République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Moulay Tahar de Saida

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème :

Théorie d'Arzéla-Ascoli et Applications

Présenté par : *Mohammedi Rezguania*

Soutenu le : 25/06/2014

Devant le jury composé de :

Président	Azzouz Abdelhalim	Maître de conférences B	(Univ. Saïda)
Examinateur	Abbas Hafida	Maître assistant A	(Univ. Saïda)
Examinateur	Djebbouri Djelloul	Maître assistant A	(Univ. Saïda)
Encadreur	Belmekki Mohammed	Professeur	(Univ. Saïda)

Promotion 2013/2014

Dédicace

Je dédie ce mémoire :
Ames trés chèrs parents
Qui ont sacrifié leur vie pour moi en témoignage de tous ceux que je leur dois
Et au grand amour que je leur porte .
A mes trés chers fréres et soeurs tout à son nom et sans oublier mon fiancé et sa famille.
A toute la famille ≼Mohammedi≽
A mes amies
A mes enseignants

⋇Mohammedi Rezguania ≼Khaira≽.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier ***Allah****, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.*

Je remercie Monsieur **Belmekki Mohammed** *qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidée de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de travail.*

A messieurs les membres du jury
Je remercie :

Monsieur ***Azzouz Abdelhalim*** *qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire, qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.*

Médames et messieurs les examinateurs ***Abbas Hafida*** et ***Djebbouri Djelloul****, qu'ils veuillent trouver ici l'expression l'amabilité de vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire.*

Je remercie du fond de mon coeur, mes parents qui m'ont soutenue, en couragée et motivée tout au long de mes études.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Table des matières

Introduction **9**

1 Rappels Topologiques **11**

1.1 Distances et normes 11
1.2 Convergence, continuité 12
1.2.1 Suites convergentes : 12
1.2.2 Théorème Bolzano-Weierstrass 13
1.2.3 Applications continues 15
1.3 Valeurs d'adhérence d'une suite 16
1.4 Équivalence des normes en dimension finie 16
1.5 Topologie des Espaces Métriques 18
1.5.1 Ouverts et fermés d'un espace métrique 18
1.5.2 Fonctions continue dans un espace métrique 21
1.5.3 Continuité uniforme 22
1.5.4 Adhérence 22
1.5.5 Sous-espace d'un espace métrique 24

2 Espaces Compacts **25**

2.1 Définition 25
2.2 Propriétés des ensembles compacts dans un espace métrique . . . 28
2.3 Fonctions continues sur un compact 30
2.4 Ensembles localement compacts 30
2.5 Ensembles relativement compacts 31
2.6 Produits de compact 32
2.7 Propriété de Borel-Lebesgue 32
2.8 Ensembles précompacts 34

3 Compacité en dimension finie **37**

3.1 Théorème de Riesz 37
3.2 Théorème de Heine-Borel 40

4 Compacité en dimension infinie **43**
4.1 Théorème de Riesz 43
4.2 Équicontinuité 45
4.3 Théorème d'Arzéla-Ascoli 46

5 Equation intégrale de type Hammerstein **51**
5.1 Resultats d'existence 51

Bibliography **57**

Introduction

En analyse fonctionnelle, le **théorème d'Arzéla-Ascoli**, démontré par les mathématiciens italiens Giulio Ascoli et Cesare Arzelà, caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace métrique. Il se généralise sans difficulté au cas où l'espace de départ est seulement localement compact.

Le théorème d'Arzéla-Ascoli est connu pour son nombre considérable d'applications : complétude de certains espaces fonctionnels, compacité de certains opérateurs, dépendance par rapport aux conditions initiales pour les équations différentielles.

La notion de équicontinuité a été introduite à la même époque par Ascoli (1883-1884) et Arzelà (1882-1883). Une forme faible du théorème a été prouvée par Ascoli (1883-1884), qui a établi la condition suffisante pour la compacité, et par Arzelà (1895), qui a établi la condition nécessaire et a donné la première présentation claire du résultat.

Le présent mémoire est divisé en cinq chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux définitions et aux notions préliminaires dont on fait usage dans la suite du mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la notion de compacité dans des espaces quelconques.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la compacité en dimension finie. On apporte une condition nécessaire pour qu'un espace soit de dimension finie. En fin, on donne une caractérisation des ensembles compacts dans un espace de dimension finie, qui fait l'objet du théorème de Heine-Borel.

Le chapitre quatre est consacré à la caractérisation des ensembles compacts dans des espaces de dimension infinie. Ici, on s'intéresse aus sous-ensembles de l'espace des fonction continues. Ces résultats font l'objet du théoreme d'Arzéla-Ascoli.

Dans le chapitre cinq, comme application aux notions précédentes, on étudie une équation intégrale de type Hammerstein.

A la fin du mémoire, on apporte une conclusion et des perspectives.

Chapitre 1

Rappels Topologiques

1.1 Distances et normes

Définition 1.1.1. *Une **distance** sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $d(a, b) = d(b, a)$ *pour tous* $a, b \in E$ *;*

2. $d(a, b) = 0$ *si et seulement si* $a = b$ *;*

3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ *pour tous* $a, b, c \in E$.

*Un **espace métrique** (E, d) est un ensemble E muni d'une distance d.*

Exemple 1.1.1. *(1) Sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle est définie par*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

(2) Si E est un ensemble quelconque, on définit une distance sur E en posant

$$\begin{cases} d(x, y) = 0, & si\ x = y; \\ d(x, y) = 1, & si\ \ x \neq y. \end{cases}$$

On dit que d est la distance discrète sur E.

Définition 1.1.2. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivante :

1. *$\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

2. *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$.*

3. *$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Un ***espace vectoriel normé*** *$(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$.*

Proposition 1.1.1. *Si $\|.\|$ est une norme sur un espace vectoriel E, alors on définit une distance sur E en posant $d(a, b) = \|b - a\|$. On dit que d est la distance associée à la norme $\|.\|$.*
Notons que la distance associée à une norme $\|.\|$, outre le fait d'être une distance, vérifie deux propriétés supplémentaires :

– *elle est invariante par translation*

$$(d(a + p, b + p) = d(a, b) \quad \text{pour tout } p \in E);$$

– *elle est homogéne*

$$(d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| d(a, b)).$$

La deuxiéme propriété montre en particulier que la distance discréte sur un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ n'est pas associée à une norme.

Exemple 1.1.2. *La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module est une norme sur $\mathbb{C}$.*

1.2 Convergence, continuité

1.2.1 Suites convergentes :

Définition 1.2.1. *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n) de points de E converge vers un point $a \in E$ si $d(x_n, a)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*
Autrement dit, (x_n) converge vers x si et seulement si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N, \ \ \forall n \geq N \ \ d(x_n, a) < \varepsilon$$

La définition est donc formellement identique à celle de la convergence d'une suite de nombres réels :
on remplace simplement $|x_n - a|$ *par* $d(x_n, a)$.

Remarque 1.2.1. *Dans un espace vectoriel normé, toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*

1.2.2 Théorème Bolzano-Weierstrass

Théorème 1.2.1. *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Preuve :

Soit (u_n) une suite réelle bornee par un certain réel $M \in \mathbb{R}^+$.
Nous allons construire par un procédé dichotomique deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel n, soit l'ensemble infini

$$A_n = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq b_n\}.$$

Etape initiale :
Pour $a_0 = -M$, $b_0 = M$ l'ensemble A_0 est infini car égal à $\mathbb{N}$.
Etape n :
Soit a_n et b_n tels que l'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq b_n\}$ infini et construisons a_{n+1} et a_{n+1}.
Posons $d = \frac{a_n b_n}{2}$ et considérons :

$$A^- = \{k \in \mathbb{N}/a_n \leq u_k \leq d\} \quad et \quad A^+ = \{k \in \mathbb{N}/d_n \leq u_k \leq b_n\}$$

On a

$$A_n = A^- \cup A^+$$

Comme A_n est infini, au moins l'un des deux ensembles A^- ou A^+ doit être infini.

SiA^+ est infini, on pose $a_{n+1} = d$ et $b_{n+1} = b_n$.
Sinon, A^- est nécessairement infini et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = d$.
Dans les deux cas l'ensemble

$$A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N}/a_{n+1} \leq u_k \leq b_{n+1}\} \quad est \quad infini.$$

De plus dans les deux cas

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Montrons qu'alors les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Par récurrence, sachant

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2},$$

on obtient

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a).$$

On en déduit que $b_n - a_n \to 0$,il ne reste plus qu'à étudier les monotonies de (a_n) et (b_n).

A l'étape n, sachant que $b_n - a_n \geq 0$ on a

$$a_n \leq d = \frac{a_n - b_n}{2} \leq b_n.$$

Par suite que a_{n+1} soit égale à a_n ou à d on a $a_{n+1} \geq a_n$ De même, que b_{n+1} soit égale à d b_n on a $b_{n+1} \leq b_n$.
Ainsi (a_n) est croissante et b_n est décroissante.

