèses et notations du théorème 1.16 à lieu et supposons, de plus, que l'hypothèse de commutativité (1.41) est satisfaisante .alors*

1−

$$H(t)\Phi(t, u, P) = \Phi(t, u, P)H(t), \quad t, u \in J \tag{1.45}$$

2− *La loi exponentielle,*

$$\Phi(t, u, P + H) = \Phi(t, u, P)\Phi(t, u, H), \; t, u \in J \tag{1.46}$$

3− La formule (1.44) se réduit à

$$Y'(P)H = \Phi(t,u,P)\left(\int_u^t H(s)ds\right)C + \int_u^t \Phi(t,r,P)\left(\int_r^t H(s)ds\right)F(r)dr, \quad t,u \in J \qquad (1.47)$$

Remarque 1.18 *Notons toutefois que $Y'(P)$ n'est pas l'opérateur défini par le côté droit de (1.47) puisque H ne peut pas être restreint à satisfaire l'hypothèse de commutativité (1.41) dans la définition de la dérivée $Y'(P)$.*

Preuve. Cela résulte du théorème 1.16 et Lemme 1.15 . ∎

Remarque 1.19 *Dans le cas particulier où P et H sont des matrices constantes, nous avons*

$$\begin{aligned} Y'(P)H &= \exp((t-u)P)\left(\int_u^t \exp((u-r)P)H\exp((r-u)P)dr\right)C \qquad (1.48) \\ &\quad + \int_u^t \exp((t-r)P)\left(\int_r^t \exp((u-s)P)H\exp((s-u)P)ds\right)F(r)dr \end{aligned}$$

Notons que si P et H sont constants et commutent ,alors (1.48) se réduit à

$$Y'(P)H = (t-u)\exp((t-u)P)HC + \int_u^t (t-r)\exp((t-r)P)HF(r)dr.$$

Mais cette réduction ne détient pas, en général, pour les matrices constantes qui ne commutent pas.

1.6 Systèmes adjoints

Le concept de "adjoint" joue un rôle important dans l'étude des problèmes aux limites c'est juste comme il fait dans le cas de la théorie des matrices.

Lemme 1.20 *Soit P, Q deux fonctions matricielles complexes $k \times k$ sur J. Soit F, G deux fonctions matricielles complexe $k \times m$ sur J. Si $Y' = PY + F$ sur J et $Z' = QZ + G$ sur J et C est une matrice complexe constante $k \times k$, alors*

$$(Z^*CY)' = Z^*(Q^*C + CP)Y + Z^*CF + G^*CY. \quad sur\ J \qquad (1.49)$$

Corollaire 1.21 *Supposons et du* (1.20)*. Si, en plus, C est inversible et $Q = -C^{-1^*}P^*C^*$, Alors*

$$(Z^*CY)' = Z^*CF + G^*CY. \tag{1.50}$$

Les matrices fondamentales des systèmes adjointes sont étroitement liées les unes aux autre.

Théorème 1.22 *(Identité Adjointe).Soit $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$, et $E \in M_n(\mathbb{C})$ supposons*

$$E^{-1}E^* = I \quad ou \quad E^{-1}E^* = -I \tag{1.51}$$

et définir

$$P^+ = -E^{-1}P^*E \tag{1.52}$$

alors

$$\Phi(t, s, P) = E^{-1}\Phi^*(s,\ t,\ P^+)E,\ \ s, t \in J. \tag{1.53}$$

Preuve. fixons $s \in J$ et soit

$$Z(t) = E^{-1*}\Phi^*(t,\ s,\ P)E^*\Phi(t,\ s,\ P^+),\ t \in J.$$

notons que $Z(s) = I$ et

$$\begin{aligned}
Z'(t) &= E^{-1*}[P(t)\Phi(t,s,P)]^*E^*\Phi(t,s,P^+) + E^{-1*}\Phi^*(t,s,P)E^*P^+(t)\Phi(t,s,P^+) \\
&= E^{-1*}\Phi^*(t,s,P)EE^{-1}P^*(t)EE^{-1}E^*\Phi(t,s,P^+) \\
&\quad +E^{-1*}\Phi^*(t,s,P)E^*P^+(t)\Phi(t,s,P^+) \\
&= -E^{-1*}\Phi^*(t,s,P)E^*P^+(t)\Phi(t,s,P^+) \\
&\quad +E^{-1*}\Phi^*(t,s,P)E^*P^+(t)\Phi(t,s,P^+) \\
&= 0,\ t \in J,
\end{aligned}$$

en utilisant (1.51) et (1.52). donc $Z(t) = I$, pour $t \in J$. C'est ce qui est équivalent à (1.53) résulte de la représentation $\Phi(t,\ s,\ P^+) = Y(t)Y^{-1}(s), s, t \in J$, pour n'importe quelle matrice fondamentale Y de $Y' = P^+Y$. ■

1.7 Problèmes Inverses aux valeurs initiales.

Notation 1.23 *Etant donné d vecteurs de dimension n, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_d$ on note $n \times d$ la matrice dont les $i^{\text{ème}}$ colonne est $Y_i, i = 1, \ldots, d$, est donné par*

$$Y = [Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_d]. \tag{1.54}$$

Ci-dessus, nous avons commencé avec une matrice de coefficient P et, éventuellement, un terme non homogène F et alors étudié l'existence de solutions et leurs propriétés. Ici, nous inverser cette tendance. Compte tenu d'un certain nombre de fonctions, dans quelles conditions sont-ils des solutions d'un système linéaire de premier ordre ? Pour des raisons d'exhaustivité, nous affirmons le théorème à la fois directs et les problèmes inverses.

Théorème 1.24 *(i) Soit $1 \leq d \leq n,\ P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. Supposons que $Y_i,\ i = 1, \ldots, d$ sont Le vecteur solution de*

$$Y' = PY. \tag{1.55}$$

Si

$$rang[Y_1,\ Y_2,\ \ldots, Y_d](t) = d \tag{1.56}$$

pour certains t dans J, alors c'est vrai pour tout t dans J.

(ii) Soit $Y_i \in M_{n,1}(AC_{loc}(J)), i = 1, \ldots, d, 1 \leq d \leq n$. et supposons que

$$rang[Y_1,\ \ldots,\ Y_d](t) = d \quad pour\ t \in J. \tag{1.57}$$

Alors il existe une matrice carré $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$ tels que $Y_i, i = 1, \ldots, d,,$ sont des solutions de (1.55).

En outre, si $Y_i \in M_{n,1}(C^1(J), \mathbb{C}), i = 1, \ldots, d$ alors il existe une telle P continue.

Chapitre 2

Problèmes aux limites à Valeur régulière

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats du chapitre 1 à l'étude des problèmes de valeurs initiales (PVI) constitués de l'équation scalaire du second ordre

$$-(py')' + qy = f \quad sur \quad J \tag{2.1}$$

sous les conditions initiales

$$y(c) = h, \quad (py')(c) = k, \;\; c \in J, \;\; h, k \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

où

$$J = (a,\ b), \; -\infty \leq a < b \leq \infty, \quad et \;\; \frac{1}{p}, q, f : J \to \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

2.2 Problèmes à Valeur initiale (PVI)

2.2.1 Existence et unicité.

Définition 2.1 *(Solution). Par une solution de l'équation (2.1) , on entend une fonction* y : $J \to \mathbb{C}$ *de telle sorte que* y *et* $y^{[1]} = py'$*sont absolument continue sur chaque sous-intervalle compact de* J *et l'équation (2.1) est satisfaite p.p sur* J*. Compte tenu d'une solution* y *de (2.1).*

Théorème 2.2 *Supposons que*

$$\frac{1}{p}, q, f \in L_{loc}(J, \mathbb{C}). \tag{2.4}$$

Alors chaque problème de valeur initiale (PVI) *(2.1), (2.2), (2.3) a une unique solution définie sur J. De plus si toutes les données* p, q, f, h, k *sont réel, alors la solution est réel sur* J*.*

Preuve. soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Alors, l'équation (2.1) est équivalent au système du premier ordre

$$Y' = PY + F \ \ sur \ J, \tag{2.6}$$

en ce sens que, compte tenu de toute solution scalaire y de (2.1) le vecteur Y défini par (2.5) est une solution du système (2.6) et, inversement,étant donné toute solution de vecteur Y de système (2.6) son composant haut y est une solution de (2.1) . ■

Remarque 2.3 *Notons que les solutions dépendent de* $\frac{1}{p}$ *et pas de* p*. Cela ressort clairement de la représentation (2.4) et (2.5).*

Dans la théorie des problèmes aux limites le paramètre spectrale λ et la fonction de poids w jeuent un rôles important, donc nous étudions également l'équation

$$-(py')' + qy = \lambda wy \ \text{ sur } J, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.7}$$

où

$$\frac{1}{p}, q, w \in L_{loc}(J, \mathbb{C}), J = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty. \tag{2.8}$$

2.2.2 Prolongements continus aux extrémités.

La nature des coefficients au voisinage des points d'extrémité détermine le comportement des solutions là-bas. Quel est le comportement «regulier» de solutions au voisinage d'un point d'extrémité et quand ça se produit ? Ce sont le genre de questions que nous poursuivons dans cette section.

Extrémités réguliers et singuliers

Définition 2.4 *Soit $J = (a,\ b), -\infty \leq a < b \leq \infty$,et considérons l'équation (2.1) sous les conditions (2.4). Alors l'extrimité a est dite régulière (ou équation (2.1) est régulière à a) si*

$$\frac{1}{p},\ q,\ f \in L\left((a,\ d), \mathbb{C}\right) \tag{2.9}$$

pour certains $d \in J$, sinon il est appelé singulier. De même, l'extrémités b est dite régulière si

$$\frac{1}{p}, q, f \in L\left((d, b), \mathbb{C}\right) \tag{2.10}$$

pour certains $d \in J$, sinon il est appelé singulier.

Remarque 2.5 *Ce n'est pas la nature finie ou infinie de l'extrémité b , mais la condition (2.10) qui détermine si oui ou non toutes les solutions de (2.1) et leurs quasi-dérivés ont des limites finies à b. C'est une définition naturelle du comportement «regulier » à b. Même remarques s'appliquent à l'extrémité a.*

Ensuite, nous prenons la question de l'extension continue des extrémités de solutions et de leurs quasi-dérivés de l'équation scalaire de SL .

Théorème 2.6 *Supposons que*

$$\frac{1}{p}, q, f \in L\left((a, d), \mathbb{C}\right)$$

Alors

1− *La limite*

$$y(a) = \lim_{t \to a+} y(t),\ \ y^{[1]}(a) = \lim_{t \to a+} y^{[1]}(t) \tag{2.11}$$

existent et sont finis ssi

$$\frac{1}{p}, q, f \in L\left((a, d), \mathbb{C}\right) \tag{2.12}$$

pour certain $d \in (a,\ b)$.

2$-$ *La limite*

$$y(b) = \lim_{t \to b^-} y(t),\ \ y^{[1]}(b) = \lim_{t \to b^-} y^{[1]}(t) \tag{2.13}$$

existent et sont finis pour toute solution y *et sa quasi-dérivé* $y^{[1]}$ *de l'équation (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) si et seulement si on a*

$$\frac{1}{p}, q, f \in L(d, b) \tag{2.14}$$

pour certain $d \in (a, b)$.

Preuve. La suffisance des conditions (2.14), (2.12) résulte du théorème (1.11). Une preuve de la nécessité peut être construit le long des lignes de la preuve du théorème (1.6). ■

Théorème 2.7 *Supposons*

$$\frac{1}{p}, q, w \in L(J, \mathbb{C}). \quad J = (a,\ b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty \tag{2.15}$$

Alors, chaque solution non triviale y *de (2.7) et son quasi-dérivé* $y^{[1]}$ *sont des fonctions entières de* λ *d'ordre au plus* $\frac{1}{2}$. *Plus précisément, il existe des constantes positives* M, B, δ *tels que*

$$\begin{aligned} |y(t,\ \lambda)| &\leq Be^{M\sqrt{|\lambda|}},\ a \leq t \leq b,\ |\lambda| \geq \delta \\ \left|(py^{'})(t, \lambda)\right| &\leq Be^{M\sqrt{|\lambda|}},\ a \leq t \leq b,\ |\lambda| \geq \delta \end{aligned}$$

Preuve. Soit $v = py'$alors $v' = (q - \lambda w)y$. Fixons λ et notons par le signe prime "$'$" la différenciation par rapport à t. Alors

$$\begin{aligned} [|\lambda|\ |y|^2 + |v|^2]' &= [|\lambda|\overline{y}y + \overline{v}v]' \\ &= |\lambda|(\frac{1}{p}y\overline{v} + \frac{1}{p}v\overline{y}) + \overline{v}(q - \lambda w)y + v(\overline{q} - \overline{\lambda}\overline{w})\overline{y}. \end{aligned}$$

de plus en utilisant l'inégalité

$$2|ab| \leq \frac{|\lambda||a|^2 + |b|^2}{\sqrt{|\lambda|}},\ |\lambda| \neq 0$$

on obtien

$$[|\lambda|\ |y|^2 + |v|^2]' \leq \frac{|\lambda||y|^2 + |v|^2}{\sqrt{|\lambda|}} \left(|\lambda|\frac{1}{|p|} + |q| + |\lambda||w|\right)$$

et donc

$$[\log(|\lambda||y|^2+|v|^2)]' \leq \sqrt{|\lambda|}\frac{1}{|p|}+\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}|q|+\sqrt{|\lambda|}|w|.$$

par intégration on obtien

$$\begin{aligned}|\lambda||y(t,\ \lambda)|^2+|v(t,\ \lambda)|^2 &\leq C\ e^{\sqrt{|\lambda|}\int_a^t\left(\frac{1}{|p|}+|w|\right)+\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\int_a^t|q|} \\ &\leq Be^{M\sqrt{|\lambda|}},\ \ 0<M=\int_a^b\left(\frac{1}{|p|}+|w|\right)<\infty,\ e^{\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\int_a^b|q|\right)}<B<\infty.\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

2.2.3 Théorème de séparation et comparaison de Sturm

Deux des plus célèbres résultats dans la théorie des équations différentielles linéaires de second ordre sont ; le théorème de séparation et comparaison de Sturm. Elles sont établies dans cette partie. Mais d'abord, afin de leur donner un sens, nous montrons que les zéros de solutions non triviales sont isolés à tous les points réguliers.

Théorème 2.8 *Sopposons qu'on a (2.7), (2.8) . et que*

$$p,\ q,\ w: J\to\mathbb{C},\ p>0,\ p.p.,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Alors les zéros de chaque solution non triviale y de (2.7) sont isolées dans l'intérieur de J et aussi à extrémités réguliers de J c-à-d si une solution non triviale y a un zéro à un point d'extrémité régulière de J alors il existe un voisinage d'un côté correspondant a ce point d'extrémité dans laquelle y n'a pas d'autre zéro. Ainsi, seul extrémité singuliers de J peuvent être des points d'accumulation de zéros de y de (2.7).

Preuve. Soit y une solution non triviale de (2.7). Tout d'abord, nous montrons que si y a des zéros consécutifs à $c,d\in(a,b),\ c<d$, alors $(py')(h)=0$ pour un certain $h\in(c,d)$, nous avons

$$0=y(d)-y(c)=\int_c^d y'=\int_c^d\frac{1}{p}(py')=(py')(h)\int_c^d\frac{1}{p}$$

par le théorème de la Valeur moyen de l'intégrale de Lebesgue. (Rappelons que (py') est continue sur J.) Donc soit $(py')(h)=0$ ou $\int_c^d\frac{1}{p}=0$, mais celle-ci impliquerait que $\frac{1}{p}=0$ $p.p$ dans (c,d) ce qui contredit l'hypothèse que $p>0$ $p.p$ dans $(a,\ b)$.

Maintenant, pour prouver la proposition principale supposons qu'il existe une suite $\{t_n \in (a,b) : n \in \mathbb{N}_0\}$ tel que $t_n \to t_0$ et $y(t_n) = 0, n \in \mathbb{N}_0$. Alors $y(t_0) = 0$ puisque y est continue et de la première partie de la preuve nous obtenons une suite $\{s_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ avec $s_n \to t_0$ tels que $(py')(s_n) = 0$. Puisque $y^{[1]}$ est continue dans (a,b), il s'ensuit que $y^{[1]}(t_0) = 0$. Mais $y(t_0) = 0$ et $y^{[1]}(t_0) = 0$ implique que y est identiquement nulle sur J par l'unicité de problème de valeur initiale. Cette contraduction complet la preuve. ■

Théorème 2.9 *(théorème de séparation de Sturm). Soit (2.7), (2.8) avec $\mathbb{C} = \mathbb{R}$ et supposons que $p > 0$ p.p sur J et λ est réel. Supposons que y et z sont des solutions linéairement indépendantes de (2.7). Alors, z a un zéro strictement entre deux zéros de y.*

Preuve. Supposons que $y(c) = 0 = y(d)$. Puisque y et z sont linéairement indépendants ne sont pas solution triviale et ils n'ont pas de zéro commun. D'après le théorème (2.8) on peut supposer que c et d sont des zéros consécutifs de y et que $c < d$. En outre, remplaçant y par $-y$, si nécessaire, nous pouvons supposer que $y > 0$ sur l'intervalle ouvert (c,d). Alors

$$0 < y(t) - y(c) = \int_c^t \frac{1}{p}(py')$$

Ceci implique que $(py')(c) > 0$. Sinon, puisque py' est continue et $(py')(c)$ n'est pas nulle, en supposant que $(py')(c) < 0$ implique qu'il est négatif dans un voisinage droit de c et ce en contradiction avec l'équation ci-dessus. De même, nous obtenons que $(py')(d) < 0$.

Maintenant multipliant l'équation de y par z et l'équation de z par y et on obtient en soustrayant

$$0 = z(py')' - y(pz')' = [z(py') - y(pz')]'.$$

par intégration on obtient

$$z(d)(py')(d) - z(c)(py')(c) = 0.$$

Supposons que z n'a pas de zéro dans (c,d). Si $z > 0$ sur (c,d) alors le côté gauche de l'équation ci-dessus est positive en donnant une contradiction. Une contradiction similaire est atteint si $z < 0$ ce qui acheve la preuve. ■

L'exemple suivant montre que l'hypothèse $p > 0$ *p.p* sur J ne peut pas être omis dans le théorème de séparation de Sturm.

