

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Éléments de théorie spectrale et transformation de Fourier</b>	<b>5</b>
2.1	Éléments de théorie spectrale . . . . .	5
2.1.1	Opérateurs non-bornés . . . . .	5
2.1.2	Adjoint . . . . .	6
2.1.3	Opérateurs symétriques et autoadjoints . . . . .	8
2.1.4	Spectre et résolvante . . . . .	9
2.1.5	Opérateur de Fredholm . . . . .	11
2.1.6	Spectre discret, spectre essentiel . . . . .	12
2.2	Transformée de Fourier et applications . . . . .	15
2.2.1	Définitions et résultats . . . . .	15
2.2.2	Transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	16
2.2.3	Propriétés . . . . .	16
2.2.4	Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide . . . . .	18
2.2.5	Espace de Schwartz . . . . .	19
2.2.6	L'espace des distributions tempérées . . . . .	24
2.2.7	Applications aux espaces de Lebesgue et de Sobolev . . . . .	27
2.2.8	Espaces de Sobolev . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Opérateurs différentiels</b>	<b>32</b>
3.1	Introduction . . . . .	32
3.2	Opérateurs concrets . . . . .	32

3.2.1	Algèbre des opérateurs formels . . . . .	33
3.2.2	Opérateur concrète . . . . .	34
3.3	Opérateur adjoint . . . . .	35
3.3.1	Adjoint formel . . . . .	36
3.3.2	Un problème de valeurs propres simples . . . . .	40
3.3.3	Conditions aux limites adjointes . . . . .	41
3.3.4	Conditions aux limites auto-adjoint . . . . .	43
3.3.5	Indices de défaut et extensions auto-adjointes . . . . .	44
3.4	Intégralité des fonctions propres . . . . .	46
3.4.1	spectre discret . . . . .	46
3.4.2	Rayleigh-Ritz et la complétude . . . . .	47
3.4.3	Méthodes d'opérateur . . . . .	49
3.4.4	spectre continu . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Spectre essentiel des opérateurs différentiels</b>	<b>55</b>
4.1	Opérateurs aux dérivées partielles linéaires . . . . .	55
4.1.1	Lien entre les symboles et transformées de Fourier . . . . .	56
4.1.2	Adjoint formel . . . . .	58
4.2	Opérateurs différentiels comme opérateurs non bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	61
4.2.1	Dualité dans les espaces de Hilbert . . . . .	65
4.3	Spectre essentiel des opérateurs différentiels . . . . .	65
4.3.1	Spectre des opérateurs différentiels à coefficients constants . . . . .	66
4.3.2	Fonction de Green des opérateurs différentiels à coefficients constants . . . . .	68
4.3.3	Spectre des opérateurs à coefficients variables . . . . .	74
4.4	Appendice . . . . .	90

# Chapitre 1

## Introduction

La théorie des équations différentielles est l'une des créations remarquables de l'esprit humain. Son influence sur le développement de la science physique serait difficile d'exagérer. La longue histoire et de nombreuses applications de la théorie, cependant, rendent presque impossible d'écrire un compte rendu équilibré du sujet.

Dans ce mémoire, on donne une simple introduction à la théorie spectrale des opérateurs différentiels linéaires. Cette théorie spectrale est une excroissance de travail fondamental de David Hilbert entre 1900 et 1910 sur l'analyse des opérateurs intégraux sur les espaces de dimension infinie - maintenant appelé espaces de Hilbert. Cependant, comme presque chaque nouveau développement important dans les mathématiques, il a été précédé par beaucoup de travail connexes, par exemple l'analyse de Poincaré du problème de Dirichlet et valeurs propres associées (1890-6). On pourrait soutenir que le sujet a commencé avec le travail séminal de Fourier sur la solution de l'équation de la chaleur en utilisant des développements en série en sinus et cosinus, qui a été publié par le Academ Franpaise en 1822. Fourier présenté ce travail en 1807, à l'époque napoléonienne, et un compte de ses malheurs au cours de la période de quinze ans avant la publication est donnée par Korner (1988).

Une grande partie de l'objet dans ce mémoire confinés, non seulement pour les opérateurs différentiels linéaires, mais même pour les opérateurs différentiels elliptiques du second ordre. Une justification pour se concentrer sur ce sujet est que la plupart des équations qui s'est révélée importante dans les sciences physiques et l'ingénierie au cours du siècle dernier impliquent les opérateurs de ce type. Le plus important d'entre eux est la théorie quantique non-relativiste, qui est basée sur l'analyse spectrale des opérateurs de Schrödinger. Les applications de second

ordre opérateurs elliptiques à la géométrie et l'analyse stochastique sont maintenant d'une grande importance.

La théorie spectrale est un domaine extrêmement riche qui a été étudié par de nombreuses techniques qualitatives et quantitatives - par exemple théorie de Sturm-Liouville, séparation des variables, de Fourier et de Laplace, la théorie des perturbations, fonctions propres extensions, méthodes variationnelles, analyse mi-crolocal, stochastique analyse et des méthodes numériques, y compris des éléments finis.

Ce mémoire est composé de trois chapitre, le premier est divisé en deux partie la première est consacrée à la théorie spectrale des opérateurs non borné dans lequel, nous développons des concepts de base et les résultats sur les opérateurs fermés sur l'espace de Hilbert. Nous définissons et étudions les opérateurs fermés, noyaux et adjoints d'opérateurs et l'autre pour la transformation de Fourier et les espaces de Shwartz et Sobolev.

Dans le deuxième chapitre, nous allons commencer à prendre une approche plus sophistiquée aux équations différentielles. Nous allons définir, avec une certaine prudence, la notion d'un opérateur différentiel linéaire, et d'explorer l'analogie entre ces opérateurs et les matrices. En particulier, nous allons examiner ce qui est nécessaire pour un opérateur différentiel linéaire pour avoir un ensemble complet de fonctions propres.

Dans le dernier chapitre On se propose d'étudier le spectre essentiel des opérateurs différentiels de type

$$A = \mathbb{A}(\partial_x) = \sum_{j=0}^p a_j(x) \partial_x^j,$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a_j(x) \in M_n(\mathbb{C})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . toute on supposons que toutes les fonctions  $a_j$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et bornées sur  $\mathbb{R}$  et l'on suppose uniformément inversible (de sorte que l'opérateur  $A$  est partout d'ordre égal à  $p$ ), c'est-à-dire  $\|a_p(x)\| > 0$ .

# Chapitre 2

## Eléments de théorie spectrale et transformation de Fourier

### 2.1 Eléments de théorie spectrale

Les opérateurs Fermé et les opérateurs fermable sont des classes importantes des opérateurs linéaires non bornés qui sont assez grand pour couvrir l'ensemble des opérateurs intéressants qui se produisent dans les applications. Dans ce chapitre, nous développons des concepts de base et les résultats sur les opérateurs générales fermés sur l'espace de Hilbert  $H$ . Nous définissons et étudions les opérateurs fermés, noyaux et adjoints d'opérateurs.

Dans cette partie  $H$  est un espace de Hilbert séparable sur  $\mathbb{C}$ . On note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  son produit scalaire, qui, par convention, est antilinéaire par rapport à la seconde variable.

#### 2.1.1 Opérateurs non-bornés

**Définition 2.1** *Un opérateur sur  $H$  (ou opérateur non-borné) est la donnée d'un sous espace vectoriel  $\mathcal{D}$  de  $H$ , et d'une application linéaire  $A : \mathcal{D} \rightarrow H$ . L'espace  $\mathcal{D}$  est le domaine de l'opérateur  $A$ . On le note  $(\mathcal{D}, A)$  et l'on parle de l'opérateur  $A$ , de domaine  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}$ . Si  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$  et  $Au = A'u$  pour tout  $u \in \mathcal{D}'$ , on dit que  $(\mathcal{D}, A)$  est une extension de  $(\mathcal{D}', A')$ , ce que l'on note  $(\mathcal{D}', A') \subset (\mathcal{D}, A)$ .*

On dit qu'un opérateur  $(\mathcal{D}, A)$  est borné lorsque la quantité

$$\|A\| = \sup\{\|Au\|, u \in \mathcal{D}, \|u\| = 1\}$$

est finie. Dans ce cas  $A$  est une application linéaire continue sur  $\mathcal{D}$ , et lorsque  $\mathcal{D}$  est dense dans  $H$ ,  $A$  s'étend de manière unique à un opérateur borné sur  $H$ . On note  $\mathcal{L}(H)$  l'espace des applications linéaires continues sur  $H$ .

Sauf mention explicite du contraire, on considérera toujours des opérateurs à domaine dense.

## Opérateurs fermés

Le théorème du graphe fermé affirme qu'un opérateur fermé de domaine  $H$  est borné. Rappelons la

**Théorème 2.2** *Soit  $(\mathcal{D}, A)$  un opérateur, et  $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax), x \in \mathcal{D}\}$  son graphe. On dit que  $(\mathcal{D}, A)$  est*

1. *fermé lorsque  $\mathcal{G}$  est un sous-espace fermé de  $H \times H$ .*
2. *fermable si  $\overline{\mathcal{G}}$  est un graphe, i.e.*

$$(x, y) \in \overline{\mathcal{G}}, (x, y') \in \mathcal{G}' \Rightarrow y = y'.$$

**Définition 2.3** *On note alors  $(\overline{\mathcal{D}}, \overline{A})$  l'opérateur dont le graphe est  $\overline{\mathcal{G}}$ . C'est une extension de  $(\mathcal{D}, A)$ . La linéarité de  $A$  donne un critère simple pour montrer qu'un opérateur est fermable : il suffit de vérifier que si  $(0, y) \in \mathcal{G}$ , alors  $y = 0$ .*

### 2.1.2 Adjoint

**Définition 2.4** *L'adjoint d'un opérateur  $(\mathcal{D}, A)$  est l'opérateur  $(\mathcal{D}^*, A^*)$  dont le domaine  $\mathcal{D}^*$  est l'ensemble des  $u \in \mathcal{H}$  tel que  $v \rightarrow \langle u, Av \rangle$  s'étend en une forme antilinéaire continue sur  $H$ . D'après le théorème de **Riesz** 4.4, il existe  $w \in \mathcal{H}$  tel que  $\langle u, Av \rangle = \langle w, v \rangle$  pour tout  $v \in H$ , et  $A$  est l'opérateur qui à  $u \in \mathcal{D}$  associe ce  $w$ .*

**Remarque 2.5** *Puisque  $\mathcal{D}$  est dense dans  $H$ ,  $\mathcal{D}^*$  peut aussi être décrit comme l'ensemble des  $u \in H$  pour lesquels il existe  $C_u > 0$  tel que, pour tout  $v \in \mathcal{D}$ ,  $|\langle u, Av \rangle| \leq C_u \|v\|$ . En effet pour  $v \in H$  et  $(v_n) \subset \mathcal{D}$  telle que  $(v_n) \rightarrow v$ , la suite  $(\langle u, Av_n \rangle)$  est une suite de Cauchy de  $\mathbb{C}$  et notant  $l_u(v)$  sa limite, on voit facilement que  $l_u$  est une forme linéaire continue sur  $H$  qui prolonge  $v \in \mathcal{D} \mapsto \langle u, Av \rangle$ . La densité du domaine  $\mathcal{D}_A$  dans  $H$  est nécessaire pour avoir l'équivalence*

$$u \in \mathcal{D}_{A^*} \iff \exists C_u > 0, \forall v \in \mathcal{D}, |\langle u, Av \rangle| \leq C_u \|v\|_H$$

Attention : rien ne dit à priori que l'ensemble  $\mathcal{D}^*$  défini ci-dessus est dense dans  $H$ . On a cependant le

**Lemme 2.6** *Soit  $(\mathcal{D}, A)$  un opérateur, et  $\mathcal{G}$  son graphe. Si  $\mathcal{G}^*$  désigne le graphe de l'adjoint de  $A$ , on a*

$$\mathcal{G}^* = [J(\overline{\mathcal{G}})]^\perp, \quad J : (u, v) \longmapsto (v, -u).$$

*En particulier  $(\mathcal{D}^*, A^*)$  est un opérateur fermé.*

**Preuve.** Soit  $(u, v) \in \mathcal{G}^*$ , i.e.  $u \in \mathcal{D}^*$  et  $v = A^*u$ . Pour  $(u_0, v_0) \in J(\overline{\mathcal{G}})$ , il existe une suite  $((u_n, v_n))_n \subset \mathcal{G}$  telle que  $\leq$ On a donc

$$\begin{aligned} & \langle (u, v), (u_0, v_0) \rangle_{H \times H} = \lim \langle u, v_n \rangle - \langle v, u_n \rangle \\ & = \lim \langle u, Au_n \rangle - \langle A^*u, u_n \rangle = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\mathcal{G}^* \subset [J(\overline{\mathcal{G}})]^\perp$ . Réciproquement, pour  $(u, v) \in [J(\overline{\mathcal{G}})]^\perp$  et  $(u_0, v_0) \in \mathcal{G}$  on a

$$\langle (u, v), (v_0, -u_0) \rangle = 0,$$

donc  $\langle u, Au_0 \rangle = \langle v, Au_0 \rangle$ , ce qui montre que  $u \in \mathcal{D}$  et  $Au = v$ . ■

**Proposition 2.7** *L'espace  $\mathcal{D}^*$  est dense dans  $H$  si et seulement si  $(\mathcal{D}, A)$  est fermable. Dans ce cas l'adjoint de  $(\mathcal{D}^*, A^*)$  est  $(\overline{\mathcal{D}}, \overline{A})$ , ce que l'on note  $A^{**} = \overline{A}$*

**Proposition 2.8** *Si  $A$  est un opérateur fermé à domaine dense dans un espace de Hilbert  $H$ , alors on a les relations suivantes entre son noyau.*

$$\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp, \quad \ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp, \quad (\ker A^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A}, \quad (\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{Im} A^*}$$

*Ci-dessus, le surlignement signifie l'adhérence, et l'on a utilisé la notation  $M^\perp$  pour désigner, lorsque  $M$  est un sous-espace de  $H$ , le sous-espace orthogonal à  $M$  défini par*

$$M^\perp := \{v \in H; \forall u \in M; \langle v, u \rangle = 0\}$$

*(Les trois premières égalités sont en fait vraies pour tout opérateur fermé à domaine dense dans*

un espace de **Banach**, et la dernière l'est si cet espace est réflexif, c'est-à-dire isomorphe à son bidual.)

**Preuve.** On note que

$$(0, v_0) \in \overline{\mathcal{G}} \Leftrightarrow J(0, v_0) \in J(\overline{\mathcal{G}}) \Leftrightarrow \forall (u, v) \in \mathcal{G}^*, \langle J(0, v_0), (u, v) \rangle = 0,$$

ce qui donne  $(0, v_0) \in \overline{\mathcal{G}}, \forall u \in \mathcal{D}, \langle v_0, u \rangle = 0$ . Donc  $(0, v_0) \in \overline{\mathcal{G}}$  si et seulement si  $v_0 \in (\mathcal{D}^*)^\perp$ , et  $\mathcal{D}^*$  est dense si et seulement si  $\mathcal{G}$  est fermable.

Soit  $u \in \ker A^*$  et  $w \in \text{Im } A$ . Il existe  $v \in \mathcal{D}$  tel que  $Av = w$ , donc

$$\langle u, w \rangle = \langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle = 0,$$

donc  $u \in (\text{Im } A)^\perp$ . Réciproquement, si  $v \in (\text{Im } A)^\perp$ , il existe  $(v_n)_n \in \mathcal{D}^*$  tel que  $v_n \rightarrow v$ . Pour  $u \in \mathcal{D}$  on a

$$0 = \langle Au, v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au, v_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u, A^*v_n \rangle.$$

Puisque  $A^*$  est fermé on a  $\langle u, A^*v \rangle = 0$ , Alors  $A^*v = 0$  par densité de  $\mathcal{D}$ .

Enfin pour  $(\mathcal{D}, A)$  fermable, et compte tenu du fait que  $J^2 = -1$ , le lemme 2.6 donne  $(\mathcal{G}^*)^* = \overline{\mathcal{G}}$ . ■

Notons enfin que si  $(\mathcal{D}_1, A_1) \subset (\mathcal{D}_2, A_2)$  alors  $(\mathcal{D}_2^*, A_2^*) \subset (\mathcal{D}_1^*, A_1^*)$ .

### 2.1.3 Opérateurs symétriques et autoadjoints

**Définition 2.9** On dit qu'un opérateur  $(\mathcal{D}, A)$  est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in \mathcal{D}, \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

**Définition 2.10** On dit qu'un opérateur (forcément symétrique et fermé)  $(\mathcal{D}, A)$  est autoadjoint lorsque  $(\mathcal{D}^*, A^*) = (\mathcal{D}, A)$ .

Pour les opérateurs symétriques qui ne sont pas fermés, on a la

**Définition 2.11** On dit qu'un opérateur symétrique  $(\mathcal{D}, A)$  est essentiellement autoadjoint lorsque  $(\overline{\mathcal{D}}, \overline{A})$  est autoadjoint.



**Lemme 2.12** *Si l'opérateur symétrique  $(\mathcal{D}, A)$  est essentiellement autoadjoint, alors il admet une unique extension autoadjointe.*

**Preuve.** Si  $(\mathcal{D}', A')$  est une extension autoadjointe de  $(\mathcal{D}, A)$ , on a nécessairement  $(\overline{\mathcal{D}}, \overline{A}) \subset (\mathcal{D}', A')$  puisque  $(\mathcal{D}', A')$  est fermé, puis l'égalité en passant à l'adjoint. ■

**Proposition 2.13** *Soit  $(\mathcal{D}, A)$  un opérateur symétrique. S'il existe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im}(A + \lambda)$  et  $\text{Im}(A + \bar{\lambda})$  sont denses dans  $H$ , alors  $A$  est essentiellement autoadjoint.*

**Preuve.** Soit  $u \in \mathcal{D}^*$ , et  $\tilde{u} = A^*u$ . Puisque  $\text{Im}(A + \bar{\lambda})$  est dense dans  $H$ , il existe une suite  $(v_n)$  de  $\mathcal{D}$  telle que

$$(A + \bar{\lambda})v_n \rightarrow \tilde{u} + \bar{\lambda}u.$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}$  on a alors

$$\begin{aligned} & \langle u, (A + \lambda)\varphi \rangle = \langle u, A\varphi \rangle + \bar{\lambda} \langle u, \varphi \rangle \\ & = \langle \tilde{u} + \bar{\lambda}u, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (A + \bar{\lambda})v_n, \varphi \rangle \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v_n, (A + \lambda)\varphi \rangle \end{aligned}$$

puisque  $A$  est symétrique et  $v_n, \varphi \in \mathcal{D}$ . Puisque  $\text{Im}(A + \lambda)$  est dense dans  $H$ , on en déduit que  $u = \lim(v_n)$ , puis que  $\tilde{u} = \lim(Av_n)$ , donc  $(u, \tilde{u}) \in \mathcal{G}(\overline{A})$  et  $(\mathcal{D}^*, A^*) \subset (\overline{\mathcal{D}}, \overline{A})$ . ■

## 2.1.4 Spectre et résolvante

### Spectre

Comme pour les opérateurs continus, le spectre d'un opérateur non-borné fermé est défini comme le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de son ensemble résolvant. Dans tout ce qui suit on note simplement  $\lambda - A$  l'opérateur  $\lambda I - A$ , visiblement de même domaine que  $A$ .

**Définition 2.14** *Si  $A$  est un opérateur linéaire fermé sur un espace de **Banach**  $X$  et de domaine  $Y = \mathcal{D}(A)$ , l'ensemble résolvant de  $A$  est  $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - A \text{ soit une bijection de } Y \text{ sur } X\}$*

*Le spectre  $\sigma(A)$  de  $(\mathcal{D}, A)$  est le complémentaire de l'ensemble résolvant  $\rho(A)$  dans  $\mathbb{C}$  :*  
 $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

La réciproque d'un opérateur bijectif fermé étant fermée, le théorème du graphe fermé "théorème 2.2" montre qu'un nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  est dans l'ensemble résolvant d'un opérateur fermé  $A$  si et seulement si  $(\lambda - A)$  admet un inverse continu de  $X$  dans  $X$  : on appelle alors cet inverse la résolvante de  $A$ , que l'on notera  $\mathcal{R}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ . Par définition, pour tout  $\lambda \in \rho(A)$ , on a  $\mathcal{R}(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$

**Lemme 2.15** *L'ensemble  $\rho(A)$  d'un opérateur fermé est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , et  $\mathcal{R}(\lambda)$  est une application holomorphe, par exemple dans le sens où, pour tout  $u, v \in H$ ,  $z \mapsto \langle \mathcal{R}(\lambda)u, v \rangle$  est holomorphe. Enfin pour  $\lambda \in \rho(A)$  on a*

$$\frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))} \leq \|\mathcal{R}(\lambda)\|. \quad (2.1)$$

**Preuve.** Soit  $\lambda_0 \in \rho(A)$ . Pour  $\lambda \in \rho(A)$  la première formule de la résolvante itérée donne

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_0)_0^j \mathcal{R}(\lambda_0)^{j+1} + (\lambda - \lambda_0)^{n+1} \mathcal{R}(\lambda_0)^{n+1} \mathcal{R}(\lambda)$$

ce qui conduit à poser

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)_0^j \mathcal{R}(\lambda_0)^{j+1}$$

pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda - \lambda_0| \leq \|\mathcal{R}(\lambda_0)\|^{-1}$ . On montre alors facilement que  $\mathcal{R}(\lambda)$  est l'inverse de  $(\lambda - A)$  pour ces  $\lambda$  là, ce qui prouve la proposition. ■

**Remarque 2.16** 1—*Le spectre d'un opérateur fermé est une partie fermée de  $\mathbb{C}$ .*

2—*contrairement à ce que l'on sait pour les opérateurs continus, le spectre d'un opérateur fermé peut être vide, ou non-borné, voire égal à  $\mathbb{C}$  tout entier. On obtient des contre-exemples en considérant par exemple l'opérateur différentiel le plus simple,  $A = \partial_x$ , vu comme un opérateur non-borné sur  $L^2([a; b])$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . Si l'on prend comme domaine  $\mathcal{D}(A) := H^1([a; b])$ , quel que soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ , l'équation  $(\lambda - A)u = f$  n'a certainement pas une solution unique puisque toutes les fonctions  $t \mapsto Ce^{\lambda t}$  sont des éléments de  $\mathcal{D}(A)$  solutions de  $(\lambda - A)u = 0$ . Dans ce cas  $\sigma(A) = \mathbb{C}$ , pour tout  $f \in L^2([a; b])$ , il existe un unique  $u \in \mathcal{D}(A)$  tel que  $(\lambda - A)u = f$  la formule de Duhamel. Le spectre se décompose en plusieurs sous-ensembles, selon la (ou les) raison(s) empêchant  $(\lambda - A)$  d'être une bijection de  $\mathcal{D}(A)$  sur  $X$ . Un premier sous-ensemble est celui des valeurs propres.*

3—Soit  $(\mathcal{D}, A)$  un opérateur fermé symétrique.  $A$  est autoadjoint si et seulement si  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .

**Définition 2.17** (*Spectre ponctuel*) Le spectre ponctuel d'un opérateur linéaire  $A$  est constitué des valeurs propres de  $A$  :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(\lambda - A) \neq \{0\}\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists u \in \mathcal{D}(A) \setminus \{0\} \text{ t.q. } (\lambda - A)u = 0\}$$

Si la notion de valeur propre est simple à comprendre, il n'est pas évident en pratique de localiser les valeurs propres, d'autant plus en dimension infinie. Une difficulté supplémentaire importante en dimension infinie est liée à la notion de spectre essentiel, dont on peut trouver plusieurs définitions dans la littérature, plus ou moins commodes à cerner et plus ou moins stables par perturbation. Celle que nous adoptons ici utilise la notion d'opérateur de Fredholm.

### 2.1.5 Opérateur de Fredholm

**Définition 2.18** (*Fredholm*). Un opérateur non-borné  $A$  dans un espace de Banach  $X$  est dit de Fredholm si

- son noyau est de dimension finie,
- son image est fermée et de codimension finie dans  $X$  (c'est-à-dire qu'elle admet un supplémentaire de dimension finie).