Finalement les suites (a_n) et (b_n) sont bien adjacentes, elles convergent donc vers une même limite c.
De plus on a la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{k \in \mathbb{N} / a_n \leq u_k \leq b_n\}$$

est un ensemble infini.

Nous allons maintenant pouvoir construire une suite extraite de (u_n) qui soit convergente :
Définissons par récurrence, une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la manière suivante :
On pose $\varphi(0) = 0$, puis lorsque $\varphi(n)$ est défini, on pose

$$\varphi(n+1) = \min(A_{n+1} \setminus \{0, 1, 2, ..., \varphi(n)\}).$$

Comme l'ensemble A_{n+1}est infini, l'ensemble $A_{n+1} \setminus \{0, 1, 2, ..., \varphi(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et par suite, elle admet bien un plus petit élément.
Par construction on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \varphi(n+1) > \varphi(n).$$

l'application φ est donc strictement croissante.
Considérons maintenant la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$.
Par construction de φ, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \in A_n$$

c'est à dire

$$a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n.$$

Comme (a_n) et (b_n) convergent vers c, il en est de même de $(u_{\varphi(n)})$.

Finalement, nous avons extrait de la suite (u_n) une sous-suite convergente.

1.2.3 Applications continues

Définition 1.2.2. *Soient E et F deux espaces métriques.*
On dit qu'une application $f : E \to F$ est ***continue*** *en un point $a \in E$ si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a, autrement dit si la propriété suivante a lieu :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ d(x, a) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

On dit que l'application f est ***continue*** *sur E si elle est continue en tout point de E.*

Proposition 1.2.1. *Soient E, F deux espaces métriques, et soit $a \in E$. Pour une application $f : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en a ;*

2. *pour toute suite $(x_n) \subseteq E$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Preuve :
supposons que (1) ne soit pas vérifiée. Cela signifie qu'il existe un nombre $\varepsilon_0 > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $x(\delta) \in E$ tel que

$$d(x(\delta), a) < \delta \ \text{ et } \ d(f(x(\delta), f(a)) \geq \varepsilon_0.$$

En posant $\delta_n = 2^n$ et $x_n = x(\delta_n)$, on obtient une suite (x_n) qui converge vers a et telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$. Ainsi, (2) n'est pas vérifiée. On a donc montré "par contraposée" que (2) entraîne (1).

1.3 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.3.1. *Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (E, d). On dit que a est **valeur d'adhérence** de la suite (x_n) si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad d(x_n, a) < \varepsilon$$

Proposition 1.3.1. *Soit (x_n) une suite de (E, d) et $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *a est une valeur d'adhérence de (x_n)*

2. *Il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers a*

3. *$a \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geq p\}}$.*

4. *a est point d'accumulation de $\{x_n,\ n \in N\}$ ou bien l'ensemble $n \in N,\ x_n = a$ est infini.*

Corollaire 1.3.1. *L'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé.*

Proposition 1.3.2. *Si (x_n) est une suite convergente, alors sa limite est l'unique valeur d'adhérence de (x_n).*

1.4 Équivalence des normes en dimension finie

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1.4.1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve :
Comme tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on peut supposer que le corps de base est $\mathbb{R}$. Soit donc E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et fixons en une base $(e_1, ..., e_d)$. On identifie E à $\mathbb{R}^d$ via cette base, ce qui permet de considérer la norme $\|.\|_\infty$ sur E.
On va montrer que toute norme sur E est équivalente à $\|.\|_\infty$. Dans la suite, on fixe une norme $\|.\|$ sur E.
Si $x = \sum_1^d x(i)e_i \in E$, alors

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{d} \|x(i)e_i\| = \sum_{i=1}^{d} |x(i)| \|e_i\|$$

On en déduit
$$\|x\| \leq \mathcal{C}\|x\|_\infty$$
où $\mathcal{C} = \sum_1^d \|e_i\|$.
Il reste donc à trouver une deuxième constante $\mathcal{C}$ telle que
$$\|.\| \geq \mathcal{C}\|.\|_\infty.$$

On aura besoin pour cela de deux lemmes.

Lemme 1.4.1. *L'application $\|.\|$ est continue sur $(E, \|.\|_\infty)$.*

Preuve :
Pour $x, y \in E$, on a
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \mathcal{C}\|x - y\|_\infty,$$
d'où le résultat.

Lemme 1.4.2. *Toute suite bornée dans $(E, \|.\|_\infty)$ possède une sous-suite convergente.*

Preuve :
Soit (x_n) une suite bornée dans $(E, \|.\|_\infty)$, et écrivons $x_n = \sum_1^d x_n(i)e_i$. Par définition de la norme $\|.\|_\infty$, chaque suite $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de **Bolzano-Weierstrass**, la suite (x_n) possède une sous-suite (x'_n) telle que $(x'_n(1))$ converge. De même, (x'_n) possède une sous-suite (x''_n) telle que $(x''_n(2))$ converge ; alors $(x''_n(1))$ converge également, en tant que sous-suite de $(x'_n(1))$, donc $(x''_n(i))$ converge pour $i = 1, 2$.
En répétant d fois ce raisonnement, on voit qu'on aboutit à une sous-suite $(\tilde{x}_n)$ de (x_n) telle que $(\tilde{x}_n(i))$ converge pour $i = 1, ..., d$.
Ainsi $(\tilde{x}_n)$ converge "coordonnée par coordonnée", autrement dit converge dans $(E, \|.\|_\infty)$.

On peut maintenant achever la preuve du Théorème .
Posons
$$S_\infty = \{x \in E; \|x\|_\infty = 1\}, \text{ et } \mathcal{C} = \inf\{\|x\|; x \in S_\infty\}.$$

Par définition, on a
$$\left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \geq \mathcal{C} \quad \textit{pour tout} \quad x \neq 0,$$

d'où

$$\|x\| \geq \mathcal{C}\|x\|_\infty,$$

inégalité évidemment encore valable pour $x = 0$.
Il reste donc à montrer que la constante $\mathcal{C}$ est strictement positive.
Par définition de $\mathcal{C}$, on peut trouver une suite $(x_n) \subseteq S_\infty$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \mathcal{C}.$$

D'après le Lemme 1.4.2, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que la suite (x_n) converge pour la norme $\|.\|_\infty$ vers un certain $x \in E$. Comme les deux normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont continues sur $(E, \|.\|_\infty)$ (d'après le lemme 1.4.1), on en déduit d'une part

$$\|x\|_\infty = \lim \|x_n\|_\infty = 1,$$

donc $x \neq 0$, et d'autre part

$$\|x\| = \lim \|x_n\| = \mathcal{C},$$

donc $\mathcal{C} \neq 0$ puisque $x \neq 0$ et que $\|.\|$ est une norme.

Corollaire 1.4.1. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

1.5 Topologie des Espaces Métriques

1.5.1 Ouverts et fermés d'un espace métrique

Dans toute cette section, (E, d) est un espace métrique.

Définition 1.5.1. *Soit $a \in E$, et soit $r \geq 0$. La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble*

$$B(a, r) := \{x \in E; \quad d(x, a) < r\}.$$

La boule fermée correspondante est l'ensemble

$$B_f(a, r) := \{x \in E; \quad d(x, a) \leq r\}.$$

Exemple 1.5.1. *(1) Dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte $B(a,r)$ est l'intervalle $]a-r, a+r[$; la boule fermée est l'intervalle $[a-r, a+r]$.*
(2) Dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle, les boules sont des disques.
(3) Dans un espace métrique discret, les boules de rayon $\frac{1}{2}$ sont les singletons ; les boules de rayon $\frac{1}{3}$ également. Il n'y a qu'une seule boule de rayon 2 : l'espace tout entier.

Définition 1.5.2. *On dit qu'un ensemble $O \subseteq E$ est un ouvert de (E,d) s'il vérifie la propriété suivante :*
pour tout point $x \in O$, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq O$.

Exemple 1.5.2. *(1) Dans $\mathbb{R}$, un intervalle est un ouvert si et seulement c'est un "intervalle ouvert".*
2) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne ou de la norme $\|.\|_\infty$, le demi-plan $\{(x,y); x > 0\}$ est un ouvert.
(3) Dans un espace métrique discret, tous les ensembles sont ouverts. En effet, si $A \subseteq E$ et si $x \in A$, alors

$$B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A.$$

Proposition 1.5.1. *Toute boule ouverte est un ensemble ouvert.*

Preuve :
Soit $O = B(a,r)$ une boule ouverte, et soit x un point quelconque de B. On a $d(x,a) < r$ donc on peut trouver

$$\varepsilon > 0 \text{ tel que } \varepsilon + d(x,a) < r.$$

D'aprés l'inégalité triangulaire, on a alors

$$B(x,\varepsilon) \subseteq B(a,r) = O.$$

Comme x est un point quelconque de O, cela prouve que O est un ouvert de E.