Exemple 2.10 *L'équation*

$$-(py')' = 0 \ sur \ (0,1), \ -\frac{1}{p(t)} = t^{-2} sin(\frac{1}{t}), \ 0 < t < 1$$

a des solutions $u(t) = 1, v(t) = cos(\frac{1}{t})$*, sur* $(0,1)$*. Alors* $u(t) \neq 0 \ \forall t \in (0,1)$*, tandis que la solution* v *est oscillatoire à* 0 *car il a un nombre infini de zéros dans n'importe quel voisinage droit de* 0*. L'extrémité* 0 *est singulier. Considérons cette équation sur un intervalle* $J = (\varepsilon, 1), \ 0 < \varepsilon < 1$*. Alors,*$u(t) \neq 0 \ \forall t \in J$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0$*,suffisament petit, pour que la solution* v *a* n *zéros sur* J*.*

Ensuite, nous discutons le théorème de comparaison qui est un outil important dans l'obtention des conditions suffisantes pour l'oscillation.

Etant donné un point d'extrémité singulier de l'équation

$$(py')' + qy = 0 \ sur \ J, \ \ \frac{1}{p}, q \in L_{loc}(J, \mathbb{R}), \ p > 0 \ \ pp, \ \text{sur} \ \ J = (a,b). \tag{2.16}$$

il résulte du théorème de séparation de Sturm que soit toutes les solutions non triviales sont oscillatoire à ce point d'extrémité ou aucun d'eux l'est. Donc l'oscillation à un point d'extrémité singulier donné est une propriété de l'équation elle-même, non seulement de donner une solution particulière.alors on a

Définition 2.11 *On dit que l'équation (2.16) est oscillatoire* (O)*, à* a *si pour tout* $c \in J$ *il existe une solution non triviale qui possède une infinité de zéros dans l'intervalle* $(a, \ c)$*. De même pour l'extrémité* b*.*

Théorème 2.12 *(théorème de comparaison de Sturm). Supposons qu'on a (2.16). Considérons une équation de comparaison*

$$(Pz')' + Qz = 0 \ sur \ J = (a,b). \tag{2.17}$$

Supposons $\frac{1}{P}$*,* $Q \in L_{loc}(J, \mathbb{R})$ *et satisfait*

$$Q \geq q, \ 0 < P \leq p \ sur \ J. \tag{2.18}$$

Supposons que y est une solution non-triviale de (2.16) satisfaisant $y(c) = 0 = y(d)$,$\forall\ c, d \in J$, $c < d$. Alors, chaque solution de (2.17) a un zéro dans l'intervalle fermé $[c, d]$.

Preuve. Puisque les zéros de y sont isolés par le théorème (2.9) on peut supposer que c et d sont des zéros consécutifs de y. Remplace y par $-y$, si nécessaire, nous pouvons également supposer que $y > 0$ sur (c, d). Supposons que z est une solution non triviale de (2.17) qui n'a pas de zéro dans $[c, d]$. Alors, par un calcul directe, quoique fastidieux, donne l'identité de Picone :

$$\left[\frac{y}{z}(py'z - Pz'y)\right]' = (Q-q)y^2 + (p-P)y'^2 + P\frac{(yz'-zy')^2}{z^2} \tag{2.19}$$

par integration on obtien

$$\int_c^d (Q-q)y^2 + \int_c^d (p-P)y'^2 = -\int_c^d P\frac{(yz'-zy')^2}{z^2} \tag{2.20}$$

L'hypothèse (2.18) implique que $yz' - zy' = 0$ $p.p$ sur $[c, d]$. Par conséquent $f = \frac{y}{z} = 0$ et, donc, $y = 0$ sur $[c, d]$. D'après le théorème d'existence et d'unicité cela implique que y est la solution triviale sur J et cette contradiction d'ou le resultat ■

Nous terminons ce paragraphe avec un exemple pour montrer que lorsque p change de *sign* le comportement des classiques et quasi-dérivés d'une solution peut être très différente.

Exemple 2.13 *Soit*

$$p(t) = \frac{1}{cos(\ln(t))},\ \ 0 < t \leq 1.$$

alors $\frac{1}{P} \in L^1(0,1)$ *et l'equation*

$$-(py')' = 0\ \ sur\ (0,1)$$

est régulière à 0 *et à* 1 *et a*

$$y = \int cos(\ln(t))dt,\ \ v(t) = 1$$

comme solutions. Notons que le point 0 *est un point d'accumulation des zéros de* y' *puisque* $y'(t_k) = 0$ *où*

$$t_k = e^{-k\pi/2} \to 0, quand \quad k \to \infty,$$

mais $(py')(t) = 1$ *pour* $t \in [0,1]$. *Le wronskien*

$$W(y,\ v)(t) = \begin{vmatrix} y & v \\ py' & pv' \end{vmatrix}(t) = -1,\ 0 \leq t \leq 1,$$

mais le Wronskien classique

$$\begin{vmatrix} y & v \\ y' & v' \end{vmatrix}(t) = -cos(\ln(t)),\ 0 < t \leq 1$$

est non constante avec un point d'accumulation des zéros à 0.

2.3 Problèmes aux limite régulier à deux points

Dans cette partie , nous étudions les problèmes de Sturm-Liouville (PSL) régulié avec deux points de conditions aux limites (CB) auto-adjoint et non auto-adjoint .

2.3.1 Caractérisation transcendantale des valeurs propres.

PSL a deux point régulier se compose de l'équation

$$-(py')' + qy = \lambda wy \quad sur \quad J = (a,\ b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty, \tag{2.21}$$

où

$$r = \frac{1}{p}, q, w \in L(J, \mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.22}$$

ainsi que les conditions aux limites

$$AY(a) + BY(b) = 0,\ Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix},\ A, B \in M_2(\mathbb{C}). \tag{2.23}$$

où $M_2(\mathbb{C})$ denote une matrice complexe 2×2 . D'après le théorème 2.6, $Y(a), Y(b)$ existent et sont des limites finis de sorte que (2.23) est bien défini. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Alors, l'équation scalaire (2.21) est équivalent au système du premier ordre

$$Y' = (P - \lambda W)\, Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q - \lambda w & 0 \end{pmatrix} Y,\ Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Soit $\Phi(\cdot, u, P, w, \lambda)$ la matrice fondamentale primaire de solution du problème à valeur initiale et rappelons que

$$\Phi' = (P - \lambda W)\Phi \text{ sur } J, \text{ avec } \Phi(u, u, \lambda) = I,\ a \leq u \leq b,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.26}$$

et définir la fonction caractéristique δ, par

$$\delta(\lambda) = \delta(a, b, A, B, P, w, \lambda) = \det[A + B\Phi(b, a, P, w, \lambda)],\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.27}$$

La fonction δ appelé une fonction caractéristique. Nous montrons ci-dessous que les zéros sont précisément les valeurs propres du problème.

Lemme 2.14 *Supposons qu'on a (2.21) , (2.22),(2.23) . Alors, la fonction caractéristique δ est bien définie et est une fonction entière en λ pour (a, b, A, B, P, p) fixes.*

Lemme 2.15 *Supposons qu'on a (2.21) à (2.22). Alors*

$1-$ $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre de PVB à (2.21) , (2.22), (2.23) si et seulement si* $\delta(\lambda) = 0$.

$2-$ *La multiplicité géométrique de λ est égal au nombre de solutions linéairement indépendant de vecteurs $C = Y(a)$ du système linéaire*

$$[A + B\Phi(b, a, \lambda)]C = 0. \tag{2.28}$$

Preuve. Supposons $\delta(\lambda) = 0$. Alors (2.28) a une solution non triviale de vecteur pour C. Soit $Y(a) = C$ et résoudre PVI

$$Y' = (P - \lambda W)Y \quad sur \quad J \quad , Y(a) = C.$$

alors

$$Y(b) = \Phi(b, a, \lambda)Y(a) \quad et \quad [A + B\Phi(b,\ a,\ \lambda)]Y(a) = 0.$$

D'où il suit que l'élément supérieur de Y, par exemple, y est un vecteur propre de la PVB (2.21) , (2.22), (2.23) ce qui implique λ est une valeur propre de cette PVB. Inversement, si λ est une valeur propre et y un vecteur propre de λ, alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix}$ satisfaisans $Y(b) = \Phi(b,\ a,\ \lambda)Y(a)$ et par consequence $[A + B\Phi(b,\ a,\ \lambda)]Y(a) = 0$. Puisque $Y(a) = 0$ implique que y est la solution triviale en contradiction avec elle étant un vecteur propre, nous avons $\det[A + B\Phi(b,\ a,\ \lambda)] = 0$. Si (2.28) a deux solutions linéairement indépendantes pour C, qui soient C_1, C_2, alors à résoudre le PVI avec les conditions initiales $Y(a) = C_1, Y(a) = C_2$ à l'obtention des solutions Y_1, Y_2.Alors Y_1, Y_2 sont des solutions de vecteurs linéairement indépendants de (2.25) et leur composants principaux Y_1, Y_2 sont des solutions linéairement indépendantes de (2.21). Inversement, si Y_1, Y_2 sont des solutions linéairement dépendants de (2.21), nous pouvons inverser les étapes ci-dessus pour obtenir deux solutions linéairement indépendantes du système algébrique (2.28). $\blacksquare$

Le résultat suivant montre que tout nombre complexe donné est une valeur propre de multiplicité géométrique deux pour précisément une condition au limite.

Il est commode de classer les conditions aux limites (CB) (2.23) en deux catégories mutuellement exclusives : séparés et couplés. Notons que, puisque la CB sont homogènes, la multiplication par une constante non nulle ou une matrice non singulière conduit à des conditions aux limites équivalentes

2.3.2 CB Séparé

Lemme 2.16 *Supposos qu'on a (2.21) à (2.27) . Fixons P, W, J et supposons que*

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

alors

$$\delta(\lambda) = A_2B_1\phi_{11}(b,a,\lambda) - A_2B_2\phi_{21}(b,a,\lambda) + A_1B_1\phi_{12}(b,a,\lambda) + A_1B_2\phi_{22}(b,a,\lambda)$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve. Cela découle directement de la définition de δ. ∎

La caractérisation des valeurs propres comme des zéros d'une fonction entière donnée par le lemme (2.15) se réduit à une forme plus simple et plus instructif lorsque les conditions aux limites sont auto-adjoint et couplé. Cette réduction est donné par le lemme suivant.

2.3.3 CB Couplé auto-adjoint

Lemme 2.17 *Supposos qu'on a (2.21) à (2.27) . soit $\Phi = (\Phi_{ij})$. Fixons P, W, J et supposons que*

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; A=e^{i\alpha}K, -\pi \leq \alpha \leq \pi, \; K \in SL_2(\mathbb{R}), \tag{2.30}$$

ou K est une matrice réelle 2×2 de déterminant égale à 1. Soit $K=(k_{ij})$ et définir

$$\begin{aligned} D(\lambda, \; K) \;&=\; k_{11}\phi_{22}(b,a,\lambda) - k_{12}\phi_{21}(b,a,\lambda) \\ &\quad -k_{21}\phi_{12}(b,a,\lambda) + k_{22}\phi_{11}(b,a,\lambda) \end{aligned} \tag{2.31}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons que $D(\lambda, K)$ ne dépend pas de α. Alors

1. *Le nombre complexe λ est une valeur propre de PVB (2.21) , (2.22), (2.23), (2.30) si et seulement si*

$$D(\lambda, \; K) = 2\cos\alpha, \; -\pi \leq \alpha \leq \pi; \tag{2.32}$$

2. *Si p, q, w sont à valeurs réelles et λ est une valeur propre de $A=e^{i\alpha}K$, $B=-I$, $0<\alpha<$*

π, avec u et une fonction propre , alors λ est aussi une valeur propre de $A = e^{-i\alpha}K,\ B = -I$ mais avec la fonction propre $\overline{u}$.

Preuve. Par le théorème (1.4) nous avons $\det \Phi(b,\ a,\ \lambda) = 1$. Par (2.27), (2.31) et notant que $\det K = 1$ nous obtenons,

$$\begin{aligned} \delta(\lambda) &= \det\left(e^{i\alpha}K - \Phi\right) = \begin{vmatrix} e^{i\alpha}k_{11} - \Phi_{11} & e^{i\alpha}k_{12} - \Phi_{12} \\ e^{i\alpha}k_{21} - \Phi_{21} & e^{i\alpha}k_{22} - \Phi_{22} \end{vmatrix} \\ &= 1 + e^{2i\alpha} - e^{i\alpha}D(\lambda,\ K). \end{aligned}$$

donc $\delta(\lambda) = 0$ est équivalent à

$$D(\lambda,\ K) = -e^{i\alpha} - e^{i\alpha} = -2\cos\alpha.$$

Partie 2) résulte de.(2.32) et en prenant le conjugués de l'équation (2.21). ■

2.4 Equation de Fourier

Nous nous intéréssons maintenant à considérer le PSL simple pour au moins deux raisons :

(i) Pour illustrer les résultats de la partie précédente , (ii) d'indiquer quelques-unes des attractions à venir, (iii) Il est remarquable combien de propriétés de PSL pour la simple équation de SL.

Considérons l'équation

$$-y'' = \lambda y \quad sur\ (a,\ b), -\infty \leq a < b \leq \infty, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.33}$$

Nous incluons ici le cas où un ou les deux extrémités sont infinies, même si c'est un problème singulier alors ($p = 1 = w$ ne sont pas dans $L(J, \mathbb{R})$ si J n'est pas borné) , pour mettre en évidence l'interaction entre les problèmes réguliers et singuliers.

Chaque point d'extrémité est infini dans le cas de PL puisque la constante 1 est une solution non L_2 pour $\lambda = 0$. Ainsi, il existe une et une seule réalisation auto-adjoint, dite S, de l'équation (2.33) dans l'espace $L_2(-\infty,\ \infty)$. Le spectre de S, $\sigma(S)$, ne contient pas de valeurs propres et donc coïncide avec le spectre essentiel (continu) $\sigma_e(S)$, nous avons

$$\sigma(S) = \sigma_e(S) = [0, \infty).$$

Dans ce cas,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque ceux-ci sont fixés pour cet exemple, nous allons les omettres dans la notation pour Φ. Cette matrice fondamentale $\Phi = \Phi(t, u, P, W, \lambda) = \Phi(t, u, \lambda)$ est déterminé comme étant l'unique solution du problème de valeur initiale

$$\Phi' = (P - \lambda W)\Phi, \quad \Phi(u) = I, \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pour calculer Φ nous choisissons une branche analytique de la fonction racine carrée $\sqrt{z}$ comme suit :

$$\mu = \sqrt{\lambda} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} i\theta},\ \text{pour } \lambda = re^{i\theta},\ \text{avec } -\pi < \theta \leq \pi$$

et on obtien

$$\Phi(t,\ u,\ \lambda) = \begin{pmatrix} \cosh(i\mu(t-u)) & \frac{1}{i\mu}\sinh(i\mu(t-u)) \\ i\mu\sinh(i\mu(t-u)) & \cosh(i\mu(t-u))) \end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

$$t, u \ \in\ \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0,\ \mu = \sqrt{\lambda},$$

et

$$\Phi(t, u, 0) = \begin{pmatrix} 1 & t-u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t, u \in \mathbb{R}. \tag{2.35}$$

Notons que pour $t, u \in \mathbb{R}$ fixé la matrice fondamentale $\Phi(t, u, \lambda)$ est analytique parraport à $\lambda \in \mathbb{C}$, y compris $\lambda = 0$. (Cela peut être confirmé par les développements en série des fonctions hyperboliques sinh et cosh .)

Maintenant, soit $-\infty < a < b < \infty$ et considerons les deux conditions au bord

$$AY(a) + BY(b) = 0,\ A, B \in M_2(\mathbb{C}). \tag{2.36}$$

Nous examinons maintenant les conditions aux limites séparés et couplées.

1) CB **Couplé .**

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

De (2.27), (2.34), (2.35), (2.37), nous obtenons

$$\delta(\lambda) = 1 + cd + (c+d)\cosh(i\mu(b-a)),\ \ \mu = \sqrt{\lambda} \neq 0. \tag{2.38}$$

Dans tous les exemples ci-dessous le cas $\lambda = 0$ doit être vérifiée séparément puisque $\lambda = 0$ joue un rôle particulier dans ces formules.

Nous considérons maintenant un certain nombre de cas particuliers de (2.37).

1. $c = -d$. Alors $\delta(\lambda) = 1 - c^2$, une constante indépendante de λ. Si cette constante est nulle, alors tout nombre complexe est une valeur propre ; si non , alors aucun nombre complexe est valeur propre. En particulier, nous avons

(a) Pour $c = 1, d = -1$ chaque nombre complexe est une valeur propre.

(b) Pour $c = -1, d = 1$ tout nombre complexe est une valeur propre.

(c) Pour $c \in \mathbb{C}, c \neq 1, c \neq -1$,et $d = -c$ aucun nombre complexe est une valeur propre.

2. $c \neq -d$. L'équation caractéristique pour les valeurs propres est :

$$\cosh((i\mu(b-a)) = \cos(-\mu(b-a)) = -\frac{1+cd}{c+d} = h.$$

Les racines de cette équation sont donnés par

$$\begin{aligned} -\mu(b-a) &= \pm\arccos h + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \arccos z &= \int_z^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin z, \\ \arcsin z &= \int_0^z \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

et les deux intégrales doivent être prises le long d'un chemin qui ne traverse pas l'axe réel.

Lorsque r est réel et $-1 \leq h \leq 1$ alors les racines pour $\mu(b-a)$ sont réels et nous obtenons

$$\mu(b-a) = \mp\arccos h - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

de plus $\mu = s > 0$ nous obtenons

$$\mu(b-a) = \arccos h + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Nous considérons maintenant quelques cas particuliers de ce cas :

(a) $c = i = d$. Ici, $h = 0$ et

$$\mu(b-a) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{N}_0$$

et les valeurs propres sont

$$\lambda_n = \frac{(\frac{\pi}{2} + n\pi)^2}{(b-a)^2}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) $c = -1 = d$.