L'indice de  $A$  est alors défini par :  $ind A := \dim \ker A - co \dim \operatorname{Im} A$ .

Rappelons au passage que si  $A$  est fermé à domaine dense,  $\overline{\operatorname{Im} A} = \ker A^*$ . Donc pour un opérateur de Fredholm, fermé et à domaine dense,  $co \dim \operatorname{Im} A = \dim \ker A^*$ .

Citons quelques propriétés des opérateurs de Fredholm dans les espaces de Hilbert (cas particuliers d'espaces de **Banach** réflexifs).

**Proposition 2.19** Soit  $A$  un opérateur de Fredholm, fermé et à domaine dense dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors son adjoint  $A^*$  est aussi un opérateur de Fredholm, on a

$$H = \ker A \oplus \operatorname{Im} A^* = \ker A^* \oplus \operatorname{Im} A, \text{ et } ind A = -ind A^*$$

. De plus,  $A$  est bijectif si et seulement si  $A^*$  est bijectif.

**Preuve.** On observe tout d'abord que puisque  $\text{Im } A$  est fermé,  $\text{Im } A^*$  l'est aussi. Soit alors  $(v_1, \dots, v_p)$  une base orthonormée de  $\ker A$ . L'application  $P : x \mapsto \sum_{j=1}^p \langle v_j, x \rangle v_j$  est un projecteur continu sur  $\ker A$  et  $\text{Id}_H - P$  est un projecteur continu sur  $(\ker A)^\perp = \text{Im } A^*$  d'après la proposition 2.19. Par ailleurs,  $\ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$  est en somme directe avec  $\text{Im } A$ . Puisque  $\text{Im } A$  est de co-dimension finie,  $\ker A^*$  est donc de dimension finie. Si  $(z_1, \dots, z_q)$  est une base orthonormée de  $\ker A^*$  l'application  $Q : x \mapsto \sum_{j=1}^q \langle z_j, x \rangle z_j$  est un projecteur continu sur  $\ker A^*$  et  $\text{Id}_H - Q$  est un projecteur continu sur  $(\ker A^*)^\perp = \text{Im } A$  d'après la 2.19. En particulier, montre que  $\text{co dim } \text{Im } A = \dim \ker A^*$ ,  $\text{co dim } \text{Im } A^* = \dim \ker A$ , d'où le résultat sur les indices. La dernière propriété (fausse pour les opérateurs non bornés en général).est une autre conséquence immédiate de proposition 2.19. ■

## 2.1.6 Spectre discret, spectre essentiel

**Définition 2.20** (*Spectre essentiel*) *Le spectre essentiel d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble*

$$\sigma_{ess}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C}; (\lambda - A) \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0 \}$$

**Remarque 2.21** *On voit immédiatement avec cette définition que la réunion du spectre ponctuel et du spectre, essentiel couvre tout le spectre. En effet, l'ensemble des valeurs propres et le spectre essentiel, sont évidemment inclus dans le spectre. Inversement, si  $\lambda$  n'est ni valeur propre ni dans le spectre essentiel de  $A$ , l'opérateur  $(\lambda - A)$  est injectif et  $\text{Im}(\lambda - A) = \overline{\text{Im}(\lambda - A)}$  est,  $0 = \dim \ker(\lambda - A) = \text{co dim } \text{Im}(\lambda - A)$ , donc  $(\lambda - A)$  est une bijection de  $\mathcal{D}(A)$  sur  $X$ , ce qui signifie que  $\lambda$  appartient à l'ensemble résolvant de  $A$ . Donc*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_{ess}(A).$$

*Cependant il ne s'agit pas a priori d'une réunion disjointe.*

*En effet, l'intersection  $\sigma_{ess}(A) \cap \sigma_p(A)$  est composée des valeurs propres  $\lambda$  pour lesquelles*

- *Soit  $\ker(\lambda - A)$  n'est pas de dimension finie,*
- *Soit  $\text{Im}(\lambda - A)$  n'est pas fermé,*

- Soit  $\dim \ker A \neq \text{co dim Im } A$ . On peut de plus décomposer

$$\sigma_{ess}(A) \setminus \sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(\lambda - A) = \{0\} \text{ et } \text{Im}(\lambda - A) \subsetneq X\}.$$

**Définition 2.22** On appelle spectre discret d'un opérateur  $(\mathcal{D}, A)$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$  qui sont isolés dans  $\sigma(A)$  et de multiplicité finie. On le note  $\sigma_{disc}(A)$ , et on appelle spectre essentiel de  $A$  son complémentaire  $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A)$ .

Le spectre discret est inclus dans le spectre ponctuel défini plus haut, mais l'inclusion inverse est fautive en général. De même, le spectre continu est inclus dans le spectre essentiel sans que la réciproque ne soit pas toujours vraie.

On voit que  $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(A)$  si et seulement si il existe  $\varepsilon > 0$  tel que le projecteur  $P([\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon])$  est de rang fini.

La définition 2.20 a le mérite de rendre le spectre essentiel stable par perturbation compacte. On a même une caractérisation complète du spectre essentiel des opérateurs à domaine dense à l'aide de leurs perturbations compactes.

**Définition 2.23** Un opérateur linéaire  $K$  sur un espace de Banach  $X$  est dit compact si l'image par  $K$  de tout ensemble borné  $X$  est relativement compact. Dans ce cas, on note

$$K \in \mathcal{K}(X)$$

**Théorème 2.24** Si  $A$  est un opérateur linéaire fermé et à domaine dense dans  $X$ , alors pour tout

$$K \in \mathcal{K}(X), \quad \sigma_{ess}(A + K) = \sigma_{ess}(A)$$

De plus, on a

$$\sigma_{ess}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A + K).$$

**Preuve.** La première partie, c'est-à-dire l'invariance du spectre essentiel par perturbation compacte, est évidente grâce à la stabilité des opérateurs de Fredholm par perturbation compacte : si  $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$ , alors  $(\lambda - A)$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et donc  $(\lambda - A - K)$

aussi, quel que soit l'opérateur compact  $K$ . Donc on a déjà

$$\sigma_{ess}(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma_{ess}(A + K) \subset \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A + K).$$

On veut ensuite montrer que si  $\lambda \in \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(A + K)$  alors  $(\lambda - A)$  ne peut pas être un opérateur de Fredholm d'indice 0. On raisonne par l'absurde en supposant que  $(\lambda - A)$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0 on va montrer qu'il existe un opérateur compact  $K$  tel que  $\lambda - A - K$  est inversible, c'est-à-dire que est dans l'ensemble résolvant de  $A + K$ . Dans la suite, on suppose sans perte de généralité  $\lambda = 0$ . Supposons de plus que  $X$  est un espace de Hilbert (ce qui simplifie la présentation de la preuve, par identification de  $X$  à son dual, la démonstration s'adapte sans problème aux espaces de **Banach**). Si  $A$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et à domaine dense, on a  $d = \dim \ker A = \dim \ker A^*$ ,  $(u_1, \dots, u_d)$  une base orthonormée de  $\ker A$  et  $(z_1, \dots, z_d)$  une base orthonormée, de  $\ker A^*$ . L'opérateur

$$K : u \mapsto Ku := \sum_{i=1}^d \langle u_i, u \rangle z_i$$

est borné (de inférieure à  $d$ ) et de rang fini donc compact. Donc  $(A - K)$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Si l'on montre que  $(A - K)$  est injectif, on en déduira que  $(A - K)$  est bijectif et donc que  $0 \in \rho(A - K)$ . Or l'équation  $(A - K)u = 0$  implique  $\langle z_i, Au \rangle = \langle z_i, Ku \rangle = \langle u_i, u \rangle$  par définition de  $K$ . Comme  $\langle z_i, Au \rangle = \langle A^* z_i, u \rangle = 0$ , on en déduit  $\langle u_i, u \rangle = 0$  pour tout  $i$ , d'où  $Ku = 0$  et donc  $Au = 0$ . Comme  $(u_1, \dots, u_d)$  engendre  $\ker A$ , ceci implique  $u = 0$ . ■

Ce théorème est utile en pratique pour localiser le spectre essentiel.

**Définition 2.25 (Spectres continu et résiduel)** On appelle spectre continu l'ensemble

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma_{ess}(A) \setminus \sigma_p(A); \operatorname{Im}(\lambda - A) = X\},$$

et spectre résiduel l'ensemble

$$\sigma_{res}(A) = (\sigma_{ess}(A) \setminus \sigma_p(A)) \setminus \sigma_c(A).$$

## 2.2 Transformée de Fourier et applications

La transformation de Fourier a une définition simple pour des fonctions intégrables, et bon nombre d'ouvrages commencent par définir cette opération pour des fonctions  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , avant de considérer d'autres espaces fonctionnels. Nous suivons dans ce chapitre une approche classique, suivie par exemple dans [1], qui consiste à définir la transformation de Fourier sur des espaces de fonctions régulières et décroissant rapidement (espaces de Schwartz), puis, par dualité, à définir la transformée de Fourier dans un sous-espace des distributions (distributions tempérées). De nombreuses applications et des résultats supplémentaires peuvent alors être déduits de ce cadre général pour des espaces fonctionnels particuliers –notamment les espaces de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (pour  $1 \leq p \leq +\infty$ ) et les espaces de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$  (pour  $s \in \mathbb{R}$ ).

### 2.2.1 Définitions et résultats

**Définition 2.26** (Espaces  $\mathcal{C}^k(\Omega)$ ). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $k$  un entier naturel. On désigne par  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  l'espace des fonctions  $k$  fois différentiables dont les différentielles sont continues sur  $\Omega$ .

L'espace  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  est celui des fonctions continues sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Lorsque  $k = \infty$ , on définit  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  par  $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega)$ .

**Définition 2.27** (Support d'une fonction). Le support d'une fonction continue  $f$  est l'adhérence de l'ensemble des points où elle n'est pas nulle. On note :  $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$ . On dit que  $f$  est à support compact si  $\text{supp}(f)$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.28** (Espaces  $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ ). Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . On désigne par  $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\Omega$  à support compact. On note  $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ .

(Les espaces  $L^p(\Omega)$ ). Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . L'espace  $L^p(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions mesurables définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  dont la puissance  $p$ -ième est intégrable.

On définit aussi l'espace  $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable, } \exists \alpha \in \mathbb{R} : \mu(|f| > \alpha) = 0\}$ , où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue.

(Les espaces  $L^p(\Omega)$ ). On définit l'espace  $L^p = L^p(\Omega)$  comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de  $L^p(\Omega)$  pour la relation d'équivalence être égal presque partout. On définit

la norme sur  $L^p$  par : pour tout  $f \in L^p$ ,

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left( \int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty &= \inf\{\alpha | \mu(|f(x)| > \alpha) = 0\},\end{aligned}$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. Les espaces  $L^p$  sont des espaces de **Banach**.

## 2.2.2 Transformation de Fourier dans $L^1$

**Définition 2.29** (*Transformée de Fourier des fonctions intégrables*). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction notée  $\widehat{f}$  définie en tout point  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad (2.2)$$

**Proposition 2.30** (*Propriétés de la transformée de Fourier dans  $L^1$* ). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

La transformée de Fourier de  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$  ;
- 2)  $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$  et  $\widehat{f}$  tend vers 0 à l'infini ;

La transformée de Fourier  $\mathcal{F} : f \rightarrow \widehat{f}$  est une application linéaire continue de  $L^1(\mathbb{R}^n)$  sur  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))} = 1$ .

Un des intérêts majeurs de la transformation de Fourier est que celle-ci permet de transformer certaines opérations linéaires fondamentales (dérivation, convolution, translation) en des opérations plus simples. Il existe aussi d'autres propriétés structurales, pour les dilatations, translations ou produits tensoriels.

## 2.2.3 Propriétés

### 1- dérivation.

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi). \quad (2.3)$$



Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $x \rightarrow x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $1 \leq j \leq n$ , alors  $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\widehat{(x_j f)}(\xi) = i \partial_{\xi_j} \widehat{f}(\xi)$ .

## 2- convolution.

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \widehat{g}$ .

## 3- Translation Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

(i) pour  $a \in \mathbb{R}^n$ , on note  $\tau_a$  la translation de vecteur  $a$ , i.e.  $\tau_a \phi(x) = \phi(x - a)$ . Alors,  $\widehat{\tau_a f} = e^{-i\xi \cdot a} \widehat{f}$ , et  $\widehat{e^{ia \cdot x} f} = \tau_a \widehat{f}$ ;

(ii) pour la conjugaison complexe,  $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(-\xi)}$ ;

(iii) pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , la transformée de Fourier de  $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$  est la fonction  $\widehat{f}_\lambda : \xi \rightarrow \frac{1}{|\lambda|^n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ ;

(iv) Si  $f$  est un produit tensoriel  $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2)$  avec :

$x = (x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, n = n_1 + n_2$ , et  $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{n_i})$ , alors  $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi_1) \widehat{f}_2(\xi_2)$ . Notons que le choix  $\lambda = -1$  dans la troisième propriété permet de discuter la parité de la transformée de Fourier de fonctions paires ou impaires, la transformée de Fourier ayant la même parité que la fonction.

**Proposition 2.31 (Transformée de Fourier des gaussiennes).** Soit  $\alpha > 0$ . On a la relation

$$\widehat{e^{-\alpha|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4\alpha}.$$

On déduit de la proposition précédente que la transformée de Fourier de la gaussienne

$$g(x) = C \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

de variance  $\sigma^2$  est la gaussienne

$$\widehat{g}(\xi) = (2\pi\sigma^2)^{n/2} C \exp\left(-\frac{\sigma^2|\xi|^2}{2}\right)$$

de variance  $\sigma^{-2}$ . La transformée de Fourier d'une gaussienne très piquée sera donc très plate et réciproquement.

## Transformée de Fourier inverse

**Définition 2.32** (*Transformée de Fourier inverse*). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . On note  $\check{f}$  la fonction définie en tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par

$$\check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx. \quad (2.4)$$

Notons que la transformation  $\mathcal{F}^{-1} : f \rightarrow \check{f}$  est très similaire à la transformation  $\mathcal{F}$  définie par Eq 2.2, à deux changements près : le signe dans l'exponentielle, et le facteur de normalisation  $(2\pi)^{-n}$ .

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème d'inversion de Fourier dans  $L^1$ , qui sera généralisé par la suite à certaines distributions.

**Théorème 2.33** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\hat{f}$  soit aussi dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors

$$f = \hat{\hat{f}} \quad (2.5)$$

et

$$f = \check{\check{f}}$$

L'espace des fonctions  $L^1$  dont la transformée de Fourier est aussi dans  $L^1$  est donc stable par transformation de Fourier et la transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  est l'inverse de la transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  sur cet espace. Notons que l'Eq 2.5 s'écrit aussi

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

### 2.2.4 Transformation de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

L'espace de Schwartz est composé de fonctions régulières qui décroissent rapidement (plus que polynômialement) à l'infini. Une propriété très importante de cet espace est qu'il est stable par la transformation de Fourier, contrairement à l'espace des fonctions intégrables, et contrairement aussi à l'espace des fonctions tests régulières à support compact  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Il servira donc

par la suite d'espace de fonctions test pour définir la transformation de Fourier de distributions particulières.

### Définition de espace $\mathcal{S}$

Pour des multi-indices  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ , on définit  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , et les notations  $x^\beta$  et  $\partial^\beta$  signifient respectivement  $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  et  $\partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$ . Par ailleurs,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$  et  $\alpha \leq \beta$  si et seulement si  $\alpha_i \leq \beta_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

### 2.2.5 Espace de Schwartz

**Définition 2.34 (Espace de Schwartz).** On dit qu'une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est à décroissance rapide si pour tout  $p \geq 0$ ,

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{\beta_1 \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty} < +\infty.$$

On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à décroissance rapide.

**Définition 2.35 (Convergence dans  $\mathcal{S}$ ).** On dit qu'une suite  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  vers  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a évidemment  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Mais on a en fait un résultat plus fort.

**Proposition 2.36** L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (pour la topologie associée à  $\mathcal{S}$ ).

**Preuve.** En effet, soit  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\chi|_{B(0,1)} = 1$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$ , et  $\text{supp}(\chi) \subset B(0,2)$ . Posons, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\chi_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Soit  $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  : définissons, pour tout  $n \geq 1$  la fonction  $\phi_n$  par

$$\phi_n(x) = \chi_n(x)\phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Evidemment,  $\phi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  comme produit de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Par ailleurs

$$\text{supp}(\phi_n) \subset \text{supp}(\chi_n) = \overline{B(0; 2n)}.$$

D'autre part

$$\partial^\beta(\phi - \phi_n)(x) = (1 - \chi_n(x))\partial^\beta\phi(x) - |\gamma| \geq 1 \sum_{|\gamma| \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{n^{|\gamma|}} \partial^\gamma \chi(x/n) \partial^{\beta-\gamma} \phi(x)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial^\beta(\phi - \phi_n)(x)| &\leq |x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\phi(x)| + \frac{1}{n} |\gamma| \geq 1 \sum_{|\gamma| \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \chi(z)| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \phi(x)| \\ &\leq |x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\phi(x)| + \frac{C}{n} \mathcal{N}_p(\phi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

avcc

$$C = 2^p \max_{0 < |\gamma| \leq p} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \chi(z)|.$$

De plus, pour tous les multi-indices  $\alpha, \beta$  tels que  $|\alpha|$  et  $|\beta| \leq p$ ,

$$|x^\alpha(1 - \chi_n(x))\partial^\beta\phi(x)| \leq \frac{1}{n^2} |x^\alpha| x^2 \partial^\beta\phi(x) \leq \frac{1}{n^2} \mathcal{N}_{p+2}(\phi).$$

Remarquons en effet que

$$0 \leq 1 - \chi(z) \leq |z|^2$$

puisque

$$1 - \chi(z) = 0 \quad \text{si} \quad |z| \leq 1, \quad \text{tandis que} \quad 0 \leq 1 - \chi(z) \leq 1 \quad \text{si} \quad |z| \geq 1.$$

Ainsi, pour tous les multi-indices  $\alpha, \beta$  tels que  $|\alpha|$  et  $|\beta| \leq p$ , on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta(\phi - \phi_n)(x)| \leq \frac{1}{n^2} \mathcal{N}_{p+2}(\phi) + \frac{C}{n} \mathcal{N}_p(\phi) \rightarrow 0$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , ce qui montre que  $\phi_n \rightarrow \phi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . ■

En particulier, la classe de Schwartz est dense dans les espaces de Lebesgue  $L^p$  pour

$$1 \leq p < \infty.$$

**Corollaire 2.37** (Densité de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ) Pour tout  $p \in [1, \infty[$ , toute fonction de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  est limite au sens de la norme  $L^p$  d'une suite de fonctions appartenant à  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Preuve.** C'est évident puisque  $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , et donc l'espace  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  pour  $1 \leq p < \infty$ . ■

## Formule de Leibniz

**Définition 2.38** On rappelle également la formule de Leibniz :

$$\partial^\beta(\varphi_1\varphi_2) = \sum_{(0, \dots, 0) \leq \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^{\beta-\gamma}\varphi_1 \partial^\gamma\varphi_2.$$

Avec cette définition, nous pouvons énoncer quelques propriétés de stabilité de la classe de **Schwartz** sous l'effet de certaines opérations.

**Proposition 2.39** Soit  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Alors

- (a) pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , la fonction  $\partial^\alpha\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ;
- (b) pour tout  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  dont toutes les dérivées sont à croissance polynômiale, la fonction  $f\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ;
- (c) pour tout  $q \in [1, \infty]$ , on a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$  ; de plus, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \mathcal{N}_p(f)^{1-1/q} \mathcal{N}_{p+n+1}(f)^{1/q}$$

pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha|, |\beta| \leq p$  en utilisant la convention habituelle  $\frac{1}{\infty} = 0$  ;

- (d) pour toute distribution à support compact  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ . on a

$$S \star \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** Le point (a) est trivial. Démontrons le point (b). Appliquons la formule de **Leibniz** :

$$\mathcal{N}_p(f\phi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta(f\phi)|$$

$$\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\gamma f(x) \partial^{\beta-\gamma} \phi(x)|$$

Comme  $f$  est à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, il existe, pour tout entier  $p \geq 0$ , un entier  $n_p(f) \geq 0$  et une constante  $M_p > 0$  telle que  $|\partial^\gamma f(x)| \leq M_p(1 + |x|^{2n_p(f)})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $|\gamma| \leq p$ .

Comme

$$|x|^{2n_p(f)} \leq \mathcal{N}^{2n_p(f)-1}(x_1^{2n_p(f)} + \dots + x_n^{2n_p(f)})$$

on en déduit que

$$\mathcal{N}_p(f\phi) \leq C_f \mathcal{N}_{p+2n_p(f)}(\phi)$$

avec

$$C_f = M_p(1 + n^{2n_p(f)-1}) \sup_{|\beta| \leq p} \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} = 2^p(1 + n^{2n_p(f)-1})M_p,$$

d'où le résultat annoncé.

Pour le point (c), posons  $g = x^\alpha \partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  on observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)|^{q-1} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^{n+1})g(x)| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1 + |x|^{n+1}} \\ &\leq C \mathcal{N}_0(g)^{q-1} \mathcal{N}_{n+1}(g), \end{aligned}$$

avec

$$C = (1 + n^{(n-1)/2}) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1 + |x|^{n+1}},$$

d'où l'inégalité annoncée.

Démontrons enfin le point (d). Soit la fonction  $S \star \phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  découle de la théorème 5. Puisque la propriété de continuité des distributions à support compact montre que, pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , on a

$$|x^\alpha \partial^\beta (S \star \phi)(x)| = |x^\alpha (S \star \partial^\beta \phi)(x)|$$

d'après la remarque 5

$$\leq |x^\alpha| C \max_{|\gamma| \leq |\beta| + q} \sup_{|y| \leq R} |\partial^\gamma \phi(x + y)| \leq C \max \sup |(x + y - y)^\alpha \partial^\gamma \phi(x + y)|$$

$$|\gamma| \leq |\beta| + q |y| \leq R$$

$$\leq 2^{|\alpha| - 1} C_{1\gamma} \max_{|\gamma| \leq |\beta| + q} \sup_{z \in \mathbb{R}^n} (|z^\alpha| + R^\alpha) |\partial^\gamma \phi(z)|$$

en notant  $q$  l'ordre de la distribution à support compact  $S$  et  $R > 0$  tel que  $\text{supp}(S) \subset B(0, R)$ .

Donc

$$\mathcal{N}_p(S \star \phi) \leq 2^{p-1} (1 + R^p) C \mathcal{N}_{p+q}(\phi) \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

■

**Corollaire 2.40** *Pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ . on a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$*

### Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$

Toute fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  étant intégrable, on peut définir la transformation de Fourier sur le sous-espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ , dense dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , en restreignant la définition 2.29 à l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Le point remarquable est que la transformée de Fourier d'une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est elle aussi dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 2.41** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est stable par transformée de Fourier, et pour tout  $p \in \mathbb{N}$  il existe une constante  $C'_p$  telle que*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{N}_p(\widehat{\phi}) \leq C'_p \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi).$$

*De plus la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  définit un isomorphisme séquentiellement bicontinu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même, d'inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  défini par Eq 2.4 .*

Bien noter qu'au contraire de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas stable par transformation de Fourier (ce résultat sera prouvé plus tard).

## 2.2.6 L'espace des distributions tempérées

### Définition des distributions tempérées

Comme l'espace des fonctions test  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas stable par transformation de Fourier, on a du introduire un espace de fonctions test plus grand,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Suivant la philosophie générale de la théorie des distributions, on introduit le dual topologique de l'espace des fonctions test (l'ensemble des formes linéaires sur l'espace des fonctions test), qui est par conséquent un sous-ensemble de l'espace  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions.

**Définition 2.42** On note  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  qui vérifient la propriété de continuité suivante : il existe un entier  $p$  et une constante  $C$  tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), |\langle A, \phi \rangle| \leq CN_p(\phi).$$

Les éléments de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sont appelés les distributions tempérées, ou parfois les distributions à croissance lente.