Proposition 1.5.2. *La famille des ouverts de (E,d) vérifie les propriétés suivantes.*

1. *ϕ et E sont des ouverts de E.*

2. *Une réunion quelconque d'ouverts est encore un ouvert.*

3. *Une intersection finie d'ouverts est encore un ouvert.*

Preuve :
La partie (1) est évidente, et la partie (2) découle directement des définitions. Pour démontrer (3), il sufft de montrer que l'intersection de deux ouverts de E est encore un ouvert :
on procéde ensuite par récurrence. Soient donc O_1 et O_2 deux ouverts de E. Si $x \in O_1 \cap O_2$, on peut trouver

$$r_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad B(x, r_1) \subseteq O_1,$$

et

$$r_2 > 0 \text{ tel que } \; B(x, r_2) \subseteq O_2.$$

Si on pose $r = \min(r_1, r_2)$, alors

$$r > 0 \quad \text{et} \quad B(x, r) \subseteq O_1 \cap O_2.$$

Cela prouve que $O_1 \cap O_2$ est un ouvert de E.

Corollaire 1.5.1. *Un ensemble $O \subseteq E$ est ouvert pour la distance d si et seulement si O est une réunion de boules ouvertes.*

Définition 1.5.3. *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $C \subseteq E$ est fermé dans E s'il vérifie la propriété suivante :*
chaque fois qu'une suite (x_n) d'éléments de C converge dans E, sa limite appartient encore à C.

Exemple 1.5.3. *Dans $\mathbb{R}$, un intervalle est fermé si et seulement si c'est un intervalle fermé.*

Exemple 1.5.4. *Toute boule fermée est un ensemble fermé. En particulier, les singletons sont des ensembles fermés.*

Preuve :
Si (x_n) converge vers x et $d(x_n, a) \leq r$ pour tout n, alors, par continuité de l'application $u \mapsto d(u, a)$, on obtient $d(x, a) \leq r$ en passant à la limite. Cela prouve qu'une boule fermée $B_f(a, r)$ est un ensemble fermé.
Enfin, un singleton est une boule fermée de rayon $r = 0$.

Proposition 1.5.3. *Un ensemble $C \subseteq E$ est fermé si et seulement si son complémentaire $E \setminus C$ est ouvert.*

Preuve :
Supposons que $E \setminus C$ soit ouvert dans E. Soit $(x_n) \subseteq C$ une suite convergeant vers un point $a \in E$, et supposons que a n'appartienne pas à C. Comme $E \setminus C$ est ouvert, on peut trouver

$$r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(a, r) \in E \setminus C;$$

mais comme (x_n) converge vers a, on peut trouver un entier n tel que

$$x_n \in B(a, r),$$

ce qui contredit $x_n \in C$. On a donc montré par l'absurde que si $E \setminus C$ est ouvert, alors C est fermé.
Inversement, supposons que $E \setminus C$ ne soit pas ouvert dans E. On peut alors trouver un point $a \in E \setminus C$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $r > 0$, il existe un point $x(r) \in B(a, r)$ qui n'appartient pas à $E \setminus C$, autrement dit un point

$$x(r) \in B(a, r) \cap C.$$

En prenant $r_n = 2^{-n}$, on obtient une suite $(x_n) \subseteq C$ qui converge vers a. Comme a n'appartient pas à C, cela montre que C n'est pas fermé. On a donc montré que si C est fermé, alors $E \setminus C$ est ouvert.

Corollaire 1.5.2. *Une intersection quelconque de fermés est encore un fermé ; une réunion finie de fermés est encore un fermé.*

Définition 1.5.4. ***(Ensemble Borné)*** *Soit E un espace normé.*
Un sous-ensemble $A \subset E$ est dit borné si

$$\sup\{\|x\| \;/\; x \in A\} < +\infty.$$

On dit que l'application f est bornée sur B si et seulement si $f(B)$ est borné.

1.5.2 Fonctions continue dans un espace métrique

Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques.

Définition 1.5.5. *Soit P une partie de E et $f : P \to F$ une fonction.*
1. La fonction f est continue en $x_0 \in P$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(x_0,\ \varepsilon) > 0,\ \forall x \in P,\ d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon.$$

Il est important de noter que ici δ dépend de x_0.
2. La fonction f est dite continue sur P si elle est continue en tout point de P.

Proposition 1.5.4. *Soit $f : P \to F$ une fonction. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
1. f est continue en a.
2. Pour toute suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de P ayant pour limite a, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a).$$

Proposition 1.5.5. *Soit $f : P \to F$ une fonction. Alors :*
1. l'image réciproque par f d'un ouvert de F est un ouvert de E ;
2. l'image réciproque par f d'un fermé de F est un fermé de E ;

1.5.3 Continuité uniforme

Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques.

Définition 1.5.6. *On dit qu'une application $f : E \to F$ entre deux espaces métriques est uniformément continue si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \in E \ \ d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Autrement dit, f est uniformément continue si elle est continue et si, pour $\varepsilon > 0$ donné, le δ de continuité en un point $x \in E$ ne dépend pas du point considéré, mais seulement de ε.

L'uniforme continuité est en général une propriété strictement plus forte que la continuité : par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas uniformément continue.

1.5.4 Adhérence

Dans cette section, (E, d) est un espace métrique.

Définition 1.5.7. *On dit qu'un point $x \in E$ est adhérent à un ensemble $A \subseteq E$ si toute boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ rencontre A, autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point $a \in A$ tel que $d(x,a) < \varepsilon$. L'ensemble de tous les points de E adhérents à une partie A de E est appelé l'adhérence de A dans E, et se note $\overline{A}$. Par définition, on a donc $A \subseteq \overline{A}$.*

Exemple 1.5.5. *(1) Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence d'un intervalle est l'intervalle fermé correspondant.*
(2) Dans $(\mathbb{R}^2; \|.\|_\infty)$, l'adhérence du demi-plan $\{(x,y); x > 0\}$ est le demi-plan $\{(x,y); x > 0\}$.
(3) Si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors la borne supérieure de A n'appartient pas nécessairement à A, mais elle appartient toujours à $\overline{A}$.

Proposition 1.5.6. *Soit A une partie d'un espace métrique E. Pour un point $x \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *x est adhérent à A ;*
2. *$d(x,A) = 0$;*
3. *x est la limite d'une suite de points de A.*

Preuve : Les propriétés (1) et (2) sont équivalentes par définition de l'adhérence. L'implication"(3) $\Rightarrow$ (1)" découle directement des définitions. Inversement, si x est adhérent à A, alors, pour $\varepsilon_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un point $x_n \in A$ tel que $d(x_n,x) < 2^{-n}$: cela prouve (3).

Corollaire 1.5.3. *Un ensemble $C \subseteq E$ est fermé si et seulement si $\overline{C} = C$.*

Preuve : D'aprés (3), un ensemble C est fermè si et seulement si $\overline{C} \subseteq C$, d'où le résultat puisqu'on a toujours $C \subseteq \overline{C}$.

Définition 1.5.8. ***(Ensemble dense)*** *Un sous-ensemble A de E est dit* ***dense*** *dans E si son adhérence est egale à E tout entier.*
i.e.

$$\overline{A} = E$$

1.5.5 Sous-espace d'un espace métrique

Si (E,d) est un espace métrique et si A est une partie de E, alors (A,d) est également un espace métrique. On dit que (A,d) est un sous-espace métrique de l'espace métrique (E,d). La topologie de (A,d) s'appelle la topologie induite sur A par la distance d.
Il est important de remarquer qu'un ouvert de A n'est pas nécessairement un ouvert de E. Par exemple, A lui-même est un ouvert de A, mais n'a aucune raison d'être ouvert dans E. Le résultat suivant caractérise complètement les ouverts pour la topologie induite.

Proposition 1.5.7. *Soit (E,d) un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Un ensemble $\Omega \subseteq A$ est un ouvert de A pour la topologie induite si et seulement si est de la forme $\Omega = O \cap A$, où O est un ouvert de E.*

Preuve : L'injection canonique $i : (A,d) \to (E,d)$ est continue (car c'est une isométrie), donc $O \cap A = i^{-1}(O)$ est ouvert dans A pour tout ouvert $A \subseteq E$. Inversement, une boule ouverte de (A,d) est par définition un ensemble du type $B(a,r) \cap A$, où $a \in A$, donc tout ouvert de (A,d), qui est réunion de boules ouvertes de (A,d), est de la forme $O \cap A$, où O est une réunion de boules ouvertes de E, c'est à dire un ouvert de E.

Corollaire 1.5.4. *Un ensemble $\Gamma \subseteq A$ est un fermé de A si et seulement si $\Gamma = C \cap A$, où C est un fermé de E.*

Par exemple, l'intervalle $]0,1]$ est un ouvert de $[-1,1]$ car $]0,1] =]0,+\infty[\cap [-1,1]$. L'intervalle $]-1,0]$ est à la fois ouvert et fermé dans $]-1,0] \cup [1,2]$.