C'est le cas périodique (P) auto-adjoint avec $h = 1$. Notons d'abord que $\lambda = 0$ est une valeur propre pour ce cas. Les autres valeurs propres resultes de $\mu(b-a) = 2k\pi, \ k \in \mathbb{N}$ et par conséquent les valeurs propres$\left\{\lambda_n^P; \ n \in \mathbb{N}\right\}$sont donnés par :

$$0, \frac{(2\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(2\pi)^2}{(b-a)^2}, \ \frac{(4\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(4\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(6\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(6\pi)^2}{(b-a)^2}, ..., \ \lambda_n^P = \frac{(2n\pi)^2}{(b-a)^2}$$

avec les fonctions propres u_n donnée par :

$$1, \ sin(2\pi(t-a)), \ cos(2\pi(t-a)), \ sin(4\pi(t-a)), \ cos(4\pi(t-a)),$$
$$sin(6\pi(t-a)), \ cos(6\pi(t-a)), \ sin(8\pi(t-a)), ...$$

Notons que $\lambda_0 = 0$ est simple et toutes les autres valeurs propres sont double.

(c) $c = d = 1$.

Il s'agit le cas semi-périodique (S) auto-adjoint avec $h = -1$. Nous notons que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre dans ce cas. En procédant comme ci-dessus, nous obtenons

$$\mu(b-a) = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Par conséquent, les valeurs propres$\{\lambda_n^s;\ n \in \mathbb{N}\}$ dans ce cas sont donnés par

$$\frac{(\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(\pi)^2}{(b-a)^2},\ \frac{(3\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(3\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(5\pi)^2}{(b-a)^2}, \frac{(5\pi)^2}{(b-a)^2}, ..\lambda_n^S = \frac{((2n+1)\pi)^2}{(b-a)^2},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

avec des fonctions propres u_n :

$$sin(\pi(t-a)), cos(\pi(t-a)), sin(3\pi(t-a)), cos(3\pi(t-a)),$$
$$sin(5\pi(t-a)), cos(5\pi(t-a)), sin(7\pi(t-a)), ...$$

(d) $c = \frac{1}{d},\ c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$

Cela donne $h = -\frac{(1+1)}{(c+\frac{1}{c})}$. puisque $c + \frac{1}{c} > 2$ si $c > 0$, et $c \neq 1$; $c + \frac{1}{c} < -2$ si $c < 0$ et $c \neq -1$, nous avons $-1 < h < 1$. Soit

$$\pm t_0(c) = \arccos(h),\ 0 < t_0(c) < \pi.$$

Alors les racines sont donnés par

$$(b-a)\mu = \pm t_0(c) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0$$

et donc les valeurs propres sont

$$\lambda_n(c) = \frac{(\pm t_0(c) + 2n\pi)^2}{(b-a)^2},\ n \in \mathbb{N}_0$$

(e) $c = e^{i\alpha} = d, 0 < \alpha < \pi.$

ici

$$r = -\frac{1+e^{2i\alpha}}{2e^{i\alpha}} = -\cos\alpha,\quad t_0(\alpha) = \arccos(-\cos\alpha) = \pi - \alpha \in (0, \pi).$$

Donc

$$(b-a)\mu = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}_0,$$

et par conséquent

$$\lambda_n(\alpha) = \frac{(\pi - \alpha + 2n\pi)^2}{(b-a)^2},\ n \in \mathbb{N}_0.$$

2) CB **Séparé .**

Ici, nous prenons

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}, \ A_j, \ B_j \in \mathbb{C}, \ j = 1, 2.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} -\delta(\lambda) &= A_1B_1\Phi_{12}(b,a,\lambda) + A_1B_2\Phi_{22}(b,a,\lambda) - A_2B_1\Phi_{11}(b,a,\lambda) - A_2B_2\Phi_{21}(b,a,\lambda) \\ &= (A_1B_2 - A_2B_1)\cosh((i\mu(b-a)) + (\frac{1}{\mu}A_1B_1 - i\mu A_2B_2)\sinh((i\mu(b-a)). \end{aligned}$$

Notons que $\delta(\lambda)$ est $2k\pi i$ périodique, donc si il ya une valeur propre, alors il ya une infinité dénombrable d'eux. Pour chaque valeur propre il n'y a qu'un seul vecteur propre linéairement indépendants. Nous considérons maintenant quelques cas particuliers. Pour chaque cas, nous le répertorions l'équation caractéristique, ses racines pour μ et les valeurs propres correspondantes. Comme dans les cas précédents $\lambda = 0$ doit être examinée de façon indépendante.

1. $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. Ceci inclut à la fois les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann . Ici, nous avons

$$\delta(\lambda) = (\frac{1}{i\mu}A_1B_1 - i\mu A_2B_2)\sinh((i\mu(b-a)).$$

Pour trouver toutes les valeurs propres nous procédons comme suit :

(i) Nous trouvons toutes les valeurs propres produites par les racines du facteur de sinh,

(ii) Vérifier si l'une de ces racines donnent une racine non nulle du premier facteur, et

(iii) Vérifier séparément pour voir si $\lambda = 0$ est une valeur propre. Il est clair que le premier facteur peut produire au plus une valeur propre et que c'est seulement dans des cas exceptionnels.

$$\begin{aligned} \sinh((i\mu(b-a)) &= -i\sin((-\mu(b-a)) = 0 \\ -\mu(b-a) &= (-1)^k \ arcsin(0) + k\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Puisque $\mu = s > 0$ nous obtenons les valeurs propres suivantes du facteur périodique :

$$\lambda_n = \frac{(n\pi)^2}{(b-a)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. $A_1 = 1 = B_1, A_2 = 0 = B_2$. Pour les CB de Dirichlet (D) $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre et aussi le premier facteur ne produit pas une valeur propre, d'où toutes les valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_n^D = \frac{(n\pi)^2}{(b-a)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. $A_1 = 0 = B_1, A_2 = 1 = B_2$. Ce sont les CB de Neuman (N) .

$$\begin{aligned} -i\mu \sinh((i\mu(b-a)) &= \mu \sin(-\mu(b-a)) = 0 \\ \mu(b-a) &= k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda = 0$ est aussi une valeur propre dans ce cas et le premier facteur ne produit pas une valeur propre que nous obtenons

$$\lambda_n^N = \frac{(n\pi)^2}{(b-a)^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

4. $A_1 = 1 = B_2, A_2 = 0 = B_1$.

$$\begin{aligned} \cosh((i\mu(b-a)) &= \cos(-\mu(b-a)) = 0 \\ -\mu(b-a) &= \pm \arccos(0) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \lambda_n^{DN} &= \frac{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^2}{(b-a)^2}, \ n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

5. $A_1 = 0 = B_2, A_2 = 1 = B_1$.

$$-\cosh((i\mu(b-a)) = -\cos((-\mu)(b-a)) = 0.$$

Ici, nous avons les mêmes racines et donc les mêmes valeurs propres que dans le cas précédent

$$\lambda_n^{ND} = \frac{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^2}{(b-a)^2}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

6. $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.
$$\coth(i\mu(b-a)) = \frac{(\frac{1}{\mu}A_1B_1 - i\mu A_2B_2)}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$
Les racines de cette équation ne sont pas si faciles à trouver explicitement puisque l'inconnue μ apparaît des deux côtés. Cependant, des approximations numériques peuvent être obtenus à partir d'un code de recherche de racine

2.5 Spectre

Dans cette section, nous construisons PSL avec exactement n valeurs propres pour chaque entier non négatif n. Nous montrons également que ces n valeurs propres peuvent être distribués arbitrairement dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$. Plus précisément : Compte tenu des k disjoints ouverts Ω_i dans $\mathbb{C}$ et tous k entiers n_i Il existe une PSL avec exactement n_k valeurs propres dans Ω_i pour $i = 1, 2, \ \ldots, \ k$. Dans le cas auto-adjoint plus on en sait, voir la partie (2.6.1) ci-dessous. Cette construction implique coefficients $r = \frac{1}{p}$ et $q, \ w$, qui sont identiquement nulle sur des sous-intervalles adjacents. Pour ces problèmes de 'type Atkinson' il est commode de formuler l'équation (2.21) que le système équivalent :

$$y' = rz, \ z' = (q - \lambda w)y \quad \text{sur} \quad J, \ z = py', \ r = \frac{1}{p}. \tag{2.39}$$

Nous considérons deux points conditions aux limites (CB) de la forme :

$$AY(a) + BY(b) = 0, \ Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix}, \ A, \ B \in M_2(\mathbb{C}), \tag{2.40}$$

où $M_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{C}$.

déterminé par les matrices complexes A, B , 2×2 satisfaisant aux conditions auto-adjointnes :

$$AEA^* = BEB^* \ et \ rang(A:B). = 2$$

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons la caractérisation des valeurs propres comme les zéros de la fonction caractéristique .

Lemme 2.18 *Supposons qu'on a (2.22) et soit* $\Phi(t, \ \lambda) = [\phi_{ij}](t, \ \lambda)$ *représentent la matrice fondamentale du système (2.39) déterminée par la condition initiale* $\Phi(a, \ \lambda) = I, \ \lambda \in \mathbb{C}$. *Alors* *voir (2.15) $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de PSL (2.21), (2.40) (ou (2.39) et (2.40)) si et seulement si*

$$\delta(\lambda) = \det[A + B\Phi(b,\ \lambda)] = 0.$$

Soit

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} & a_{11}b_{21} - a_{21}b_{11} \\ a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22} & a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Alors pour $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons

$$\begin{aligned} \delta(\lambda) &= \det(A) + \det(B) + c_{11}\phi_{11}(b,\ \lambda) + c_{12}\phi_{12}(b,\ \lambda) \\ &\quad + c_{21}\phi_{21}(b,\ \lambda) + c_{22}\phi_{22}(b,\ \lambda). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Preuve. La caractérisation des valeurs propres comme les zéros de l'équation caractéristique $\delta(\lambda) = 0$ est contenu dans le lemme (2.15), la formule (**??**) résulte d'un calcul simple ■

Le PSL (2.21), (2.40), ou de manière équivalente (2.39), (2.40), est dit dégénéré si dans (**??**) soit $\delta(\lambda) \equiv 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ ou $\delta(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Dans le premier cas, chaque nombre complexe est une valeur propre, dans ce dernier il n'y a pas de valeurs propres. Pour générer PSL avec un spectre fini on construit une fonction caractéristique $\delta(\lambda)$ qui est un polynôme en λ. Cela nécessite une étude détaillée de la structure du matrice fondamentale principal qui nous embarquons maintenant .

Nous rappelons la condition de base (2.22)

$$r = \frac{1}{p},\ q,\ w \in L(J,\ \mathbb{C}),\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.43}$$

et partition l'intervalle $J = (a, b)$ comme suit

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b \tag{2.44}$$

pour un entier positif impair $n = 2m + 1$. Supposons que

$$\begin{aligned} r &= 0 \ \ sur \ \ (a_{2i}, a_{2i+1}),\ q_{2i} = \int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} q,\ w_{2i} = \int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} w \neq 0,\ i \in \mathbb{N}_0,\ \ 2i+1 \leq n; \\ w &= q = 0 \ \ sur \ \ (a_{2i+1}, a_{2i+2}),\ r_{2i+1} = \int_{a_{2i+1}}^{a_{2\imath+2}} r \neq 0,\ i \in \mathbb{N}_0, 2i+2 \leq n. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Nous déterminons la structure de la matrice fondamentale principal du système (2.39), sous les conditions (2.44), (2.45).

Lemme 2.19 *Supposons qu'on a (2.43), (2.44), (2.45) . Soit* $\Phi(t,\ \lambda) = [\phi_{ij}](t,\ \lambda)$ *la solution de la matrice fondamentale du système (2.39) déterminée par la condition initiale* $\Phi(a,\ \lambda) = I$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$*. alors nous avons que*

$$\Phi(a_1,\ \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_0 - \lambda w_0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

$$\Phi(a_3,\ \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + (q_0 - \lambda w_0) r_1 & r_1 \\ (q_0 - \lambda w_0) + (q_2 - \lambda w_2) + (q_0 - \lambda w_0)(q_2 - \lambda w_2) r_1 & 1 + (q_2 - \lambda w_2)\ r_1 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

de plus généralement, pour $i \leq m$,

$$\Phi(a_{2i+1},\ \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & r_{2i-1} \\ q_{2i} - \lambda w_{2i} & 1 + (q_{2i} - \lambda w_{2i}) r_{2i-1} \end{pmatrix} \Phi(a_{2i-1},\ \lambda). \tag{2.48}$$

Preuve. Observent de (2.45) que y est constante sur chaque sous-intervalle où r est identiquement nulle et z est constante sur chaque sous-intervalle où les deux q et w sont identiquement nulle. Le résultat découle des applications répétées de (2.45). ■

soit $R = \Pi_{i=0}^{m-1} r_{2i+1}$, et notons que $b = a_{2m+1}$. Ensuite, cette structure d'induction Φ et mathématique donné ce qui suit :

Corollaire 2.20 *Supposons qu'on a les hypothèses et notations du lemme (2.19) . Pour la matrice fondamental* Φ *nous avons*

$$\phi_{11}(b,\ \lambda) = R\Pi_{i=0}^{m-1}(q_{2i} - \lambda w_{2i}) + \tilde{\phi}_{11}(\lambda), \tag{2.49}$$

$$\phi_{12}(b,\ \lambda) = R\Pi_{i=1}^{m-1}(q_{2i} - \lambda w_{2i}) + \tilde{\phi}_{12}(\lambda), \tag{2.50}$$

$$\phi_{21}(b,\ \lambda) = R\Pi_{i=0}^{m}(q_{2i} - \lambda w_{2i}) + \tilde{\phi}_{21}(\lambda), \tag{2.51}$$

$$\phi_{22}(b,\ \lambda) = R\Pi_{i=1}^{m}(q_{2i} - \lambda w_{2i}) + \tilde{\phi}_{22}(\lambda). \tag{2.52}$$

où $\tilde{\phi}_{ij} = o(R)$ *quand* $min\{r_{2i+1} : i = 0,\ \ldots,\ m-1\} \to \infty$ *pour* $q,\ w$ *fixe, et* $\lambda,\ i,\ j = 1, 2.$

Maintenant, nous construisons le PSL régulière avec CB en général auto-adjoint et non auto-adjoint qui ont exactement m valeurs propres pour chaque $m \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.21 *Soit $n = 2m + 1$ pour $m \in \mathbb{N}$, et supposons qu'on a (2.43), (2.44), (2.45) .Soit $C = (c_{ij})$ la matrice donnée par (2.41). Alors :*

(1) *Si $c_{21} \neq 0$, alors le PSL (2.39), (2.40) a exactement $m + 1$ valeurs propres λ_j, $j = 0, 1, \ldots, m$.*

(2) *Si $c_{21} = 0$ et $c_{11}w_0 + c_{22}w_{2m} \neq 0$, alors le PSL (2.39), (2.40) a exactement m valeurs propres λ_j, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$.*

(3) *Si $c_{21} = c_{11} = c_{22} = 0$, mais $c_{12} \neq 0$, alors le PSL (2.39), (2.40) a exactement $m - 1$ valeurs propres λ_j, $j = 0, 1, \ldots, m - 2$.*

(4) *Si aucune des conditions ci-dessus ont lieu, alors le PSL (2.39), (2.40) soit a l valeurs propres pour $l \in \{1, \ldots, m - 1\}$, ou est dégénéré.*

Preuve. Nous notons de (*2.45*) que les degrés de $\phi_{11}(b, \lambda)$, $\phi_{12}(b, \lambda)$, $\phi_{21}(b, \lambda)$, et $\phi_{22}(b, \lambda)$ en λ sont m, $m - 1$, $m + 1$, et m, respectivement. Alors, les résultats suivent du lemme (*2.18)* et le corollaire (*2.20)*. ■

Comme des cas particuliers du théorème (2.21) nous considérons la PSL avec les conditions aux limites suivantes :

1.*CB Séparé* :

$$\begin{aligned} A_1 y(a) + A_2(py')(a) &= 0,\ A_1,\ A_2 \in \mathbb{C},\ (A_1,\ A_2) \neq (0,0), \\ B_1 y(b) + B_2(py')(b) &= 0,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{C},\ (B_1,\ B_2) \neq (0,0). \end{aligned} \tag{2.53}$$

2. *CB Couplé* **:**

$$Y(b) = AY(a),\ Y = \begin{pmatrix} y \\ py \end{pmatrix},\ A \in M_2(\mathbb{C}). \tag{2.54}$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème (2.21).

Corollaire 2.22 *On maintien les hypothèses et notations du théorème (2.21) .*

(i) Le PVB séparé (2.39), (2.53) a exactement $m+1$ *valeurs propres si* $A_2B_2 \neq 0$, *exactement* m *v.p si* $A_2B_2 = 0$ *et* $(A_2,\ B_2) \neq (0,0)$, *et exactement* $m-1$ *v.p. si* $A_2 = B_2 = 0$.

(ii) Le PVB couplé (2.39), (2.54) a exactement $m+1$ *valeurs propres si* $a_{12} \neq 0$, *exactement* m *v.p si* $a_{12} = 0$ *et* $a_{22}w_0 + a_{11}w_{2m} \neq 0$, *et exactement* $m-1$ *v.p. si* $a_{12} = a_{22} = a_{11} = 0$ *et* $a_{21} \neq 0$.

Preuve. Il est facile de voir que pour les CB séparées (2.53)

$$C = \begin{pmatrix} -A_2B_1 & A_1B_1 \\ -A_2B_2 & A_1B_2 \end{pmatrix},$$

et pour les CB couplé (2.54)

$$C = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, les conclusions découlent du théorème (2.21). ■

Du théorème (2.21), nous savons que pour chaque entier positif m il ya PSL avec exactement m valeurs propres. Le théorème suivant va montrer que ces m valeurs propres peuvent être situés a n'importe où dans le plan complexe.

Théorème 2.23 *Supposons qu'on a les hypothèses et notations du théorème (2.21). étant donné* k *ensembles ouverts disjoints* $\mathcal{N}_i$ *dans* $\mathbb{C}$ *et* k *entiers* n_i *Il existe un* PSL *avec exactement* n_i *valeurs propres dans* $\mathcal{N}_i$, *pour* $i = 1, 2,\ \ldots,\ k$.