**Théorème 2.43** Tout élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  définit une distribution.

**Exemple 2.44**  $\delta_a$  (pour  $a \in \mathbb{R}^n$  donné) est une distribution tempérée d'ordre 0, et la valeur principale est une distribution tempérée d'ordre au plus 1 (et pas 0). Rappelons que la valeur principale est définie par la limite suivante pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  :

$$\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

**Exemple 2.45** La distribution

$$\langle A_f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}^n} f \phi$$

n'est pas, en général, une distribution tempérée, même si  $f$  est régulière.

**Remarque 2.46 (Abus de notation).** Par abus de notation, on notera par la même lettre une distribution tempérée et sa restriction à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Cela permet notamment d'écrire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle A, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle A, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$



## Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'$

**Définition 2.47** (*Convergence dans  $\mathcal{S}'$* ). On dit que la suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vers  $A$  si on a

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle A_k, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \rightarrow \langle A, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

**Théorème 2.48** Toute suite  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de distributions tempérées qui converge dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  vers la distribution tempérée  $A$  converge aussi dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  vers la distribution  $T$ .

**Preuve.** La preuve de ce théorème est immédiate par la définition de la convergence au sens des distributions, et l'inclusion  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Définition 2.49** (*Dérivation au sens de  $\mathcal{S}'$* ). Soit  $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . La dérivée de  $A$  par rapport à la variable  $x_j$  est l'élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , noté  $\frac{\partial A}{\partial x_j}$ , défini par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \frac{\partial A}{\partial x_j}, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = -\langle A, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$$

La distribution définie par  $\frac{\partial A}{\partial x_j}$  est la dérivée (au sens des distributions) de la distribution définie par  $A$ .

**Théorème 2.50** Si  $A_k \rightarrow A$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\partial^\alpha A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \partial^\alpha A$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Remarque 2.51** L'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est strictement inclus dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Exemple 2.52** La suite des sommes partielles

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

est une suite d'éléments de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  qui converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , mais pas dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

**Exemple 2.53** Soit  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. Alors la suite

$$A_n = \sum_{-n \leq k \leq n} a_k \delta_k$$

converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Si  $|a_k| \leq C(1 + |k|)^p$  alors la convergence a aussi lieu dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

## Distributions tempérées particulières

Le théorème suivant permet d'identifier certains sous-espaces de distributions comme des sous-espaces de distributions tempérées. On verra par la suite qu'on peut donc définir une notion de transformation de Fourier pour ces distributions particulières.

**Théorème 2.54** (*Distributions tempérées particulières*). *L'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  contient*

(1) *les polynômes sur  $\mathbb{R}^n$  ;*

(2) *les fonctions  $L^p(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , et l'injection  $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est séquentiellement continue..*

**Remarque 2.55** *On peut également montrer que l'espace  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions à support compact est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Pour ce faire, on considère  $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  d'ordre  $p$ ,  $K$  un voisinage compact de  $\text{Supp}(A)$  et  $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  valant 1 sur  $K$ . Pour tout  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , on définit  $\langle A, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle A, \chi\phi \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ . On remarque que cette définition est indépendante du choix de  $\chi$ , et qu'on définit bien une distribution tempérée.*

**Remarque 2.56** (*Injection continue*). *On peut donc écrire*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

*où la notation  $A \hookrightarrow B$  signifie que  $A$  s'injecte dans  $B$  et que l'injection de  $A$  dans  $B$  est séquentiellement continue.*

## Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Comme il est d'usage en théorie des distributions, les opérations ou actions effectuées sur les distributions sont définies en effectuant ladite opération sur la fonction test. Il en va de même pour la transformation de Fourier.

**Théorème 2.57** (*Transformée de Fourier d'une distribution tempérée*). *Soit  $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier de  $A$  est la distribution tempérée notée  $\mathcal{F}(A)$  définie par*

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \mathcal{F}A, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle A, \widehat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle A, \mathcal{F}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \quad (2.7)$$

La transformation de Fourier ainsi définie est une extension de la définition classique de la transformation de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Au risque de nous répéter : comme la transformée de Fourier d'un élément de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (mais seulement dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ), on ne peut pas définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque par une relation analogue à Eq 2.7, et il faut donc se limiter aux distributions tempérées.

**Remarque 2.58 (Notations).** La transformée de Fourier de la distribution  $A$  est noté  $\mathcal{F}A$  et pas  $\widehat{A}$ . On réserve en effet la notation  $\widehat{\phantom{x}}$  aux fonctions  $L^1$  pour lesquelles la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  est définie sous la forme intégrale de l'équation 2.7. Lorsque  $f \in L^1$ , les deux notations sont possibles mais on privilégie la notation  $\widehat{f}$ .

**Théorème 2.59 (Transformée de Fourier inverse des distributions tempérées).** La transformée de Fourier est un isomorphisme séquentiellement bicontinu de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sur lui-même, inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  défini par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \mathcal{F}^{-1}A, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle A, \widehat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} (= \langle A, \mathcal{F}^{-1}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}).$$

**Théorème 2.60 (Dérivation et transformée de Fourier).** Soit  $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $\frac{\partial A}{\partial x_j} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{F}(\frac{\partial A}{\partial x_j}) = i\xi_j \mathcal{F}A$

**Exemple 2.61** Soit  $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  alors  $\mathcal{F}\delta_a(\xi) = e^{-ia \cdot \xi}$ . De même, pour  $x \rightarrow e^{ia \cdot x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  alors  $\mathcal{F}(e^{ia \cdot x}) = (2\pi)^n \delta_a$ .

## 2.2.7 Applications aux espaces de Lebesgue et de Sobolev

### Isométrie de la transformation de Fourier dans $L^2$

Nous avons défini la transformée de Fourier sur l'espace  $\mathcal{S}'$  qui contient (largement!)  $L^2$ . Pourquoi donc consacrer maintenant une partie à la transformée de Fourier dans  $L^2$ ? La réponse est fournie par le théorème suivant :

**Théorème 2.62 (Isométrie de la transformée de Fourier).** Les transformations

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathcal{F} \text{ et } (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}^{-1}$$

sont des isométries de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  inverses l'une de l'autre :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \mathcal{F}^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et } (2\pi)^{n/2} \|\mathcal{F}^{-1}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

**Preuve.** Pour prouver ce résultat, on commence de vérifier que, si  $(\phi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2$ , on a  $\frac{1}{(2\pi)^n} (\widehat{\phi}, \psi)_{L^2} = (\phi, \check{\psi})_{L^2}$  et en déduire la propriété d'isométrie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par densité. ■

**Remarque 2.63 (Interprétation physique).** Pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , on a la formule de Plancherel

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx. \quad (2.8)$$

Il arrive souvent en physique ou en mécanique que l'énergie d'un champ sur  $\mathbb{R}^n$  s'exprime précisément sous la forme d'une intégrale sur l'espace du carré du champ (penser à l'énergie cinétique d'un écoulement, à l'énergie d'un champ électromagnétique, à l'énergie de déformation élastique linéaire d'un matériau homogène isotrope). L'égalité 2.8 signifie que l'énergie du champ peut alors être calculée indifféremment dans l'espace réel ou dans l'espace réciproque.

**Définition 2.64 (Formule de Parseval).** En utilisant une formule de polarisation, alors si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\mathcal{F}g(\xi)} d\xi.$$

**Preuve. (Démonstration alternative de la formule de Plancherel).** On considère une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et on note  $g(x) = f(-x)$ . On montre

$$(f \star \bar{g})(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 e^{i\xi \cdot y} d\xi.$$

En déduire la formule de Plancherel en prenant  $y = 0$ . ■

**Proposition 2.65** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , et

$$g_R(\xi) = \int_{|x| < R} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Alors  $g_R$  converge vers  $\mathcal{F}f$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . De plus, si la fonction

$$g_R(\xi) = \int_{|x|<R} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \longrightarrow g(\xi) \text{ p.p}$$

alors  $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{F}f = g$ .

## 2.2.8 Espaces de Sobolev

La transformation de Fourier permet de caractériser la régularité des fonctions : plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini. Ceci est lié en effet à la décroissance de l'amplitude des modes rapides, i.e. qui varient sur des échelles spatiales courtes, les irrégularités locales provenant précisément des ces modes-là. Afin d'étudier des fonctions de régularité arbitraire, on définit les espaces de Sobolev d'exposant réel sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 2.66** (*Espaces de Sobolev d'exposants réels*). Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , on pose

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \widehat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty\}.$$

Muni du produit scalaire noté  $(\cdot, \cdot)_{H^s}$  et défini par

$$\forall (u, v) \in H^s(\mathbb{R}^n)^2, (u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi \quad (2.9)$$

espace  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Hilbert.

La définition 2.47 des espaces de Sobolev sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$  coïncide, lorsque  $s$  est entier, avec la définition plus usuelle suivante.

**Proposition 2.67** (*Espaces de Sobolev d'exposants entiers*). Soit  $s \in \mathbb{N}$ . Alors

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq s\},$$

et la norme définie sur  $H^s(\mathbb{R}^n)$  par le produit scalaire 2.9 est équivalente à celle définie par le produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} dx.$$

La transformation de Fourier permet de montrer très facilement le résultat suivant qui relie la décroissance, ou plus exactement l'intégrabilité, de la transformée de Fourier à l'infini avec la régularité locale de la fonction d'origine.

**Théorème 2.68** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $s \in \mathbb{R}$  vérifiant  $s > k + \frac{n}{2}$ . Si  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors  $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  tendent vers zéro à l'infini.

### Propriétés

On a pour tout  $s_1 \leq s_2$ ,  $H^{s_2} \subset H^{s_1}$ .

2. Pour le produit scalaire défini ci-dessus,  $H^s$  est un espace de Hilbert.

3. L'espace de Schwartz est dense dans  $H^s$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 2.69** Soit  $s \in \mathbb{R}$ , le dual de  $H^s$  s'identifie à  $H^{-s}$ .

**Théorème 2.70** Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Si  $g \in H^s$ , la solution  $u$  donnée par le théorème 5 appartient à  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^s)$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_t^{(k)}$  appartient à  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^{s-2k})$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \|u_t\|_{H^s} = \|g\|_{H^s} \text{ et} \\ \|u_t^{(k)}\|_{H^{s-2k}} \leq C_k \|g\|_{H^s} \end{cases}$$

**Preuve.** Avec la définition précédente de  $u_t$ , on a  $\widehat{u}_t = e^{-it|\xi|^2} \widehat{g}$  donc  $|\widehat{u}_t(\xi)| = |\widehat{g}(\xi)|$ . De plus comme  $g \in H^s$ ,  $\widehat{g}$  est mesurable donc  $u_t$  est mesurable et  $(1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}_t(\xi)|^2 = (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{g}(\xi)|^2$ , ce qui démontre l'égalité. En ce qui concerne l'appartenance de  $u$  à  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^s)$ , on va montrer la continuité de  $t \mapsto u_t$  : Soit  $(t_n)$  une suite qui converge vers  $t_0$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\|u_{t_n} - u_{t_0}\|_{H^s}^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it_0|\xi|^2}|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi.$$

Par le théorème de convergence dominée, on a  $\|u_{t_n} - u_{t_0}\|_{H^s}^2 \rightarrow 0$   $n \rightarrow +\infty$ .

D'autre part, le théorème de dérivation sous le signe  $\int$  montre que

$$u_t^{(k)} = \overline{\mathcal{F}}((-i|\xi|^2)^k e^{-it|\xi|^2} \widehat{g}),$$

d'où  $\mathcal{F}(u_t^{(k)}) = (-i|\xi|^2)^k e^{-it|\xi|^2} \widehat{g}$ , donc,

$$\|u_{t_n}^{(k)} - u_{t_0}^{(k)}\|_{H^{s-2k}}^2 = \int |\xi|^{4k} (1 + |\xi|^2)^{s-2k} |e^{-it_n|\xi|^2} - e^{-it_0|\xi|^2}|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi.$$

Le théorème de convergence dominée permet de conclure sur l'appartenance de  $u_t^{(k)}$  à  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, H^{s-2k})$ .

De plus, on a

$$\|u_t^{(k)}\|_{H^{s-2k}} = \|(1 + |\xi|^2)^{s-2k} \hat{u}_t\|_{L^2} = \|(1 + |\xi|^2)^{-2k} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}_t\|_{L^2}$$

$\exists C_k \in \mathbb{R}$ ,  $(1 + |\xi|^2)^{-2k} \leq C_k$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . D'où l'inégalité ■

# Chapitre 3

## Opérateurs différentiels

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons commencer à prendre une approche plus sophistiquée aux équations différentielles. Nous allons définir, avec une certaine prudence, la notion d'un opérateur différentiel linéaire, et d'explorer l'analogie entre ces opérateurs et les matrices. En particulier, nous allons examiner ce qui est nécessaire pour un opérateur différentiel linéaire pour avoir un ensemble complet de fonctions propres.

### 3.2 Opérateurs concrètes

Nous allons appeler l'objet

$$L = p_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x),$$

que nous écrivons aussi

$$p_0(x) \partial_x^n + p_1(x) \partial_x^{n-1} + \cdots + p_n(x),$$

un opérateur différentiel linéaire formelle. Le mot «formel» se réfère au fait que nous ne sommes pas encore se soucier de ce genre de fonctions l'opérateur est appliqué.



### 3.2.1 Algèbre des opérateurs formels

Même si elles n'agissent pas sur quelque chose en particulier, nous pouvons toujours former des produits d'opérateurs. Par exemple, si  $v$  et  $w$  sont des fonctions régulières de  $x$ , nous pouvons définir les opérateurs  $\partial_x + v(x)$  et  $\partial_x + w(x)$  et de trouver

$$(\partial_x + v)(\partial_x + w) = \partial_x^2 + w' + (w + v)\partial_x + vw,$$

ou

$$(\partial_x + w)(\partial_x + v) = \partial_x^2 + v' + (w + v)\partial_x + vw,$$

Nous voyons dans cet exemple que le produit des opérateurs n'est généralement pas commutative.

L'algèbre des opérateurs formels a des applications profondes. Considérons, par exemple, les opérateurs

$$L = -\partial_x^2 + q(x)$$

et

$$P = \partial_x^3 + a(x)\partial_x + \partial_x a(x)$$

Dans la dernière expression, la combinaison  $\partial_x a(x)$  signifie «d'abord multiplier par  $a(x)$ , et puis différencier le résultat," de sorte que nous aurions pu écrire

$$\partial_x a = a\partial_x + a'$$

Nous pouvons maintenant donner la forme du commutateur  $[P; L] = PL - LP$ . Après un peu d'effort, nous trouvons

$$[P, L] = (3q' + 4a')\partial_x^2 + (3q'' + 4a'')\partial_x + q''' + 2aq' + a'''$$

l'on choisit  $a = -(\frac{3}{4})q$ , le collecteur devient un opérateur de multiplication pure, sans partie différentielle :

$$[P, L] = \frac{1}{4}q''' - \frac{3}{2}qq'$$

l'équation

$$\frac{dL}{dt} = [P, L] \quad (3.1)$$

ou, de manière équivalente,

$$q = \frac{1}{4}q''' - \frac{3}{2}qq' \quad (3.2)$$

a une solution formelle

$$L(t) = e^{tP} L(0) e^{-tP}$$

montrant que l'évolution dans le temps de  $L$  est donnée par une transformation de similitude, qui (à nouveau formellement) ne change pas ses valeurs propres. L'équation aux dérivées partielles Eq 3.2 est la célèbre équation de **Korteweg de Vries (KV)**, qui propose des solutions dont l'existence est intimement liée avec le fait qu'il peut être écrit comme Eq 3.1.

### 3.2.2 Opérateur concrète

Nous voulons explorer les analogies entre les opérateurs différentiels linéaires et les matrices agissant sur un espace vectoriel de dimension finie. Parce que la théorie des opérateurs matriciels fait un grand usage de produits intérieurs et orthogonalité, l'analogie la plus proche si nous travaillons avec un espace fonctionnel équipé de ces mêmes notions. Nous supposons donc nos opérateurs différentiels agissent sur  $L^2[a; b]$ , l'espace de Hilbert des fonctions carré intégrable sur  $[a; b]$ . Maintenant un opérateur différentiel ne peut pas agir sur toutes les fonction de l'espace de Hilbert, car ne sont pas tous différentiables. Même si nous enlèvent la notion de différentiabilité et de permettre les dérivés faibles, il faut au moins demander que le domaine  $\mathcal{D}$ , le sous-ensemble de fonctions sur lesquelles nous permettre à l'opérateur d'agir, ne contiennent que des fonctions qui sont suffisamment différentiable ce que la fonction résultant de l'application opérateur reste un élément de  $L^2[a; b]$ .

Nous habituellement restreindre l'ensemble des fonctions encore davantage, en imposant des conditions aux limites aux extrémités de l'intervalle. Un opérateur différentiel linéaire est maintenant défini comme un opérateur différentiel linéaire formelle, avec une spécification de son domaine  $\mathcal{D}$ . Les conditions aux limites que nous allons imposer seront toujours linéaire et homogène. Il en est ainsi que le domaine de définition est un espace vectoriel. Ainsi, pour un opérateur du second ordre

$$A = p_0 \partial_x^2 + p_1 \partial_x + p_2$$

sur l'intervalle  $[a, b]$ , nous pourrions imposer

$$B_1[y] = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = 0$$

$$B_2[y] = \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = 0,$$

mais nous ne ferons pas, dans la définition de l'opérateur différentiel, imposer des conditions non homogènes, tels que

$$B_1[y] = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = C_1,$$

$$B_2[y] = \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = C_2,$$

avec  $c_1, c_2$  non nulle

En outre, pour un opérateur de  $n - i\grave{e}me$  ordre, nous ne serons pas restreindre les dérivées d'ordre supérieur à  $n - 1$ . Cela est raisonnable : Si nous cherchons des solutions de  $Ay = f$  avec  $A$  un opérateur du second ordre, par exemple, les valeurs de  $y$  dans les extrémités sont déjà déterminé en termes de  $y'$  et  $y$  par l'équation différentielle.

Nous ne pouvons pas choisir d'imposer une autre valeur. En différenciant l'équation suffisamment de fois, nous pouvons de même déterminer toutes les dérivées d'ordre supérieur aux extrémités en termes de  $y$  et  $y'$ .

Les conditions aux limites et différentiabilité que nous imposons sur  $\mathcal{D}$  qui sera toujours dense i.e tout élément de l'espace de Hilbert peut être obtenu comme une limite  $L^2$  des fonctions dans  $\mathcal{D}$ . En particulier, il n'y aura jamais une fonction de  $L^2[a, b]$  qui est orthogonale à toutes les fonctions de  $\mathcal{D}$ .

### 3.3 Opérateur adjoint

Une des propriétés importantes des matrices, c'est que une matrice qui est auto-adjoint, ou hermitienne, peut être diagonalisable. En d'autres termes, la matrice a suffisamment des vecteurs propres pour former une base de l'espace sur lequel il agit. Une propriété similaire est valable pour les opérateurs différentiels auto-adjoint, mais nous devons être prudents dans notre définition d'auto-adjoint dans le cas non borné.

Nous vous suggérons d'examiner dans cette partie les opérateurs adjoints sur les espaces de dimension finie.

### 3.3.1 Adjoint formel

Etant donné un opérateur différentiel formel

$$A = p_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)$$

et une fonction de poids  $w(x)$ , réel et positif sur l'intervalle  $(a, b)$ , nous pouvons trouver un tel opérateur  $A^*$ , tel que, pour tout  $u(x)$  et  $v(x)$  suffisamment différentiable, nous avons

$$w(u^*Av - v(A^*u)^*) = \frac{d}{dx}Q[u, v]. \quad (3.3)$$

pour certain fonction  $Q$ , qui dépend bilinéairement de  $u$  et  $v$  et leurs premiers  $n - 1$  dérivés. Nous appelons  $A^*$  l'adjoint formel de  $A$  par rapport au poids  $w$ . L'équation 3.3 est appelée l'identité de Lagrange. La raison de la dénomination "adjoint" est que, si nous définissons un produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_w = \int_a^b wu^*v dx,$$

et si les fonctions  $u$  et  $v$  ont des conditions aux limites qui rendent

$$Q[u, v] \Big|_a^b = 0,$$

Alors

$$\langle u, Av \rangle_w = \langle A^*u, v \rangle_w,$$

qui est la propriété de la définition de l'opérateur adjoint sur un espace vectoriel. Le mot "formelles" désigne, comme avant, que nous ne sommes pas encore en précisant le domaine de l'opérateur.

La méthode pour trouver l'adjoint formel est simple : intégrer par parties pour obtenir tous les dérivés de  $v$  et de  $u$ .

**Exemple 3.1** *si*

$$A = -i \frac{d}{dx}$$

alors trouvons l'adjoint  $A^*$  par rapport au poids  $w \equiv 1$ . Nous partons de

$$u^*(Av) = u^*\left(-i\frac{d}{dx}v\right),$$

et utilisant la technique d'intégration par parties une fois pour obtenir le dérivé de  $v$  et sur  $u^*$

$$\begin{aligned} u^*\left(-i\frac{d}{dx}v\right) &= \left(i\frac{d}{dx}u^*\right)v - i\frac{d}{dx}(u^*v) \\ &= \left(-i\frac{d}{dx}u\right)^*v - i\frac{d}{dx}(u^*v) \\ &\equiv v(A^*u)^* + \frac{d}{dx}Q[u, v]. \end{aligned}$$

Nous avons s'est retrouvé avec l'identité de Lagrange

$$u^*\left(-i\frac{d}{dx}v\right) - v\left(-i\frac{d}{dx}u\right)^* = \frac{d}{dx}(-iu^*v),$$

et a constaté que

$$A^* = -i\frac{d}{dx}, \quad Q[u, v] = -iu^*v.$$

L'opérateur  $-id/dx$  (opérateur de la mécanique quantique) obéit  $A = A^*$ , et est donc formellement auto-adjoint, ou hermitienne.

**Exemple 3.2** Soit

$$A = p_0\frac{d^2}{dx^2} + p_1\frac{d}{dx} + p_2,$$

avec tous les  $p_i$  sont réels. Laissez nous trouvons à nouveau l'adjoint  $A^*$  par rapport au produit interne avec  $w = 1$ . En procédant comme ci-dessus, et en intégrant deux fois par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned} u^*[p_0v'' + p_1v' + p_2v] - v[(p_0u)'' - (p_1u)' + p_2u]^* \\ = \frac{d}{dx}[p_0(u^*v'' - v''u^*) + (p_1 - p_0')v]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{d^2}{dx^2}p_0 - \frac{d}{dx}p_1 + p_2 \\ &= p_0\frac{d^2}{dx^2} + (2p_0' - p_1)\frac{d}{dx} + (p_0'' - p_1' + p_2). \end{aligned}$$

Quelles conditions faut-il imposer  $p_{0,1,2}$  pour que  $A$  soit formellement auto-adjoint par rapport au produit interne avec  $w = 1$ ? Pour  $A = A^*$  nous faut

$$p_0 = p_0$$

$$2p_0' - p_1 = p_1 \Rightarrow p_0' = p_1$$

$$p_0'' - p_1' + p_2 = p_2 \Rightarrow p_0'' = p_1'.$$

Nous faut donc que  $p = p_1'$ , et ainsi de

$$A = \frac{d}{dx} \left( p_0 \frac{d}{dx} \right) + p_2,$$

que nous reconnaissons comme un opérateur de Sturm-Liouville.