Proposition 1.5.8. *Soit A un sous-espace d'un espace métrique (E,d). Si B est une partie de A, alors l'adhérence de B dans A est égale à $\overline{B} \cap A$, où $\overline{B}$ est l'adhérence de B dans E.*

Chapitre 2

Espaces Compacts

2.1 Définition

Définition 2.1.1. *soit E un ensemble et soit A une partie de E. Un* ***recouvrement*** *de A est une famille $(U_i)_{i\in I}$ de parties de E vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Remarque 2.1.1. *Un sous-recouvrement d'un recouvrement $\{U_i;\ i \in I\}$ est une partie $\{U_i;\ i \in J\}$ où $J \subset I$.*

Exemple 2.1.1.

1. *$(U_a)_{a\in A}$ avec $U_a = \{a\}$ est recouvrement de A.*

2. *Si $E = \mathbb{R}$, alors $U_n = [-n, n], n \in \mathbb{N}$ ou bien $V_n =]-n, n], n \in \mathbb{N}$ sont des recouvrement de E.*

3. *$A =]0, 1[$. Alors $A_n =]0, 1 - \frac{1}{n}[, n \geq 2$ est recouvrement ouvert de A.*

Définition 2.1.2. *On dit qu'un espace E est* ***compact*** *si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Exemple 2.1.2.

1. *$\mathbb{R}$ n'est pas compact.*
   car : $A_n =]-n, n[, n \in \mathbb{N}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, mais tout sous-recouvrement est de la forme :
   $\{]-n_1, n_1[,]-n_2, n_2[, ...,]-n_r, n_r[\}$ dont la réunion est $]-N, N[$.
   où
   $$N = \max(n_1, n_2, ..., n_r) = \max_{1\leq i\leq r} n_i \quad et \quad \mathbb{R} \not\subset]-N, N[.$$

2. *Tout espace topologique fini est compact.*
   En effet :
   si E est fini alors $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $(U_i)_{i\in I}$ est recouvrement ouvert de E, i.e :
   $$E \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$
   Alors $\forall x \in E$, il existe $i_x \in I$ tele que $x \in U_{i_x}$.
   L'ensemble $\{i_x : x \in E\} = J \subset I$ est fini et la famille $\{U_i\}_{i\in I}$ recouvre E.

Corollaire 2.1.1. *Soit E une espace topologique compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties fermés non-vides de E.*
Alors
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$$

Théorème 2.1.1. *(Heine-Borel-Lebsegue)*
Tout intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.

Preuve :
Soit $\mathcal{U} = \{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$
i.e : $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha\in A} u_\alpha$
posons :
$$E = \{r \in [a, b]/[a, r] \text{ est recouvert par un nombre fini d'ensemble } u_\alpha\}$$
-L'ensemble E est non-vide puisque $a \in E$ ($a \in [a, b]$ et $[a, a] = \{a\}$ est recouvert par un u_α).

-L'ensemble E est aussi majoré par d . ($E \in [a, b]$).
Donc E est une parties non-vide majoré de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure.
Soit $c = \sup E$.
D'où $c \leq b$.

-Si on arrive à montrer que $c \in E$, i.e : $[a, c]$ est recouvert par un nompre fini d'ensemble u_α de U.
Comme $c \in [a, b]$, alors
$$\exists B \in A \text{ tel que } c \in u_B$$
Mais, $u_B$est ouvert donc,
$$\exists \varepsilon > 0,]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset u_B$$

De plus pâr la définition de la borne supérieure

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r \in E \quad r - \varepsilon \leq r \leq c$$

comme $r \in E$, alors $[a, r]$ est recouvert par un nombre fini d'ensemble

$$u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, ..., u_{\alpha_n} \in U.$$

Ainsi la famille $\{u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, ..., u_{\alpha_n}, u_B\}$ recouvre $[a, c]$.
car :

$$\begin{aligned} [a, c] &= [a, r] \cup [r, c] \\ &\subset [a, r] \cup]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\\ &\subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} \cup u_B}_{\text{réunion fini}} \end{aligned}$$

D'où $c \in E$.
afin d'achever la démonstration, montrons que $c = b$
Supposons donc $c < b$.

donc on peut choisir s tel que $\begin{cases} c < s < b, \\ c < s < c + \varepsilon, \end{cases}$

i.e : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, s$ tel que $\begin{cases} c < s < b, \\ c < s < c + \varepsilon, \end{cases}$

Alors :

$$\begin{aligned} [a, s] &= [a, c] \cup [c, s] \subset \bigcup_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} \cup u_B \cup]c - \varepsilon, c + \varepsilon[. \\ &\subset \bigcup_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} \cup u_B \cup u_B. \\ &\subset \bigcup_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} \cup u_B \end{aligned}$$

Donc $[a, s]$ est recovert par la réunion fini $\bigcup_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} \cup u_B$.

Donc $s \in E$. mais ceci contre dit $\sup E = c$ (caron aurit $s \leq c$).

Ainsi $b = c$ et donc $[a, b]$ est compact.

2.2 Propriétés des ensembles compacts dans un espace métrique

Définition 2.2.1. *Soit $M = (E, d)$ un espace métrique.*
soit C une partie de E. C est dit bornée si elle est contenue dans au moins une boule (de rayou fini).

Proposition 2.2.1. *Tout sous-espace compact C d'un espace métrique M est borné.*

Preuve :
Soit $a \in M$. Alors

$$\forall x \in C, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad d(x, a) < n.$$

D'où :

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B(a, n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n(a)$$

Donc : $\{B(a, n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un recouvrement de C.
or : C est compact.
Donc : $C \subset \bigcup_{n=1}^{p} B(a, n_r)$
Mais :

$$\bigcup_{n=1}^{p} B(a, n_r) = B(a, N) \quad \text{où} \quad N = \max(n_1, n_2, ..., n_p)$$

Ainsi :

$$C \subset B_N(a)$$

et par suit : C est borné.

Proposition 2.2.2. *Soit (E, d) un espace métrique. On suppose que toute suite décroissante de fermés non vides de E a une intersection non vide. Alors E est compact.*

Preuve :
Soit (x_n) une suite de points de E, et notons $vad((x_n))$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). On vérifie sans diffculté majeure qu'on a

$$vad((x_n)) = \bigcap_{n} \overline{\{x_p; p \geq n\}}.$$

Si on pose $F_n = \overline{\{x_p; p \geq n\}}$, alors les F_n sont des fermés non vides de E et la suite (F_n) est décroissante. Par conséquent, $vad((x_n)) = \bigcap_n F_n$ est non vide, ce qui est le résultat souhaité.

Proposition 2.2.3. *Soit (E, d) un espace métrique.*
- Si E est compact et si A est une partie fermée de E, A est compacte.
- Si A est une partie compacte de E, A est fermée et bornée.

Preuve :
Soit (x_n) une suite d'éléments de A. C'est une suite d'éléments de E.
Comme E est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in E$. Mais, comme A est fermé, $x \in A$,ce qui prouve que de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A, et donc que A est une partie compacte.
-Montrons que A est fermée.
Soit (x_n) une suite de A qui converge vers $x \in E$. Il faut montrer que $x \in A$. Comme A est compacte, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $y \in A$. Comme une sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, on en déduit que $x = y$, et donc que $x \in A$.

-Montrons que A est bornée.
Soit $x_0 \in E$. On a

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, n).$$

En effet, si $x \in E$ et si $n > d(x_0, x)$, on a $x \in B(x_0, n)$. Comme E est compact, il existe $n_1, ..., n_p$ tels que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_0, n_i).$$

Posons $N = \max\{n_1, ..., n_p\}$. On a donc

$$E \subset B(x_0, N),$$

ce qui montre que E est borné.

Exemple 2.2.1. *Tout espace métrique fini est compact.*
Soit $E = \{x_1, ..., x_n\}$ un ensemble fini et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E. Pour

tout $j \in \{1, ..., n\}$, il existe $i_j \in U_i$ tel que $x_j \in U_{i_j}$, et donc

$$E = \bigcup_{1=j}^{n} U_{i_j}.$$

2.3 Fonctions continues sur un compact

Théorème 2.3.1. ***(Image continue d'un compact)***
Soit K un espace métrique compact, et soit F un espace métrique. Si $f : K \to F$ est continue, alors $f(K)$ est un compact de F.

Preuve :
Soit (y_n) une suite de points de $f(K)$. Pour tout $n \in N$, choisissons un point $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme K est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergeant vers un point $x \in K$. Comme f est continue, $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ tend vers $y := f(x)$ quand k tend vers l'infini. Ainsi, y est une valeur d'adhérence de (y_n) appartenant à $f(K)$. Cela termine la démonstration.