Preuve. soit $m = \sum_{i=1}^{k} n_i$ et $n = 2m+1$. Construire un PSL sous la forme de (2.39) avec CB séparé (2.53) sous les hypothèses (2.43), (2.44), (2.45), et $A_1 = B_2 = 0,\ A_2 = B_1 = 1$. Alors, la fonction caractéristique définie par (**??**) devient

$$\delta(\lambda) = \phi_{11}(b,\ \lambda) = R\Pi_{i=0}^{m-1}(q_{2i} - \lambda w_{2i}) + \tilde{\phi}_{11}(\lambda)$$

où $\tilde{\phi}_{11} = o(R)$ quand $\min\{r_0,\ \ldots,\ r_{2m-1}\} \to \infty$ pour $q,\ w$ fixe, et λ.Puisque q et w peuvent être choisies arbitrairement, nous pouvons choisir entre eux tels que $\overline{\delta}(\lambda); = \Pi_{i=0}^{m-1}(q_{2i} - \lambda w_{2i})$ a exactement n_i racines dans $\mathcal{N}_i$, et aucun sur le bord de $\mathcal{N}_i,\ i = 1,\ \ldots,\ k$. Choissent $r_{2i+1},\ i = 0,\ \ldots,\ m-1$ si grand que

$$|\tilde{\phi}_{11}(\lambda)| < R\Pi_{i=0}^{m-1}|q_{2i} - \lambda w_{2i}|.$$

Alors, il découle du théorème de Rouché que $\delta(\lambda)$ a exactement n_i racines dans $\mathcal{N}_i,\ i = 1,\ \ldots,\ k.$

■

Nous terminons cette partie avec un exemple illustrant ce qui se passe dans les cas extrêmes, lorsque soit $\frac{1}{p}$ ou q et w sont nuls sur tout l'intervalle J.

Exemple 2.24 *Rappelons que l'équation de Sturm-Liouville (2.21) est équivalent au système (2.39).*

(i) Supposons que $r = \frac{1}{p} \equiv 0$ *sur* (a, b). *Alors tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre de (2.39) avec la condition aux limites de Dirichlet :*

$$y(a) = 0 = y(b).$$

En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$*, la solution unique déterminée par la condition initiale* $y(a, \lambda) = 0,\ z(a, \lambda) = 1$ *est une solution non triviale satisfaisant à ces conditions aux limites de Dirichlet et par conséquent une fonction propre.*

(ii) On suppose $w \equiv q \equiv 0$ *sur* (a, b). *Alors tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est une valeur propre de (2.39) avec la condition aux limites de Neumann :*

$$z(a) = 0 = z(b).$$

En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *, la solution unique de (2.39) déterminée par la condition initiale* $y(a, \lambda) = 1,\ z(a, \lambda) = 0$ *est une solution non triviale satisfaisant la condition aux limites de Neumann et donc une fonction propre.*

2.6 Problèmes auto-adjoint réguliè

Dans cette partie , nous nous spécialisons au cas auto-adjoint. Ce cas a été étudié de manière intensive depuis 1836-1837 lorsque les articles fondateurs de Sturm et Liouville apparus. Beaucoup plus est connu au sujet des problèmes d'auto-adjoint que les non-auto-adjoints. Nous essayons de trouver un équilibre entre la discussion des faits de base et les développements récents.

Un PSL auto-adjoint se compose de l'équation différentielle symétrique

$$-(py')' + qy = \lambda wy \quad sur \quad J = (a,\ b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty \tag{2.55}$$

où

$$r = \frac{1}{p}, q, w \in L_1(J, \mathbb{R}), \tag{2.56}$$

ainsi que les conditions aux limites

$$AY(a) + BY(b) = 0,\ Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix}, \tag{2.57}$$

où

$$A, B \in M_2(\mathbb{C}) \quad AEA^* = BEB^*, rang(A|B) = 2,\ E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

Le théorème suivant montre que les fonctions propres u de valeurs propres non réelles ne peut pas être normalisée par la condition

$$\int_a^b |u|^2 w = 1$$

Théorème 2.25 *Supposons qu'on a (2.55) à (2.58). Si λ est une valeur propre non réel de(2.55) à (2.58) et u est une fonction propre de λ, Alors*

$$\int_a^b |u|^2 w = 0 \tag{2.59}$$

Preuve. Les conditions aux limites auto-adjoint (2.57) , (2.58) sont soit séparés ou couplés et, si elle est couplée, peut être mis sous la forme canonique

$$B = -I,\ A = e^{i\alpha}K,\ K \in SL_2(\mathbb{R}), \quad -\pi < \alpha \leq \pi.$$

Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre du problème aux limites couplé dans cette forme canonique . Multiplient l'équation (2.55) par $\overline{y}$ et son équation conjugué par y, et soustraiyant on obtient

$$(\lambda - \overline{\lambda})y\overline{y}w = -\overline{y}(py')' + y(p\overline{y}')' = [y(p\overline{y}') - \overline{y}(py')]' = [y, \overline{y}]'.$$

Notant que $K^*EK = E$ par (2.58) nous obtenons

$$\begin{aligned}(\lambda-\overline{\lambda})\int_a^b |y|^2 w &= [y,\overline{y}](b)-[y,\overline{y}](a) = (EY(b),Y(b)))-(EY(a),Y(a)) \\ &= \left(Ee^{i\alpha}KY(a),e^{i\alpha}KY(a)\right)-(EY(a),Y(a)) \\ &= (K^*EKY(a),Y(a))-(EY(a),Y(a))=0.\end{aligned}$$

Donc (2.59) détient puisque λ est non réel. Pour le cas de conditions aux limites séparés la preuve est similaire ; dans ce cas, nous pouvons voir que le côté droit de l'équation est nul par une substitution encore plus directe . ■

2.6.1 Formes canoniques des conditions aux limites auto-adjoint

La condition au limite (2.57) est clairement invariante par multiplication par une matrice inversible. En préparation de l'investigation de la façon dont les valeurs propres changent lorsque la condition au limite est modifiée, nous discutons des formes canoniques de conditions aux limites auto-adjoint dans cette partie

Pour nos besoins,ici, il est commode de diviser les conditions aux bords auto-adjointes en trois sous-classes mutuellement exclusives et d'utiliser les représentations canoniques de ces sous-classes suivantes :

1.CB Séparé auto-adjoint .

Ceux-ci sont

$$A_1y(a)+A_2(py')(a)=0, A_1,A_2\in\mathbb{R},(A_1,\ A_2)\neq(0,0), \tag{2.60}$$

$$B_1y(b)+B_2(py')(b)=0, B_1,B_2\in\mathbb{R},(B_1,\ B_2)\neq(0,0) \tag{2.61}$$

Ces conditions séparés peuvent être paramétrées comme suit :

$$\cos\alpha y(a)-\sin\alpha(py')(a)=0,\ 0\leq\alpha<\pi; \tag{2.62}$$

$$\cos\beta y(b)-\sin\beta(py')(b)=0,\ 0<\beta\leq\pi. \tag{2.63}$$

2. CB tous les couplé auto-adjoint réels .

Ceux-ci peuvent être formulés comme suit :

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ (py')(b) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} y(a) \\ (py')(a) \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

où $K \in SL_2(\mathbb{R})$, c-à-d K est donné par

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, k_{ij} \in \mathbb{R}, \det K = 1. \tag{2.65}$$

3. Tous couple CB complexe auto-adjoint .

Ceux-ci peuvent être formulés comme suit :

$$\begin{pmatrix} y(b) \\ (py')(b) \end{pmatrix} = \exp(i\alpha) K \begin{pmatrix} y(a) \\ (py')(a) \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

où K satisfait (2.65) et $-\pi < \alpha < 0$,ou $0 < \alpha < \pi$.

Pour la forme canonique le cas particulier de CB auto-adjoint séparer, nous utilisons la notation

$$\Omega_s = \{\omega = (a, b, \alpha, \beta, \frac{1}{p}, q, w)\}; \tag{2.67}$$

pour le cas général des CB auto-adjoint couple nous supposons

$$\Omega_{cc} = \{\omega = (a, b, \alpha, K, \frac{1}{p}, q, w), -\pi < \alpha < 0, \ ou \quad 0 < \alpha < \pi\}. \tag{2.68}$$

Lorsque $\alpha = 0$ (2.68) devient

$$\Omega_{rc} = \{\omega = (a, b, K, \frac{1}{p}, q, w)\}. \tag{2.69}$$

La plupart des résultats suivants sont bien connus. Voir [16] pour certaines épreuves avec seuls coefficients intégrables, voir [14] pour le cas où p changent de $sign$, et voir [3], [7] pour le cas d'un couple CB complexe .

2.6.2 Existence de valeurs propres

Dans cette section, nous nous concentrons sur l'existence de valeurs propres de PSL auto-adjoint, ils sont constitués d'équation (2.55) et les conditions aux limites (2.57), mais avec certaines restrictions sur les coefficients en plus (2.56) -pas de conditions supplémentaires sont nécessaires , en plus (2.58) , sur les conditions aux limites . Les raisons pour avoir besoin de plusieurs exigences sur les coefficients ne sont pas seulement pour éviter les cas pathologiques tels que $r = \frac{1}{p}$, ou w étant identiquement nulle sur l'intervalle J sous-jacent , mais aussi pour éviter les valeurs propres non réelles . Richardson fait remarquer en 1918 que, même pour le cas classique où $p > 0$, mais w change de signe sur J , le PSL (2.55) , (2.56) peut avoir des valeurs propres non réelles , même pour la condition de Dirichlet .

Nous commençons avec le théorème de base de l'existence dans le cas où (2.55) détient et $w > 0$ sur J. Les conditions sur w et p sont affaiblis dans théorèmes suivants. Notons que q peut avoir un signe positif, négatif ou change de sign dans ces théorèmes .

Théorème 2.26 *Soit $\omega \in \Omega_{s-a}$, alors ω est exactement l'un des sous-classes : $\Omega_s,\ \Omega_{cc}, \Omega_{rc}$.*

(a) Supposons que $p \geq 0$ pp. sur $[a,\ b]$.

Alors pour $\omega \in \Omega_s$, le PVB ω n'a que des valeurs propres réelles et simples, il ya un nombre infini mais dénombrable d'entre eux, ils sont minorés et peuvent être ordonné à satisfaire

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots ; \lambda_n \to +\infty \quad quand \qquad n \to \infty \tag{2.70}$$

Si u_n est une fonction propre de λ_n, alors u_n est unique à multiples constants et u_n a exactement n zéros dans l'intervalle ouvert $(a,\ b), n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2,\ \ldots\}$.Notons que si pour $\omega \in \Omega_{rc}$ la PVB ω n'a que des valeurs propres réelles; chacun d'eux peut être simple ou double, il ya un nombre infini mais dénombrable d'eux et ils peuvent être rangé pour satisfaire

$$-\infty < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots ; \lambda_n \to +\infty, quand\ n \to \infty. \tag{2.71}$$

Si

$$\lambda_n = \lambda_n(a,\ b,\ K,\ \frac{1}{p},\ q,\ w); u_n = u_n(\cdot,\ a,\ b,\ K,\ \frac{1}{p},\ q,\ w),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.72}$$

Pour $\omega \in \Omega_{cc}$ le PVB ω n'a que des valeurs propres réelles et simples, il ya un nombre infini *mais dénombrable d'entre eux et ils peuvent être rangés pour satisfaire*

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n < \ldots \tag{2.73}$$

si

$$\lambda_n = \lambda_n(a, b, \alpha, K, \frac{1}{p}, q, w); u_n = u_n(\cdot, a, b, \alpha, K, \frac{1}{p}, q, w),\ \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.74}$$

Pour tout $\omega \in \Omega_{s-a}$ nous avons la formule asymptotique suivante :

$$\frac{\lambda_n}{n^2} \to c = \pi^2 \left(\int_a^b \sqrt{\frac{w}{p}} \right)^{-2}, quand\ n \to \infty. \tag{2.75}$$

Si nous fixons toutes les variables sauf α et $\lambda_n = \lambda_n(\alpha)$, alors nous avons $\lambda_n(-\alpha) = \lambda_n(\alpha)$, et le complexe conjugué de une fonction propre de $\lambda_n(\alpha)$ est une fonction propre de $\lambda_n(-\alpha)$.

(b) Supposons que p change de sign dans l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire p est positif sur un sous-ensemble de $[a, b]$ de mesure de Lebesgue positive et p est négatif sur un sous-ensemble de l'intervalle $[a, b]$ de mesure de Lebesgue positive. alors chaque PVB $\omega \in \Omega_s$ n'a que des valeurs propres réelles et simples, il ya un nombre infini mais dénombrable d'entre eux, ils sont pas miorés et peuvent être rangés à satisfaire

$$\begin{aligned} \ldots \quad < \quad & \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots ; \\ \lambda_n \quad \to \quad & +\infty \quad quand \quad n \to \infty ; \lambda_n \to -\infty \quad quand \quad n \to -\infty. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Chaque PVB $\omega \in \Omega_{rc}$ n'a que des valeurs propres réelles; chacun d'eux peut être simple ou double, il ya un nombre infini mais dénombrable d'entre eux, ils sont pas minorés et peuvent être rangés à satisfaire

$$\begin{aligned} \ldots. \quad \le \quad & \lambda_{-2} \le \lambda_{-1} \le \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots ; \\ \lambda_n \quad \to \quad & +\infty\ quand \quad n \to \infty,\ \lambda_n \to -\infty\ quand \quad n \to -\infty. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Les notations pour valeurs propres λ_n et fonctions propres $u_n, n \in \mathbb{Z}$, pour partie (b) sont les mêmes que celles présentées dans la partie (a) pour $n \in \mathbb{N}_0$.

Preuve. Le fait que les valeurs propres sont pas minorés lorsque p change de *sign* a été estalie par M. M öller. Cela vaut même si il n'ya pas de sous-intervalle sur lequel p est négatif.

Le fait que les valeurs propres pour tout $\omega \in \Omega_{cc}$ sont toutes simples résulte de Weidmann [16] pour le cas général. Voir aussi [3]. les autres résultats sont standard. ■

Théorème 2.27 *Soit $\omega = (a, b, A, B, \frac{1}{p}, q, w) \in \Omega_{s-a}$. fixons a, b, p, q, w et soit $A = e^{i\alpha}K, K = (k_{ij}), B = -I$, où $K \in SL_2(\mathbb{R})$ i.e. nous avons la CB*

$$Y(b) = e^{i\alpha}KY(a), \ -\pi \leq \alpha \leq \pi.$$

Supposons également que $p > 0$ pp. sur J et désignons les valeurs propres de cette condition au bord par , $\lambda_n(\alpha,\ K)$, en abrégé $\lambda_n(K)$ lorsque $\alpha = 0$, pour $n \in \mathbb{N}_0$.

Supposons que $k_{12} < 0$ ou $k_{12} = 0$ et $k_{11} + k_{22} > 0$. Alors

1. *$\lambda_0(K)$ est simple ;*
2. *$\lambda_0(K) < \lambda_0(-K)$*
3. *Les inégalités suivantes sont valables pour $-\pi < \alpha < 0$ et $0 < \alpha < \pi$:*

$$\begin{aligned} -\infty &< \lambda_0(K) < \lambda_0(\alpha,\ K) < \lambda_0(-K) \leq \lambda_1(-K) < \lambda_1(\alpha,\ K) < \lambda_1(K) \\ &\leq \lambda_2(K) < \lambda_2(\alpha, K) < \lambda_2(-K) \leq \lambda_3(-K) < \dots \end{aligned}$$

En outre, pour $0 < \alpha < \beta < \pi$ nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_0(\alpha, K) &< \lambda_0(\beta, K) < \lambda_1(\beta, K) < \lambda_1(\alpha, K) < \lambda_2(\alpha, K) < \lambda_2(\beta, K) \\ &< \lambda_3(\beta, K) < \lambda_3(\alpha, K) < \dots \end{aligned}$$

Supposons que $k_{12} > 0$ ou $k_{12} = 0$ et $k_{11} + k_{22} < 0$. Alors

1. *$\lambda_0(-K)$ est simple ;*
2. *$\lambda_0(-K) < \lambda_0(K)$*
3. *les inégalités suivantes sont valables pour $-\pi < \alpha < 0$ et $0 < \alpha < \pi$:*

$$\begin{aligned} \infty &< \lambda_0(-K) < \lambda_0(\alpha,\ K) < \lambda_0(K) \leq \lambda_1(K) < \lambda_1(\alpha,\ K) < \lambda_1(-K) \\ &\leq \lambda_2(-K) < \lambda_2(\alpha,\ K) < \lambda_2(K) \leq \lambda_3(K) < \dots \end{aligned}$$

En outre, pour $0 < \alpha < \beta < \pi$ *nous avons*

$$\begin{aligned}\lambda_0(\beta,\ K) &< \lambda_0(\alpha,\ K) < \lambda_1(\alpha,\ K) < \lambda_1(\beta,\ K) < \lambda_2(\beta,\ K) < \lambda_2(\alpha,\ K) \\ &< \lambda_3(\alpha,\ K) < \lambda_3(\beta,\ K) < \ldots\end{aligned}$$

Preuve. Ce résultat général est due à Eastham [7], des cas spéciaux ont été établis dans [3], [16], [8]. ■

Théorème 2.28 *Soit* $\omega = (a,\ b,\ 0,\ \pi, \frac{1}{p},\ q,\ w) \in \Omega_s$ *et fixons* a, p, q, w. *Supposons que*

$$p \geq 0 \ \ pp. \ \ et \ \ \frac{q^2}{w} \in L_{loc}(a',\ b').$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}_0, \lambda_n^D(b)$ *est strictement décroissante dans* $(a,\ b')$ *et*

$$\lambda_n^D(b) \to \infty \ \ quand \quad b \to a^+.$$

Preuve. voir[12]. ■

Théorème 2.29 *Soit* $\omega = (a, b, \alpha, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{p}, q, w) \in \Omega_s$ *(c'est à dire que nous avons* CB *arbitraire auto-adjoint séparés à a, mais une condition Neuman à b.) Supposons que*

$$Q = \frac{q}{w} \in AC_{loc}[a,\ b'), p(b) \geq \delta > 0 \ \ pour \ b \in (a,\ b').$$

Alors

1. $\lambda_0(b) \to Q(a) = \dfrac{q(a)}{w(a)}$ *quand* $b \to a^+$.
2. $\lambda_n(b) \to \infty$ *quand* $b \to a^+$ *pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. *Si* Q *est décroissante dans* $(a,\ b')$ *alors* $\lambda_n(b)$ *est décroissante dans* $(a,\ b')$ *et* $\lambda_n(b) \geq Q(b)$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}_0$.
4. *Si* Q *est croissante dans* $(a,\ b')$ *et* $Q(b) \to \infty$ *quand* $b \to b'$ *le* $\lambda_0(b)$ *est croissante dans* $(a,\ b')$ *et* $\lambda_0(b) \leq Q(b)$ *, pour* $n \in \mathbb{N}, \lambda_n(b)$ *a un extremum unique dans* $(a,\ b')$ *et ce extremum est un strict minimum.*
5. *Si* Q *possède un extremum unique dans* $(a,\ b')$ *et cet extremum est un strict minimum et* $Q(b) \to \infty$ *quand* $b \to b'$ *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}_0, \lambda_n(b)$ *présente un extremum unique, dans* $(a,\ b')$ *et ce extremum est un strict minimum.*

Chapitre 3

Problèmes aux limites à Valeur singulier

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous discutons le PSL auto-adjoint singulier. C'est un domaine tellement vaste que nous ne pouvons espérer donner ici une brève introduction . Après un examen de la partie de la théorie de base, nous allons nous concentrer sur deux thèmes :(i) l'ossilation (ii) la nature de la singularité : point limite (PL) ou limite-cercle (LC). Sur ces deux sujets, nous nous efforçons d'amener le lecteur de voire derinière partie de ce chapitre pour illustrer certains des comportements de base du spectre de PSL nous discutons brievement 14 exemples.