**Exemple 3.3** Réduction de la forme de Sturm-Liouville. Une autre façon de faire de l'opérateur

$$A = p_0 \frac{d^2}{dx^2} + p_1 \frac{d}{dx} + p_2,$$

auto-adjoint est par un choix approprié de la fonction de poids  $w$ . Supposons que  $p_0$  est positif sur l'intervalle  $(a, b)$ , et que  $p_0, p_1, p_2$  sont tous réels. Alors, nous pouvons définir

$$w = \frac{1}{p_0} \exp \left\{ \int_a^x \left( \frac{p_1}{p_0} \right) dx' \right\}$$

et observons ce qu'il est positif à  $(a, b)$ , et que

$$Ay = \frac{1}{w} (wp_0 y')' + p_2 y.$$

maintenant

$$\langle u, Av \rangle_w - \langle Au, v \rangle_w = [wp_0 (u^* v' - u^* v')]_a^b,$$

où

$$\langle u, v \rangle_w = \int_a^b w u^* v dx.$$

Ainsi, à condition  $p_0$  ne s'annule pas, il ya toujours un produit interne par rapport à laquelle

un opérateur différentielle du second ordre réel est formellement autoadjoint. Notons que

$$Ay = \frac{1}{w}(wp_0y')' + p_2y,$$

l'équation des valeurs propres

$$Ay = \lambda y$$

peut être écrite

$$(wp_0y')' + p_2wy = \lambda wy.$$

*Illustration (espace Bargmann-Fock) : Il s'agit d'un exemple plus exotique d'un adjoint formel.*

*Vous avez peut être rencontré dans la mécanique quantique. Considérons l'espace des polynômes  $P(z)$  dans la variable  $z = x + iy$  complexe. Définir un produit scalaire par*

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-z^*z} [P(z)]^* Q(z),$$

où  $d^2z \equiv dx dy$  et l'intégration est au cours de la totalité du plan  $x, y$ . avec ce produit interne, nous avons

$$\langle z^n, z^m \rangle = n! \delta_{nm}.$$

Si nous définissons

$$\hat{a} = \frac{d}{dz},$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle P, \hat{a} Q \rangle &= \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-z^*z} [P(z)]^* \frac{d}{dz} Q(z) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int d^2z \left( \frac{d}{dz} e^{-z^*z} [P(z)]^* \right) Q(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-z^*z} z^* [P(z)]^* Q(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-z^*z} [zP(z)]^* Q(z) \\ &= \langle \hat{a}^* P, \hat{Q} \rangle \end{aligned}$$

où  $\hat{a}^* = z$ , c'est à dire l'opération de multiplication par  $z$ . Dans ce cas, l'adjoint n'est même pas un opérateur différentiel

### 3.3.2 Un problème de valeurs propres simples

Une matrice hermitienne dispose d'un ensemble de vecteurs propres orthonormés. Est-ce que la même propriété maintien pour un opérateur différentiel hermitien ? Considérons l'opérateur différentiel

$$A = -\partial_x^2, \quad \mathcal{D}(A) = \{y, Ay \in L^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0\}.$$

Avec le produit scalaire

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_0^1 y_1^* y_2 dx$$

nous avons

$$\langle y_1, Ay_2 \rangle - \langle Ay_1, y_2 \rangle = [y_1^* y_2 - y_1^* y_2']_0^1 = 0.$$

La partie intégrée est égale à zéro parce que  $y_1$  et  $y_2$  les deux satisfont les conditions aux limites.

Nous voyons que

$$\langle y_1, Ay_2 \rangle = \langle Ay_1, y_2 \rangle$$

et donc  $A$  est hermitienne ou symétrique.

Les fonctions propres et les valeurs propres de  $A$  sont

$$\left. \begin{array}{l} y_n(x) = \sin n\pi x \\ \lambda_n = n^2\pi^2 \end{array} \right\} n = 1, 2, \dots$$

Nous constatons que :

- i*) les valeurs propres sont réelles ;
- ii*) les fonctions propres pour différente  $\lambda_n$  sont orthogonales,

$$2 \int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = \delta_{nm}, \quad n = 1, 2, \dots$$

*iii*) Les fonctions propres normalisées  $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$  sont complets : aucune fonction dans  $L^2[0, 1]$  a une ( $L^2$ ) extension convergente comme

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{2} \sin n\pi x.$$



où

$$a_n = \int_0^1 y(x) \sqrt{2} \sin n\pi x dx.$$

Tout cela semble très bien, exactement que nous prévoyons pour les propriétés. les matrices hermitiennes finies. Peut-on mener sur l'ensemble des résultats de la théorie des matrices finies à ces opérateurs hermitiens ? La réponse est malheureusement non ! Voici un contre-exemple :

Soit

$$A = -i\partial_x, \quad \mathcal{D}(A) = \{y, Ay \in L^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0\}.$$

encore

$$\begin{aligned} \langle y_1, Ay_2 \rangle - \langle Ay_1, y_2 \rangle &= \int_0^1 dx \{y_1^* (-i\partial_x y_2) - (-i\partial_x y_1)^* y_2\} \\ &= -i[y_1^* y_2]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Encore une fois, la partie intégrée s'annule due aux conditions aux limites satisfaites par  $y_1$  et  $y_2$ , si  $A$  est bien hermitienne. Malheureusement,  $A$  avec ces conditions aux limites n'a pas de fonctions propres par tous - sans parler d'un ensemble complet ! Toute fonction satisfaisant  $Ay = \lambda y$  sera proportionnel à  $e^{i\lambda x}$ , mais cette fonction exponentielle n'est jamais nulle, et ne peut pas satisfaire aux conditions aux limites.

Il semble clair que les conditions aux limites sont le problème. Nous avons besoin d'une meilleure définition de «adjoint» alors le formel un-un qui accorde plus d'attention aux conditions limites. Nous serons alors obligés de faire la distinction entre la simple hermiticité, ou la symétrie, et auto-adjoint.

### 3.3.3 Conditions aux limites adjointes

Pour les espaces vectoriels de dimension finie  $V$ , il ya toujours un tel  $w$ , et ainsi le domaine de  $A^*$  est l'espace tout entier. Dans un espace de Hilbert de dimension finie, cependant, pas tous  $\langle u, Av \rangle$  peut s'écrire comme  $\langle w, v \rangle$  avec  $w$  un élément de norme finie de  $L^2$ . En particulier  $\delta$ -fonctions ne sont pas autorisés, mais ceux-ci sont exactement ce que nous devons, si nous étions à exprimer les valeurs au bord figurant dans la partie intégrée sur  $Q(u, v)$ , comme un intégrale de produit interne. Nous devons donc veiller à ce que  $u$  est tel que  $Q(u, v)$  s'annule, mais n'acceptons aucune  $u$  avec cette propriété dans le domaine de  $A^*$ . Ce que cela signifie en pratique que nous regardons le terme intégré de  $Q(u, v)$  et voir ce qui est nécessaire à  $u$

de rendre  $Q(u, v)$  nulle pour tout  $v$  satisfaisant aux conditions aux limites apparaissant dans  $\mathcal{D}(A)$ .

Ces conditions sur  $u$  sont les conditions aux limites adjoint, et définissent le domaine de  $A^*$ .

**Exemple 3.4** *considerons*

$$A = -i\partial_x, \quad \mathcal{D}(A) = \{y, Ay \in L^2[0, 1] : y(1) = 0\}.$$

*maintenant*

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx u^* (-i\partial_x v) &= -i[u^*(1)v(1) - u^*(0)v(0)] + \int_0^1 dx (-i\partial_x u)^* v \\ &= -i[u^*(1)v(1) - u^*(0)v(0)] + \langle w, v \rangle, \end{aligned}$$

où  $w = -i\partial_x u$ . Puisque  $v(x)$  est dans le domaine de  $A$ , nous avons  $v(1) = 0$ , et si le premier terme dans la partie intégrée s'annule quelle que soit la valeur que nous prenons pour  $u(1)$ . D'autre part,  $v(0)$  peut être n'importe quoi, donc pour être sûr que le deuxième terme s'annule, nous devons exiger que  $u(0) = 0$ . Cela, alors, est la condition au limite adjointe. Il définit le domaine de  $A^*$  :

$$A^* = -i\partial_x, \quad \mathcal{D}(A^*) = \{y, Ay \in L^2[0, 1] : y(0) = 0\}.$$

*Pour notre problématique*

$$A = -i\partial_x, \quad \mathcal{D}(A) = \{y, Ay \in L^2[0, 1] : y(0) = y(1) = 0\},$$

*nous avons*

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx u^* (-i\partial_x v) &= -i[u^* v]_0^1 + \int_0^1 dx (-i\partial_x u)^* v \\ &= 0 + \langle w, v \rangle, \end{aligned}$$

où encore  $w = -i\partial_x u$ . Cette fois, on n'a pas besoin d'imposer des conditions aux limites sur  $u$  pour rendre la partie intégrée nulle. ainsi

$$A^* = -i\partial_x, \quad \mathcal{D}(A^*) = \{y, Ay \in L^2[0, 1]\}$$

malgré que l'un de ces opérateurs  $A = -i\partial_x$  est formellement auto-adjoint, nous avons,

$$\mathcal{D}(A) \neq \mathcal{D}(A^*)$$

Donc  $A$  et  $A^*$  ne sont pas les même opérateurs et aucun d'eux est auto-adjoint.

### 3.3.4 Conditions aux limites auto-adjoint

Un opérateur formellement auto-adjoint  $A$  est réellement auto adjoint si les domaines de  $A^*$  et  $A$  coïncident.

La notion "auto-adjoint" est généralement souhaitable dans les problèmes de physique. Il est donc utile d'étudier ce que les conditions aux limites conduisent à des opérateurs auto-adjoints. Par exemple, quelles sont les conditions aux limites les plus générales que nous pouvons imposer à  $A = -i\partial_x$  si nous avons besoin de l'opérateur obtenu pour être auto-adjoint ? maintenant,

$$\int_0^1 dx u^*(-i\partial_x v) - \int_0^1 dx (-i\partial_x u)^* v = -i(u^*(1)v(1) - u^*(0)v(0)).$$

nécessite que le côté droit soit nul nous donne, après division par  $u^*(0)v(1)$ ,

$$\frac{u^*(1)}{u^*(0)} = \frac{v(0)}{v(1)}.$$

Nous volons que cela soit vrai pour tout  $u$  et  $v$  obéissant aux mêmes conditions aux limites. Comme  $u$  et  $v$  ne sont pas liés, les deux parties doit être égale à une constante  $k$ , et en outre cette constante doit vérifier  $k^* = k^{-1}$  afin que  $u(1)/u(0)$  soit égale à  $v(1)/v(0)$ . Ainsi, la condition aux limites

$$\frac{u(1)}{u(0)} = \frac{v(1)}{v(0)} = e^{i\theta}$$

pour un certain angle  $\theta$  réel. Le domaine est donc

$$\mathcal{D}(A) = \{y, Ay \in L^2[0, 1] : y(1) = e^{i\theta}y(0)\}.$$

Ces des sont conditions aux limites périodiques faux.

Avec ces conditions aux limites périodiques généralisées, tout ce que nous prévoyons d'un opérateur auto-adjoint fonctionne réellement :

i) Les fonctions  $u_n = e^{i(2\pi n + \theta)x}$ , avec  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  sont des fonctions propres de  $A$  avec des valeurs propres  $k_n \equiv 2\pi n + \theta$ .

ii) Les valeurs propres sont réelles.

iii) Les fonctions propres forment un ensemble orthonormé complet.

**Exemple 3.5** *l'équation de Sturm-Liouville. avec*

$$A = \frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x), \quad x \in [a, b],$$

nous avons

$$\langle u, Av \rangle - \langle Au, v \rangle = [p(u^*v' - u'^*v)]_a^b.$$

Essayons d'imposer des conditions aux limites séparément aux deux extrémités. ainsi,  $x = a$ , on veut

$$(u^*v' - u'^*v)|_a = 0,$$

ou

$$\frac{u'^*(a)}{u^*(a)} = \frac{v'(a)}{v(a)},$$

et similaire à  $b$ . Si nous voulons que les conditions aux limites imposées sur  $v$  (qui définissent le domaine de  $A$ ) coïncide avec ceux de  $u$  (qui définissent le domaine de  $A^*$ ), alors nous devons avoir

$$\frac{v'(a)}{v(a)} = \frac{u'(a)}{u(a)} = \tan \theta_a$$

pour un angle réel  $\theta_a$ , et des conditions aux limites similaires avec un  $\theta_b$  à  $b$ . Nous pouvons également écrire ces conditions aux limites comme

$$\alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = 0. \tag{3.4}$$

### 3.3.5 Indices de défaut et extensions auto-adjointes

Il ya une théorie générale de conditions aux limites auto-adjoint, due à Hermann Weyl et John von Neumann. Nous ne décrivons pas cette théorie en détail, mais simplement donnons leur recette pour compter le nombre de paramètres en état le plus général des conditions aux limites auto-adjoint : Pour trouve ce numéro nous définissons un premier domaine  $\mathcal{D}_0(A)$  pour

l'opérateur  $A$  en imposant des conditions aux limites plus strictes possibles. Ce que nous faisons en annulent les valeurs aux limites de tous les  $y^{(n)}$  avec  $n$  inférieur à l'ordre de l'équation. Ensuite calculons le nombre de fonctions propres carré intégrable de l'opérateur adjoint résultant  $A^*$  correspondant à la valeur propre  $\pm i$ . Le nombre,  $n_+$  et  $n_-$ , de ces fonctions propres sont appelés les indices de carence ou de défaut. Si elles ne sont pas égaux alors il n'y a aucun moyen possible de rendre l'opérateur auto-adjoint. Si elles sont égaux,  $n_+ = n_- = n$ , alors il ya  $n^2$  familles réelles de paramètre d'extensions auto-adjoint  $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}_0(A)$  du domaine initial bien restreint.

le cas de " l'opérateur impulsion radiale". Nous souhaitons définir l'opérateur  $P_r = -i\partial_r$  sur la demi-droite  $0 < r < \infty$ . Nous commençons avec le domaine restrictifs

$$P_r = -i\partial_r, \quad \mathcal{D}_0(A) = \{y, P_r y \in L^2[0, \infty] : y(0) = 0\}.$$

nous avons alors

$$P_r^* = -i\partial_r, \quad \mathcal{D}(P_r^*) = \{y, P_r^* y \in L^2[0, \infty]\}$$

sans conditions aux limites. L'équation  $P_r^* y = iy$  a une solution normalisable

$$y = e^{-r}$$

L'équation

$$P_r^* y = -iy$$

n'a pas d'indices de solution normalisable .les indices de carence sont  $n_+ = 1, n_- = 0$ , et l'opérateur ne peut pas être auto adjoint

**Exemple 3.6** soit  $L$ 'opérateur de schrodinger Nous considérons maintenant sur la demi-ligne.

$$A = -\partial_x^2, \quad \mathcal{D}_0(A) = \{y, Ay \in L^2[0, \infty] : y(0) = y'(0) = 0\}.$$

Nous avons alors

$$A^* = -\partial_x^2, \quad \mathcal{D}(A^*) = \{y, A^* y \in L^2[0, \infty]\}.$$

de plus  $A^*$  n'a pas des conditions aux limites. L'équation aux valeurs propres  $A^* y = iy$  a une solution normalisable  $y(x) = e^{(i-1)x/\sqrt{2}}$  et l'équation  $A^* y = -iy$  a également une solution normalisable  $y(x) = e^{-(i-1)x/\sqrt{2}}$ . Les indices de carence sont donc  $n_+ = n_- = 1$  La théorie de Weyl-Von

Neumann dit maintenant que, en relaxant les conditions restrictives,  $y(0) = y'(0) = 0$  nous pouvons étendre le domaine de définition de l'opérateur de trouver une famille à un paramètre de condition aux limites auto-adjoint. Ce seront les conditions  $y'(0) - y(0) = \tan \theta$  que nous avons trouvé ci-dessus. Si l'on considère l'opérateur  $-\partial_x^2$  sur l'intervalle fini  $[a, b]$ , alors les deux solutions de  $(A^* + i)y = 0$  sont normalisables, et les indices de carence seront  $n_+ = n_-$ . Il devrait donc y avoir  $2^2 = 4$  paramètres réels dans les conditions aux limites de l'auto-adjoints. Il s'agit d'une classe supérieure à celles que nous trouvons dans Eq 3.4, car il comprend des conditions aux limites généralisées de la forme

$$B_1[y] = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = 0,$$

$$B_2[y] = \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = 0$$

## 3.4 Intégralité des fonctions propres

Maintenant que nous avons compris clairement ce que signifie d'être auto-adjoint, nous pouvons réitérer la créance de base : un opérateur  $A$  qui est auto-adjoint par rapport à une  $L^2[a; b]$  produit intérieur possède un ensemble complet de fonctions propres orthogonales. La preuve que les fonctions propres sont orthogonales est identique à celle des matrices finies.

### 3.4.1 spectre discret

Les problèmes les plus simples ont un spectre purement discret. Nous avons les fonctions propres  $\phi_n(x)$  tels que

$$A\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x),$$

où  $n$  est un nombre entier. Après multiplication par des constantes convenables, les  $\phi_n$  sont orthonormés,

$$\int \phi_n^*(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm},$$

et complète. Nous pouvons exprimer la condition de l'intégralité de la déclaration que

$$\sum_n \phi_n(x)\phi_n^*(x') = \delta(x - x').$$

Si nous prenons cette représentation de la fonction delta et multiplie par  $f(x')$  et d'intégrer sur  $x'$ , nous trouvons

$$f(x) = \sum_n \phi_n(x) \int \phi_n^*(x') f(x') dx'.$$

Donc,

$$f(x) = \sum_n a_n \phi_n(x)$$

avec

$$a_n = \int \phi_n^*(x') f(x') dx'.$$

Cela signifie que si nous pouvons étendre la fonction delta en termes de  $\phi_n(x)$ , nous nous pouvons élargir à tout fonction (carré intégrable).

**Remarque 3.7** *La convergence de la série  $\sum_n \phi_n(x) \phi_n^*(x')$  vers  $\delta(x - x')$  n'est ni ponctuelle ni dans le sens  $L^2$ . La somme tend vers une limite que dans le sens d'une distribution ce qui signifie que nous devons multiplier les sommes partielles par une fonction de test lisse et intégrons sur  $x$  avant d'avoir ce qui converge réellement de toute manière significative.*

### 3.4.2 Rayleigh-Ritz et la complétude

#### Pour le problème de valeurs propres de Schrodinger

$$Ay = -y'' + q(x)y = \lambda y \quad x \in [a, b]$$

les plus grand valeurs propres de cet opérateurs sont  $\lambda_n \approx n^2 \pi^2 / (a - b)^2$ . En effet, le terme  $qy$  devient finalement négligeable par rapport à  $\lambda y$ , et nous pourrons alors résoudre l'équation avec sin et cos. Nous voyons qu'il n'ya pas de limite supérieure à l'amplitude des valeurs propres. Les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville

$$Ay = -(py')' + qy = \lambda y \quad x \in [a, b]$$

sont similaire non bornes. Nous allons utiliser cette notion de non bornitude du spectre pour faire une estimation de la vitesse de convergence de l'extension des fonctions propres pour les fonctions du domaine de  $A$ , et d'étendre ce résultat à prouver que les fonctions propres forment un ensemble complet.

Nous savons que les valeurs propres de Sturm-Liouville sont les valeurs stationnaires de  $\langle y, Ay \rangle$  lorsque la fonction  $y$  est contrainte tel que,  $\langle y, y \rangle = 1$ . La plus petite valeur propre  $\lambda_0$ , est donc donnée par

$$\lambda_0 = \inf_{y \in \mathcal{D}(A)} \frac{\langle y, Ay \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

Comme le principe variationnel, cette formule propose un procédé bien connu d'obtention approximative d'énergies de l'état fondamental de la mécanique quantique. Une partie de son efficacité vient de la nature stationnaire de  $\langle y, Ay \rangle$  au minimum : une approximation grossière pour  $y$  donne souvent des bonnes approximations de  $\lambda_0$ .

Supposons que nous avons déjà constaté les  $n$  premières fonctions propres normalisées  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Soit l'espace engendré par ces fonctions  $V_n$ . Alors une extension évidente du principe variationnel donne

$$\lambda_n = \inf_{y \in V_n^\perp} \frac{\langle y, Ay \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

Nous exploitons maintenant cette estimation variationnelle de montrer que si nous élargissons un  $y$  arbitraire dans le domaine de  $A$  en termes de l'ensemble des fonctions propres  $y_m$ ,

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m$$

où

$$a_m = \langle y_m, y \rangle$$

alors la somme ne converge en effet à  $y$ .

Soit

$$h_n = y - \sum_{m=0}^{n-1} a_m y_m$$

est l'erreur résiduelle après les  $n$  premiers termes. Par définition,  $h_n \in V_n$ . Supposons que nous avons ajusté, en ajoutant une constante de  $q$  si nécessaire, à  $A$  de sorte que tous les  $\lambda_m$  sont positifs. Cet ajustement n'affecte pas les  $y_m$ . Nous étendons sur

$$\langle h_n, Ah_n \rangle = \langle y, Ay \rangle - \sum_{m=0}^{n-1} \lambda_m |a_m|^2$$



où nous avons utilisé l'orthonormalité du  $y_m$ . La somme soustraite est garanti positif, de sorte

$$\langle h_n, Ah_n \rangle \leq \langle y, Ay \rangle$$

En combinant cette inégalité avec Rayleigh-Ritz on obtient

$$\frac{\langle y, Ay \rangle}{\langle h_n, h_n \rangle} \geq \frac{\langle h_n, Ah_n \rangle}{\langle h_n, h_n \rangle} \geq \lambda_n$$

En d'autres termes

$$\frac{\langle y, Ay \rangle}{\lambda_n} \geq \left\| y - \sum_{m=0}^{n-1} a_m y_m \right\|^2$$

Puisque  $\langle y, Ay \rangle$  est indépendant de  $n$ , et  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , nous avons

$$\left\| y - \sum_{m=0}^{n-1} a_m y_m \right\|^2 \rightarrow 0$$

Ainsi, l'extension des fonctions propres convergent en effet à  $y$ , et le fait plus rapidement que  $\lambda_n^{-1}$  tend vers zéro.

Notre estimation de la vitesse de convergence s'applique uniquement à l'extension des fonctions  $y$  pour laquelle  $\langle y, Ay \rangle$  est définie c-à-dire les fonctions  $y \in \mathcal{D}(A)$ . Le domaine  $\mathcal{D}(A)$  est toujours un sous-ensemble dense de l'ensemble de l'espace de Hilbert  $L^2[a; b]$ , cependant, et comme un sous-ensemble dense d'un sous-ensemble dense est aussi dense dans l'espace plus large, nous avons montré que l'espace vectoriel des fonctions propres est un sous-ensemble dense de  $L^2[a; b]$ . Toute fonction de carré intégrable a donc une extension convergente en termes de  $y_m$ , mais le taux de convergence est peut-être plus lente que celle des fonctions  $y \in \mathcal{D}(A)$ .

### 3.4.3 Méthodes d'opérateur

Parfois, il ya des trucs pour résoudre le problème de valeurs propres.

**Exemple 3.8** *Oscillateur harmonique quantique. Considérons l'opérateur*

$$H = (-\partial_x + x)(\partial_x + x) + 1 = -\partial_x^2 + x^2$$

*Il s'agit dans la forme  $Q^*Q + 1$  de valeur propre non nulle  $\lambda$  alors  $Q\psi$  est fonction propre de*

$QQ^*$  avec la même valeur propre. Ceci est dû au fait

$$Q^*Q\psi = \lambda\psi$$

implique que

$$Q(Q^*Q\psi) = \lambda Q\psi$$

ou

$$QQ^*(Q\psi) = \lambda(Q\psi)$$

La seule façon que  $Q\psi$  peut ne pas être une fonction propre de  $QQ^*$  est si il arrive que  $Q\psi = 0$ , mais cela implique que  $Q^*Q\psi = 0$  et donc la valeur propre vaut zéro. Inversement, si la valeur propre est nulle alors

$$0 = \langle \psi, Q^*Q\psi \rangle = \langle Q\psi, Q\psi \rangle$$

et ainsi  $Q\psi = 0$ . De cette façon, nous voyons que  $Q^*Q$  et  $QQ^*$  ont exactement le même spectre, à l'exception possible toute valeur propre nulle.