Théorème 2.3.2. ***(uniformément continue)***
Soient K et F deux espaces métriques. Si K est compact, alors toute application continue $f : K \to F$ est uniformément continue.

Preuve :
Supposons K compact, et fixons $f : K \to F$ continue. Par l'absurde, supposons que f ne soit pas uniformément continue. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(x_n), (y_n) \subseteq K$ tels que $d(x_n, y_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, mais $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme K est compact, on peut supposer que la suite (x_n) converge vers un point $a \in K$. Alors (y_n) converge également vers a puisque $d(x_n, y_n)$ tend vers 0. Comme f est continue en a, les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ doivent converger toutes les deux vers $f(a)$, et donc $d(f(x_n), f(y_n))$ doit tendre vers 0, ce qui contredit l'hypothè se faite.

2.4 Ensembles localement compacts

Les espaces $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$... ne sont pas compact.

Définition 2.4.1. *Un espace topologique est dit* ***localement compact*** *s'il est séparé et si chacun de ses points admet un voisinage compact.*
c'est-à-dire :

$$E \text{ est localement compact si et seulement si } \forall x \in E,\ \exists v \in \mathcal{V}(x)/v \text{ compact.}$$

Exemple 2.4.1.
1. *Un espace topologique compact E est localement compact car E est un voisinage compact de chacun de ses point.*

2. *$\mathbb{R}$ est localement compact car pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intervalle $[x-1, x+1]$ est un voisinage compact.*
   plus générale : $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$sont localement compact (car les boules fermées sont compact).

Propriétés 2.4.1. *Les espace localement compacts ont les propriétés suivantes :*

1. *Un partie fermée d'un espace topologique localement compact est localement compact.*

2. *Un produit fini d'espacce localement compact est localement compact.*

3. *L'intersection de deux sous-espace localement compact dans un espace de sépare est localement compact*

On fait les remarques suivantes :

Remarque 2.4.1.
1. *La réunion de deux partie localement compact n'est pas en général localement compact.*

2. *Une intersection quelconque de parties localement compacts n'est pas toujours localement compact.*

3. *Un produit quelconque d'espaces localement compacts n'est en général pas localement compact.*

2.5 Ensembles relativement compacts

Définition 2.5.1. *Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble $A \subseteq E$ est* ***relativement compact*** *dans E si $\overline{A}$ est un compact de E.*

Par exemple, l'intervalle $]0, 1[$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$, mais il n'est pas compact.

2.6 Produits de compact

Proposition 2.6.1. *(Produits finis)*
Si $E_1, ..., E_k$ sont des espaces métriques compacts, alors l'espace produit $E = E_1 \times .... \times E_k$ est compact.

Preuve :
Par récurrence, il suffit de traiter le cas $k = 2$. Soit (x_n) une suite de points de $E = E_1 \times E_2$; on écrit $x_n = (x_n(1), x_n(2))$. Comme E_1 est compact, la suite $(x_n(1))$ possède une sous-suite convergente : on peut donc trouver une sous-suite (x'_n) de (x_n) telle que la suite $(x'_n(1))$ converge dans E_1. De même, comme E_2 est compact, on peut trouver une sous-suite (x''_n) de (x'_n)) telle que la suite $(x''_n(2))$ converge dans E_1 ; alors la suite $(x''_n(1))$ converge dans E_1 car elle est extraite de $(x'_n(1))$.
Ainsi, la suite (x''_n) converge "coordonnée par coordonnée", autrement dit converge dans l'espace produit E.

2.7 Propriété de Borel-Lebesgue

Soit E un espace métrique. On dit qu'une famille $(O_i)_{i\in I}$ de parties de E est un recouvrement de E si $\bigcup_{i\in I} O_i = E$. Un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ est dit ouvert si tous les O_i sont des ouverts de E.
Un sous-recouvrement d'un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de la forme $(O_i)_{i\in J}$, où $J \subseteq I$. On dit qu'un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ est fini si l'ensemble d'indices I est fini.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.7.1. *Pour un espace métrique E, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *E est compact.*

2. *Tout recouvrement ouvert de E possède un sous-recouvrement fini.*

La propriété (2) porte le nom de **propriété de Borel-Lebesgue**. Il faut noter que cette propriété est définie uniquement en termes de la topologie de E.

Cela permet de donner un sens à la notion de compacité dans un espace topologique non nécessairement métrique. Il est très instructif de s'astreindre àdemontrer certains résultats des sections précédentes (compacts et fermés, image continue d'un compact, produit fini de compacts) en utilisant uniquement la propriété de Borel-Lebesgue.

Preuve :

Preuve de l'implication "(2) entraîne (1)". Supposons la propriété (2) vérifiée. D'après 2.2.2, pour montrer que E est compact, il suffit de montrer que si (F_n) est une suite décroissante de fermés de E telle que $\bigcap_n F_n = \phi$, alors l'un des F_n est vide ; fixons une telle suite (F_n). Posons $O_n = E\ F_n$.

Comme $\bigcap_n F_n = \phi$, on a $\bigcup_n O_n = E$; par conséquent, la famille $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de E. D'après (2), on peut trouver un ensemble fini $J \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{n\in j} O_n = E$. Comme de plus la suite (O_n) est croissante, on a alors $O_N = E$, où N est le plus grand élément de J. Ainsi, $F_N = \phi$, ce qui termine la démonstration.

Pour la preuve de la deuxiéme implication, on a besoin de deux lemmes.

Lemme 2.7.1. *(lemme de Lebesgue)*

On suppose E compact. Si $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E, alors il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que la propriété suivante ait lieu :
tout ensemble $A \subseteq E$ de diamètre inférieur à ε est contenu dans l'un des O_i.

Preuve :

On raisonne par l'absurde. Si un tel ε n'existe pas, alors on peut, pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver un ensemble $A_n \subseteq E$ de diamètre inférieur à 2^{-n} et qui ne soit contenu dans aucun O_i. Choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ un point $x_n \in A_n$. Comme E est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x \in E$. Comme les O_i recouvrent E, on peut trouver $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est ouvert, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subseteq O_{i_0}$. Pour k assez grand, on a $x_{n_k} \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ et $diam(A_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $A_{n_k} \subseteq B(x,\varepsilon) \in O_{i_0}$: cela contredit le choix de A_{n_k} .

Lemme 2.7.2. *Si (E,d) est compact, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.*

Preuve :

Fixons $\varepsilon > 0$. On raisonne par contraposée en supposant que la conclusion n'est

pas vraie. Soit $x_0 \in E$: la boule $B(x_0, \varepsilon)$ ne recouvre pas E, donc on peut trouver un point $x_1 \in E\ B(x_0, \varepsilon)$, autrement dit un point $x_1 \in E$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \varepsilon$. Par hypothèse, $B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)$ ne recouvre pas E, donc on peut trouver un point $x_2 \in E\ (B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon))$, autrement dit vérifiant $d(x_2, x_i) \geq \varepsilon$ pour tout $i < 2$. Par récurrence, on voit qu'on peut construire une suite $(x_n) \subseteq E$ telle que $d(x_n, x_i) \geq \varepsilon$ si $i < n$. On a ainsi $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon$ dès que $p \neq q$, ce qui montre que la suite (x_n) ne possède aucune sous-suite convergente. Par conséquent, E n'est pas compact.
Preuve de l'implication "(1) entraîne (2)". Supposons E compact, et soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E. D'après le lemme 1, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que tout ensemble de diamètre inférieur à 3ε est contenu dans l'un des O_i, et d'après le lemme 2, on peut trouver des boules ouvertes $B_1, ..., B_m$ de rayon ε telles que $E = \bigcup_1^m B_k$. Pour tout $k \in \{1, ..., m\}$, la boule B_k est de diamètre infèrieur à 3ε, donc on peut choisir un indice $i_k \in I$ tel que $B_k \subseteq O_{i_k}$. Si on pose $J = \{i_1, ..., i_m\}$, alors J est fini et $\bigcup_{i \in J} O_i = E$. Cela termine la démonstration.

Corollaire 2.7.1. *Soit E un espace métrique. Un ensemble $A \subseteq E$ est compact si et seulement la propriété suivante a lieu :*
pour toute famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que $A \subseteq \bigcup_i O_i$, on peut trouver un ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $A \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$.

Preuve :
Cela vient du fait que les ouverts de A sont exactement les ensembles du type $O \cap A$, où O est un ouvert de E.

2.8 Ensembles précompacts

Définition 2.8.1. *Un espace métrique (E, d) est* ***précompact*** *ssi, pour tout $\epsilon > 0$, E admet une recouvrement fini par des boules de rayon ϵ*

Définition 2.8.2. *Soit (E, d) un espace métrique.*
On dit que E est précompact ou bien totalement borné si pour toute $\epsilon > 0$, il existe un recouveremnt fini de E par des parties de E dont le diamétre est inférieur à ϵ. Une partie A de E est dite précompacte dans (E, d) si le sous-espace métrique $(A, d_{A \times A})$ est précompact.