3.2 Oscillation et Existence des problems singulier

Dans cette partie, nous étudions les propriétés oscillatoires de l'équation

$$My = (py')' + qy = 0 \ \text{ sur } \ J = (a,\ b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty, \tag{3.1}$$

où

$$\frac{1}{p}, q \in L_{loc}(J,\ \mathbb{R}),\ p > 0 \text{ sur } J. \tag{3.2}$$

3.2.1 Solutions Principal et non principales

Rappelons que, d'après le théorème (2.8) aucune solution non triviale de (3.1) peut avoir un point d'accumulation de zéros à l'intérieur de J ni à un extrémité régulière de J. Les zéros, le cas échéant, de toute solution non triviale de (3.1) à l'intérieur de l'intervalle J sont isolés. Ainsi, seule une extrémité de J peut être un point d'accumulation de zéros d'une solution non triviale de (3.1) et cela peut se produire seulement à un extrémité singulier.

Définition 3.1 *(Solution principale). Soit u, v des solutions réelles de (3.1). alors*

- *u est appelé une solution principale à a si*

(1) $u(t) \neq 0$ pour $t \in (a,\ d]$ pour certaines $d \in J$,

(2) chaque solution y de (3.1) qui n'est pas un multiple de u satisfaites $\frac{u(t)}{y(t)} \to 0$ lorsque $t \to a^+$ i.e

$$u(t) = o(y(t)) \text{ quand } t \to a$$

Notons que $y(t) \neq 0$ pour t dans un voisinage droit de a par le théorème de séparation de Sturm.

- *v est appelé une solution non-principale de a si*

(1) $v(t) \neq 0$ pour $t \in (a,\ d]$ et certaines $d \in J$,

(2) v n'est pas une solution principale à a.

les solutions principaux et non-principaux sont définie similaire à b.

Lemme 3.2 *Si (3.1) a une solution principale u à a, alors tous les zéro multiple non-réelle de u sont aussi une solution principale et qu'aucune autre solution est une solution principale à a.*

Preuve. Cela découle directement de la définition. ■

Définition 3.3 *Supposons qu'on a (3.1) et (3.2). Le point d'extrémité a est appelé oscillatoire (O) s'il existe une solution non triviale y qui présente un zéro dans l'intervalle (a, c) pour chaque c dans J. De même, b est oscillatoire s'il existe une solution non triviale qui présente un zéro dans l'intervalle (c, b) pour chaque c dans J. D'après le théorème (2.9), le théorème de séparation de Sturm, si l'un des solutions non triviale a cette propriété à un point d'extrémité, alos toutes les solutions non triviales ont cette propriété. Donc oscillation est une propriété de l'équation (3.1) et ne dépend pas de telle solution particulière. Un point d'extrémité est nonoscillatoire (NO) si elle n'est pas oscillatoire.*

Remarque 3.4 *Il est clair que les solutions principaux et non principaux n'existent pas à un point d'extrémité oscillatoire.*

Remarque 3.5 *Si l'équation (3.1) est régulière à* a *alors pour toute solution* y, y *et* py' *peut être étendue continuellement à* a *et la solution principale* u *existent et satisfaire aux conditions initiales :* $u(a) = 0$, $(pu')(a) \neq 0$. *Toute solution non-principal* v *à* a *satisfait* $v(a) \neq 0$.

Théorème 3.6 *L'équation (3.1) est non-oscillatoire à* a *si et seulement si il existe une solution principale à* a.

Preuve. voir p. 547 dans Niessen et Zettl [22]. ■

Le résultat suivant donne une caractérisation des solutions principaux et non-principaux. Il sera utilisé ci-dessous "critères de régularisation de $LCNO$ singulières.

Théorème 3.7 *Supposons que (3.1) est non-oscillatoire à* a. *Soit* u, v *des solutions réels satisfaisant* $u(t) \neq 0$, $v(t) \neq 0$ *pour* $t \in (a,\ d]$ *et certains* $d \in J$. *Alors*

(1) u *est une solution principale à* a *si et seulement si*

$$\int_a^d \frac{1}{pu^2} = \infty; \tag{3.3}$$

(2) v *est une solution non-principal à* a *si et seulement si*

$$\int_a^d \frac{1}{pv^2} < \infty; \tag{3.4}$$

(3) *Si* u *est une solution principale et* v *est une solution non-principal à* a, *alors il existe* $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, *tels que*

$$u(t) = v(t) \int_a^t \frac{c}{pv^2},\ a < t \leq d; \tag{3.5}$$

(4) *si* u *est une solution principale et* v.*est une solution non-principal à* a, *alors*

$$|u(t)v(x)| < |u(x)v(t)|, pour\ \ a < t < x \leq d. \tag{3.6}$$

Preuve. voir [22]. ■

3.2.2 Critères d'oscillation

Pour l'équation (3.1), avec (3.2), les zéros de chaque solution non-triviale sont isolés par le théorème (2.8). Il en résulte qu'une seule extrémité de J peut être un point d'accumulation de zéros pour une solution non triviale. D'après le théorème (2.9), le théorème de séparation de Sturm, si les zéros d'une solution non triviale s'accumulent à un point d'extrémité, alors les zéros de chaque solution non triviale s'accumule à cette extrémité. Cela conduit à la classification, oscillation (O) et nonoscillatoire (NO) de chaque point d'extrémité de l'équation (3.1). Pour que les coefficients p, q vérifiant (3.2) est (3.1) O à a ? à b ? Soit $O(p, q, b)$ dénote l'ensemble des équations qui sont O à b et $NO(p, q, b)$ ceux qui sont NO à b. Alors, les équations (3.1) sont classées selon ces deux catégories mutuellement disjointes. Une classification similaire est faite à a. D'après le théorème (2.8) tous les postes réguliers sont dans la classe NO. Beaucoup de conditions suffisantes sont connus pour chacune de ces classes, il ya aussi des conditions nécessaires et suffisantes connus, mais il n'y a pas de conditions nécessaires et suffisantes connues qui peuvent être vérifiées pour toutes les équations.

Théorème 3.8 *Supposon qu'on a (3.1), (3.2).*

- *Si*

$$\int_c^b \frac{1}{p} = \infty \ et \quad \int_c^b q = \infty \tag{3.7}$$

pour certains $c \in J$, alors l'équation (3.1) est oscillatoire à b.

- *Si*

$$\int_a^c \frac{1}{p} = \infty \quad et \quad \int_a^c q = \infty \tag{3.8}$$

pour certains $c \in J$, alors l'équation (3.1) est oscillatoire à a.

Preuve. Nous prouvons le résultat pour l'extrémité b est donc la preuve est similaire pour a . Supposons que b est nonoscillatoire et soit u, v deux solutions positifs principale et nonprincipal, respectivement, sur $[d,\ b)$, $\forall\ d \in J$. Notons que $q = -\dfrac{(pv')'}{v}$ dans $[d,\ b)$ et par intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}\int_d^t \frac{(pv')'}{v} &= \frac{(pv')}{v}(t) - \frac{(pv')}{v}(d) - \int_d^t pv' \frac{(-v')}{v^2} = \frac{(pv')}{v}(t) - \frac{(pv')}{v}(d) \\ + \int_d^t \frac{1}{p} \frac{(pv')^2}{v^2} &= -\int_d^t q \to -\infty \ quand \ \ t \to b.\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{(pv')(t)}{v(t)} \to -\infty$ lorsque $t \to b$ et pv' est négatif au voisinage de b. Par conséquent v est diminue dans un voisinage gauche de b et donc a une limite à b, par exemple,

$$v(t) \to L \quad \text{lorsque} \quad t \to b,\ 0 \leq L < \infty.$$

De cela, il s'ensuit que, pour certains $h \in [d,\ b)$, et $\forall\ \varepsilon > 0$ nous avons

$$v^2(t) < L^2 + \varepsilon,\ \frac{1}{v^2(t)} > \frac{1}{L^2 + \varepsilon},\ d \leq h \leq t < b.$$

Ceci implique que

$$\int_h^t \frac{1}{pv^2} \geq \frac{1}{L^2 + \varepsilon} \int_h^t \frac{1}{p},\ d \leq h \leq t < b.$$

Ceci et l'hypothèse implique que

$$\int_h^b \frac{1}{pv^2} = \infty,$$

contredire (3.4) puisque v est une solution nonprincipal à b. ■

Nous mentionnons quelques critères classiques : Supposons qu'on a (3.1) et (3.2) avec $J = (a,\ \infty)$ pour certains $a,\ 1 < a < \infty$ et $p = 1$. Pour O ou NO à ∞ nous avons les résultats suivants. D'après le théorème (2.12), le théorème de comparaison de Sturm , en utilisant l'équation à coefficients constants

Exemple 3.9

$$y\text{''} + \delta y = 0$$

$y'' + \delta y = 0$ à titre de comparaison, nous constatons que

(1) $q(t) \geq \delta > 0 \Rightarrow O.$

(2) $q(t) \leq 0 \Rightarrow NO.$

L'"écart entre" entre 0 et δ laisse beaucoup de "place" et peut être réduit en utilisant l'équation d'Euler

$$y' + \frac{1}{4t^2} y = 0$$

pour la comparaison équation Kneser fait en 1893 [20] :

(1) $q(t) \geq \frac{1+\delta}{4t^2} \Rightarrow O.$

(2) $q(t) \leq \frac{1}{4t^2} \Rightarrow NO.$

Les critères Kneser peuvent être améliorés en utilisant l'extension suivante de l'équation d'Euler pour comparaison :

$$y'' + (\frac{1}{4t^2} + \frac{c}{4(t\ln t)^2})y = 0$$

(3) $c > 1 \Rightarrow O$.

(4) $c \leq 1 \Rightarrow NO$.

Ce processus peut être poursuivi pour obtenir une suite de résultats plus fort. La prochaine équation de comparaison est :

$$y'' + (\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4(t\ln t)^2})y + \frac{c}{4(t\ln(\ln t))^2}y = 0$$

(5) $c > 1 \Rightarrow O$.

(6) $c \leq 1 \Rightarrow NO$.

Et ainsi de suite. Il pourrait sembler que cela laisse pas de place entre ces critères plus en plus étroits. En effet, il ya encore beaucoup de place "entre" comme nous le verrons ci-dessous lorsque nous discutons des critères «d'intervalle» d'oscillation .

Théorème 3.10 *Supposons qu'on a (3.2). Supposons que* $J_n = (a_n,\ b_n),\ n \in \mathbb{N}$ *,est une suite de sous-intervalles disjoints de* J *tels que* $a < a_1$ *et* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *une suite plus en plus converge vers* b*. Soit* n*,* $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$*. Si*

$$\int_I \frac{1}{p} = \infty \quad et \int_I q = \infty, \tag{3.9}$$

alors l'équation (3.1) est O *à* b

Preuve. Soit K l'intervalle dont les points sont les points de I ; en d'autres termes, K est construit à partir de J en enlevant les sous-intervalles de J qui ne sont pas en I. Ainsi en K, nous avons : $b_1 = a_2,\ b_2 = a_3,\ b_3 = a_4$, etc. Considérons l'équation

$$(pz')' + qz = 0 \quad dans \quad K. \tag{3.10}$$

Cette équation est bien définie puisque p et q sont définis sur K et $\frac{1}{p},\ q \in L_{loc}(K,\ R)$. Par le théorème (3.8) l'équation (3.10) est O à b. Pour montrer que (3.1) est O à b soit z une solution non triviale de (3.10) qui a un zéro dans l'intervalle $(a_n,\ b_n)$ et dans un intervalle $(a_m,\ b_m)$ avec

$m > n$ et définir une solution y de (3.1) par les conditions initiales : $y(a_n) = z(a_n),\ (py')(a_n) = (pz')(a_n)$. Alors y et z sont de la même solution sur l'intervalle $[a_n,\ b_n)$ et donc y a un zéro dans cet intervalle. Maintenant définir une solution de y_1 (3.1) par les conditions initiales : $y_1(a_m) = z(a_m),\ (py_1')(a_m) = (pz')(a_m)$.Alors $y_1 = z$ sur l'intervalle $[a_m,\ b_m)$. Puisque $y = z$ sur $[a_n,\ b_n)$ et $y_1 = z$ sur l'intervalle $[a_m,\ b_m)$ alors $y = y_1$dans J. Par conséquent y a une infinité de zéros dans J donc z a une infinité de zéros dans K. ■

Cette idée de la suppression d'un nombre fini ou infini de sous-intervalles du domaine J peut être utilisée pour obtenir un général "intervalle" type théorème de comparaison : Supposons que $\{(c_i, d_i) : i \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'intervalles disjoints dont les extrémités gauche converge vers b. Construire un nouvel intervalle (a, B) en réduisant chacun de ces intervalles à son extrémité gauche. Ensuite, appliquez une condition suffisante connu pour oscillation (a, B) et prouver que l'oscillation de la nouvelle équation à B implique oscillation de l'équation originale à b**.**

Théorème 3.11 *Diminution de domaine du théorème de Comparaison). Supposons qu'on a (3.2) et supposons que p, q sont continues par morceaux sur J. Soit S l'union d'un nombre infini des sous-intervalles disjoints de J dont les extrémités gauche converge vers b,*

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i,\ d_i).$$

Supposons que

$$\int_{c_i}^{d_i} q \geq 0. \tag{3.11}$$

Soit m dénote la mesure de Lebesgue et de définir

$$B = m((a,\ b) \backslash S) \tag{3.12}$$

et définir

$$P(s) = p(t), \quad Q(s) = q(t), \ si \quad s = s(t) = m((a,\ b) \backslash S \cap (a,\ b)). \tag{3.13}$$

Si l'équation

$$(Pz')' + Qz = 0 \ dans \quad (a,\ B) \tag{3.14}$$

est oscillatoire à B, alors (3.1) est oscillatoire à b.

Preuve. voir Corollaire, p. 21 de Kwong et Zettl [18]. ■

Théorème 3.12 *Soit* $J = (1, \infty)$, $p = 1$ *dans* J, $q \in L_{loc}([1, \infty), \mathbb{R})$ *et supposons que* q *est continue par morceaux sur* J. *L'ensemble* $q_+(t) = \max\{q(t),\ 0\}$, $q_- = \max\{-q(t), 0\}$, $t \in J$. *Supposons que pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout sous-intervalle* I *de* J *de longueur* δ

$$\text{soit} \quad \int_I q_+ < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \int_I q_- < \varepsilon. \tag{3.15}$$

Si

$$= \infty \leq \liminf_{t \to \infty} \int_1^t q < \limsup_{t \to \infty} \int_1^t q \leq \infty, \tag{3.16}$$

alors l'équation (3.1) est oscillatoire à ∞.

Preuve. C'est le corollaire 5, p. 28, en [18]. ■

Exemple 3.13 *Il en résulte facilement du théorème (3.12) que l'équation*

$$y'' + qy = 0$$

est oscillatoire à ∞, *lorsque* $q(t) = k \sin(t)$ *ou* $q(t) = k \cos(t)$ *pour tout* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ *.Plus généralement pour* $q(t) = t^c k \sin(t)$ *ou* $q(t) = t^c k \cos(t)$, *avec* $-1 < c \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Exemple 3.14 *Bien que nous ayons deffini oscillation et nonoscillation seulement pour les équations de forme symétrique les mêmes Deffinitions s'appliquent aux équations sous forme 'standard ' :*

$$y'' + ry' + sy = 0. \tag{3.17}$$

Récemment M.K. Kwong et J.S. W. Wong ont montré que l'équation (3.17) est NO à ∞ *pour*

$$r(t) = \sin t \quad \text{et} \quad s(t) = \cos(t),$$

mais est O lorsque.

$$r(t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad s(t) = \sin(t).$$

Lorsque la mise en forme symétrique (3.1) la première de ces équations a

$$p(t) = e^{-\cos(t)},\ q(t) = \cos(t)e^{-\cos(t)}$$

et le deuxième a

$$p(t) = e^{\sin(t)}, \; q(t) = \sin(t)e^{\sin(t)}.$$

3.2.3 Caractérisations oscillatoires

Dans cette partie, nous donnons deux caractérisations pour l'oscillation ; chacun d'eux est obtenu à l'aide d'équations non linéaires associés comme un outil.