Maintenant, remarquons que  $Q^*Q$  a une valeur propre nulle car

$$\psi_0 = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

obéit  $Q\psi_0 = 0$  et est normalisable. L'opérateur  $QQ^*$ , considéré comme un opérateur sur  $L^2[-\infty, \infty]$ , n'a pas de valeur propre nulle car cela exigerait  $Q^*\psi = 0$ , et ainsi

$$\psi = e^{+\frac{1}{2}x^2}$$

qui n'est pas normalisable, et donc pas un élément de  $L^2[-\infty, \infty]$ .

Donc

$$B = Q^*Q + 1 = QQ^* - 1$$

nous voyons que  $\psi_0$  est une fonction propre de  $B$  de valeur propre 1, et ainsi une fonction propre  $QQ^*$  de valeur propre 2. Par conséquent  $Q^*\psi_0$  est une fonction propre de  $Q^*Q$  de valeur propre  $2B$  et ainsi une fonction propre  $B$  de valeur propre 3. Procédant de la même façon dont

nous constatons que

$$\psi_n = (Q^*)^n \psi_0$$

est une fonction propre de  $B$  de valeur propre  $2n + 1$ .

Puisque  $Q^* = -e^{\frac{1}{2}x^2} \partial_x e^{-\frac{1}{2}x^2}$ , nous pouvons écrire

$$\psi_n(x) = B_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

où

$$B_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

sont les polynômes de Hermite.

C'est une technique utile pour tout opérateur de second ordre qui peut être factorisé.

### 3.4.4 spectre continu

Nous allons illustrer ce sujet avec quelques exemples tirés de la mécanique quantique. L'exemple le plus simple est la particule libre sur la droite réelle. nous avons

$$H = -\partial_x^2.$$

éventuellement, nous voulons l'appliquer à des fonctions sur l'ensemble de la ligne réelle, mais nous allons commencer par l'intervalle  $[-\ell/2, \ell/2]$ , et puis prendre la limite  $\ell \rightarrow \infty$  L'opérateur  $H$  aux fonctions propres formelles

$$\varphi_k(x) = e^{ikx},$$

correspondant à des valeurs propres  $\lambda = k^2$ . Supposons que nous imposons des conditions aux limites périodiques à  $x = \pm\ell/2$  :

$$\varphi_k(-\ell/2) = \varphi_k(+\ell/2).$$

cette sélection  $k_n = 2\pi n/\ell$ , où  $n$  est un entier positif, négatif ou nul, et nous permet de trouver les fonctions propres normalisées

$$\chi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} e^{ik_n x}$$

La condition de l'exhaustivité est

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\ell} e^{ik_n x} e^{-ik_n x'} = \delta(x - x'), \quad x, x' \in [-\ell/2, \ell/2].$$

comme  $\ell$  devient grande, les valeurs propres deviennent si proches qu'ils peuvent difficilement être distingués, d'où le nom spectre continu, et le spectre  $\sigma(H)$  devient la ligne entière réel positif. Dans cette limite, la somme sur  $n$  devient une intégrale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{\dots\} \rightarrow \int dn \{\dots\} = \int dk \left( \frac{dn}{dk} \right) \{\dots\},$$

où

$$\frac{dn}{dk} = \frac{\ell}{2\pi}$$

est appelé (dynamique) densité d'états. Si nous divisons ce par  $A$  nous allons souvent écrire

$$\frac{dn}{dk} = \rho(k).$$

Si nous exprimons la densité d'états en fonction de la valeur propre  $\lambda$  alors, par un abus de notation, nous avons

$$\rho(\lambda) \equiv \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\ell}{2\pi\sqrt{\lambda}}.$$

Lorsque  $\ell$  est strictement infini,  $\varphi_k(x)$  n'est plus normalisable. Les mathématiciens ne permettent pas de telles fonctions non normalisables être considérés comme de véritables fonctions propres, et donc un point dans le spectre continu n'est pas, pour eux, en fait une valeur propre. Au contraire, ils disent qu'un point  $\lambda$  est dans le spectre continu si pour tout  $\xi > 0$ , il existe une fonction propre approximative  $\varphi_\xi$  de telle sorte que  $\|\varphi_\xi\| = 1$ , mais  $\|\ell\varphi_\xi - \lambda\varphi_\xi\| < \xi$ . Ce n'est pas une définition rentable pour nous. Nous préférons considérer fonctions d'onde non-normalisables comme étant les distributions dans notre espace de Hilbert truquées. Notons que

$$\frac{dn}{d\lambda} = 2 \frac{dn}{dk} \frac{dk}{d\lambda},$$

qui ressemble un peu bizarre, mais rappelez-vous que les deux Etats,  $\pm k_n$ , correspondent à la même  $\lambda$  et que les symboles

$$\frac{dn}{dk}, \frac{dn}{d\lambda}$$

sont des rapports de mesures, *i.e.* Dérivés de **Radon-Nikodym**, pas de produits dérivés ordinaires. Dans la limite  $\ell \rightarrow \infty$ , l'état de complétude devient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} = \delta(x-x'),$$

et la longueur  $\ell$  a disparu. Supposons que nous appliquons maintenant les conditions aux limites  $y = 0$  sur  $x = \pm \ell/2$ . Les fonctions propres normalisées sont alors

$$\chi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n(x + \ell/2),$$

où  $k_n = n\pi/\ell$ . Nous voyons que le permis  $k$  sont deux fois plus près comme ils étaient avec des conditions aux limites périodiques, mais maintenant  $n$  sont deux fois plus près comme ils étaient avec des conditions aux limites périodiques, mais maintenant

$$\rho(k) = \frac{dn}{dk} = \frac{\ell}{\pi},$$

qui est deux fois plus grand que dans le cas périodique, mais la densité des valeurs propres des Etats est

$$\rho(\lambda) = \frac{\ell}{2\pi\sqrt{\lambda}},$$

ce qui est exactement le même que précédemment .

Que le nombre d'états par unité d'énergie par unité de volume ne dépend pas des conditions aux limites à l'infini du sens physique : pas de propriété locale de la sphère sublunaire doit dépendre de ce qui se passe dans la sphère des étoiles fixes . Ce point n'a pas été pleinement saisi par les physiciens , cependant, jusqu'à ce que Rudolph Peierls a expliqué que la particule quantique devait effectivement se rendre à la limite de distance et de retour avant la nature précise de la frontière pourrait se faire sentir . Ce voyage prend du temps  $\ell$  ( en fonction de l'énergie de la particule ) et du principe d'incertitude énergie - temps , on peut distinguer une condition à la limite de l'autre que par l'examen du spectre avec une résolution en énergie plus

fine que  $\hbar/\ell$ . Ni la distance , ni la nature de la frontière peuvent affecter les détails secondaires, tels que la localdensity des Etats .

La dépendance du spectre d'un opérateur différentiel général sur les conditions aux limites a été étudiée par Hermann Weyl . Weyl distingue deux classes de points singuliers limites : limite - cercle, où le spectre dépend du choix des conditions aux limites , et point-limite où il ne fait pas. Pour l'opérateur de Schrödinger , le point à l'infini , ce qui est singulier " tout simplement parce qu'il est à l'infini , est dans la classe de point limite .

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + V(r)\right)\psi = E\psi$$

# Chapitre 4

## Spectre essentiel des opérateurs différentiels

On se propose d'étudier le spectre de l'opérateur

$$A = \mathbb{A}(\partial_x) = \sum_{j=0}^p a_j(x) \partial_x^j,$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $a_j(x) \in M_n(\mathbb{C})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On suppose que toutes les fonctions  $a_j$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et bornées sur  $\mathbb{R}$  et l'on suppose uniformément inversible (de sorte que l'opérateur  $A$  est partout d'ordre égal à  $p$ ), c'est-à-dire  $\|a_p(x)\| > 0$ . L'opérateur  $A$  vu comme un opérateur non borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  et de domaine l'espace de Sobolev  $H^p(\mathbb{R})$  (qui est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ ). Puisque  $p \geq 1$ ,  $A$  est un "vrai opérateur non borné", car son domaine  $H^p(\mathbb{R})$  est strictement inclus dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et la norme  $L^2(\mathbb{R})$  de  $Au$  dépend évidemment de la norme  $H^p(\mathbb{R})$  de  $u$ .

### 4.1 Opérateurs aux dérivées partielles linéaires

**Définition 4.1** *A opérateur différentiel linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  est défini comme étant un opérateur de la forme*

$$f \rightarrow Af := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} f(x). \quad (4.1)$$

Nous supposons que la somme est finie et que le domaine de  $A$  est  $\mathcal{S}$  ; tous les résultats de cette section peut être adaptée au cas où  $A$  a domaine  $\mathcal{C}_c^{\infty}$  par l'application théorème 2.36. La valeur maximale de  $|\alpha|$  impliqués dans la somme ci-dessus est appelé l'ordre de l'opérateur.

**Lemme 4.2** Si les coefficients  $a_\alpha(x) \in \mathcal{P}$  alors l'opérateur différentielle définie par Eq 4.1 une application de  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ . Cet opérateur est invariant par translation c'est-à-dire

$$A_u f(x) := f(x + u)$$

si et seulement si les coefficients sont constante .

**Définition 4.3** Le symbole d'un opérateur différentiel de la forme de l'eq 4.1 est définie par la fonction

$$a(x, y) := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x)(iy)^{\alpha}$$

des deux variables  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour un opérateur de coefficient constant le symbole est le polynôme

$$a(y) := \sum_{\alpha} a_{\alpha}(iy)^{\alpha}.$$

#### 4.1.1 Lien entre les symboles et transformées de Fourier

**Lemme 4.4** Si  $A$  a symbole  $a(x,y)$  et  $f \in \mathcal{D}(A)$ , alors

$$Af(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, y) \widehat{f}(y) e^{ix \cdot y} d^n y$$

pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Preuve.** Il résulte des propriétés de la transformation de fourie et son inverse que

$$\begin{aligned} Af(x) &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} f(x) \\ &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(\partial^{\alpha} f)}(y) e^{ix \cdot y} d^n y \\ &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (iy)^{\alpha} \widehat{f}(y) e^{ix \cdot y} d^n y \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, y) \widehat{f}(y) e^{ix \cdot y} d^n y. \end{aligned}$$

■

Le théorème suivant est également valable si l'on remplace  $\mathcal{S}$  par  $\mathcal{C}_c^{\infty}$ .



**Remarque 4.5 1-** L'opérateur différentiel de coefficient constant  $B$  de domaine  $\mathcal{D}$  est symétrique si et seulement si son symbole est à valeurs réelles sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce cas, la fermeture  $\overline{B}$  de l'opérateur est auto-adjoint et son spectre est la fermeture de l'ensemble

$$\left\{ \sum_{\alpha} a_{\alpha} (iy)^{\alpha} : y \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

2- Si un opérateur différentiel  $A$  est d'ordre  $n$  alors son symbole principal est défini par

$$a_n(x, y) := \sum_{|\alpha|=n} a_{\alpha}(x) (iy)^{\alpha}.$$

**Définition 4.6** L'opérateur  $A$  d'ordre  $n$  est dite uniformément elliptique s'il existe une constante  $c > 0$  tel que

$$c^{-1}|y|^n \leq a_n(x, y) \leq c|y|^n$$

pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

D'un intérêt particulier est le cas où

$$Af := - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

et où  $a(x) := \{a_{i,j}(x)\}$  est une matrice symétrique réelle pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n$ . Le symbole principal est alors

$$a_2(x, y) := \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) y_i y_j.$$

L'opérateur  $A$  est elliptique si toutes les valeurs propres de  $a(x)$  sont positifs pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$ , et est uniformément elliptique s'il existe  $c > 0$  tel que

$$c^{-1}I \leq a(x) \leq cI$$

dans le sens des matrices, pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$ ; pour les opérateurs de coefficients constants, il est, bien sûr, pas de distinction entre ces notions

**Corollaire 4.7** Si l'opérateur différentiel de coefficient constant  $A$  dans  $\mathcal{S}$  est symétrique et elliptique, alors le spectre de sa fermeture est un intervalle de la forme  $[\lambda, +\infty)$ .

**Preuve.** Nous pouvons écrire le symbole de  $A$  sous la forme

$$a(y) = a_n(y) + b(y),$$

où  $b(y)$  est la somme des termes d'ordre inférieur à l'ordre  $n$  de  $A$ . Puisque  $a_n(y) \geq c^{-1}|y|^n$  et  $|b(y)| \leq c'(|y|^{n-1} + 1)$  pour tous  $y \in \mathbb{R}^n$ , il s'ensuit que  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} a(y) = +\infty$ . Par conséquent, la fonction  $a(\cdot)$  est borné inferieurement et son image essentielle est de la forme indiquée. La preuve est complété en appliquant le lemme 4.4. ■

### 4.1.2 Adjoint formel

L'objectif dans cette partie est de définir deux opérateurs linéaires fermés sur l'espace de Hilbert  $H = L^2(\Omega)$  associé à  $A$  et  $A^+$ , l'opérateur maximal  $A_{\max}$  et le minimal de l'opérateur  $A_{\min}^+$ , et pour prouver qu'ils sont adjoints les uns des autres.

Supposons que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et que, pour chaque  $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ,  $|\alpha| \leq n$ , une fonction  $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  est donnée. Prenons l'expression formelle aux dérivées partielles linéaire

$$A = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(x) D^\alpha$$

et son adjoint formel  $A$  défini par

$$A^+ := \sum_{|\alpha| \leq n} D^\alpha \overline{a_\alpha(x)} \equiv \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha^+(x) D^\alpha, \quad \text{où } a_\alpha^+(x) := \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} D^{\beta-\alpha} \overline{a_\beta(x)}$$

la fonction  $a_\alpha^+(x)$  est choisi de telle sorte que par la règle de Leibniz

$$A^+ f \equiv \sum_{|\alpha| \leq n} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)} f) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha^+(x) D^\alpha f, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}_0^d$ , nous avons utilisé la notation multi-indice

$$D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha, \quad \partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_d \\ \beta_d \end{pmatrix}$$

et  $\beta \leq \alpha$  si et seulement si  $\beta_1 \leq \alpha_1, \dots, \beta_d \leq \alpha_d$ . Notons que  $A^+ = A$  si toutes les fonctions  $a_\alpha(x)$  sont des constantes réelles.

Le lemme suivant suit essentiellement par intégration par parties.

**Lemme 4.8**  $\langle Af, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, A^+g \rangle_{L^2(\Omega)}$  pour  $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Preuve.** Puisque  $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$ , nous pouvons choisir un sous-ensemble ouvert borné  $\tilde{\Omega}$  de  $\Omega$  avec  $C^\infty$ -limite telle que  $\text{supp } f \subseteq \tilde{\Omega}$  et  $\text{supp } g \subseteq \tilde{\Omega}$ . Alors, nous calculons

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle &= \sum_{\alpha} \langle a_{\alpha} D^{\alpha} f, g \rangle = \sum_{\alpha} \int_{\Omega} a_{\alpha} (-i)^{|\alpha|} (\partial^{\alpha} f) \bar{g} dx \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\tilde{\Omega}} (-i)^{|\alpha|} (\partial^{\alpha} f) \overline{a_{\alpha} g} dx = \sum_{\alpha} \int_{\tilde{\Omega}} i^{|\alpha|} f \partial^{\alpha} (\overline{a_{\alpha} g}) dx \\ &= \sum_{\alpha} \int_{\Omega} i^{|\alpha|} f \overline{\partial^{\alpha} (a_{\alpha} g)} dx = \sum_{\alpha} \langle f, D^{\alpha} \overline{a_{\alpha} g} \rangle = \langle f, A^+g \rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

La quatrième égalité découle de la formule de Gauss à l'aide que tous les termes de  $f$  et  $\overline{a_{\alpha} g}$  sur la frontière  $\partial\tilde{\Omega}$  disparaissent, puisque  $\text{supp } f \subseteq \tilde{\Omega}$  et  $\text{supp } g \subseteq \tilde{\Omega}$ . ■

De toute évidence, l'expression formelle adjoint  $A^+$  est uniquement déterminée par l'équation 4.2 dans le lemme 4.8. De cette caractérisation, il suit à la fois que  $(A^+)^+ = A$ .

Nous définissons d'abord les opérateurs linéaires  $A_0$  et  $(A^+)_0$  sur l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$  par

$$A_0 = Af$$

et

$$(A^+)_0 f = A^+ f \quad \text{pour } f \in \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}((A^+)_0) := C_0^\infty(\Omega)$$

D'après le lemme 4.8 nous avons  $A_0 \subseteq ((A^+)_0)^*$ . d'où,  $(A^+)_0$  admet un adjoint densément défini, de sorte  $(A^+)_0$  peut être fermée par le théorème de graphe fermé 2.2, la fermeture de  $(A^+)_0$  est désignée par  $(A^+)_{\min}$  et appelle l'opérateur minimal associé à l'expression  $A^+$ .

Definons  $A_{\max}$ , nous avons besoin de quelques notions sur les distributions, voir l'annexe  $\mathcal{D}$ . Soit  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace des distributions sur  $\Omega$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Puisque  $a_{\alpha} \in C^\infty(\Omega)$ ,  $Af$  est à nouveau une distribution de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  agissant sur  $\bar{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$  par

$$Af(\bar{\varphi}) = \sum_{\alpha} (a_{\alpha} D^{\alpha} f)(\bar{\varphi}) = \sum_{\alpha} D^{\alpha} f(a_{\alpha} \bar{\varphi}) = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} f(D^{\alpha}(a_{\alpha} \bar{\varphi})) \quad (4.3)$$

où les barres se réfèrent au conjuguer des fonctions complexes.

Si les deux distributions  $f$  et  $g = Af$  sont donnés par des fonctions  $f, g \in L^2(\Omega)$ , nous disons que l'équation  $Af = g$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ . Cela signifie que les expressions  $D^{\alpha}$  dans l'Eq 4.3 agir sur le  $L^2$  la fonction  $f$  au sens des distributions. Soit  $\mathcal{D}(A_{\max})$  désigne l'ensemble de tous  $f \in L^2(\Omega)$  pour laquelle la distribution  $g := Af$  est donnée par une fonction  $g \in L^2(\Omega)$  et définir  $A_{\max}f := g \equiv Af$ . L'opérateur linéaire  $A_{\max}$  que l'on appelle l'opérateur maximal associé à l'expression différentielle  $A$ .

**Proposition 4.9** *Les opérateurs  $(A^+)_{0}$ ,  $(A^+)_{\min}$ , et  $A_{\max}$  satisfont les relations*

$$((A^+)_{0})^* = ((A^+)_{\min})^* = A_{\max} \text{ et } (A_{\max})^* = (A^+)_{\min}.$$

**Preuve.** soit  $f \in \mathcal{D}(A_{\max})$ . Alors l'équation.4.3 peut s'écrire

$$\langle A_{\max}f, \varphi \rangle = \langle Af, \varphi \rangle = \langle f, (A^+)_{0}\varphi \rangle$$

pour  $\varphi \in \mathcal{D}((A^+)_{0})$ . d'où,  $A_{\max} \subseteq ((A^+)_{0})^*$  par la définition de l'opérateur adjoint. Supposons maintenant que

$$f \in \mathcal{D}(((A^+)_{0})^*)$$

et mettre en  $g = ((A^+)_{0})^*f$ . Alors

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle f, (A^+)_{0}\varphi \rangle = \langle f, A^+\varphi \rangle$$

pour tous  $\varphi \in \mathcal{D}((A^+)_{0})$ . D'autre part, nous avons

$$Af(\bar{\varphi}) = f(\overline{A^+\varphi}) = \langle f, A^+\varphi \rangle$$

par l'Eq 4.3. En comparant les deux formules, nous concluons que la distribution  $Af$  est donnée par la fonction  $g \in L^2(\Omega)$ , à savoir,  $f \in \mathcal{D}(A_{\max})$ . Ainsi, nous avons montré que

$$A_{\max} = ((A^+)_{0})^*$$

puisque  $(A^+)_{\min}$  est la fermeture de  $(A^+)_0$ , et donc on obtient

$$((A^+)_{\min})^* = A_{\max} \text{ et } (A_{\max})^* = ((A^+)_{\min})^{**} = (A^+)_{\min}.$$

■

## 4.2 Opérateurs différentiels comme opérateurs non bornés sur $L^2(\mathbb{R})$

Considérons un opérateur différentiel à coefficients variables en dimension 1.

$$A = \mathbb{A}(\partial_x) = \sum_{j=0}^p a_j(x) \partial_x^j,$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$ ;  $a_1; \dots; a_p \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}; M_n(\mathbb{C}))$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , avec,  $a_p(x) \in GL_n(\mathbb{C})$  (de sorte que l'opérateur  $A$  est partout d'ordre égal à  $p$ ), l'opérateur différentiel peut être vu comme un opérateur non-borné sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de domaine  $\mathcal{D}(A) = H^p(\mathbb{R}^n)$  (dont on rappelle que c'est un sous-espace dense de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ). Plus précisément,  $A$  définit une application linéaire continue de  $H^p(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  : en effet, pour tout  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|Au\|_{L^2} \leq \sqrt{p+1} \max_j \|a_j\|_{L^\infty} \|u\|_{H^p},$$

où les notations  $L^2$ ,  $H^p$ ,  $L^\infty$  se rapportent ici aux normes sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $H^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $L^\infty(\mathbb{R}; M_n(\mathbb{C}))$  respectivement, définies à l'aide d'une norme quelconque sur  $\mathbb{C}^n$  pour les deux premières et de la norme subordonnée sur  $M_n(\mathbb{C})$  pour la dernière.

Le lemme suivant montre que notre opérateur différentiel  $A$  est fermé, c'est-à-dire que son graphe est fermé dans  $(L^2(\mathbb{R}^n) \times (L^2(\mathbb{R}^n))$ .

**Lemme 4.10** *Quel que soit  $v \in H^p(\mathbb{R})$ , il existe un  $C > 0$  indépendant de  $v$  tel que*

$$\sum_{j=1}^p \|\partial_x^j v\|_{L^2}^2 \leq C(\|v\|_{L^2}^2 + \|Av\|_{L^2}^2), \quad (4.4)$$

**Preuve.** Elle est élémentaire mais assez technique lorsque  $p$  est grand (noter que le cas

$p = 1$  est trivial ; le cas  $p = 2$  est facile ; à partir de  $p = 3$  c'est presque aussi fastidieux que dans le cas général). Pour simplifier, on suppose  $a_p \equiv I_n$  (ce qui revient à remplacer  $a_j(x)$  par  $(a_p(x))^{-1}a_j(x)$ ). Autrement dit,  $A = \partial_x^p + \tilde{A}$  avec  $\tilde{A}$  d'ordre inférieur ou égal à  $p - 1$ . Pour commencer, on observe que

$$\|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 = \|(A - \tilde{A})v\|_{L^2}^2 \leq 2\|Av\|_{L^2}^2 + 2\|\tilde{A}v\|_{L^2}^2 \leq 2\|Av\|_{L^2}^2 + C \sum_{j=0}^{p-1} \|\partial_x^j v\|_{L^2}^2,$$

où  $C > 0$  dépend seulement de  $p$  et de  $\max_j \|a_j\|_{L^\infty}$ . Il suffirait donc de prouver l'Eq 4.4 en limitant la somme à  $j = p - 1$ . En fait, on va le faire modulo un terme en  $\|\partial_x^p v\|_{L^2}^2$  qui pourra être absorbé à gauche *in fine*.

Le calcul repose essentiellement sur des intégrations par parties et sur **l'inégalité de Young** :

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2,$$

avec  $C_\varepsilon = 1/(4\varepsilon)$  quel que soit  $\varepsilon > 0$ .

• Cas des "petits entiers"  $j$  : si  $2j \leq p$ , en intégrant par parties  $j$  fois, on montre grâce à l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** que

$$\|\partial_x^j v\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_x^{2j} v\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

En itérant au besoin le procédé et en utilisant l'inégalité de Young, on arrive à la majoration

$$\|\partial_x^j v\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \|\partial_x^{K_j} v\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2$$

avec  $2K_j > p$  et pour un  $\varepsilon > 0$  à fixer ultérieurement.