Proposition 2.8.1. *Toute partie A d'un espace métrique E précompact est précompacte.*

Proposition 2.8.2. *Un espace métrique précompact est nécessairement borné.*

Corollaire 2.8.1. *soit* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n. sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *de dimension fini. Les parties précompactes* E *sont les parties bornées.*

Corollaire 2.8.2. *Les parties précompactes de* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *usuels sont parties bornées.*

Proposition 2.8.3. *Une partie* A *d'un espace métrique* (E, d) *est précompacte si et seulement si* $\overline{A}$ *est précompacte.*

Preuve :
Il est clair que si $\overline{A}$ est précompacte, alors A également puisque $A \subseteq \overline{A}$. Pour la réciproque, il suffit d'observer que si $A \subseteq \bigcup_1^m C_i$,alors $\overline{A} \subseteq \bigcup_1^m \overline{C_i}$, et qu'on a $diam(\overline{C_i}) = diam(C_i)$.

Proposition 2.8.4. *Tout espace métrique compact est précompact.*

Preuve :
Si (E, d) est un espace métrique compact et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors la famille $(B(x, \varepsilon))_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de E. Le résultat découle donc de la propriété de Borel-Lebesgue.

Corollaire 2.8.3. *Toute partie relativement compacte d'un espace métrique est précompacte.*

Chapitre 3

Compacité en dimension finie

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la notion de compacité dans des espaces de dimenssion finie. On caractérsise les espaces de dimension finie en utilisant la compacité de la boule unité ferméé. En fin on caractérise les ensembles compacts, ceci fait l'objet du théorème de Heine-Borel.

3.1 Théorème de Riesz

Théorème 3.1.1. *Soit E un espace métrique.*

1. *Tout ensemble compact $A \subseteq E$ est fermé.*

2. *Si E est compact, alors tout fermé de E est compact.*

3. *Si E est un espace vectoriel normé, alors tout sous-ensemble compact de E est fermé borné.*

Preuve :
(1) Soit A un compact de E, et soit (x_n) un suite de points de A convergeant vers un point $x \in E$. Par compacité de A, la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence dans A. Mais x est la seule valeur d'adhérence possible pour (x_n), par unicité de la limit. Donc $x \in A$, ce qui prouve que A est fermé dans E.
(2) Supposons E compact et A fermé dans E. Si (x_n) est une suite de points de A, alors (x_n) possède une valeur d'adhérence $x \in E$ car E est compact, et on a $x \in A$ car A est fermé. Par conséquent, A est compact.
(3) On sait déjà qu'un compact de E est fermé dans E. Si $A \subseteq E$ est non borné, alors on peut construire une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $\|x_n\| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors aucune sous-suite de (x_n) n'est bornée, donc (x_n) ne posséde aucune valeur

d'adhérence. Par conséquent, A n'est pas compact. Ainsi, tout ensemble compact est borné.

Exemple 3.1.1. *Dans une espace vectoriel normé de dimension finie, les ensembles compacts sont exactement les ensembles fermés bornés.*

Preuve :
On a déjà montré que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée possède une sous-suite convergente. On en déduit très facilement que dans un tel espace, tout ensemble fermé borné est compact. La réciproque a déjà été démontrée.

Théorème 3.1.2. *(Théorème de Riesz) :*
*Pour $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé, on a : E est de **dimension fnie** si et seulement si la boule unitié fermée de E est **compacte** .*

Preuve :
Si E est de dimension fnie, on a alors $B_f(0_E, 1)$ compact car c'est un fermé borné de E.
On présente deux manières pour démontrer la réciproque.

1$^{\text{iére}}$ méthode :
supposons que E est de dimension infinie. On a :

$$B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{x \in B_f(0_E,1)} B(x, 1).$$

Or $B_f(0_E, 1)$ est un compact donc d'aprés la propriété de Borel-Lebesgue :

$$\exists (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in B_f(0_E, 1)^n \text{ avec } B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1).$$

Soit $F = Vect_{1 \leq i \leq n}(x_i)$. F est sous-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un fermé.
Comme E est de dimension infinie, il existe $x \in E/x \in F$.
D'où

$$\exists y \in F/\|x - y\| = d(x, F).$$

On note $x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}; x \in B_f(0_E, 1)$.
Or on a $O_E \in F$, donc on a

$$d(x_0, F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - 0\| = 1.$$

Or, pour $z \in F$ on a :

$$\begin{aligned}
\|x_0 - z\| &= \|\frac{x-y}{\|x-y\|} - z\| \\
&= \frac{1}{\|x-y\|}.\|x-y-\|x-y\|.z\| \\
&= \frac{1}{\|x-y\|}.\|x-(y+z.\|x-y\|)\| \\
&\geq \frac{d(x,F}{\|x-y\|} = \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|} = 1.
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que $\forall z \in F$, $\|x_0 - z\| \geq 1$. Or on avait d'ejà $d(x_0, F) \leq 1$.
donc $d(x_0, F) = 1$.
Donc $\forall 1 \leq i \leq n, \|x_0 - x_i\| \geq 1$.
On a alors

$$x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1).$$

Or on a

$$B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1).$$

Donc on en déduit que $x_0 \notin B_f(0_E, 1)$ ce qui est une contradiction.
Donc on a $B_f(0_E, 1)$ non compacte.

2$^{\text{iéme}}$ méthode :

supposons que la boule unité B de E est compacte. Elle est alors précompacte et peut donc être recouverte par n boules $B(x_i, \frac{1}{2}), i = 1, ..., n$.
Soit $x \in B$. Il existe $i_1 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\|x - x_{i_1}\| \leq \frac{1}{2}$.
Notons $y_1 = x - x_1$. Comme $2y_1 \in B$, il existe i_2 tel que$\|2y_1 - x_{i_2}\| \leq \frac{1}{2}$ ce qui équivaut à $\|y_1 - \frac{1}{2}x_{i_2}\| \leq \frac{1}{4}$, en itérant ce procédé, on peut montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe i_k tel que

$$\|x - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{j-1}} x_{ij}\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Posant $z_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{j-1}} x_{ij}$, la suite (z_k) formée par des vecteurs appartenant á l'espace vectoriel E_n engendré par les vecteurs x_{ij}, $j = 1, ..., n$, converge vers x.

Comme E_n est fermé, car de dimension fnie, $x \in E_n$. On en déduit que $E \subset E_n$, ce qui prouve que E est de dimension fnie.

3.2 Théorème de Heine-Borel

Théorème 3.2.1. *Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, A **est compact** si, et seulement si, A **est fermé et borné**.*

Preuve :

1. Supposons que A est compact ;
Montrons que A est fermé et borné :
Soit $(f_n) \subset A$ une suite convergente vers f. Donc toute sous-suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers f. Comme A est compact, cela implique que f est dans A. Et ainsi, nous voyons que toutes les suites convergentes dans A doivent converger vers un élément de A, ce qui signifie précisément que A est fermé. De même, si A est non borné, il aurait des suites $(f_n)_{n\geq 1} \subset A$ de norme monotone croissante et non bornée. Comme la suite définie par $(\| f_n \|)_{n\geq 1}$ est monotone croissante et non bornée, elle ne peut pas avoir de sous-suites convergentes.
Nous rappelons, toutefois, que la condition nécessaire pour la convergence d'une suite de fonctions est que sa norme converge. Comme la suite $(\| f_n \|)_{n\geq 1}$ n'a pas de sous-suites convergentes, cela implique que $(f_n)_{n\geq 1}$ n'a pas de sous-suites convergentes. Et donc, nous avons montré qu'un ensemble non borné ne peut pas être compact.

2. Supposons que A est fermé et borné ;
Montrons que A est compact :
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans A. Puisque A est borné, toute suite dans A doit aussi être bornée, et donc $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, cela implique qu'il ya une suite convergente de $(f_n)_{n\geq 1}$, et bien sûr cette suite est aussi dans A. Supposons que cette sous-suite a un point limite f. Comme la sous-suite est dans A, et A est fermé, son point limite doit aussi être dans A. Et donc nous avons trouvé, pour toute suite dans A, une sous-suite convergente avec point limite dans A. Et donc A est compact.

Exemple 3.2.1. *Soit la boule unité sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$.*

Il est défini par :

$$\overline{B(0,1)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \| \leq 1\}.$$

Cet ensemble est clairement fermé et borné, et donc il est compact.

Chapitre 4

Compacité en dimension infinie

Dans ce chapitre, On s'intéresse à la compacité dans des espaces de dimension infinie. L anotion d'équicontinuité est essentielle pour caractériser les sous-ensembles compacts. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème d'Arzela-Ascoli.