Lemme 3.15 *Dans cette partie, nous donnons deux caractérisations pour l'oscillation ; chacun d'eux est obtenu à l'aide d'équations non linéaires associés comme un outil.*

Lemme 3.16 *Supposons qu'on a (3.2). Supposons y et z sont des solutions à valeurs réelles de (3.2). Soit $W = ypz' - zpy'$ le Wronskien de y, z. Alors $W(t) = c \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in J$. supposons*

$$r = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

alors

$$(pr')' + qr = \frac{c^2}{pr^3} \quad sur \quad J. \tag{3.18}$$

Preuve. on a $rr' = yy' + zz'$,

$$r'pr' + r(pr')' = py'^2 + pz'^2 + y(py')' + z(pz')' = p(y'^2 + z'^2) - qr^2. \tag{3.19}$$

Réarrangeant les termes dans (3.19), nous obtenons

$$(pr')' + qr = \frac{p}{r}[-r'^2 + y'^2 + z'^2] \tag{3.20}$$

Le Wronskien est la constante c, donc nous avons

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{p^2} &= (y^2z'^2 - 2yz'zy' + z^2y'^2) \qquad (3.21)\\ &= (y^2z'^2 - 2yz'zy' + z^2y'^2 + y^2y'^2 - y^2y'^2 + z^2z'^2 - z^2z'^2) \\ &= [(y^2 + z^2)(y'^2 + z'^2) - (y^2y'^2 + 2yy'zz' + z^2z'^2)] \\ &= [r^2(y'^2 + z'^2) - r^2r'^2] = r^2[y'^2 + z'^2 - r'^2] \\ &= r^2\frac{r}{p}[(pr')' + qr]. \end{aligned}$$

Maintenant (3.18) résulte de (3.21). ■

Lemme 3.17 *Supposons qu'on a (3.2), soit* $c \in J$*. Supposons* r *est une solution positive de (3.18) sur* J*. définir* y, z *par*

$$y(t) = r(t)\sin(\int_c^t \frac{1}{pr^2}), \quad z(t) = r(t)\cos(\int_c^t \frac{1}{pr^2}). \tag{3.22}$$

Alors, y *et* z *sont des solutions linéairement indépendantes de (3.1).*

Preuve. Cela résulte d'un calcul simple ■

Lemme 3.18 *Soit (3.2) et* $c \in J$*. Supposons que* r *est une solution positive de (3.18) sur* J*. Alors, pour tout* $A,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$y(t) = Ar(t)\sin(\alpha + \int_c^t \frac{1}{pr^2}),\ t \in J \tag{3.23}$$

est une solution de (3.1). Inversement, pour toute solution y *à valeur réelle de (3.1), il existe* $A,\ \alpha \in \mathbb{R}$ *tel que on a (3.23).*

Preuve. Cela découle du lemme 3.17 et trig standard. identités. ■

Lemme 3.19 *Supposons que* u *est une fonction satisfaisant les conditions suivantes :*

(1) $u > 0$ *sur* J *;*

(2) $u \in AC_{loc}(J)$ *;*

(3) $pu' \in AC_{loc}(J)$*.*

Si y *est une solution de (3.1), alors* $z = \frac{y}{u}$ *est une solution de*

$$(pu^2z')' + (uMu)z = 0 \quad \text{dans } J. \tag{3.24}$$

Preuve. Cela résulte d'un calcul direct. ■

Théorème 3.20 *Soit (3.2) et* $c \in J$ *. Alors :*

• *L'équation (3.1) est oscillatoire à* b *si et seulement si il existe une fonction* u *avec les propriétés suivantes :*

(1) $u \in AC_{loc}(J)$,

(2) $pu' \in AC_{loc}(J)$,

(3) $u > 0$ *sur* J,

(4) $\int_c^b \frac{1}{pu^2} = +\infty$,

(5) $\int_c^b uMu = \infty$.

• *L'équation (3.1) est oscillatoire à a si et seulement si il existe une fonction u avec les propriétés suivantes :*

(1) $u \in AC_{loc}(J)$,

(2) $pu' \in AC_{loc}(J)$,

(3) $u > 0$ *sur* J,

(4) $\int_a^c \frac{1}{pu^2} = +\infty$,

(5) $\int_a^c uMu = \infty$.

Preuve. Nous établissons le premier cas pour l'extrémité b .Supposons qu'on a $(1)-(5)$ et y est une solution de (3.1). Soit $z = y/u$, alors on a (3.24). De conditions (1) et (2) il s'ensuit que Mu est définie. Théorème (3.8) et les conditions $(4), (5)$ impliquent que (3.24) est oscillatoire. Maintenant (3) implique que y est oscillatoire.

Supposons maintenant que (3.1) est oscillatoire à b. Soit y_1, y_2 deux solutions à valeurs réelles linéairement indépendantes de (3.1) et

$$r = (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors on a (3.18) et $(1), (2), (3)$ avec $u = r$. Choisissant $d \in J$ et définir y par

$$y(t) = r(t)\sin(\int_d^t \frac{1}{pr^2}),\ t \in J.$$

Alors y est une solution de (3.1) par le lemme (3.17). Donc y est oscillatoire et, par conséquent, puisque $u > 0$ dans J,(4) est vérifiée. De (3.17), nous obtenons

$$uMu = \frac{c^2}{pu^2}$$

et (5) puisque $c \neq 0$ par l'indépendance linéaire de y_1, y_2. La preuve pour l'extrémité de a semblable. ■

La prochaine caractérisation utilise l'équation de Riccati bien connu et un théorème de comparaison pour les équations Ricatti de [21].

Théorème 3.21 *Soit (3.2) et $c \in J$. Alors (3.1) a une solution positive sur $[c,\ b)$ si et seulement si il existe $q_1,\ q_2 \in L_{oc}([c,b),\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}$ satisfaisant les deux conditions suivantes :*

(1) $-q = q_1 + q_2$ *dans* $[c,b)$.

(2) $(r + \int_c^t q_2)^2 \leq pq_1$ *dans* $[c,b)$.

Preuve. Supposons que u est une solution positive de (3.1) sur $[c,\ b)$ et soit $z = \frac{pu'}{u}$. Alors z satisfait à l'équation de Ricatti :

$$z' + \frac{z^2}{p} = -q$$

et les conditions sont remplies avec $q_1 = \frac{z^2}{p}$ et $q_2 = z'$. Pour la preuve de la suffisance voir Proposition 4.8 p. 35 [21]. (Remarque différents convention de signe utilisée dans [21] : $-q$ au lieu de q.) ■

3.3 Point limite, Limite-Circle

Conditions aux limites régulières du type décrit dans la Chapitre 2 n'ont pas de sens à un point d'extrimité singulier car, en général, les solutions et leurs quasi-dérivés ne sont pas définis a ce point. Qu'est-ce que devrait prendre leur place ? La réponse dépend de la nature de la singularité : point limite (PL) ou limite-cercle (LC). Cette terminologie a été introduite par Hermann Weyl en 1910 [17] dans le cadre d'une construction géométrique de cercles **concentriques dans le plan de chacune contenue dans la précédente**. Dans la limite de ces cercles convergent vers un cercle -cas limite cercle (LC) ou à un point - cas point-limite (PL) . Pour ce dernier cas, aucune condition aux limites est exigé ou permis, mais le cas de LC nécessite des conditions aux limites pour déterminer les extensions auto-adjointes. Ce document de Weyl est un des journaux les plus cités dans l'analyse et peut être crédité à partir de la théorie de PSL singulier.

3.3.1 Système de régularisation de l'équation scalaire

Considérons l'équation

$$-(py')' + qy = \lambda wy \quad sur \quad J, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.25}$$

avec

$$J = (a,\ b), -\infty \leq a < b \leq \infty, \frac{1}{p}, q, w \in L_{loc}(J). \tag{3.26}$$

Et considerons le systeme de premier ordre répresentent (3.25)

$$Y' = (P - \lambda W)\, Y, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y \\ py' \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Théorème 3.22 *(Système de régularisation des équations scalaires). Supposons qu'on a (3.25) et (3.26). Supposons que, pour certain $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $\lambda = \lambda_0$, toutes les solutions $y(., \lambda_0)$ de l'équation (3.25) satisfont*

$$\int_a^d |y(., \lambda_0)|^2 \, |w| < \infty \tag{3.28}$$

Soit $\Phi = (\Phi_{ij}) = \Phi(., ., \lambda, P, W)$ est la matrice fondamentale primaire de (3.27). $\forall\ u \in J$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ définissent

$$Z(., \lambda) = \Phi^{-1}(., u, \lambda_0) Y(., \lambda) \tag{3.29}$$

et soit

$$G = \begin{bmatrix} -\Phi_{11}(., \lambda_0)\Phi_{12}(., \lambda_0) w & -\Phi_{12}^2(., \lambda_0) w \\ \Phi_{11}^2(., \lambda_0) w & \Phi_{11}(., \lambda_0)\Phi_{12}(., \lambda_0) w \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

alors $G \in L\,(J, \mathbb{C})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ nous avons

$$Z'(., \lambda) = (\lambda_0 - \lambda) G Z(., \lambda) \quad sur\ J. \tag{3.31}$$

Preuve. Par l'hypothèse $\Phi_{11} = \Phi_{11}(., u, \lambda_0)$ et $\Phi_{12} = \Phi_{12}(., u, \lambda_0)$ sont dans $L_2(J, |w|)$. Ceci, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\left(\int_J |\Phi_{11}| \, |\Phi_{12}| \, |w| \right)^2 = \left(\int_J |\Phi_{11}| \, |\Phi_{12}| \, |w|^{\frac{1}{2}} \, |w|^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \left(\int_J |\Phi_{11}|^2 \, |w| \right) \left(\int_J |\Phi_{12}|^2 \, |w| \right) < \infty$$

et donc nous avons montré que $g_{11} \in L_1(J, \mathbb{C})$. De la même façon on montre que, pour g_{12}, g_{21}, g_{22} et donc $G \in L(J, \mathbb{C})$. De (3.29) et en pose $Z = Z(., \lambda)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} Z' &= \left(\Phi^{-1}\right)' Y + \Phi Y' = -\Phi^{-1}\Phi'\Phi^{-1}Y + \Phi^{-1}Y' \\ &= \Phi^{-1}\left[\lambda_0 W - P + P - \lambda W\right]\Phi Z \\ &= (\lambda_0 - \lambda)\,\Phi^{-1}W\Phi Z = (\lambda_0 - \lambda)\,GZ \quad \text{sur } J \end{aligned}$$

■

Théorème 3.23 *Supposons qu'on a les hypothèses et notation que (3.22). Si toutes les solutions de (3.25) sont dans $L_2(J, |w|)$ pour certain $\lambda \in \mathbb{C}$, alors cela vaut pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}$. Si les quasi-dérivés de toutes les solutions de (3.25) sont dans $L_2(J, |w|)$ pour certains $\lambda \in \mathbb{C}$. ; alors cela vaut pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Remarque 3.24 *3.26Nous remarquons que l'invariance de λ donné par le théorème 3.23 est établi sous l'hypothèse (3.26) ; ainsi la dichotomie LC/PL dans $L_2(J, |w|)$ détient non seulement pour les valeurs réels $r = \frac{1}{p}, q, w$ qui peuvent changer de signe et ou sont identiquement nulle sur des sous-intervalles, mais aussi $r = \frac{1}{p}, q, w$ peuvent être des complexes .*

3.4 Classifications des points d'extrémités : R, LC, PL, O, NO , LCNO, LCO

Définitions de : Point régulier (R), Limite-cercle (LC), Point-limite (PL), Oscillatoire (O), Nonoscillatoire (NO), Limite-cercle non-oscillatoire $(LCNO)$ et Limite-cercle-oscillatoire (LCO) points d'extrémité sont donnés ici. Ce sont tous standard et bien connue.

Considérons l'équation

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \lambda \in \mathbb{C}, \ sur\ J, \tag{3.32}$$

avec

$$J = (a,\ b), -\infty \leq a < b \leq \infty, \frac{1}{p}, q, w \in L_{loc}(J). \tag{3.33}$$

Définition 3.25 *Le point d'extrémité (finie ou infinie) a est :*

1− Régulier (R) si, de plus de (3.33),

$$\frac{1}{p},\ q,\ w \in L\left((a,\ d), \mathbb{C}\right)$$

détient pour certains (et donc tout) $d \in J$;

2− Le point d'extrémité a est un singulier (notation S) si elle n'est pas R,

$$\begin{cases} (i) & \textit{soit } a \ = -\infty \\ (ii) & \textit{ou } a \ \in \mathbb{R} \textit{ mais } \int_a^d \{(p(x))^{-1} + |q(x)| + w(x)\}dx = +\ \infty. \end{cases}$$

Si a est S, alors il existe deux principaux sous-cas de classification en effet :

3− L'extrémité a est cercle limite (LC) si toutes les solutions de l'équation (3.32) sont dans $L_2\left((a,d),|w|\right)$ pour certains pour certains (et donc tout) $d \in (a,b)$; i.e pour certains $\lambda \in \mathbb{C}$ une solution $y(\cdot,\lambda)$ de l'équation différentielle (3.32) vérifie

$$\int_a^d w(x)|y(x,\lambda)|^2 dx < +\infty.$$

3− Est PL s'il n'est pas LC.en d'autre terme pour certains $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe au moins une solution $y(\cdot,\ \lambda)$ de l'équation différentielle (3.32) tels que

$$\int_a^d w(x)|y(x,\ \lambda)|^2 dx = +\infty.$$

4− Est O si $\frac{1}{p}, q, w, \lambda$ sont tous à valeur réels et il existe une solution non triviale à valeur réelle d'un nombre infini de zéros dans n'importe quel voisinage droit de a ;

5− Est NO, si ce n'est pas O ;

6 − LCO si elle est à la fois LC et O, i.e le point d'extrémité a est une limite-cercle oscillant si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute solution non nulle $y(\cdot,\lambda)$,et pour tout $c \in (a,d]$, il existe un point $\xi \in (a,c]$ telle que $y(\xi,\lambda) = 0$.

7− $LCNO$ si elle est à la fois LC et NO ou s'il existe un point $c \in (a,d)$, un valeur réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et une solution $y(\cdot,\lambda)$ avec la propriété $y(x,\lambda) > 0$ pour tout $x \in (a,c)$.

Des définitions similaires sont prises à b. Un point d'extrémité est appelé singulière si elle n'est pas régulière.

Remarque 3.26 *D'après la définition (3.25) un point d'extrémité régulière est automatiquement dans la classe LC. Cela résulte du théorème (2.6) qui montre que toutes les solutions ont des limites à extrémités réguliers et sont donc bornées dans un voisinage .Il est bien connu que la classifications LC, PL, sont indépendants de $\lambda \in \mathbb{C}$ et que les classifications LCO et $LCNO$ sont indépendants de $\lambda \in \mathbb{R}$. Lors d'un point d'extrémité PL la classification de O, en général, dépend de λ comme on peut facilement le constater à partir de l'équation de Fourier : $-y'' = \lambda y$*

Remarque 3.27 1– *Lorsque a est R ou $LCNO$ l'équation différentielle (3.32), pour tout valeur réelle $\lambda \in \mathbb{R}$, a deux solutions linéairement indépendantes $u(\cdot,\lambda), v(\cdot,\lambda) : (a,b) \to \mathbb{R}$, de telle sorte que pour un certain $d \in (a,b)$*

$$\begin{cases} (i) & u(x,\lambda) > 0 \;\; et \; v(x,\lambda) > 0 \;\; pour \; tout \;\; x \in (a,d), \\ (ii) & \lim_{x \to a+} \frac{u(x,\lambda)}{v(x,\lambda)} = 0, \\ (iii) & \int_a^d \{p(x)u(x,\lambda)^2\}^{-1} dx = +\infty \quad et \; \int_a^d \{p(x)v(x,\lambda)^2\}^{-1} dx < +\infty. \end{cases}$$

La solution $u(\cdot,\lambda)$ est unique, à multiples scalaires, et est appelé la solution principale de l'équation différentielle pour le paramètre λ. La solution $v(\cdot,\lambda)$ est appelée solution non-principale, notant que cette solution n'est pas unique. En particulier, lorsque a est R, une solution principale $u(\cdot,\lambda)$ est déterminée par les conditions initiales

$$u(a,\lambda) = 0 \quad et \quad (pu')(a) \neq 0.$$

2– *Quand a est LCO alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ réel toutes les solutions de l'équation différentielle (3.32) ont une infinité de zéros dans toute voisinage droit (a,d) de a.*

Théorème 3.28 *Supposons qu'on a les mêmes hypothèses et notations du théorème (3.22). Supposons p, q, w sont des valeurs réelles et $p > 0$. Supposons que l'extrémité a est de type LCO pour un réel $\lambda = \lambda_0$. Alors l'équation (3.25) est LCO pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Notons que le théorème de comparaison de Sturm implique que LCO pour $\lambda > \lambda_0$.

Cas 1 : $z_j(a) > 0, \quad j = 1,2$. Nous montrons que, entre tous les trois zéros de la solution $\Phi_{11}(t,\lambda_0)$ il doit y avoir un zéro de la solution $y(t,\lambda) = \Phi_{11}(t,v)z_1(t,\lambda) + \Phi_{12}(t,v)z_2(t,\lambda)$. Traçons les graphes de $\Phi_{11}(.,\lambda_0)$ et $\Phi_{12}(.,\lambda_0)$ en gardant l'esprit de théorème de séparation de Sturm. (C'est là que les hypothèses p, g, w sont des valeurs réelles et $p > 0$ sont utilisés.) Il existe deux sous-intervalles disjoints de J tel que $y(., \lambda)$ est positif sur un et négative sur l'autre. Donc $y(., \lambda)$ doit avoir un zéro entre ces intervalles. Les autres cas ont des épreuves similaires. ■

3.4.1 Conditions PL et LC

Cette partie contient une introduction à la théorie de la classification de type LC/PL de l'équation symétrique

$$My = -(py')' + qy = \lambda wy, \lambda \in \mathbb{C}, \ sur \ J, \tag{3.34}$$

avec

$$J = (a, \ b), -\infty \leq a < b \leq \infty, \frac{1}{p}, q, w \in L_{loc}(J, \mathbb{C}).p > 0, \ w > 0, \ p.p \ sur \ J \tag{3.35}$$

Rappelons que la classification de type LC/PL à chaque point d'extrémité est indépendant de λ et dépend uniquement du comportement des coefficients $\frac{1}{p}, q, w$, au voisinage d'un point d'extrémité. La littérature sur ce sujet est vaste et la plus grande partie est pour le cas $J = [0, \infty)$ *et* $w = 1$. Nous nous limitons à quelques critères qui ont des preuves relativement simples,Nous commençons par un lemme fondamental pour l'équation

$$My = -(py')' + qy = 0, \ sur \ J(a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty, \tag{3.36}$$

Lemme 3.29 *Supposons qu'on a (3.36) et que* $\frac{1}{p}, q \in L_{loc}(J, \mathbb{R})$, $p > 0$ *p.p sur* J.

$1-$ *Si, pour un certain* $c \in J$, $q \geq 0$ *sur* (c, b), *alors l'équation (3.36) a une solution croissante positive sur* (c, b).

$2-$ *Si, pour un certain* $c \in J$, $q \geq 0$ *sur* (a, c), *alors l'équation (3.36) a une solution décroissante négative sur* (a, c).

$3-$ *Si* $q > 0$ *sur* (a, b) *et* u *est la solution réelle déterminée par les conditions initiales :* $u(c) = 0$, $(pu')(c) = 1$ *pour* $c \in J$, *alors* u *est décroissante dans* (a, b), *positive sur* (c, b), *et négative sur* (a, c).