• Cas des "grands entiers"  $j$  : si  $2k > p$ , en intégrant par parties  $(p - k)$  fois, on montre grâce à l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** que

$$\|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 \leq \|\partial_x^p v\|_{L^2} \|\partial_x^{2k-p} v\|_{L^2} \leq \eta \|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 + C_\eta \|\partial_x^{2k-p} v\|_{L^2}^2.$$

En itérant au besoin le procédé (c'est-à-dire en appliquant le même argument à  $2k - p$  au lieu

de  $k$ ), on arrive à une majoration

$$\|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 \leq \eta \|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 + C_\eta \|\partial_x^{J_k} v\|_{L^2}^2$$

avec  $2J_k \leq p$  et pour un  $\eta > 0$  à fixer.

- En combinant avec l'inégalité obtenue pour les entiers  $j \leq p/2$ , on a donc d'une part,

$$\|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 \leq \eta \|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_\eta \|\partial_x^{K_{J_k}} v\|_{L^2}^2 + C_\eta C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2,$$

d'où en sommant :

$$\sum_{p/2 < k \leq p} \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 \leq \frac{p}{2} (\eta \|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_\eta \sum_{p/2 < k \leq p} \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 + C_\eta C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2),$$

et d'autre part,

$$\|\partial_x^j v\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon (\eta \|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_\eta \|\partial_x^{K_{J_k}} v\|_{L^2}^2 + C_\eta C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2) + C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2,$$

d'où en sommant :

$$\sum_{0 \leq j \leq p/2} \|\partial_x^j v\|_{L^2}^2 \leq \frac{p+1}{2} (\varepsilon \eta \|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2 C_\eta \sum_{p/2 < k \leq p} \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_\eta C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2)$$

- En faisant la somme des estimations de  $\|\partial_x^p v\|_{L^2}^2$ ,  $\sum_{p/2 < k \leq p} \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2$  et  $\sum_{0 \leq j \leq p/2} \|\partial_x^j v\|_{L^2}^2$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^p \|\partial_x^\ell v\|_{L^2}^2 &\leq 2 \|Av\|_{L^2}^2 + 2C \sum_{j=0}^{p-1} \|\partial_x^j v\|_{L^2}^2 \\ &\leq 2 \|Av\|_{L^2}^2 + (p+1)(1+\varepsilon)C(\eta \|\partial_x^p v\|_{L^2}^2 + \varepsilon C_\eta \sum_{p/2 < k \leq p} \|\partial_x^k v\|_{L^2}^2 + (C_\eta + 1)C_\varepsilon \|v\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de choisir  $\eta > 0$  tel que

$$(p+1)C\eta \leq 1/4,$$

puis  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tel que

$$(p+1)CC_\eta\varepsilon \leq 1/4$$

pour finalement obtenir

$$\sum_{\ell=0}^p \|\partial_x^\ell v\|_{L^2}^2 \leq 4\|Av\|_{L^2}^2 + 4(p+1)C(C_\eta+1)C_\varepsilon\|v\|_{L^2}^2.$$

■

**Lemme 4.11** *Si une suite  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $H^p(\mathbb{R})^n$  converge vers  $u$  dans  $L^2(\mathbb{R})^n$  et si  $Au_m$  converge vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})^n$ , alors  $u \in H^p(\mathbb{R})^n$  et  $Au = f$  (presque partout).*

**Preuve.** Comme  $Au_m$  converge vers  $f$  et aussi vers  $Au$  au sens des distributions, on a déjà  $Au = f$  (d'après l'unicité de la limite) Le point délicat est de montrer que  $u \in H^p(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire que  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $H^p(\mathbb{R})$ . En appliquant l'éq 4.4 à  $v = u_k - u_m$  et en faisant tendre  $k$  et  $m$  vers  $+\infty$ , on en déduit bien que  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy, donc convergente, dans  $H^p(\mathbb{R})$ . La fin de la démonstration du lemme découle alors du raisonnement classique suivant. Pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a par intégrations par parties,

$$\int \varphi(x)^*(Au_m)(x)dx = \sum_{j=0}^p (-1)^j \int \partial_x^j(\varphi^*a_j)(x)u_m(x)dx.$$

Par hypothèse,  $Au_m$  converge vers  $f$  dans  $L^2$  donc par l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** dans  $L^2$ , le membre de gauche converge vers  $\int \varphi(x)^*f(x)dx$ , et de la même façon, puisque  $u_m$  converge vers  $u$  dans  $L^2$ , le membre de droite tend vers

$$\sum_{j=0}^p (-1)^j \int u(x)\partial_x^j(\varphi^*a_j)(x)dx.$$

Or sachant que  $u$  appartient à  $H^p(\mathbb{R}^n)$  on peut intégrer par parties dans l'autre sens, ce qui donne par unicité de la limite (des suites numériques !)

$$\int \varphi(x)^*f(x)dx = \int \varphi(x)^*(Au)(x)dx.$$

Ceci étant vrai quel que soit  $\varphi$ , le *lemme fondamental du calcul intégral* implique l'égalité des fonctions  $f$  et  $Au$  presque par tout. ■



Le théorème du graphe fermé 2.2 implique en particulier que tout opérateur non-borné fermé  $A$  est continu sur son domaine  $\mathcal{D}(A)$ , comme on l'a vu pour l'opérateur différentiel qui nous intéresse :

$A$  est continu de  $H^p(\mathbb{R}^n)$  vers  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ; mais  $A$  n'évidemment pas continu sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (pour  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $Au$  n'est a priori défini qu'au sens des distributions, et n'est pas dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  en général).

### 4.2.1 Dualité dans les espaces de Hilbert

Dans le cas de l'opérateur différentiel  $A = \sum_{j=0}^p a_j(x) \partial_x^j$  avec  $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ , les intégrations par parties effectuées dans la démonstration du lemme 4.11 et le théorème de représentation de **Riesz** montrent que  $\mathcal{D}(A^*) = H^p(\mathbb{R}^n)$  et que pour tout  $v \in \mathcal{D}(A^*)$ ,

$$A^* = \sum_{j=0}^p (-1)^j \partial_x^j (a_j(x)^* v(x)).$$

En général,  $A$  n'est pas auto-adjoint, car pas symétrique. Il l'est si ses coefficients sont constants (c'est-à-dire si les applications  $a_j$  sont constantes), s'il ne comporte que des dérivées d'ordre pair, et si les matrices  $a_j$  sont auto-adjointes (c'est-à-dire  $a_j^* = a_j$ ).

(Les trois premières égalités sont en fait vraies pour tout opérateur fermé à domaine dense dans un espace de **Banach**, et la dernière l'est si cet espace est réflexif, c'est-à-dire isomorphe à son bidual.)

## 4.3 Spectre essentiel des opérateurs différentiels

On suppose désormais que les coefficients  $a_j$  admettent des limites à l'infini. Il va s'avérer que le spectre essentiel de  $A$  est "essentiellement" déterminé par le spectre des opérateurs à coefficients constants  $a_j^\pm$  obtenus en passant à la limite dans  $a_j(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ . Avant de préciser ce résultat, voyons justement le cas des opérateurs à coefficients constants.

### 4.3.1 Spectre des opérateurs différentiels à coefficients constants

**Lemme 4.12** *Si  $A$  est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Hilbert  $H$  s'il existe une suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  orthonormée d'éléments de  $\mathcal{D}(A)$  telle que  $(\lambda - A)u_k$  tende vers 0, alors*

$$\lambda \in \sigma_{ess}(A).$$

**Preuve.** D'après le théorème 2.24, il suffit de montrer que  $\lambda \in \sigma(A + K)$  quel que soit l'opérateur compact  $K$ . On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un opérateur compact  $K$  tel que  $\lambda \in \rho(A + K)$ . Cela signifie que  $(A + K - \lambda)^{-1}$  est un opérateur borné, c'est-à-dire qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$\|u\| \leq C\|(A + K - \lambda)u\|$$

pour tout  $u \in \mathcal{D}(A)$ . Puisque  $(u_k)$  est bornée par hypothèse, la suite  $(Ku_k)$  admet une sous-suite convergente  $(Ku_{k'})$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \|u_{k'} - u_{m'}\| &\leq C\|(A + K - \lambda)(u_{k'} - u_{m'})\| \\ &\leq C\|K(u_{k'} - u_{m'})\| + C\|(\lambda - A)u_{k'}\| + C\|(\lambda - A)u_{m'}\|, \end{aligned}$$

où les 3 termes tendent vers 0 lorsque  $k', m' \rightarrow +\infty$ . Ainsi la suite  $(u_{k'})$  est de Cauchy et donc converge. Or puisque  $(u_k)$  est orthonormée,  $\|u_{k'} - u_{m'}\|^2 = \|u_{k'}\|^2 + \|u_{m'}\|^2 = 2$ , d'où la contradiction, car l'hypothèse selon laquelle  $(u_k)$  n'avait pas de sous-suite convergente. ■

**Théorème 4.13** *Soit*

$$A = \mathbb{A}(\partial_x) = \sum_{j=0}^p a_j \partial_x^j$$

*un opérateur différentiel à coefficients constants matriciels  $a_j \in M_n(\mathbb{C})$ . Alors le spectre de  $A$  sur  $L^2(\mathbb{R})$  est constitué exclusivement de spectre essentiel, et plus précisément,*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \xi \in \mathbb{R}, \det(\lambda - \mathbb{A}(i\xi)) = 0\}, \text{ où } \mathbb{A}(\mu) := \sum_{j=0}^p \mu^j a_j$$

*est le symbole de  $A$  pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{A}(\mu) \in M_n(\mathbb{C})$ .*

**Preuve.** La recherche du spectre de  $A$  revient à l'étude de l'équation

$$(\lambda - A)u = f$$

avec  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  donnée. L'outil principal pour cela est la transformation de Fourier. En effet, pour  $f$  et  $u$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , l'équation ci-dessus est équivalente à

$$(\lambda - \mathbb{A}(i\xi))\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Supposons que la matrice  $(\lambda - \mathbb{A}(i\xi))$  soit inversible quel que soit  $\xi \in \mathbb{R}$ . On en déduit

$$\widehat{u}(\xi) = (\lambda - \mathbb{A}(i\xi))^{-1}\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Or si l'on note  $g(\xi) = (\lambda - \mathbb{A}(i\xi))^{-1}$ , la fonction  $\xi \mapsto |\xi|^p g(\xi)$  est bornée : en effet,  $g$  est continue comme composée de  $\xi \mapsto \lambda - \mathbb{A}(i\xi)$  et de  $M \in GL_n(\mathbb{C}) \mapsto M^{-1}$ , donc bornée sur tout intervalle fermé  $[-R, R]$ , et

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\xi|^p g(\xi) = -(i\xi/|\xi|)^{-p} a_p^{-1}.$$

Donc  $g$  est de carré intégrable, et par transformation de Fourier inverse on obtient

$$u = \mathcal{F}^{-1}(g) * f.$$

Ce calcul s'étend à toutes les fonctions  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , et la formule  $\widehat{u} = g\widehat{f}$  montre de plus que  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$  puisque  $\xi \mapsto |\xi|^p g(\xi)$  est bornée.

Autrement dit, si  $(\lambda - \mathbb{A}(i\xi))$  est inversible quel que soit  $\xi \in \mathbb{R}$ , l'équation  $(\lambda - A)u = f$  pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  admet une solution unique  $u \in H^p(\mathbb{R}^n)$ . Ceci montre que

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \xi \in \mathbb{R}, \det(\lambda - \mathbb{A}(i\xi)) = 0\}$$

Inversement, si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\xi \in \mathbb{R}$  sont tels que  $\det(\lambda - \mathbb{A}(i\xi)) = 0$  alors  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ . Ceci n'est pas tout à fait immédiat. Supposons en effet  $r \in \ker(\lambda - \mathbb{A}(i\xi)) \setminus \{0\}$ . La fonction  $U_r : x \mapsto e^{i\xi x} r$  annule clairement  $(\lambda - A)$ , mais elle n'est pas dans le domaine de  $A$  (elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , mais même pas de carré intégrable!). C'est pourquoi on ne peut pas dire que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ . Montrons qu'elle appartient à  $\sigma_{ess}(A)$  et le lemme 4.12. On remarque puisque

$L^2$  est un espace de Hilbert qu'il suffit de construire une famille orthonormée  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (qui n'a automatiquement pas de sous-suite convergente) telle que  $(\lambda - A)u_k$  tend vers 0. Pour cela, considérons une fonction  $\varphi \geq 0$  de classe  $C^\infty$  valant 1 sur  $[0, 1]$  et 0 sur  $[2, +\infty[$ , et définissons pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x \pm 2k^2| \leq k, \\ \varphi(|x \pm 2k^2| - k + 1) & \text{si } k \leq |x \pm 2k^2| \leq k + 1, \\ 0 & \text{si } |x \pm 2k^2| \geq k + 1. \end{cases}$$

Sous son apparence compliquée, la fonction  $\varphi_k$  a les propriétés intéressantes suivantes :

1) elle est à support compact, de taille en  $\theta(k)$ , tandis que le support de toutes ses dérivées est de taille  $\theta(1)$ ;

2) elle est bornée ainsi que toutes ses dérivées uniformément par rapport à  $k$ ;

3) les supports de  $\varphi_k$  et  $\varphi_{k'}$  sont disjoints pour  $k \neq k'$ .

Comme  $(\lambda - A)U_r = 0$  et  $U_r$  est bornée ainsi que toutes ses dérivées, d'après 1) et 2) la norme  $L^2$  de  $(\lambda - A)(\varphi_k U_r)$  est uniformément bornée par rapport à  $k$ . D'autre part, puisque  $U_r$  est de module constant, la norme  $L^2$  de  $\varphi_k U_r$  est en  $\theta(k^{1/2})$ . Par conséquent,

$$u_k = \varphi_k U_r / \|\varphi_k U_r\|_{L^2}$$

vérifie les hypothèses du lemme 4.12 : c'est une famille orthonormée dans  $L^2$  (d'après 3)) telle que  $(\lambda - A)u_k$  tende vers 0. ■

### 4.3.2 Fonction de Green des opérateurs différentiels à coefficients constants

Notons  $\delta$  la masse de Dirac en 0, c'est-à-dire la mesure de Radon définie par  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$  pour toute fonction continue  $\varphi$ . Attention, dans ce paragraphe, la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne un crochet de dualité et non un produit scalaire. La transformée de Fourier de  $\delta$  au sens des distributions est définie par

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \int \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

et s'identifie donc à la fonction constante égale à 1. L'opérateur  $A$  étant à coefficients constants, le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, affirme que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  il existe au moins une distribution  $G_\lambda$  solution de  $(\lambda - A)G_\lambda = \delta$ . Mais si de plus  $\lambda$  n'est pas dans le spectre de  $A$ , alors  $G_\lambda$  s'identifie avec la fonction de carré intégrable obtenue par transformation de Fourier inverse de la fonction  $g_\lambda : \xi \mapsto (\lambda - \mathbb{A}(i\xi))^{-1}$  : on a en effet par définition

$$(\lambda - \mathbb{A}(i\xi))g_\lambda(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

d'où précisément (en utilisant la formule 2.3) reliant transformation de Fourier et dérivation)

$$(\lambda - \mathbb{A})\mathcal{F}^{-1}(g_\lambda) = \delta.$$

La fonction  $G_\lambda = \mathcal{F}^{-1}(g_\lambda)$  est appelée la fonction de Green de l'opérateur  $(\lambda - A)$ . Cette fonction a une "singularité" en 0 dépendant de l'ordre de l'opérateur  $A$ . Plus précisément, puisque la fonction  $\xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{p/2}g_\lambda(\xi)$  est bornée, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'intégrabilité de  $\xi \mapsto 1/(1 + |\xi|^2)$  montrent que  $G_\lambda$  appartient à  $H^{p-1}(\mathbb{R})$ , et s'identifie par conséquent à une fonction de classe  $\mathcal{C}^{p-2}$  lorsque  $p \geq 2$ . Dans le cas d'un opérateur  $A$  d'ordre 1,  $G_\lambda$  a une discontinuité en 0, comme le montrera la formule de la proposition 4.14, à laquelle le reste de ce paragraphe est consacré.

Le point de départ pour calculer  $G_\lambda$  est de reformuler l'équation

$$(\lambda - A)u = f$$

en système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dU}{dx} = \mathcal{A}(\lambda)U + F(x),$$

où

$$F(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -(a_p)^{-1}f(x) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & & 0 \\ & & & \cdot & & \vdots \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \vdots \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \vdots \\ \cdot & & & \cdot & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & I_n \\ \tilde{a}_0(\alpha) & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{p-1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_j = -(a_p)^{-1}a_j \quad \forall j \in \{1, \dots, p-1\}, \quad \tilde{a}_0(\lambda) = -(a_p)^{-1}(a_0 - \lambda).$$

On est ainsi en quelque sorte ramené au cas  $p = 1$ , car la fonction de Green  $\mathbb{G}_\lambda$  de l'opérateur du premier ordre  $\partial_x - \mathbb{A}(\lambda)$  permet de calculer la fonction de Green de  $(\lambda - A)$ .

**Proposition 4.14** *Soient*

$$A = \mathbb{A}(\partial_x) = \sum_{j=0}^p a_j \partial_x^j$$

*un opérateur différentiel à coefficients constants et  $\lambda \notin \sigma(A)$ . Alors la matrice  $\mathbb{A}(\lambda)$  définie comme ci-dessus est hyperbolique, et la fonction de Green  $G_\lambda$  de  $(\lambda - A)$  est donnée par*

$$G_\lambda = P\mathbb{G}_\lambda J,$$

où  $J : f \in \mathbb{C}^n \mapsto (0, \dots, 0, -(a_p)^{-1}f)^t \in \mathbb{C}^{np}$ ,  $P : U \in \mathbb{C}^{np} \mapsto U_1 \in \mathbb{C}^n$ , et

$$\mathbb{G}_\lambda(x) = 1_{\{x>0\}} e^{x\mathbb{A}(\lambda)} \Pi_s(\lambda) - 1_{\{x<0\}} e^{x\mathbb{A}(\lambda)} \Pi_u(\lambda),$$

*l'opérateur  $\Pi_s(\lambda)$  désignant la projection sur le sous-espace stable de  $\mathbb{A}(\lambda)$  parallèlement au sous-espace instable, et  $\Pi_u(\lambda) = I_{np} - \Pi_s(\lambda)$ . En particulier,  $G_\lambda$  (comme  $\mathbb{G}_\lambda$  la fonction de Green  $G_\lambda$  dépend analytiquement de  $\lambda$ , et elle tend exponentiellement vite vers zéro, tout comme ses  $(p-1)$  premières dérivées, lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .*

**Preuve.** On vérifie d'abord que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , le spectre de la matrice  $\mathbb{A}(\lambda)$  est égal à

$$\{\mu \in \mathbb{C}; \det(\lambda - \mathbb{A}(\mu)) = 0\}.$$

En effet, un vecteur  $U \in \mathbb{C}^{np}$  est tel que  $\mathcal{A}(\lambda)U = \mu U$  si et seulement si  $U$  se décompose en  $p$  vecteurs  $U_1, \dots, U_p$  de  $\mathbb{C}^n$  tels que  $\mu U_j = U_{j+1}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, p-1\}$  et

$$\mu U_p = \tilde{a}_0(\lambda)U_1 + \dots + \tilde{a}_{p-1}U_p,$$

ce qui équivaut à  $U_{j+1} = \mu^j U_1$  pour tout  $j \in \{1, \dots, p-1\}$  et

$$(a_p)^{-1}(\mathbb{A}(\mu) - \lambda)U_1 = 0.$$

Or d'après le théorème 4.13,  $\lambda \notin \sigma(A)$  signifie qu'il n'y a aucun  $\mu \in i\mathbb{R}$  tel que  $\det(\lambda - \mathbb{A}(\mu)) = 0$ . C'est donc que la matrice  $\mathcal{A}(\lambda)$  n'a pas de spectre imaginaire pur si  $\lambda$  n'est pas dans le spectre de l'opérateur  $A$ . Ceci permet de définir le sous-espace stable  $E_s(\lambda)$  et le sous-espace instable  $E_u(\lambda)$  de  $\mathcal{A}(\lambda)$ , qui sont alors supplémentaires. De plus, comme  $A$  dépend linéairement, et donc continûment, de  $\lambda$ , ses valeurs propres dépendent aussi continûment de  $\lambda$ . Ainsi, pour  $\lambda_0$  dans l'ensemble résolvant de  $A$ , on peut choisir des contours  $\Gamma_-^1$  et  $\Gamma_+^1$  entourant respectivement toutes les valeurs propres de partie réelle strictement négative et toutes celles de partie réelle strictement positives de  $\mathcal{A}(\lambda)$  pour  $\lambda$  voisin de  $\lambda_0$ . Les projecteurs spectraux de  $\mathcal{A}(\lambda)$  s'expriment alors, au moyen des intégrales de contour

$$\Pi_s(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_-} (z - \mathbb{A}(\lambda))^{-1} dz, \quad \Pi_u(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_+} (z - \mathbb{A}(\lambda))^{-1} dz.$$

Comme  $\mathcal{A}$  dépend analytiquement (car linéairement) de  $\lambda$ , on peut en déduire que  $\Pi_s$  et  $\Pi_u$  dépendent analytiquement de  $\lambda$ , et qu'il existe  $b(\lambda) > 0$ ,  $\beta(\lambda) > 0$ ,  $c(\lambda) > 0$ ,  $\gamma(\lambda) > 0$ , dépendant continûment de  $\lambda$ , tels que

$$\|e^{x\mathbb{A}(\lambda)}\Pi_s(\lambda)\| \leq b(\lambda)e^{-\beta(\lambda)x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \|e^{x\mathbb{A}(\lambda)}\Pi_u(\lambda)\| \leq c(\lambda)e^{\gamma(\lambda)x}, \quad x \in \mathbb{R}^-$$

Calculer la fonction de Green  $\mathbb{G}_\lambda$  de  $\partial_x - \mathbb{A}(\lambda)$  revient à chercher les solutions  $U \in L^2(\mathbb{R}^{pn})$  du système  $U' = \mathcal{A}(\lambda)U + F$  avec  $F \in L^2(\mathbb{R}^{pn})$ . Pour en déduire  $G_\lambda$  on se restreindra ensuite à  $F = J(f)$  avec  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , où  $J$  est l'application définie dans l'énoncé.

Comme la matrice  $\mathcal{A}(\lambda)$  est hyperbolique, le système homogène  $U' = \mathcal{A}(\lambda)U$  n'admet aucune solution de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$  (toutes les solutions tendent vers l'infini au moins d'un côté). Donc s'il existe une solution de carré intégrable au problème non homogène, elle est unique.

D'autre part, quel que soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$U(x) = \int_{x_0}^x e^{(x-y)\mathcal{A}(\lambda)} F(y) dy$$

définit une solution du système avec terme source  $F$ . Lorsque  $F(y) \in E_s(\lambda)$  pour tout  $y$ , on peut faire tendre  $x_0$  vers  $-\infty$  dans l'expression ci-dessus, et lorsque  $F(y) \in E_u(\lambda)$ , on peut faire tendre  $x_0$  vers  $+\infty$ . Plus généralement, on vérifie que

$$U(x) = \int_{-\infty}^x e^{(x-y)\mathcal{A}(\lambda)} \Pi_s(\lambda) F(y) dy - \int_x^{+\infty} e^{(x-y)\mathcal{A}(\lambda)} \Pi_u(\lambda) F(y) dy$$

est une solution de  $U' = \mathcal{A}(\lambda)U + F$ .