4.1 Théorème de Riesz

Nous allons montrer que la boule unité fermée d'un espace vectoriel de dimension infinie ne peut pas être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon $\frac{1}{2}$, ce qui contredira la précompacité et donc en particulier la compacité. Tout d'abord, pour avoir une idée intuitive de ce résultat, nous allons nous placer dans $\mathbb{R}^n$ avec la norme $\|.\|_\infty$. On remarque que pour $n = 1$, il faut deux boules fermées de rayon $\frac{1}{2}$, à savoir $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ pour recouvrir $[-1, 1]$. Pour $n = 2$, un dessin nous convainc qu'il en faut 4, puis pour $n = 3$, il en faut 8. On conjecture assez facilement qu'il en faudra 2^n en dimension n, et donc qu'en dimension infinie, on ne pourra pas trouver un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$ qui recouvrent la boule unité fermée.

Théorème 4.1.1. *La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas compact.*

Preuve :
Supposons que la boule unité fermée soit compacte.
Elle est en particulier précompacte, et donc il existe $x_1, ..., x_n \in E$ tels que

$$B'(0,1) \in \bigcup_{i=1}^{n} B'(x_i, \frac{1}{2}).$$

Notons F le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, ..., x_n$.
Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$B'(0,1) \subset F + 2^{-p}B'(0,1)$$

(on rappelle que si A et B sont deux parties d'un espace vectoriel, $A+B$ désigne l'ensemble des $a+b$ quand $a \in A$ et $b \in B$ et si $\lambda \in K$, alors λA est l'ensemble des λa quand $a \in A$).
Tout d'abord, c'est vrai pour $p = 1$ puisque, si $x \in B'(0,1)$, il existe $i \in 1, ..., n$ tel que $x \in B(x_i, \frac{1}{2})$, et donc

$$x \in x_i + B'(0, \frac{1}{2}) \subset F + \frac{1}{2}B'(0,1).$$

Supposons maintenant que ce soit vrai au rang p et montrons le au rang $p+1$. Pour cela, on utilise le fait que $B'(0,1) \subset F + 2^{-p}B'(0,1) \subset F + 2^{-p}(F + 2^{-1}B'(0,1)) = (F + 2^{-p}F) + 2^{-(p+1)}B'(0,1) = F + 2^{-(p+1)}B'(0,1)$ car F est un sous-espace vectoriel de E.
On a donc bien prouvé par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$B'(0,1) \subset F + 2^{-p}B'(0,1)$$

En particulier, si $x \in B'(0,1)$ alors il existe deux suites (x_p) dans F et (y_p) dans $B'(0,1)$ telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, x = x_p + 2^{-p}y_p.$$

Comme la suite (y_p) est à valeurs dans $B'(0,1)$, on en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \|2^{-p}y^{-p}\| \leq 2^{-p} \xrightarrow[p \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

En particulier, la suite $(x_p) = (x - 2^{-p}y_p)$ converge donc vers x, ce qui implique que $x \in \overline{F}$. Mais comme F est de dimension finie, F est fermé car(Toute sous-espace vectoriel normé de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé)
En particulier, $x \in F$. Ceci étant vrai quel que soit $x \in B'(0,1)$, on en déduit que $B'(0,1) \subset F$. Enfin, comme pour tout $x \in E \diagup \{0\}$, on a $\frac{x}{\|x\|}$ qui est élement de $B'(0,1)$, on en déduit que $E \subset F$, et donc que E est de dimension finie.

4.2 Équicontinuité

Dans cette section, E et F sont des espaces métriques, dont les distances sont toutes les deux notées d. On note $\mathcal{C}(E,F)$ l'ensemble des applications continues $f : E \to F$. Si $F = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{C}(E)$ au lieu de $\mathcal{C}(E,\mathbb{K})$.

Définition 4.2.1. *On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(E,F)$ est* ***èquicontinue*** *en un point $x \in E$si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0 \quad \forall y \in E \quad d(x,y) \leq \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F} \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est èquicontinue si elle est èquicontinue en tout point $x \in E$.

En d'autres termes, une famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(E,F)$ est èquicontinue si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont continues et si, pour tout $x \in E$, on peut, ètant donné $\varepsilon > 0$, prendre le même "δ de continuité" au point x pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$. Le préfixe "èqui" indique une uniformité par rapport aux fonctions $f \in \mathcal{F}$. On dira qu'une suite $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(E,F)$ est èquicontinue si l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ est èquicontinu.

Exemple 4.2.1. *Par définition, une famille $\mathcal{F}$ formée d'une seule fonction continue f est équicontinue. Plus généralement, toute partie finie de $\mathcal{C}(E,F)$ est équicontinue*

Exemple 4.2.2. *Si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont $\mathcal{C}$-lipschitziennes, pour une même constante $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{F}$ est équicontinue. Plus généralement, il suffit que tout point $x \in E$ possède un voisinage ouvert V_x tel que toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ soient $\mathcal{C}_x$-lipschitziennes sur V_x, pour une même constante $\mathcal{C}_x$ dépendant uniquement de x.*

Exemple 4.2.3. *Si E et F sont des espaces vectoriels normés, et si $\mathcal{F}$ est une partie bornée de $\mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathcal{F}$, considérée comme partie de $\mathcal{C}(E,F)$, est équicontinue. C'est un cas particulier de l'exemple précédent.*

Exemple 4.2.4. *Soient $E = [0,1]$, $F = \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = t^n$. Alors la suite (f_n) n'est pas équicontinue.*

Proposition 4.2.1. *la boule unité de $C[0,1]$ n'est pas équicontinue.*

Preuve :
Rappellons que la boule unité contient la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par $f_n(x) = x^n$.
Soit $\epsilon = \frac{1}{2}$, et supposons qu'il existe un tel $\delta_1 > 0$, tel que la condition d'équicontinuité soit satisfaite. Définissons $\delta = min\{\delta_1, 1\}$.
Comme il est tout au plus δ_1, il doit aussi fonctionner. Considérons maintenant $x = 1$, $y = 1 - \frac{\delta}{2}$. Il est clair que

$$|x - y| = \left|1 - 1 - \frac{\delta}{2}\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| < \delta.$$

Nous supposons que notre ensemble est équicontinu, cela implique que,

$$\forall f \in B(0,1), \left|f(1) - f\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}.$$

Toutefois, nous avons déjà vu que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est dans la boule unité, et qu'elle converge vers 0 pour tout $x \in [0, 1[$ et à 1 pour $x = 1$.
Donc $|f(1) - f(1 - \frac{\delta}{2})|$ peut être rendue arbitrairement proche de 1 pour tout $\delta > 0$ fixé.
Et donc la boule unité n'est pas équicontinue, même si elle est fermée et bornée.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat principal de ce chapitre, le théorème d'Arzéla-Ascoli.

4.3 Théorème d'Arzéla-Ascoli

Théorème 4.3.1. *Pour $A \subset C[0, 1]$, A est* ***compact*** *si, et seulement si, A est* ***fermé, borné, et équicontinu.***

Preuve :

1- Supposons que$A$ compact,
Montrons que A fermé, borné et équicontinu.
Nous avons déja montrer, dans la théoréme de Heine-Borel , que A doit être fermé et borné.
Il reste à montrer que A est équicontinu. Pour ce faire, nous supposons d'abord que A est compact, mais pas équicontinue.
Comme il n'est pas équicontinue, nous notons que

$$\exists \epsilon > 0 \;\; \exists x, y \in [0, 1] \;\; \exists f \in A : \;\; |x - y| < \delta \;\; et \;\; |f(x) - f(y)| > \epsilon.$$

En particulier, nous pouvons créer une suite de δ, que nous noterons par $\delta_n = \frac{1}{n}$,

$$\exists x_n, y_n \in [0,1] \; \exists f_n \in A : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad mais |f_n(x_n) - f_n(y_n)| > \epsilon.$$

Bien sûr, cela définit au moins une suite de fonctions de A.
Nous choisis-sons une suite de fonctions avec cette propriété, et nous notons d'aprés çi dessus que cette suite ne saurait être équicontinue.
En outre, toutes les sous-suites f_{n_k} de cette suite possèdent la même propriété, à savoir,

$$\exists x_{n_k}, y_{n_k} \in [0,1] : |x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n} \quad mais |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(y_{n_k})| > \epsilon.$$

Nous avons déjà montré que toutes les suites convergentes doivent en effet être équicontinues. Et si, sous l'hypothèse que A n'est pas équicontinue, nous avons démontré l'existence d'une suite ne possédant aucune sous-suite convergente. C'est une contradiction avec l'hypothèse que A est compact, et ainsi nous concluons que A doit être équicontinue.