Preuve. Déterminons la solution u à valeur réelle qui remplais aux conditions initiales

$$u(c) = 0, \ (pu')(c) = 1 \tag{3.37}$$

Nous prétendons que u est une telle solution. De (3.37) il s'ensuit que u est positive dans un voinage droit de c. D'après le théorème 2.8 les zéros de u (s'il y en a) dans l'intervalle $[c, b)$ sont isolés ; donc si u n'est pas positive sur $[c, b)$ il a un zéro d, $c < d < b$. Par la preuve du théorème 2.8, il existe un g en (a, c) de telle sorte que $(pu')(g) = 0$. Ceci et l'hypothèse implique que

$$(pu')(t) = 1 + \int_c^t qu \geq 1, \;\; c \leq t \leq g \tag{3.38}$$

Cela contredit $(pu')(g) = 0$ et l'on peut conclure que $u > 0$ sur $[c, g)$. Maintenant notant que (3.38) est vraie pour tout $t \in [c, b)$, nous concluons que $(pu') > 0$ sur $[c, b)$. Soit $c \leq h < k < b$, alors

$$u(k) - u(h) = \int_h^k u' = \int_h^k (pu') \left(\frac{1}{p}\right) > 0$$

d'ou le resultat .

Les preuves des autres parties sont similaires. ∎

Théorème 3.30 *Supposons q et w satisfont (3.35) et, en plus, supposons qu'il existe un point $c \in J$ et un point $k \in \mathbb{R}$ tels que*

$$q > kw \;\; sur \; (c, b), \quad et \;\; w \notin L_1(c, b) \tag{3.39}$$

Alors léquation (3.34) est de type PL à b pour tout p satisfaisant (3.35).

Preuve. Supposons que (3.34) est de type LC à b. Alors, toutes les solutions sont dans $L_2\left((c, b), w\right)$ pour chaque λ, en particulier pour $\lambda = k$. D'après le lemme 3.29, il existe une solution u de (3.34) avec $\lambda = k$, ce qui est positif et croissant sur (c, b). Soit $d \in (c, b)$. Alors

$$\int_d^b u^2 w \geq u^2(d) \int_d^b w,$$

Cette contradiction prouve que b est de type PL. ∎

Théorème 3.31 *Supposons que q et w satisfont (3.35) et, de plus, supposons qu'il existe un point $c \in J$ tels que*

$$\frac{q^2}{w} \in L_1(c, b), \;\; w \notin L_1(c, b) \tag{3.40}$$

Alors l'équation (3.34) est de type PL à b pour tout p satisfaisant (3.35).

Preuve. Supposons que (3.35) est de type LC à b et soit u, v deux solutions à valeurs réelles , linéairement indépendantes de (3.34) pour $\lambda = 0$, normalisée pour satisfaire l'identité Wronskien

$$u(pv') - v(pu') = 1 \ \ sur \ J. \tag{3.41}$$

Par intégration $(pu')' = qu$ nous obtenons

$$(pu')(t) = (pu')(c) + \int_c^t qu, \ t \in [c, b). \tag{3.42}$$

De l'inégalité de Schwarz

$$\left(\int_c^t qu\right)^2 \leq \left(\int_c^t \frac{q^2}{w}\right)^2 \int_c^t u^2 w, \tag{3.43}$$

l'hypothèse, et (3.42) nous concluons que (pu') est bornée sur (c, b). De même, (pv') est bornée (c, b). Ceci et (3.41) impliquent que, pour certains K constante positive, nous avons

$$\sqrt{w} \leq K\left(|u| + |v|\right)\sqrt{w} \tag{3.44}$$

La quadrature (3.44) nous concluons que, pour une constante C,

$$w \leq C\left(u^2 + v^2\right) w$$

Cela conduit à une contradiction puisque $u, v \in L_2((c, b), w)$ et $w \notin L_1(c, b)$. ■

Remarque 3.32 *Il est intéressant de noter qu'aucune condition sur p , autre que (3.35) est nécessaire dans les théorèmes 3.31 , en particulier pas de restriction de croissance est nécessaire . Ceci montre que pour q et w il n'est pas possible , en général , de trouver p tels que (3.35) est de type LC .*

Au lieu de commencer avec les trois coefficients p, q, w , et alors trouver des critères pour PL ou LC détient , on pourrait utiliser une autre approche : Commencez avec une ou deux coefficient donné et essayer de caractériser l'autre (s) pour le cas de LC détien . La première partie de cette remarque suggère que cette stratégie on voudrait commencer par p plutôt que q ou w .

Corollaire 3.33 *Supposons qu'on a (3.35) ,(3.34) . Supposons que $w \notin L_1(c, b)$ satisfait, pour* *certains $c \in J$,*

$$\frac{q}{\sqrt{w}} \in L_r(c,b),\ 2 \leq r \leq \infty$$

Alors (3.34) est PL à b pour tout p satisfaisant (3.35).

Preuve. Cela résulte de théorèmes 3.31 et 3.34 et l'observation suivante : Soit $f = \dfrac{q}{\sqrt{w}}$. Alors $f = g + h$ avec $g \in L_2(c,b)$ et $h \in L_\infty(c,b)$: définir

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & si\ |f(t)| \leq 1\ \ pour\ t \in (c,b), \\ 1, & si\ f(t) > 1\ \ pour\ t \in (c,b) \\ -1, & si\ f(t) < -1\ \ pour\ t \in (c,b) \end{cases}$$

et soit $g = f - h$ sur (c,b). Alors $g \in L_2(c,b)$. ■

La stratégie utilisée dans les preuves du théorème 3.31 peut être utilisé pour obtenir un résultat plus général en introduisant un paramètre de fonction B, alors des choix différents pour B conduisent à des résultats différents.

Théorème 3.34 *Supposons qu'on a (3.34), (3.35) . Supposons que pour certains $c \in J$, $w \notin L_1(c,b)$, et pour certains fonction positive $B \in AC_{loc}[c,b)$ les trois conditions suivantes sont remplies :*

1−

$$\int_c^b \left(\frac{w}{pB}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty \tag{3.45}$$

2− *il existe un $k \in \mathbb{R}$ telles que*

$$q \geq -kBw,\ \ sur\ [c,b) \tag{3.46}$$

il existe un $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left|\frac{\sqrt{p}B'}{B^{\frac{3}{2}}\sqrt{w}}\right| \leq K < \infty,\ \ sur\ [c,b) \tag{3.47}$$

Alors b est PL.

Preuve. Supposons que b est LC. Pour $\lambda = 0$ choissons u, v des solutions linéairement indépendantes à valeurs réelles satisfaisant l'identité Wronskien (3.41). En multipliant cette identité par $\frac{(\sqrt{w})}{\sqrt{pB}}$ nous obtenons

$$\left[\left(\frac{P}{B}\right)^{\frac{1}{2}} v'\right](u\sqrt{w}) - \left[\left(\frac{P}{B}\right)^{\frac{1}{2}} u'\right](v\sqrt{w}) = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{pB}} \text{ sur } [c,b) \tag{3.48}$$

De l'équation (3.34) avec $\lambda = 0$ nous obtenons $\frac{-(pu')'u}{B} = -\frac{qu^2}{B}$. Dans le reste de la preuve $K_1,\ K_2$, désignera des constantes. L'intégration et l'utilisation (3.46),

$$-\int_c^t \frac{q}{B}u^2 \leq k\int_c^t u^2 w < K_1,\ pour\ \ t \in [c,b)$$

Donc

$$\begin{aligned} -\int_c^t \frac{q}{B}u^2 &= \left(\frac{-pu'u}{B}\right)(t) + \left(\frac{-pu'u}{B}\right)(c) \\ +\int_c^t \frac{pu'^2}{B} - \int_c^t \frac{-pu'uB'}{B^2} &< K_1 < \infty,\ t \in [c,b) \end{aligned}$$

Soit

$$H(t) = \int_c^t \frac{pu'^2}{B},\ pour\ t \in [c,b)$$

Nous voulons montrer que $H(t)$ a une limite finie en b. De (3.47) et l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|\int_c^t \frac{-pu'uB'}{B^2}\right| &\leq \int_c^t \left|\frac{pu'uB'}{B^2}\right| \leq \int_c^t \left|\frac{\sqrt{p}B'}{B^{\frac{3}{2}}\sqrt{w}}\right| \left|\frac{\sqrt{p}u'u\sqrt{w}}{B^{\frac{1}{2}}}\right| \\ &\leq KH^{\frac{1}{2}}(t)\left(\int_c^t u^2 w\right)^{\frac{1}{2}} < K_2 H^{\frac{1}{2}}(t),\ t \in [c,b) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour certaines constantes $K_3,\ K_4$ nous avons

$$\left(\frac{-pu'u}{B}\right)(t) + H(t) - K_3 H^{\frac{1}{2}}(t) < K_4 \tag{3.49}$$

Si $H(t) \to \infty$ quand $t \to b$, alors de (3.49) il s'ensuit que u et (pu') ont le même signe sur un intervalle $(d,b),\ c < d < b$. Mais cela implique que u^2 est strictement croissante dans (d,b) et par conséquent

$$\int_d^t u^2 w \geq u^2(d)\int_d^t w$$

Cette contradiction achève la démonstration. ■

Théorème 3.35 *Supposons qu'on a (3.34), (3.35) . Supposons que* b *est* NO *lorsque* $\lambda = 0$ *et supposons que,* $\forall\ c \in J$, $\dfrac{\sqrt{w}}{\sqrt{p}} \notin L_1(c, b)$. *Alors* b *est* PL.

Preuve. Soit v une solution nonprincipal à b et supposons que b est LC. Choisissons d dans J de sorte que $v(t) \neq 0$ dans $[d, b)$. De l'inégalité de Schwarz nous avons

$$\left(\int_d^b \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{p}}\right)^2 \leq \int_d^b \frac{1}{pv^2} \int_d^b v^2 w$$

La seconde intégrale sur la droite est finie par l'hypothèse de LC, le premier par le théorème 3.7. Ceci contredit l'hypothèse et achève la démonstration. ■

L'exemple suivant est un classique de la théorie PL/LC.

Exemple 3.36 *Si* $q \in L_{loc}(J, \mathbb{R})$, $J = (1, \infty)$, *et* $q(t) \geq -kt^2$, *alors*

$$y'' + qy = \lambda y \quad sur \quad J,$$

est PL *à* ∞.

Preuve. Ici $w = 1 = p$. Prenons $B(t) = t^2$, $t \in J$ et notons que les trois conditions du théorème 3.34 déttiennent ; également $w \notin L(J)$. ■

3.5 Exemples

Dans cette section, nous donnons un certain nombre d'exemples pour illustrer certains concepts et les résultats évoqués ci-dessus. Nous suivons la notation établie ci-dessus. Nous étudions l'équation

$$-(py')' + qy = \lambda wy, \ \lambda \in \mathbb{C}, \quad sur\ J, \tag{3.50}$$

avec

$$J = (a,\ b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty,\ p, q, w : J \to \mathbb{C}, \tag{3.51}$$

Nous complétons les classifications d'extrémités indiquées ci-dessus avec le (FR) classification faiblement régulière :

Définition 3.37 *Le point d'extrimité a nest FR si*

$$\frac{1}{p},\ q,\ w \in L(a,\ c),\ a < c < b,$$

mais au moins un de $\frac{1}{p}, q, w$ n'est pas bornée dans (a, c) pour tout c , $a < c < b$, ou $w(a) = 0$.

Exemple 3.38 *Considérons l'équation classique Legendre*

$$-(py')' = \lambda y, \quad t,\ \lambda \in \mathbb{R},\ dans\ J$$

avec

$$J = J_1 \cup J_2 \cup J_3,\ J_1 = (-\infty, -1),\ J_2 = (-1, 1),\ J_3 = (1, \infty)$$

et

$$p(t) = 1 - t^2,\ q(t) = \frac{1}{4},\ w(t) = 1,$$

est généralement étudié sur l'intervalle $(-1, 1)$, car il a des singularités à la fois aux points ± 1. Cette équation a des points singuliers à $-\infty$, à $+\infty$ et les points intérieurs -1 et 1 des deux côtés. Les singularités à $-\infty$, et à $+\infty$ sont dues à la fois au premier coefficient p et la fonction de poids $w = 1$ puisque ni w ni $\frac{1}{p}$ est intégrable au voisinage de $-\infty$, et $+\infty$; les singularités à -1 et à 1 à partir des deux côtés sont dues au fait que $\frac{1}{p}$ n'est pas intégrable au voisinage de ces points de chaque côté. (Rappelons que la classification régulière singulier, ainsi que les solutions ne dépendent pas de p mais sur $\frac{1}{p}$) Nous faisons les observations suivantes :

1$-$ *Les deux points $-\infty$, et $+\infty$ sont PL*

2$-$ *L'équation est $LCNO$ à $-1^-, -1^+, 1^-, 1^+$*

3$-$ *Pour $\lambda = 0$, l'équation a deux solutions linéairement indépendants*

$$u(t) = 1,\ v(t) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+t}{1-t}),\ -1 < t < 1.$$

Notons que u est une solution définie sur tous $\mathbb{R}$ mais v n'est pas définie à ± 1 des deux côtés. Donc u est la solution principale à ± 1 des deux côtés et v est une solution nonprincipale à ces points.

4$-$*Comme u est pas dans les trois intervalles de domaine maximale nous considérons la fonction u au point (3) du lemme 13.3.2 en [23] tel que défini seulement sur $(-2, 2)$ et définons* *une nouvelle fonction encore notée u sur $\mathbb{R}$ par*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & -1 < t < 1, \quad -2 \le t < 1 \qquad\qquad\qquad\qquad 1 < t \le 2, \\ 0 & \qquad t \le -3 \qquad\qquad 3 \le t \end{cases}$$

et pour $-3 < t < -2$ définir u de telle sorte que u est continuellement différentiable sur $\mathbb{R}$. De même, nous définissons une fonction a petite domaine maximale qui coïncide avec v sur $[-2, 2]$ et à support compact dans $[-3, 3]$. Cette nouvelle fonction est toujours désigné par v

5$-$ $[u, v](t) = 1$ *pour* $-2 < t < 2$ *; notons que* $[u, v](t)$ *est définie à* $t = -1$ *et* $t = 1$*, même si v n'existe pas à ces points.*

6$-$ *Pour toute fonction de domaine maximale* $y = (y_1, y_2, y_3)$ *nous faut*

$$[y_j, u]_j = -py_j', [y_j, v]_j = y_j - v(py_j'), \;\; j = 1, 2, 3.$$

Ici, nous avons omis les indices sur u et v puisque ceux-ci sont tous donnée par la même formule, voir point (3) ci-dessus.

7$-$ *Les trois forme Lagrange intervalle est donnée par :*

$$[y, z] = [y, z](-1^-) + [y, z](1^-) - [y, z](-1^+) + [y, z](1^+)$$

pour toute les fonctions de domaine maximales $y = (y_1, y_2, y_3), \;\; z = (z_1, z_2, z_3)$*.Notons que les termes impliquant* $\pm\infty$ *sont portés disparus puisque ce sont des points d'extrimités sont PL par conséquent,* $[y, z]\,(-\infty) = 0 = [y, z](\infty)$.

8$-$ *Les CB*

$$[y,\; u](-1) = -(py')(-1) = 0, \;\; [y,\; u](1) = -(py)'(1) = 0,$$

détermine l'extension Friedrichs dont les valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_n = n(n+1), \;\; n \in \mathbb{N}_0;$$

et les fonctions propres sont les polynômes de Legendre classiques.

Les CB

$$[y,v](-1)=0,\ \ [y,v](1)=0,$$

est une CB séparé non-Friedrichs .

Les CB régulière périodique et semi-périodique sont respectivement.

$$\begin{aligned}[y,u](-1) &= [y,u](1),\ [y,v](-1)= \ [y,v](1);\\ [y,v](-1) &= -[y,v](1),[y,u](-1)=-[y,u](1);\end{aligned}$$

respectivement. Notons que ceux-ci dépendent du choix des conditions aux limites des fonctions u,v.

Exemple 3.39 *La forme de Liouville de l'équation de Bessel sur $(0,\infty)$. équation de l'atome d'hydrogène.*

$$-y" + \frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{t^2}y=\lambda wy \ \ sur \ \ J=(0,1). \tag{3.52}$$

où $0<\mu<1$, $\mu\neq\frac{1}{2}$, $w\in L(J,\mathbb{R})$, w change de signe et $|w|=1$ pp sur J.

Il est facile de voir que **(***3.52***)** *; est LCNO à 0 et régulière à 1. L'équation définie à droit associée à (3.52***)** *; est l'équation de Bessel*

$$-y" + \frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{t^2}y=\xi y \ sur \ J \tag{3.53}$$

pour $\xi=0$

$$u(t)=t^{\frac{1}{2}+\mu}\ et \ \ v(t)=t^{\frac{1}{2}-\mu}$$

sont les solutions principaux et nonprincipaux respectivement , de **(***3.53***)** *à 0 ; et*

$$u_2(t):=u_1(t)+\frac{1}{2\mu}v(t)$$

et $v(t)$ sont les solutions principaux et nonprincipaux ,respectivement , de **(***3.53* **)** *à 1 Soit $u\in D_{max}$ définie par $u_1$sur $(0,c]$, u_2 sur $[d,1)$, et utilisant le lemme de Naimark Patcher [24] pour construire $u\in D_{max}$ tel que $u=u_1$sur $(0,c]$ et $u=u_2$ sur $[d,1)$, où $0<c<d<1$. Alors u et v satisfont les hypothèses du lemme 12.5.2 en [23] . Utilisation $\{u,v\}$ comme CB , nous* *obtenons les CB séparés*

$$\begin{aligned}\cos\alpha\ [y,u](0)-\sin\alpha\ [y,v](0) &= 0,\\ \cos\beta\ [y,u](1)-\sin\beta\ [y,v](1) &= 0,\end{aligned}$$

Alors pour

$$p=1,\ q(t)=\frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{t^2},\ w=1$$

le point ∞ est PL pour tout μ.