De plus, elle est effectivement de carré intégrable car

$$\|U(x)\| \leq b \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-y)} \|F(y)\| dy + c \int_x^{+\infty} e^{\gamma(x-y)} \|F(y)\| dy,$$

et le terme de droite est fait de convolutions de la fonction de carré intégrable  $x \mapsto \|F(x)\|$  avec les fonctions intégrables  $x \mapsto 1_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-\beta x}$  et  $x \mapsto 1_{\mathbb{R}_-}(x)e^{\gamma x}$ . Or on rappelle que la convolution d'une fonction intégrable et d'une fonction de carré intégrable donne une fonction de carré intégrable. Autrement dit, la solution de carré intégrable de  $U' = \mathcal{A}(\lambda)U + F$  est  $U = G_\lambda * F$  avec

$$\mathbb{G}_\lambda(x) = 1_{\{x>0\}} e^{x\mathcal{A}(\lambda)} \Pi_s(\lambda) - 1_{\{x<0\}} e^{x\mathcal{A}(\lambda)} \Pi_u(\lambda)$$

comme annoncé. ■

**Proposition 4.15** *Lorsque  $p \geq 2$  on peut vérifier autrement, par un argument d'analyse complexe, la décroissance exponentielle de  $G_\lambda$ .*

**Preuve.** la transformée de Fourier de  $G_\lambda$  est  $\xi \mapsto (\lambda - \mathbb{A}(i\xi))^{-1}$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ , il existe  $\gamma > 0$  tel que la matrice  $(\lambda - \mathbb{A}(\mu))$  soit inversible pour tout  $\lambda \in K$  et tout  $\mu$  dans la bande  $M_K := \{\mu; |\operatorname{Re} \mu| \leq \gamma\}$ . De plus,  $(\lambda - \mathbb{A}(\mu))^{-1}$  dépend analytiquement de  $\mu$  et

$$\|\operatorname{Im} \mu\|^p \|(\lambda - \mathbb{A}(\mu))^{-1}\|$$

est uniformément borné pour  $(\lambda, \mu) \in K \times M_K$ . Si  $p \geq 2$ , on peut appliquer la formule



d'inversion de Fourier et ainsi obtenir l'expression

$$\begin{aligned} G_\lambda(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} (\lambda - \mathbb{A}(i\xi))^{-1} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x(\gamma+i\xi)} (\lambda - \mathbb{A}(\gamma + i\xi))^{-1} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x(-\gamma+i\xi)} (\lambda - \mathbb{A}(-\gamma + i\xi))^{-1} d\xi \end{aligned}$$

par la formule de Cauchy. On en déduit les majorations voulues quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . ■

**Exemple 4.16** Prenons simplement l'opérateur  $A = \partial_x^2$ . Le spectre de  $A$  est  $\mathbb{R}^-$ , et la fonction de Green de  $(\lambda - A)$  pour  $\lambda \notin \mathbb{R}^-$  se calcule directement par transformation de Fourier inverse :

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|x|},$$

ou  $\sqrt{\lambda}$  désigne la racine carrée de  $\lambda$  de partie réelle strictement positive. En écrivant

$$(\lambda - A)u = f$$

sous la forme

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = v, \\ \frac{dv}{dx} = \lambda u - f, \end{cases}$$

les projecteurs spectraux sont donnés par

$$\begin{aligned} \Pi_s(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left( u - \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \\ \Pi_u(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left( u + \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

d'où

$$\mathbb{G}_\lambda(x) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{x>0} e^{-x\sqrt{\lambda}} \left( u - \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{x<0} e^{x\sqrt{\lambda}} \left( u + \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

et en particulier

$$P\mathbb{G}_\lambda(x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} e^{-|x|\sqrt{\lambda}} f.$$

Noter que le cas limite  $\lambda \rightarrow 0$  donne  $G_0(x) = -\frac{|x|}{2}$ , ce qui est connu comme la fonction de Green de  $\partial_x^2$  (le Laplacien en dimension 1 ! en effet,  $\partial_x G_0 = -(\frac{1}{2})\text{sign}$  et  $\partial_{xx} G_0 = \delta$  au sens des distributions). Sur cet exemple, on observe bien la décroissance exponentielle de la fonction de Green  $G_\lambda$  tant que  $\lambda$  est en dehors du spectre de l'opérateur, et l'on constate que cette décroissance est perdue dès que  $\lambda$  entre dans le spectre (en 0).

On a donc réglé le cas des opérateurs différentiels à coefficients constants sur  $\mathbb{R}$  :

- 1) leur spectre est une réunion de courbes algébriques, définies par  $\lambda = \omega_k(i\xi)$  si les  $\omega_k$  désignent les valeurs propres de  $A(\mu)$  pour  $\mu \in \mathbb{C}$ ;
- 2) il s'agit de spectre essentiel ;
- 3) en dehors du spectre, leur résolvante s'exprime au moyen d'une fonction de Green exponentiellement décroissante à l'infini.

### 4.3.3 Spectre des opérateurs à coefficients variables

Le cas des opérateurs à coefficients variables est bien plus délicat en général. Cependant, dans le cas des opérateurs asymptotiquement à coefficients constants on a un résultat grosso modo analogue (à ceci près que le spectre peut contenir des valeurs propres, où la fonction de Green a un pôle). C'est l'objet de ce qui suit.

On considère un opérateur

$$A = \mathbb{A}(\partial_x) = \sum_{j=0}^p a_j(x) \partial_x^j$$

dont les coefficients  $a_j$  admettent des limites finies en  $\pm\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_j(x) = a_j^\pm$$

On note

$$A^\pm = \sum_{j=0}^p a_j^\pm K$$

les opérateurs à coefficients constants associés, et  $\mathbb{A}^\pm$  leurs symboles.

**Proposition 4.17** *Si  $\lambda \in \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$  alors  $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ .*

**Preuve.** Comme pour théorème 4.13 dans le cas à coefficients constants. Supposons pour fixer les idées que  $\lambda \in \sigma(A^-)$ . Il s'agit de construire une suite orthonormée  $(u_k)$  telle que  $(\lambda - \mathbb{A})u_k$  tende vers 0. Soit alors  $r^- \in \ker(\lambda - A^-(\xi))$  et  $U^-(x) = e^{i\xi x} r^-$ . On définit

$$\varphi_k^-(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x + 2k^2| \leq k, \\ \varphi(|x + 2k^2| - k + 1) & \text{si } k \leq |x + 2k^2| \leq k + 1, \\ 0 & \text{si } |x + 2k^2| \geq k + 1. \end{cases}$$

Comme  $(\lambda - A^-)U^- = 0$ ,

$$(\lambda - A)(\varphi_k^- U^-) = (\lambda - A^-)(\varphi_k^- U^-) + (A^- - A)(\varphi_k^- U^-)$$

est uniformément borné par rapport à  $k$ . On conclut ensuite comme pour le théorème 4.13 ■

Au prix d'hypothèses supplémentaires sur la convergence des coefficients, on peut en fait montrer l'égalité

$$\sigma(A^-) \cup \sigma(A^+) = \sigma_{ess}(A).$$

Un résultat important dans cette direction est le

**Théorème 4.18** *On suppose les coefficients de  $A$  tels que :*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x^k a_j = \partial_x^k a_j^\pm \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_x^k a_j = 0, \quad 1 \leq k \leq j \leq p.$$

*Si  $\lambda \notin \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$  alors  $(\lambda - A)$  est un opérateur de Fredholm.*

**Preuve.** Il s'agit à nouveau d'étudier l'équation

$$(\lambda - A)u = f$$

avec  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , qui est équivalente à

$$\tilde{A}_\lambda u = \tilde{f} \quad \text{où} \quad \tilde{f} := (a_p)^{-1} f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \tilde{A} := (a_p)^{-1} (\lambda - A)$$

est un opérateur de partie principale  $\partial_x^p$  et de coefficients de classe  $C^\infty$  en  $x$  et analytiques en  $\lambda$ .

Pour simplifier les notations, on met le tilde et l'indice  $\lambda$  désormais : on suppose que  $A$  est un opérateur différentiel de partie principale  $\partial_x^p$  et de coefficients  $C^\infty$  en  $x$  et analytiques en un paramètre  $\lambda$ ; on suppose de plus que ces coefficients ont des limites quand  $x \rightarrow +\infty$  ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $p$  (en fait l'ordre  $j$  suffit pour le coefficient de  $\partial_x^j$ ), et que les opérateurs obtenus à la limite  $A^\pm$  ont des symboles  $\mathbb{A}^\pm$  tels que  $\mathbb{A}^\pm(i\xi) \in GL_n(\mathbb{C})$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ .

On décompose  $A - \partial_x^p$  (qui est d'ordre inférieur ou égal à  $(p - 1)$ ) en trois morceaux : l'un dont les coefficients sont nuls en dehors d'un intervalle borné, et les deux autres dont les coefficients sont nuls sur une demi-droite et «petits» sur l'autre. Afin de conserver des coefficients réguliers, on fait appel à une fonction plateau  $\varphi_R$ , de classe  $C^\infty$ , valant 1 dans  $[-R, R]$  et 0 en dehors de  $[-R - 1, R + 1]$ . Ainsi

$$A - \partial_x^p = \tilde{A}_R^0 + \tilde{A}_R^+ + \tilde{A}_R^-, \quad \tilde{A}_R^0 := \varphi_R(A - \partial_x^p), \quad \tilde{A}_R^\pm := 1_{\mathbb{R}} \pm (1 - \varphi_R)(A - \partial_x^p).$$

Le nombre  $R$  sera choisi ultérieurement pour assurer que les coefficients de  $\tilde{A}_R^\pm$  sont assez petits. On notera dans la suite

$$A_R^\pm := \partial_x^p + \tilde{A}_R^\pm,$$

de sorte que l'opérateur  $A$  lui-même se décompose en :

$$A = A_R^+ + \tilde{A}_R^0 + \tilde{A}_R^- = A_R^- + \tilde{A}_R^0 + \tilde{A}_R^+.$$

La démonstration du théorème 4.18 est assez longue et comporte plusieurs étapes :

1) on construit des fonctions de Green  $G_R^-$  et  $G_R^+$  (exponentiellement décroissantes à l'infini ainsi que leurs  $(p - 1)$  premières dérivées) des opérateurs "presque à coefficients constants"  $A_R^-$  et  $A_R^+$  (pour  $R$  assez grand);

2) on en déduit des estimations ponctuelles a priori de  $u$  et de ses dérivées en fonction de  $Au$ ;

3) on utilise ces estimations pour montrer que le noyau de  $A$ , ainsi que celui de l'adjoint  $A^*$  (qui est un opérateur différentiel d'ordre  $p$  dont les opérateurs limite ont le même spectre que  $\mathbb{A}^\pm$  : c'est ici qu'intervient l'hypothèse sur la convergence vers zéro des dérivées des coefficients)

est de dimension finie (on aura pour cela recours au théorème de **Riesz** disant que si la boule unité d'un espace de **Banach** compacte alors cet espace est de dimension finie voir [2, p.92]);

4) on utilise aussi les estimations a priori pour montrer que l'image de  $A$  est fermée : la codimension finie est alors une conséquence de l'égalité

$$\text{Im } A = (\ker A^*)^\perp,$$

valable puisque  $A$  est fermé à domaine dense par la proposition 2.8.

**Étape 1.** Montrons qu'il existe  $G_R^\pm \in \mathcal{C}_b^{p-2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  et  $C_R^\pm$ , ( $\alpha_R^\pm > 0$  tels que

$$A_R^\pm u = f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_R^\pm(x, y) f(y) dy, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et pour  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ ,

$$\|\partial_x^j G_R^\pm(x, y)\| \leq C_R^\pm e^{-\alpha_R^\pm |x-y|} \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \in \mathbb{R}.$$

■

**Remarque 4.19** La démonstration est la même pour  $A_R^-$  et  $A_R^+$ . Considérons par exemple  $A_R^+$  : les coefficients de cet opérateur sont nuls pour  $x \leq R$  et admettent  $a_j^+$  comme limites en  $+\infty$ . D'après la proposition 4.14, l'opérateur limite  $A^+$  admet une fonction de Green  $G^+$ , satisfaisant

$$\|\partial_x^j G^+(x, y)\| \leq C^+ e^{-\alpha^+ |x-y|}, \text{ pour tout } x \text{ et tout } y \in \mathbb{R}$$

Si l'on note  $M_R^+ = A^+ - A_R^+$  (opérateur d'ordre inférieur ou égal à  $(p-1)$ ) comme  $A^+$  est inversible, on a

$$A_R^+ = (I - M_R^+(A^+)^{-1})A^+$$

d'où, formellement,

$$(A_R^+)^{-1} = (A^+)^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (M_R^+(A^+)^{-1})^k,$$

c'est-à-dire

$$((A_R^+)^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(x-y) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (M_R^+(A^+)^{-1})^k f \right)(y) dy.$$

Examinons les termes de la somme infinie ci-dessus. Le premier est simplement  $f(y)$ . Le second

est

$$(M_R^+(A^+)^{-1}f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (M_R^+G^+(y-z))f(z)dz,$$

où  $M_R^+$  agit sur la variable  $y$ . Notons

$$\Gamma_R^1(y, z) := M_R^+G^+(y-z)$$

(Attention, la notation dans le membre de droite est trompeuse : ce n'est pas une fonction de  $(y-z)$  car les coefficients de l'opérateur différentiel  $M_R^+$  dépendent de  $y$ !) On a d'après les estimations sur  $G^+$  et ses dérivées,

$$\|\Gamma_R^1(y, z)\| \leq C^+\varepsilon_R^+e^{-\alpha^+|y-z|},$$

où  $\varepsilon_R^+$  désigne le maximum des normes des coefficients de  $M_R^+$ . Par récurrence, on a de façon analogue

$$((M_R^+(A^+)^{-1})^k f)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_R^k(y, z)f(z)dz,$$

avec

$$\Gamma_R^k(x, y) := \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_R^1(x, z)\Gamma_R^{k-1}(z, y)dz.$$

**Lemme 4.20** Avec les notations ci-dessus, si  $C^+\varepsilon_R^+ < \alpha^+/2$  alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|\Gamma_R^k(x, y)\| \leq K(C^+\varepsilon_R^+, \alpha^+)e^{-\beta(C^+\varepsilon_R^+, \alpha^+)|x-y|},$$

$$\beta(\gamma, \alpha) := \sqrt{\alpha(\alpha - 2\gamma)}, \quad K(\gamma, \alpha) := \frac{\gamma\alpha}{\beta(\gamma, \alpha)}.$$

**Preuve.** Il suffit de vérifier que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi^k(x) \leq K(\gamma, \alpha) e^{-\beta(\gamma, \alpha)|x|}$$

où  $\psi^k$  désigne la  $k$ -ième convolée de la fonction  $x \mapsto \gamma e^{-\alpha|x|}$  avec elle-même, en supposant  $\gamma < \alpha/2$ . C'est un petit calcul utilisant la transformée de Fourier.

Par suite, le calcul formel effectué plus haut se justifie pourvu que  $R$  soit choisi assez grand,

de sorte que  $C^+ \varepsilon_R^+ < \alpha^+/2$ . On peut dans ce cas définir la fonction de Green de  $A_R^+$  par

$$G_R^+(x, y) = G^+(x - y) + \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(x - z) \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma_R^k(z, y) dz$$

D'après les estimations satisfaites par  $G^+$  et la somme des  $\Gamma_R^k$ , on a

$$\|\partial_x^j G_R^+(x, y)\| \leq C^+ e^{-\alpha^+|x-y|} + C^+ K(C^+ \varepsilon_R^+, \alpha^+) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-z|} e^{-\beta(C^+ \varepsilon_R^+, \alpha^+)|z-y|} dz,$$

ce qui, tout calcul fait (voir la petite formule dans l'appendice) et puisque  $\beta(C^+ \varepsilon_R^+, \alpha^+) < \alpha^+$ , est inférieur à

$$\left(C^+ + \frac{\alpha^+}{\varepsilon_R^+ \beta(C^+ \varepsilon_R^+, \alpha^+)}\right) e^{-\beta(C^+ \varepsilon_R^+, \alpha^+)|x-y|}$$

**Étape 2.** Montrons qu'il existe  $C > 0$ ,  $C' > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour tout  $u \in H^p(\mathbb{R})$ ,

$$\|\partial_x^j u(x)\| \leq C(e^{-\alpha|x|} \|u\|_{H^{p-1}} + \|Au\|_{L^2}) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

quel que soit  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ .

L'estimation ponctuelle se fait en deux fois, pour  $x \leq 0$  en utilisant la fonction de Green  $G_R^-$  et pour  $x \geq 0$  en utilisant la fonction de Green  $G_R^+$ . Les calculs étant identiques, voyons seulement le cas  $x \geq 0$ . Pour tout  $u \in H^p$  on a

$$A u = f \in L^2 \Leftrightarrow A_R^+ u = f - \tilde{A}_R^0 u - \tilde{A}_R^- u \in L^2,$$

et donc

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_R^+(x, y) (f - \tilde{A}_R^0 u - \tilde{A}_R^- u)(y) dy,$$

d'où (par le théorème de convergence dominée)

$$\partial_x^j u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^j G_R^+(x, y) (f - \tilde{A}_R^0 u - \tilde{A}_R^- u)(y) dy$$

et d'après l'estimation de  $\partial_x^j G_R^+$ ,

$$\|\partial_x^j u(x)\| \leq C_R^+ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^+|x-y|} (\|f(y)\| + \|(\tilde{A}_R^0 u + \tilde{A}_R^- u)(y)\|) dy.$$

Le terme en  $f$  se majore simplement par l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**. Quant à l'autre terme, puisque les coefficients de  $(\tilde{A}_R^0 + \tilde{A}_R^-)$  sont nuls sur  $[R + 1, +\infty[$ , il se réduit à

$$\int_{-\infty}^{R+1} e^{-\alpha_R^+ |x-y|} \|(\tilde{A}_R^0 u + \tilde{A}_R^- u)(y)\| dy \leq m_R \|u\|_{H^{p-1}} \int_{-\infty}^{R+1} e^{-\alpha_R^+ |x-y|} dy$$

où  $m_R$  désigne le maximum des normes des coefficients de  $(\tilde{A}_R^0 + \tilde{A}_R^-)$ . Pour  $x > R + 1$ , on a

$$\int_{-\infty}^{R+1} e^{-\alpha_R^+ |x-y|} dy = (e^{\alpha_R^+(R+1)} / \alpha_R^+) e^{-\alpha_R^+ x}$$

et cette intégrale est uniformément bornée pour  $x \in [0, R + 1]$ , donc il existe  $K_R^+ > 0$  tel que

$$\int_{-\infty}^{R+1} e^{-\alpha_R^+ |x-y|} dy \leq K_R^+ e^{-\alpha_R^+ x}$$

Ceci prouve l'Eq 4.6 pour  $x \geq 0$ , et comme on l'a dit, on traite de façon analogue le cas  $x \leq 0$ .

On en déduit évidemment l'Eq 4.6 en prenant  $\alpha = \min(\alpha_R^+, \alpha_R^-)$ , etc.

**Étape 3.** Montrons que la boule unité de  $\ker A$  est compacte. ■

**Lemme 4.21** *Si  $(u_n)$  est une suite bornée dans  $H^p$  telle que  $Au_n$  converge vers 0 dans  $L^2$  alors  $(u_n)$  admet une sous-suite convergente dans  $H^p$  vers  $u \in \ker A$ .*

**Preuve.** Rappelons que pour tout intervalle borné  $H^p(I)$  s'injecte de façon compacte dans  $H^{p-1}(I)$ . La méthode pour obtenir des résultats sur  $\mathbb{R}$  tout entier est ce qu'on appelle le procédé diagonal : pour chaque intervalle  $[-r, r]$ , la suite  $((u_n)|_{[-r, r]})_n$  est bornée dans  $H^p([-r, r])$  et donc admet une sous-suite convergente dans  $H^{p-1}([-r, r])$  ; on commence donc par extraire une sous-suite  $(u_{\psi_1(n)})$  pour intervalle  $[-1, 1]$  (avec  $\psi_1$  strictement croissante), puis successivement une sous-suite  $(u_{\varphi_r(n)})$  convergente dans  $H^{p-1}([-r, r])$  pour tout intervalle  $[-r, r]$  et  $r \in \mathbb{N}^*$ , avec  $\varphi_1 = \psi_1$  et  $\varphi_{r+1}(n) = \varphi_r(\psi_r(n))$  (avec  $\psi_r$  strictement croissante) ; par construction, la limite de  $(u_{\varphi_{r+1}(n)})|_{[-r-1, r+1]}$  coïncide avec la limite de  $(u_{\varphi_r(n)})|_{[-r, r]}$  sur  $[-r, r]$  ; ceci permet de définir une fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier par

$$u|_{[-r, r]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi_r(n)},$$



et un petit exercice montre alors que  $n \mapsto \varphi_n(n)$  est strictement croissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}([-n,n])} = 0.$$

Ceci n'est bien entendu pas suffisant pour avoir la convergence dans  $H^{p-1}(\mathbb{R})$ . C'est là qu'entre en jeu l'estimation 4.6. En effet,

$$\|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} \leq \|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}([-n,n])} + \|u_{\varphi_n(n)} - u\|_{H^{p-1}(\mathbb{R} \setminus [-n,n])},$$

où par construction le premier terme tend vers 0 et on voudrait bien montrer que le second tend aussi vers 0. Attention, ne sachant pas que  $u \in H^p$ , on ne peut pas appliquer directement l'Eq 4.6 à  $u_{\varphi_n(n)} - u$ . On va donc passer par le critère de Cauchy : pour  $m \geq n$ , on a

$$\|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} \leq \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}([-n,n])} + \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R} \setminus [-n,n])},$$

où le premier terme tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et d'après l'Eq 4.6 le second est majoré par

$$C(\|e^{-a|x|}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R} \setminus [-n,n])} \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} + \|A(u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)})\|_{L^2})$$

. Comme  $\|A(u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)})\|_{L^2}$  d'après l'hypothèse,  $\|e^{-a|x|}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R} \setminus [-n,n])}$  tend aussi vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et de plus  $\|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})}$  est borné (sinon on pourrait encore l'absorber dans le membre de gauche), on a bien

$$\lim_{m \geq n \rightarrow +\infty} \|u_{\varphi_n(n)} - u_{\varphi_m(m)}\|_{H^{p-1}(\mathbb{R})} = 0.$$

Donc la suite  $(u_{\varphi_n(n)})$  est convergente dans  $H^{p-1}(\mathbb{R})$ , et sa limite coïncide nécessairement avec  $u$ . Ceci montre déjà que  $u$  appartient à  $H^{p-1}(\mathbb{R})$ . Enfin, comme  $\partial_x^p u_{\varphi_n(n)}$  tend vers  $\partial_x^p u$  au sens des distributions et

$$\partial_x^p u_{\varphi_n(n)} = Au_{\varphi_n(n)} - \sum_{j=0}^{p-1} a_j \partial_x^j u_{\varphi_n(n)} \rightarrow \sum_{j=0}^{p-1} a_j \partial_x^j u$$

dans  $L^2$ , on en déduit que  $\partial_x^p u$  appartient à  $L^2$  et

$$\partial_x^p u = \sum_{j=0}^{p-1} a_j \partial_x^j u,$$

c'est-à-dire  $Au = 0$ .

Le fait que la boule unité de  $\ker A$  est compacte une conséquence immédiate de ce lemme : une suite  $(u_n)$  d'éléments de  $\ker A$  de norme 1 dans  $H^p$  vérifie trivialement les hypothèses. Donc  $\ker A$  est de dimension finie. D'autre part, l'opérateur adjoint  $A^*$  a toutes les propriétés de  $A$  permettant de lui appliquer ce qui précède, son noyau est aussi de dimension finie. (Attention, l'expression de  $A^*$ , qui s'obtient par intégration parties dans le membre de gauche de l'égalité  $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$ , est un peu compliquée, et fait intervenir les dérivées des coefficients de  $A$ .)

**Étape 4.** Montrons que  $\text{Im } A$  est fermé.

Soit  $w_n$  une suite d'éléments de  $H^p$  telle que  $Aw_n$  a une limite  $f \in L^2$ . On veut montrer qu'il existe  $w \in H^p$  tel que  $Aw = f$ . Pour cela, commençons par montrer que la distance dans  $H^p$  de  $w_n$  au sous-espace  $\ker A$  (qui est fermé puisque de dimension finie!) est bornée. C'est encore un conséquence du lemme 4.21. En effet, cette distance est atteinte en un point  $y_n \in \ker A$ , c'est-à-dire

$$\text{dist}(w_n, \ker A) = \|w_n - y_n\|_{H^p} \text{ avec } Ay_n = 0.$$

Supposons qu'elle ne soit pas bornée et considérons alors  $u_n = (w_n - y_n)/\|w_n - y_n\|$ . C'est une suite bornée par définition, et  $Au_n = Aw_n/\|w_n - y_n\|_{H^p}$  tend vers zéro puisque le numérateur est borné et le dénominateur tend vers l'infini. D'après le lemme 4.21 elle admet donc une sous-suite convergente vers  $u \in \ker A$ , alors que

$$\text{dist}(u_n, \ker A) = 1$$

par construction. Ceci est absurde.