Le point 0 est :

- *$LCNO$ pour $-1<\mu<1$ mais $\mu^2\neq\frac{1}{4}$*
- *R pour $\mu^2=\frac{1}{4}$*
- *PL pour $\mu^2>\frac{1}{4}$.*

$u(t)=t^{\frac{1}{2}+\mu}\quad v(t)=t^{\frac{1}{2}-\mu},\qquad$ *pour* $\mu\neq 0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},$

$u(t)=t,\qquad v(t)=1,\qquad$ *pour* $\mu=-\frac{1}{2},$

$u(t)=t,\qquad v(t)=-1,\qquad$ *pour* $\mu=\frac{1}{2},$

$u(t)=\sqrt{t},\qquad v(t)=\sqrt{t}\log(t),\qquad$ *pour* $\mu=0.$

Pour $\mu\geq 0$, u est la solution principale ; donc $[y,u](0)=0$ est la condition de Friedrichs à 0, il n'y a pas de CB à ∞ car cet extrémité est PL. Mais pour $-\frac{1}{2}<\mu<0$ notons que v est la solution principale et donc $[y,v](0)=0$ est CB de Friedrichs.

Exemple 3.40 *L'équation Halvorsen sur $(0,\infty)$.*

$$p(t)=1,\ q(t)=\frac{e^{-\frac{2}{t}}}{t^4},\ w(t)=1;$$

0 est FR ; ∞ est $LCNO$. Dans ce cas, les CB de vecteur Y a la forme $Y(0)=\begin{pmatrix} y(0)\\ (py')(0)\end{pmatrix}$ *ā 0 et* $Y(\infty)=\begin{pmatrix}[y,u](\infty)\\ [y,v](\infty)\end{pmatrix}$ *où $u(t)=1$, $v(t)=t$.*

Exemple 3.41 *L'équation de Boyd $(-\infty,0)$ et sur $(0,\infty)$.*

$$p=1,\ q(t)=-\frac{1}{t},\ w=1$$

1− *LP* *à* $-\infty$ *et* ∞ *;*

2− *LCNO* *à* 0^+ *et* 0^-

$$u(t) = t,\ v(t) = 1 - t(\log|t|)$$

Les solutions peuvent être données en termes des fonctions de Whittaker, voir [2], la donnée u, v *sont des fonctions de domaine maximales qui ne sont pas des solutions pour tout* λ*. Cette équation sur l'intervalle* $(-1, 1)$*, donc avec une singularité intérieur à* 0*, se pose dans un modèle dans le cadre de l'étude des tourbillons dans l'atmosphère, voir Boyd [4].*

Exemple 3.42 *L'équation Sears-Titchmarsh sur* $(0, \infty)$ *[15].*

$$p(t) = t,\ q(t) = -t,\ w(t) = \frac{1}{t}$$

1− *PL* *à* 0 *;*

2− *LCO* *à* ∞*.*

Pour les problèmes sur $[1,\ \infty)$ *le spectre est discret mais non borné, pour voir quelques résultats numériques voir [2]*

$$u(t) = \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\sqrt{t}}, \qquad v(t) = \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\sqrt{t}}$$

Exemple 3.43 *L'équation BEZ sur* $(-\infty, 0)$ *et sur* $(0, \infty)$*.*

$$p(t) = t,\ q(t) = \frac{1}{t},\ w(t) = 1;$$

1− *PL* *à* $-\infty$ *et* ∞ *;*

2− *LCO* *à* 0^- *et* 0^+ *.*

Voir l'exemple 5 dans [2] pour des résultats numériques.

$$u(t) = \cos(\log|t|), \quad v(t) = \sin(\log|t|).$$

Exemple 3.44 *L'équation d'onde de marée Laplace sur* $(0, \infty)$*.*

$$p(t) = \frac{1}{t},\ q(t) = \frac{k}{t^2} + \frac{k^2}{t},\ w = 1,\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0.$$

1− $LCNO$ à 0 pour tout k ;

2− LP à ∞ pour tout k.

Il ne s'agit que d'un cas très particulier de l'équation nommé, voir Homer [10] pour l'équation générale et les références à la littérature appliquée.

Même pour ce cas particulier, il n'y a pas de représentations de solutions en termes de fonctions spéciales bien connues. Ainsi, pour déterminer les conditions aux limites, il faut utiliser les fonctions de domaine maximales . Ces fonctions sont données par

$$u(t) = t^2,\ v(t) = t - \frac{1}{k}.$$

Exemple 3.45 *L'équation Latzko sur $(0, 1)$.*

$$p(t) = 1 - t^7,\ q = 0,\ w(t) = t^7,$$

1− FR à 0 (puisque $w(0) = 0$) ;

2− $LCNO$ à 1. La singularité à 1 nécessite l'utilisation de fonctions de domaine maximales telle que

$$u(t) = 1,\ v(t) = -\log(1 - t)$$

pour déterminer la condition limite du vecteur $Y(1)$. Cet exemple a une longue et glorieuse histoire, voir Fichera [9].

Exemple 3.46 *Une équation faiblement régulier sur $(0, \infty)$.*

$$p(t) = \sqrt{t},\ q = 0,\ w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

1− PL à ∞

2− Faiblement régulière à 0 en raison due à p et w.

Exemple 3.47 *L'équation de l'atome d'hydrogène sur $(0, \infty)$ voir [11].*

$$p(t) = 1,\ q(t) = \frac{k}{t} + \frac{h}{t^2},\ w(t) = 1,\ k,\ h \in \mathbb{R}.$$

Pour tout h, k il n'y a pas des valeurs propres positives, ∞ est PL et le spectre essentiel est $[0, \infty)$. Si $k = 0$ l'équation se réduit à Bessel, avec $h = \mu^2 - \frac{1}{4}$.

- *PL à* ∞ *pour tout* h, k.
- *Le point* 0 *est :*
- R *pour* $h = 0 = k$,
- $LCNO$ *pour* $h = 0$ *et tout* $k \neq 0$
- $LCNO$ *pour* $\frac{-1}{4} \leq h < \frac{3}{4}$, *mais* $h \neq 0$ *et tout* k
- LCO *pour* $h < \frac{-1}{4}$ *et tout* k
- PL *pour* $h \geq \frac{3}{4}$ *et tout* k.

Soit

$$\rho = \sqrt{h + \frac{1}{4}}, \text{ pour } \; h \geq \frac{-1}{4}.$$

(1) *Pour* $h \geq \frac{3}{4}$ *et* $k \geq 0$, *il est au plus une valeur propre négative et* $\lambda = 0$ *peut être une valeur propre ; pour* $h \geq \frac{3}{4}$ *et* $k < 0$, *il existe une infinité de valeurs propres négatives données par*

$$\lambda_n = \frac{-k^2}{(2n + 2\rho + 1)^2}, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

et $\lambda = 0$ *n'est pas une valeur propre.*

(2) *Pour* $h = 0, \; u(t) = t, \; v(t) = 1 + kt \log t$. *Pour certaines valeurs propres calculées voir [2] et [11].*

(3) $-\frac{1}{4} < h < \frac{3}{4}, \; 0 < \rho < 1$, *mais* $\rho \neq \frac{1}{2}$. *Tous les résultats suivants sont valables pour les conditions aux limites non-Friedrichs :* $[y, \; v]\,(0) = 0$, *où*

$$u(t) = t^{\rho + \frac{1}{2}}, \; v(t) = t^{\frac{1}{2} - \rho} + \frac{k}{1 - 2\rho} t^{\frac{3}{2} - \rho}.$$

(a) $k > 0, \; 0 < \rho < \frac{1}{2}$, *il n'y a pas des valeurs propres négatives*

(b) $k > 0, \frac{1}{2} < \rho < 1$ *il ya exactement une valeur propre négative donnée par*

$$\lambda_0 = \frac{-k^2}{(2\rho - 1)^2}$$

(c) *Si* $k < 0, \; 0 < \rho < \frac{1}{2}$, *il ya un nombre infini des valeurs propres négatives données par*

$$\lambda_n = \frac{-k^2}{(2n - 2\rho + 1)^2}, \; n \in \mathbb{N}_0$$

(d) Si $k < 0, \frac{1}{2} < \rho < 1$, il existe une infinité de valeurs propres négatives données par

$$\lambda_n = \frac{-k^2}{(2n - 2\rho + 3)^2}, \ n \in \mathbb{N}_0$$

Les prochains résultats se rapportent à la CB

$$A_1[y, \ u](0) + A_2[y, \ v](0) = 0.$$

(e) si $k = 0$ et $A_1A_2 < 0$ il ya exactement une valeur propre négatives données par :

$$\lambda_0 = -4\left(\frac{-A_1\Gamma(1+\rho)}{A_2\Gamma(1-\rho)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

(f) Notons que pour $h = -\frac{1}{4}, \ k \in \mathbb{R}$, la classification $LCNO$ à 0 détient. Donc

$$u(t) = \sqrt{t} + kt\sqrt{t}, \ v(t) = 2\sqrt{t} + (\sqrt{t} + kt\sqrt{t})\log(t).$$

Pour $k = 0$ et $A_1A_2 < 0$ il ya exactement une valeur propre négative donnée par

$$\lambda_0 = ce^{\frac{2A_1}{A_2}}, \ c = 4e^{4-2\gamma}, \gamma = 0.5772156649\ldots,$$

où γ est la constante d'Eulers.

(g) $h < \frac{-1}{4}, k \in \mathbb{R}$, l'équation est LCO à 0. Pour $k = 0$ cette équation se réduit à l'équation Krall ,. Pour $k \neq 0$ formules explicites pour les valeurs propres ne sont pas disponibles ; certaines propriétés qualitatives du spectre sont : pour tout k il existe une infinité de valeurs propres négatives allant de façon exponentielle à $-\infty$ pour $k > 0$ le point 0 n'est pas un point d'accumulation de valeurs propres, pour $k \leq 0$ les valeurs propres s'accumulent également à 0.

Exemple 3.48 *L'équation de Jacobi sur $(-1, 1)$.*

$$p(t) = (1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1}, \ q = 0, \ w(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$$

Le point -1 pour tout α est :

- *PL pour $\beta \leq -1$ et pour $\beta \geq 1$*
- *FR pour $-1 < \beta < 0$*

- *LCNO pour* $0 \leq \beta < 1$

Le point $+1$ *pour tous* β *:*

- *PL pour* $\alpha \leq -1$ *et pour* $\alpha \geq 1$
- *FR pour* $-1 < \alpha < 0$
- *LCNO pour* $0 \leq \alpha < 1$.

Les fonctions conditions aux limites u, v *peuvent être pris comme suit :*

- *Pour* $t < 0$ *:*

  (*i*) *Si* $-1 < \beta < 0$ *alors* $u(t) = (1+t)^{-\beta}, v(t) = 1$

  (*ii*) *Si* $\beta = 0$ *alors* $u(t) = 1, v(t) = \log \frac{1+t}{1-t}$

  (*iii*) *Si* $0 < \beta < 1$ *alors* $u(t) = 1, v(t) = (1+t)^{-\beta}$

- *Pour* $t > 0$ *:*

  (*i*) *Si* $-1 < \alpha < 0$ *alors* $u(t) = (1-t)^{-\alpha},\ v(t) = 1$

  (*ii*) *Si* $\alpha = 0$ *alors* $u(t) = 1,\ v(t) = \log \dfrac{1+t}{1-t}$

  (*iii*) *Si* $0 < \alpha < 1$ *alor* $u(t) = 1,\ v(t) = (1-t)^{-\alpha}$.

Pour obtenir les polynômes de Jacobi classiques prennent $-1 < \alpha,\ -1 < \beta$ *; alors notons que les classifications d'extrimité et les conditions aux limites requises :*

En $+1$ *:*

(*a*) $-1 < \alpha < 0$, *FR*, $(py')(1) = 0$

(*b*) $0 \leq \alpha < 1$, *LCNO*, $[y,\ u](1) = 0$

(*c*) $1 \leq \alpha$, *PL*

En -1 *:*

(*a*) $-1 < \beta < 0$, *FR*, $(py')(-1) = 0$

(*b*) $0 \leq \beta < 1$, *LCNO*, $[y,\ u](-1) = 0$

(*c*) $1 \leq \beta$, *PL*.

Pour les polynômes orthogonaux classiques de Jacobi les valeurs propres sont données par :

$$\lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Il est intéressant d'observer que la condition à la limite requise pour les polynômes de Jacobi est la condition Friedrichs dans le cas de LCNO mais pas dans le cas de FR.

Exemple 3.49 *L'équation Dunsch sur* $(-1,1)$. *Voir Dunford et Schwartz* [5].

$$p(t) = 1 - t^2,\ q(t) = \frac{2\alpha^2}{1+t} + \frac{2\beta^2}{1-t},\ w = 1, 0 \leq \alpha,\ 0 \leq \beta.$$

au point -1 *:*

PL *pour* $\alpha \geq \frac{1}{2}$ *et tout* β

$LCNO$ *pour* $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ *et tous* β

au $+1$ *:*

PL *pour* $\beta \geq \frac{1}{2}$ *et tout* α

$LCNO$ *pour* $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$*et tout* α.

Fonctions de condition aux limites peuvent être obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} au\ -1 &: \ u_-(t) = (1+t)^{\alpha},\ v_-(t) = (1+t)^{-\alpha}, \\ au\ +1 &: \ u_+(t) = (1+t)^{\beta},\ v_+(t) = (1+t)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Notons que u, v *sont des fonctions de domaine maximales mais pas de solutions. Dans [5], p. 1519 il est affirmé que le problème de la valeur borné déterminée par les conditions aux limites*

$$[y,\ u_-](-1) = 0 = [y, u_+](1)$$

a valeurs propres données par

$$\lambda_n = (n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Exemple 3.50 *L'équation Laguerre sur* $(0, \infty)$.

$$p(t) = t^{\alpha+1}e^{-t},\ q = 0,\ w(t) = t^{\alpha}e^{-t},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

PL *à* ∞ *pour tout* α.

au 0 :

- PL *pour* $\alpha \leq -1$
- FR *pour* $-1 < \alpha < 0$
- $LCNO$ *pour* $0 \leq \alpha < 1$

• *PL pour $\alpha > 1$.*

Il s'agit de la forme classique de l'équation célèbre, qui, pour les valeurs des paramètres $\alpha > 1$ produit les polynômes de Laguerre que les fonctions propres, car la limite appropriée à 0, en cas de besoin, les valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_n = n, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Remarquablement, ce sont indépendants de α, voir Abramovitz et Stegun [1]*, chapitre 22, section 22.6 pour plus de détails. Voir les fichiers xemples.(ce n'est pas une faute de frappe) de l'ensemble de sleign2 des détails sur les conditions aux limites des fonctions u, v Le code sleign2 n'a que très peu de succès à ce problème, car nu-merical calculs de l'équation Laguerre / Liouville, qui a les mêmes valeurs propres (pour les conditions aux limites correspondantes appropriées) .*

Exemple 3.51 *L'équation Laguerre / Liouville sur* $(0, \infty)$.

$$p = 1, \ w = 1, \ q(t) = \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{t^2} - \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{t^2}{16}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

PL à ∞ pour tout α

$LCNO$ pour $-1 < \alpha < 1$ mais $\alpha^2 \neq \frac{1}{4}$

R pour $\alpha^2 = \frac{1}{4}$

PL pour $\alpha \geq 1$

Voir les exemples. fichier du paquet sleign2 pour détails sur les fonctions de l'état des limites appropriées.

Bibliographie

[1] A.B. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas and Mathematical Tables*. Dover Publications Inc., New York, 1970.

[2] P. B. Bailey, W. N. Everitt, and A. Zettl. Computing eigenvalues of singular Sturm-Liouville problems. *Results in Mathematics, v. 20(1991), 391-423.*

[3] P. B. Bailey, W. N. Everitt, and A. Zettl. Regular and singular Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions. *Proc. Royal Soc. of Edinburgh (A)126 (1996), 505-514.*

[4] J. P. Boyd. Sturm-Liouville eigenvalue problems with an interior pole. *J. Math. Physics 22 (1981), 1575-1590.*

[5] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators, vol. II.* Wiley, New York, 1963.

[6] F. V. Atkinson, Discrete and continuous boundary value problems, Academic Press, New York /London, 1964.

[7] M. S. P. Eastham. Eigenvalue inequalities for coupled Sturm-Liouville problems. *private com- munication.*

[8] M. S. P. Eastham. Limit-circle differential expressions of the second-order with an oscillating coefficient. *Quart. J. Math. Oxford (2) 24 (1973).*

[9] G. Fichera. Numerical and quantitative analysis. Pitman Press, London, 1978.

[10] M. S. Homer. Boundry value problems for the Laplace tidal wave equation. *Proc. Royal Soc. London Ser. A 428 (1990), 157-180.*

[11] K. Joergens. Spectral theory of second order ordinary differential operators. Lectures delivered at Aarhus Universitet 1962/63, Matimatisk Institut Aarhus 1964.

[12] Q. Kong and A. Zettl. Dependence of eigenvalues of Sturm-Liouville problems on the bound- ary. *J. Differential Equations, vol. 126, no.2, (1996), 389-407.*

[13] A. Borel and N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, second edition, 2000

[14] M. Moeller. On the unboundedness below of the Sturm-Liouville operator. *Differential and Integral* Equations , (*to appear*).

[15] E. C. Titchmarch. *Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, Part II*, (*2nd ed*). Clarendon Press, Oxford, 1962.

[16] J. Weidmann. *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*. Lecture Notes in Mathematics 1258. Springer Verlag, Berlin, 1987.

[17] H. Weyl, Ueber gewoehnliche Differential leichung en mit Singularitaeten und die zugehoerigen Entwicklungen willkuerlicher Funktionen, Math. Ann. 68 (1910), 220-269.

[18] M. K. Kwong and A. Zettl, Integral inequalities, and second order linear oscillation, J. Diff. Equations,45(1982), 16-33.

[19] M. K. Kwong and A. Zettl, Asymptotically constant functions and second-order linear oscillation, J. of Math.Anal, and Applications, 93 (1983), 475-494.

[20] A. Kneser, Untersungen ueber die reelen Nullstellen der Integral linearer Differentialgleichungen, Math. Ann. 42 (1893), 409-435.

[21] R. M. Kauffman, T. T. Read, and A. Zettl, The deficiency index problem for powers of ordinary differential expressions, Lecture Notes in Mathematics 621, Springer-Verlag, 1-127,1977.

[22] H.-D. Niessen and A. Zettl, Singular Sturm-Liouville problems : The Friedrichs extension and comparison of eigenvalues, Proc. London Math. Soc. v.64, (1992), 545-578.

[23] Antom Zettl Sturm-Liouville Theory

[24] lemme de Naimark Patcher