Sachant que la suite  $\|w_n - y_n\|_{H^p}$  est bornée, on peut à nouveau appliquer le lemme 4.21, non pas directement à  $w_n - y_n$  (car  $A(w_n - y_n)$  ne tend pas vers zéro) mais à  $(w_n - y_n) - (w_m - y_m)$ , ce qui montre que la suite  $(w_n - y_n)$  est de Cauchy et donc convergente dans  $H^p$  vers  $w$  tel que  $Aw = f$  (puisque  $Ay_n = 0$ ).

Ceci achève la démonstration du théorème 4.18. ■

On peut maintenant démontrer le résultat plus précis :

**Théorème 4.22** *Sous les hypothèses du théorème 4.18, si  $\lambda$  n'appartient au spectre d'aucun des opérateurs à coefficients gelés*

$$A^y := \sum_{j=0}^p a_j(y) \partial_x^j, \quad y \in [-\infty, +\infty],$$

*alors  $(\lambda - A)$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.*

**Remarque 4.23** *L'hypothèse que l'on fait ici sur les opérateurs à coefficients gelés est suffisante mais pas nécessaire : en fait il suffit qu'il existe des fonctions  $\tilde{a}_j$  ayant pour limites  $a_j^\pm$  (et de dérivées tendant vers 0) telles que  $\lambda$  n'appartienne au spectre d'aucun opérateur  $A^y = \sum_{j=0}^p \tilde{a}_j(y) \partial_x^j$ . Ceci est cohérent avec la remarque suivante.*

**Remarque 4.24** *L'indice ne dépend que des opérateurs limites  $A^\pm$ . En effet, si les coefficients de deux opérateurs  $A_0$  et  $A_1$  ont les mêmes limites en  $\pm\infty$ , ils ont aussi mêmes limites que  $\theta A_1 - (1 - \theta)A_0$  quel que soit  $\theta \in [0, 1]$  et donc pour tout  $\lambda \notin \sigma(A^+) \cup \sigma(A^-)$ , l'opérateur  $(\lambda - \theta A_1 - (1 - \theta)A_0)$  est de Fredholm. Comme il dépend continûment de  $\theta$ , son indice est indépendant de  $\theta$ .*

**Preuve.** Il s'agit de calculer la différence entre la dimension du noyau de  $(\lambda - A)$  et celle du noyau de  $(\lambda - A)^*$ . On va ici utiliser l'interprétation de l'équation  $(\lambda - A)u = 0$  sous forme de système du premier ordre :

$$\frac{dU}{dx} = \mathcal{A}(x; \lambda)U, \quad (4.7)$$

où

$$\mathcal{A}(x; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & i \\ \tilde{a}_0(x, y) & \dots & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{-p}(x) \end{pmatrix}$$

et

$$\tilde{a}_j(x) = -(a_p(x))^{-1} a_j^\pm \forall j \in \{1, \dots, p-1\}, \quad \tilde{a}_0(x; \lambda) = -(a_p(x))^{-1} (a_0(x) - \lambda)$$

L'hypothèse signifie que toutes les matrices  $\mathcal{A}(x; \lambda)$  sont *hyperboliques*, c'est-à-dire n'ont pas de valeur propre imaginaire pure. Donc en particulier, les sous-espaces stables et instables de ces matrices sont de dimension constante. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve le

**Lemme 4.25** Si  $\lambda \notin \sigma(A^+) \cup \sigma(A^-)$ , l'indice de  $(\lambda - A)$  est égal à la différence entre la dimension du sous-espace instable de  $\mathcal{A}^-(\lambda)$  et celle du sous-espace instable de  $\mathcal{A}^+(\lambda)$  (ou encore à la différence des dimensions des sous-espaces stables), les matrices  $\mathcal{A}^\pm(\lambda)$  étant simplement les limites de  $\mathcal{A}(x; \lambda)$  quand  $x \rightarrow \pm\infty$ .

■

La démonstration de ce lemme repose en fait sur les deux résultats suivants. Le premier réduit la question aux opérateurs différentiels ordre 1 et le second calcule effectivement l'indice pour les opérateurs différentiels ordre 1 "asymptotiquement hyperboliques". Attention, le terme hyperbolique fait référence à la théorie des équations différentielles ordinaires et non à l'hyperbolicité au sens des équations aux dérivées partielles ; voir l'hypothèse du lemme 4.27.

**Preuve.**

**Lemme 4.26** Sous les hypothèses du théorème 4.18, l'indice de  $(\lambda - A)$  est égal à l'indice de l'opérateur différentiel ordre 1

$$\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda).$$

**Lemme 4.27** Si  $a \in C^\infty(\mathbb{R}; M_N(\mathbb{C}))$  a des limites  $a^\pm$  en  $\pm\infty$  qui sont hyperboliques, et si  $\partial_x a$  tend vers zéro en  $\pm\infty$ , alors l'opérateur  $\partial_x - a$  (qui est de Fredholm d'après le théorème 4.18) est d'indice égal à

$$\dim E_u(a^-) - \dim E_u(a^+) = \dim E_s(a^+) - \dim E_s(a^-).$$

En appliquant le lemme 4.27 à  $\alpha = \mathcal{A}(\cdot; \lambda)$  (et  $N = np$ ), le lemme 4.26 prouve effectivement le lemme 4.25. Il reste donc à prouver lemme 4.26 et 4.27.

■

**Preuve.** 4.26. Par construction de  $A$ , on a

$$(\lambda - A)u = 0, u \in H^p \Leftrightarrow (\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda))U = 0 \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u \\ \partial_x u \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_x^{p-1} u \end{pmatrix} \in H^1$$

Ceci montre que

$$\ker(\lambda - A) = P \ker(\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda)),$$

où  $P : U \mapsto U_1 = u$  et d'après la forme de  $\mathcal{A}(x; \lambda)$ ,  $P|_{\ker(\partial_x - \mathcal{A}(x; \lambda))}$  est un isomorphisme. Par suite, on a

$$\dim \ker(\lambda - A) = \dim \ker(\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda)).$$

Il reste à vérifier que

$$\dim \ker((\lambda - A)^*) = \dim \ker((\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda))^*).$$

Ces opérateurs adjoints sont définis par :

$$(\lambda - A)^* z = \bar{\lambda} z - \sum_{j=0}^p (-1)^j \partial_x^j ((a_j)^* z),$$

et

$$(\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda))^* V = -\partial_x V - \mathcal{A}(\cdot; \lambda)^* V,$$

$$\mathcal{A}(\cdot; \lambda)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & (a_0^* - \bar{\lambda}) \\ -I & . & & \vdots \\ & . & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (\tilde{a}_{p-2})^* \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -I & (\tilde{a}_{p-1})^* \end{pmatrix}$$

Si  $V \in H^1$  est solution de l'équation différentielle adjointe :

$$\frac{d}{dx} V = -\mathcal{A}(\cdot; \lambda)^* V,$$

alors en fait  $V \in H^{+\infty}$  (on voit par récurrence que  $V$  appartient à tous les  $H^p$ ) et on vérifie facilement que sa dernière composante  $V_p$ , qui appartient en particulier à  $H^p$ , est solution de  $(\lambda - A)^* V_p = 0$ . Réciproquement, si  $z \in H^p$  est solution de  $(\lambda - A)^* z = 0$ , alors la fonction  $V$  définie par  $V_p = z$  et  $V_j = (\alpha_j)^* V_p - \partial_x V_{j+1}$  pour  $j \in \{p-1, \dots, 1\}$  est dans le noyau de  $(\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda))^*$ . Cette correspondance entre  $\ker((\lambda - A)^*)$  et  $\ker((\partial_x - \mathcal{A}(\cdot; \lambda))^*)$  est bijective. D'où l'égalité entre les dimensions de ces sous-espaces. ■

**Preuve.** 4.27. D'après la remarque 4.24 , on peut supposer sans perte de généralité que  $\alpha$  est constante pour  $|x|$  assez grand. Notons  $\mathcal{R}(x, y)$  la résolvante de

$$\frac{du}{dx} = a(x)u, \quad (4.8)$$

c'est-à-dire que pour tout  $(x_0, u_0)$ ,  $u(x) := \mathcal{R}(x, x_0)u_0$  est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = a(x)u, \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Pour  $x \geq y \geq R$  assez grand, on a simplement  $\mathcal{R}(x, y) = e^{(x-y)a^+}$  et pour

$$x \leq y \leq -R, \mathcal{R}(x, y) = e^{(x-y)a^-}$$

. Les matrices  $a^\pm$  étant supposées hyperboliques, leurs sous-espaces stable et instable sont supplémentaires :

$$\mathbb{C}^N = E_s(a^\pm) \oplus E_u(a^\pm).$$

Notons  $k^\pm$  la dimension de  $E_u(a^\pm)$ . Si  $(u_1^-, \dots, u_{k^-}^-)$  est une base de  $E_u(a^-)$  alors pour tout  $y \leq -R$ ,  $(\mathcal{R}(\cdot, y)u_1^-, \dots, \mathcal{R}(\cdot, y)u_{k^-}^-)$  est une famille indépendante de solutions de l'Eq 4.8 tendant vers zéro en  $-\infty$ . Et si  $(u_{k^-+1}^-, \dots, u_N^-)$  est une base de  $E_s(a^-)$ ,  $(\mathcal{R}(\cdot, y)u_1^-, \dots, \mathcal{R}(\cdot, y)u_N^-)$  est une base de solutions de l'Eq 4.8, dont seulement les  $k^-$  premières tendent vers 0 en  $-\infty$  (les autres ayant un comportement exponentiel). De même, notons  $\mathcal{R}^*(x, y)$  la résolvante de l'équation différentielle adjointe

$$\frac{dz}{dx} = -a(x)^*z. \quad (4.9)$$

(Grâce à l'unicité des solutions, on montre facilement l'identité  $\mathcal{R}^*(x, y) = \mathcal{R}(y, x)^*$ .) Comme

$$E_s(a^+) = E_s((-a^+)^*)^\perp$$

est de dimension  $N - (N - k^+) = k^+$ , si  $(z_1^+, \dots, z_{k^+}^+)$  est une base de  $E_s((-a^+)^*)$ , alors pour tout  $y \geq R$ ,  $(\mathcal{R}(\cdot, y)z_1^+, \dots, \mathcal{R}(\cdot, y)z_{k^+}^+)$  est une famille indépendante de solutions de l' Eq 4.9 qui engendre le sous-espace des solutions tendant vers zéro en  $+\infty$ . Or, si  $u$  est solution de l'Eq 4.8 et  $z$  est solution de l' Eq 4.9 ,  $z(x) \cdot u(x)$  est indépendant de  $x$ . Par suite, si  $u$  est un

élément de  $\ker(\partial_x - \alpha)$ , c'est-à-dire une solution de l'Eq 4.8 tendant vers zéro en  $-\infty$  et en  $+\infty$ , elle doit appartenir à

$$\{u \in Vect(\mathcal{R}(\cdot, y)u_1^-, \dots, \mathcal{R}(\cdot, y)u_{k^-}^-); (\mathcal{R}^*(\cdot, y)z_i^+ \cdot u) \equiv 0, i = 1, \dots, k^+\}.$$

Inversement, un élément un élément de cet espace est nécessairement nul en  $-\infty$ , comme les  $u_j^-$ , et aussi en  $+\infty$  car pour tout  $i \in \{1; \dots; k^+\}$ ,

$$0 = \mathcal{R}^*(x, y)z_i^+ \cdot u(x) = e^{-(x-y)(a^+)^*} z_i^+ \cdot u(x)$$

pour  $x \geq y(\geq R)$  donc  $u(x) \in E_s((-a^+)^*)^\perp = E_s(a^+)$ . Ainsi on a l'égalité :

$$\ker(\partial_x - a) = \{u \in Vect(\mathcal{R}(\cdot, y)u_1^-, \dots, \mathcal{R}(\cdot, y)u_{k^-}^-); (\mathcal{R}^*(\cdot, y)z_i^+ \cdot u) \equiv 0, i = 1, \dots, k^+\}.$$

Par conséquent, si  $r$  désigne le rang de la matrice rectangulaire

$$M := ((\mathcal{R}^*(x, y)z_i^+ \cdot \mathcal{R}(x, y)u_j^-)_{i \leq k^+, j \leq k^-},$$

la dimension de  $\ker(\partial_x - a)$  est égale à  $k^- - r$ . Pour les mêmes raisons, le noyau de  $(\partial_x - \alpha)^* = -(\partial_x + a^*)$  est espace

$$\{z \in vect(\mathcal{R}^*(\cdot, y)z_1^+, \dots, \mathcal{R}^*(\cdot, y)z_{k^+}^+); (z \cdot \mathcal{R}(\cdot, y)u_j^-) \equiv 0, j = 1, \dots, k^-\}$$

et sa dimension est donc égale à  $k^+ - r$ , puisque  $r$  est aussi le rang de la matrice adjointe  $M^*$ .

On en déduit que l'indice de  $(\partial_x - \alpha)$  est égal à

$$k^- - r - (k^+ - r) = k^- - k^+.$$

■

thérème 4.22 permet de préciser la localisation du spectre essentiel de  $A$ , qui se trouve ainsi être inclus dans une réunion continue (indexée par  $y \in [-\infty, +\infty]$  de courbes algébriques). En pratique, si l'opérateur  $A$  provient de la linéarisation autour d'une solution stationnaire d'un problème d'évolution, on pourra assez facilement déterminer si ce spectre essentiel se situe dans

la partie gauche (=  $\langle\langle\text{stable}\rangle\rangle$ ) du plan complexe.

La notion importante derrière les théorèmes 4.18 et 4.22 est celle de dichotomie exponentielle. Lorsqu'elle existent, les dichotomies exponentielles permettent en outre de construire la fonction de Green de l'opérateur différentiel à coefficients variables. Si l'on note  $\mathcal{R}_\lambda(x, y)$  la résolvante de l'équation différentielle 4.7 associée à  $(\lambda - A)$ , on a le résultat suivant, que l'on peut déduire du théorème de Coppel en précisant la régularité par rapport à  $\lambda$ .

**Lemme 4.28** *Si  $\lambda \notin \sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)$ , et si la convergence des coefficients en  $\pm\infty$  est exponentiellement rapide, alors il existe des projecteurs  $\mathbb{P}_\lambda^\pm(x)$  et  $\mathbb{Q}_\lambda^\pm(x) = I - \mathbb{P}_\lambda^\pm(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^\pm$ , continus par rapport à  $x$  et analytiques par rapport à  $\lambda \in C \setminus (\sigma(A^-) \cup \sigma(A^+))$ , tels que*

$$i) \mathcal{R}_\lambda(x, y) \mathbb{P}_\lambda^\pm(y) = \mathbb{P}_\lambda^\pm(x) \mathcal{R}_\lambda(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^\pm; x \geq y, \text{ et pour tout compact}$$

$$K \subset \mathbb{C} \setminus (\sigma(A^-) \cup \sigma(A^+)),$$

il existe  $C \geq 0$  et  $\alpha > 0$  tels que pour  $x, y \in \mathbb{R}^\pm$  avec  $x \geq y$  et  $\lambda \in K$ ,

$$ii) \|\mathcal{R}_\lambda(x, y) \mathbb{P}_\lambda^\pm(y)\| \leq C e^{-\alpha(x-y)},$$

$$iii) \|\mathcal{R}_\lambda(x, y) \mathbb{Q}_\lambda^\pm(x)\| \leq C e^{-\alpha(x-y)}$$

**Théorème 4.29** *Si  $\lambda \notin \sigma(A)$ , il existe une fonction  $G_\lambda$  satisfaisant*

$$\|G_\lambda(x, y)\| \leq C e^{-\alpha|x-y|} \quad x, y \in \mathbb{R},$$

avec  $C, \alpha > 0$  localement uniformes en  $\lambda$ , telle que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$((\lambda - A)^{-1}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\lambda(x, y) f(y) dy.$$

Cette fonction est donnée par

$$G_\lambda = P \mathbb{G}_\lambda J,$$

où  $J : f \in C^n \mapsto (0, \dots, 0, -(\alpha_p)^{-1}f)^t \in \mathbb{C}^{np}$ ,  $P : U \in \mathbb{C}^{np} \mapsto U_1 \in \mathbb{C}^n$ , et  $G_\lambda$  est la fonction de Green de  $\partial_x - \mathbb{A}(\cdot; \lambda)$ . De plus,  $G_\lambda$  dépend de  $\lambda$  de façon analytique dans  $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ , et les constantes  $C$  et  $\alpha$  dans l'estimation sont localement uniformes en  $\lambda$ .

**Preuve.** Lorsque  $\lambda$  n'est pas dans le spectre de  $A$ ,  $(\lambda - A)$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0, c'est-à-dire que les entiers  $k^-$  et  $k^+$  (définis plus haut) sont égaux. De plus,  $\lambda$  n'étant



pas valeur propre, la matrice  $M$  (définie plus haut encore) est de rang  $k^- = k^+$ , ce qui implique en particulier que les espaces  $\text{Im}(P_\lambda^+(0))$  et  $\text{Im}(Q_\lambda^-(0))$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{C}^n$ . Si note  $\pi^+(\lambda)$  la projection sur  $\text{Im}(P_\lambda^+(0))$  parallèlement à  $\text{Im}(Q_\lambda^-(0))$ , et  $\pi^- = I - \pi^+$ , on montre que  $G_\lambda$  se décompose en

$$\mathbb{G}_\lambda(x, y) = 1_{x>y}\mathbb{G}_\lambda^>(x, y) - 1_{x<y}\mathbb{G}_\lambda^<(x, y),$$

chaque morceau se décomposant respectivement en

$$\mathbb{G}_\lambda^>(x, y) = 1_{x>y>0}\mathbb{G}_\lambda^{>0}(x, y) + 1_{0>x>y}\mathbb{G}_\lambda^{0>}(x, y) + 1_{x>0>y}\mathbb{G}_\lambda^{>0>}(x, y),$$

et

$$\mathbb{G}_\lambda^<(x, y) = 1_{x<y<0}\mathbb{G}_\lambda^{<0}(x, y) + 1_{0<x<y}\mathbb{G}_\lambda^{0<}(x, y) + 1_{x<0<y}\mathbb{G}_\lambda^{<0<}(x, y),$$

avec

$$\mathbb{G}_\lambda^{>0}(x, y) = \mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{P}_\lambda^+(y) + \mathcal{R}_\lambda(x, y)\pi_\lambda^+\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{Q}_\lambda^+(y),$$

$$\mathbb{G}_\lambda^{<0}(x, y) = \mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{Q}_\lambda^-(y) + \mathcal{R}_\lambda(x, y)\pi_\lambda^-\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{P}_\lambda^-(y),$$

$$\mathbb{G}_\lambda^{0>}(x, y) = -\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{P}_\lambda^-(y) + \mathcal{R}_\lambda(x, y)\pi_\lambda^-\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{P}_\lambda^-(y),$$

$$\mathbb{G}_\lambda^{0<}(x, y) = -\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{Q}_\lambda^+(y) + \mathcal{R}_\lambda(x, y)\pi_\lambda^+\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{Q}_\lambda^+(y),$$

$$\mathbb{G}_\lambda^{>0>}(x, y) = -\mathcal{R}_\lambda(x, y)\pi_\lambda^+\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{P}_\lambda^-(y),$$

$$\mathbb{G}_\lambda^{<0<}(x, y) = -\mathcal{R}_\lambda(x, y)\pi_\lambda^-\mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{Q}_\lambda^+(y).$$

Pour le montrer, on utilise encore une fois la formule de Duhamel. En effet, si

$$(\partial_x - \mathbb{A}(\cdot; \lambda))U = F,$$

avec  $U \in H^1$ , alors il existe  $U^+ \in \text{Im}(\mathbb{P}_\lambda^+(0))$  et  $U^- \in \text{Im}(\mathbb{Q}_\lambda^-(0))$  tels que, pour  $x \geq 0$ ,

$$U(x) = \mathcal{R}_\lambda(x, y)U^+ + \int_0^x \mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{P}_\lambda^+(y)F(y)dy - \int_x^{+\infty} \mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{Q}_\lambda^+(y)F(y)dy$$

et pour  $x \leq 0$ ,

$$U(x) = \mathcal{R}_\lambda(x, y)U^- + \int_0^x \mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{Q}_\lambda^-(y)F(y)dy + \int_{-\infty}^x \mathcal{R}_\lambda(x, y)\mathbb{P}_\lambda^-(y)F(y)dy.$$

La continuité de  $U$  en 0 permet d'exprimer  $U^-$  et  $U^+$  comme des projections sur  $\text{Im}(\mathbb{Q}_\lambda^-(0))$  et  $\text{Im}(\mathbb{P}_\lambda^+(0))$  d'intégrales prises entre  $-\infty$  et 0 et entre 0 et  $+\infty$ . Il suffit alors de substituer  $U^-$  et  $U^+$  par les expressions intégrales ainsi obtenues, et identifier le noyau  $\mathbb{G}_\lambda$  cas par cas, ce qui est fastidieux mais facile. ■

## 4.4 Appendice

petite formule de calcul intégral : pour  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres positifs différents,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x-z|} e^{-\beta|z-y|} dz = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} e^{-\beta|z-y|} + \frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha^2} e^{-\alpha|x-z|}$$

petite formule de calcul différentiel :

$$\begin{aligned} (z, D_x^j u) - (-1)^j (D_x^j z, u) &= D_x \left( \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k (D_x^k z, D_x^{j-1-k} u) \right) \\ &= D_x \left( \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j-1-k} (D_x^{j-1-k} z, D_x^k u) \right). \end{aligned}$$

### Théorème de représentation de Riesz

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$

Soit  $f$  une forme linéaire continue sur  $H$ , alors il existe un unique  $y \in H$  tel que :

$$\forall x \in H, f(x) = \langle y | x \rangle$$

$F := \ker f$  est fermé car  $f$  est continue.

**Existence** : Si  $F^\perp = \{0\}$ , alors  $(F^\perp)^\perp = F = H$  donc  $f = 0$  et on prend  $y = 0$ .

Sinon, soit  $w \in F^\perp$  tel que  $\|w\| = 1$ .

On a  $f(w) \neq 0$  et pour  $x \in H$ ,

$$x - \frac{f(x)}{f(w)} w \in \ker f = F$$

Donc :

$$\langle w | x - \frac{f(x)}{f(w)} w \rangle = 0$$

D'où, pour  $x \in H$ ,

$$f(x) = f(x)\langle w|w\rangle = f(w)\langle w|x\rangle = \langle y |x\rangle$$

en posant  $y = \overline{f(w)}w$ .

**Unicité** : Soit  $y_1, y_2 \in H$  tel que pour tout  $x \in H$ ,  $\langle y_1|x\rangle = f(x) = \langle y_2|x\rangle$ . Alors en prenant  $x = y_1 - y_2$ , on obtient  $\langle y_1 - y_2|y_1 - y_2\rangle = 0$ , d'où  $y_1 = y_2$ .

# Bibliographie

- [1] Edward Brian Théorie spectrale et Opérateurs différentiels
- [2] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maitrise. Masson, Paris, 1983
- [3] F.Javier THAYER Monografias de matiematica,Théorier spectrale 1982
- [4] F.Glose equation aux dérivées partielles, Octobre 2012
- [5] Sylvie benzoni-Gavage spectre des opérateurs différentiels , Janvier 2010
- [6] Sylvie benzoni-Gavage spectre des opérateurs différentiels , Janvier 2005
- [7] S. Benzoni-Gavage. Calcul différentiel et équations différentielles. Cours et exercices corrigés. Dunod, SMAI, Collection Sciences Sup, 2010.
- [8] Virigine Ehrlacher et Gbriel Stolz Analyse spectrale , 15 janvier 2014