2- Supposons que A fermé, borné et équicontinu,
Montrons que A est compact.
Nous commençons par examiner une suite arbitraire $(f_n)_{n\geq 1}$ dans A.
Nous devons montrer qu'elle contient une sous-suite convergente. Malheureusement, il n'est pas très clair comment faire cela.
Intuitivement, on peut examiner l'intervalle $[0,1]$, et trouver une sous-suite qui converge simplement à point donné x_0.
Nous pourrions alors trouver une sous-suite de cette sous-suite qui converge en un second point, x_1, et ainsi de suite. Cela fonctionnera si $[0,1]$ a seulement un nombre fini de points.
Malheureusement, l'intervalle a de nombreux points non dénombrables, et cette stratégie doit être modifié. La première modification consiste à utiliser un argument de la diagonale, familier des arguments précédents en analyse, d'étendre la convergence d'une suite à partir d'un nombre fini de points à un ensemble dénombrable de points. Nous allons ensuite utiliser la propriété d'équicontinuité pour étendre la convergence à un ensemble dénombrable bien choisi de points à la convergence uniforme sur tout l'intervalle $[0,1]$. Pour l'instant, nous continuons la preuve.
Nous considérons $x_1, x_2, ..., x_n...$ une suite de points rationnels de $[0,1]$. Ceci est

possible car, comme nous l'avons montré, les rationnels sont un ensemble dénombrable. Nous notons que $(f_n)_{n\geq 1}$, évalué en x_1, forme une suite infinie de nombres réels. Puisque A est fermé et borné, chaque $(f_n)_{n\geq 1}$ doit aussi être bornée, et donc notre suite de nombres réels, $(f_n(x_1))_{n\geq 1}$, est aussi bornée. Alors, d'aprés le **théorème de Bolzano-Weierstrass**, il existe une sous-suite de notre suite de nombres réels qui converge. Cela équivaut à dire qu'il ya une sous-suite de $(f_n)_{n\geq 1}$, qui converge simplement en x_1. Pour simplifier la notation, nous appelons cette suite $(f_{n_1(k)})$, où $n_1(k)$ est une fonction strictement croissante des nombres entiers positifs aux entiers positifs. Avec exactement le même argument, nous pouvons créer une sous-suite de cette suite qui converge en x_2, que nous noterons $f_{n_2(k)}$. Comme $f_{n_1(k)}$ converge en x_1 et $f_{n_2(k)}$ est une suite de $f_{n_1(k)}$, $f_{n_2(k)}$ doit aussi converger vers x_1.
Nous pouvons continuer cette chaîne de sous-suites, et donc obtenir une suite, pour chaque entier positif m, une sous-suite $f_{n_m(k)}$ qui converge aux points rationnels $x_1, x_2, ..., x_m$, créé de telle façon que $f_{n_m(k)}$ est une sous-suite de $f_{n_m(k)}$. Ainsi, pour un nombre déterminé fini de points rationnels dans $[0, 1]$, on peut trouver une sous-suite qui converge en ces points rationnels. Comme indiqué plus haut, ce ne sera pas suffisant pour trouver une suite qui converge sur tout l'intervalle.
Cependant, nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse d'équicontinuité.
Avant de faire cela, nous définissons une suite $(g_n)_{n\geq 1}$, en faisant de la $n^{\text{iéme}}$ fonction de la suite égale à la $n^{\text{iéme}}$ fonction dans la séquence $f_{n_n(k)}$.
Autrement dit, la $n^{\text{iéme}}$ en fonction de g_n est égal à la $n^{\text{iéme}}$ fonction de la $n^{\text{iéme}}$ sous-suite de f_n :
Nous notons que, pour tout x_i point rationnel donné, g_n est une suite du $f_{n_i(k)}$ pour tous les $n \geq i$, et donc g_n converge en x_i.
Ainsi, cette suite en fait converge en tout point unique rationnelle sur $[0, 1]$. Comme les éléments de $(g_n)_{n\geq 1}$ sont toutes tirés des sous-suites de $(f_n)_{n\geq 1}$, nous notons que c'est aussi une suite de $(f_n)_{n\geq 1}$.
Àce stade, il reste à montrer que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge partout sur $[0, 1]$, et aussi que cette convergence est uniforme.
Tout d'abord, nous allons montrer que c'est une suite de Cauchy.
Nous considérons un $x \in [0, 1]$ arbitraire. Nous constatons immédiatement que, par l'inégalité du triangle,

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_m(x_i)| + |g_m(x) - g_m(x_i)|$$

pour tout point x_i dans $[0, 1]$. Ici, pour la première fois, nous utilisons l'équicontinuité. Nous pouvons choisir un δ tel que

$$|x - x_i| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |g_n(x) - g_n(x_i)| < \frac{\epsilon}{3} \\ |g_m(x) - g_m(x_i)| < \frac{\epsilon}{3} \end{cases}$$

Ce δ, nous le rappelons, est complètement indépendant de m et n, et il est aussi totalement indépendant de x, x_i. Nous notons que les points rationnels sont denses dans les réels, et donc nous choisissons maintenant x_i un point rationnel satisfaisant $|x - x_i| < \delta$. En ce qui concerne le moyen terme, g_n converge en x_i, et donc gn évaluée en x_i forme une suite de Cauchy, après que nous avions déjà choisi x_i. Donc,

$$\exists N > 0 \text{ tel que } m, n > N$$

forces le moyen terme à être moins de $\frac{\epsilon}{3}$. Et donc, nous avons montré que $g_n(x)$ est elle-même une suite de Cauchy, c'est à dire, elle converge simplement partout sur $[0, 1]$.
Nous devons montrer maintenant que cette convergence est uniforme. C'est à dire que, la convergence est essentiellement indépendante de x. La preuve ci-dessus de la convergence simple dépend de x.
Heureusement, il peut effectivement être modifié pour prouver non seulement la convergence simple, mais la convergence uniforme. Une fois de plus pour commencer, nous prendrons $\epsilon > 0$ donné. Puisque A est équicontinue, nous pouvons choisir un λ indépendant de n et x tel que :
pour tout n,

$$|x - x_i| < \delta \Rightarrow |g_n(x) - g_n(x_i)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Maintenant, nous partionnons l'intervalle $[0, 1]$ en sous-intervalles de longueur $\frac{\delta}{2}$. Nous pouvons maintenant choisir exactement un point ra- tionnel dans chaque sous-intervalle. Nous cherchons maintenant seulement un nombre fini de points rationnels. Comme g_n converge en chaque point rationnel, pour chaque point rationnel x_j, que nous étudions, il existe un N_j tel que $m, n > N_j$ implique que

$$|g_m(x_j) - g_n(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Maintenant, nous définissons N comme le maximum sur tous les N_j , il existe, puisque nous prenons le maximum sur un ensemble fini.

Ayant fait ce travail préparatoire, nous allons maintenant montrer qu'en fait la convergence est uniforme. Pour ϵ, δ, N et l'ensemble des points rationnels x_j avec leur partition associée comme ci-dessus, nous continuons. Notez que pour tout $x \in [0,1]$, on peut choisir l'un de nos points rationnels spéciaux, x_j , qui se trouve entre δ et x. En choisissant ce point rationnel, et en forçant m, n à être strictement supérieur à N, on obtient :

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_i) - g_m(x_j)| + |g_m(x) - g_m(x_j)|$$

mais

$$|g_n(x) - g_n(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}$$

et

$$|g_m(x) - g_m(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}$$

car $|x - x_j| < \delta$. Nous voyons aussi que,

$$\forall x_j \in [0,1], |g_n(x_j) - g_m(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}$$

puisque nous avons déjà imposé la restriction $m, n > N > N_j$. Et donc,

$$|g_n(x) - g_m(x)| < \epsilon$$

comme nous l'avons voulu montrer. Puisque A est fermé et cette suite converge, il faut bien sûr qu'elle converge vers une fonction de A.

Ainsi, à partir des hypothèses que A est fermé, borné et équicontinue, nous avons démontré pour une suite générale l'existence d'une sous-suite convergente avec point limite dans A.

Chapitre 5

Equation intégrale de type Hammerstein

Dans ce chapitre, on considère une équation intégrale de type Hammerstein donnée par :

$$z(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y,z(y))dy \tag{5.1}$$

On utilise la théorie du point fixe combinée avec la théorie d'Arzéla-Ascoli.

Définition 5.0.1. *Soient X un espace de Banach et $T : X \to X$. On dit que x est un point fixe de T si et seulement si*

$$x = T(x).$$

Lemme 5.0.1. *(Théorème de point fixe de Schauder).*
Soient $\mathcal{S}$ un sous-ensemble fermé, convexe d'un espace de Banach X, et

$$T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

Si T est continue et que $T(\mathcal{S})$ est relativement compact dans $\mathcal{S}$, alors T admet un point fixe.

5.1 Resultats d'existence

On énonce maintenant un théorème d'existence pour l'équation (5.1).

Théorème 5.1.1. *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(H_1) *$K(x,y)$ est une fonction continue pour $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.*

(H_2) *$f(y,z)$ est une fonction continue pour $(y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.*

(H_3) *Il existe une constante M tel que :*

$$|f(y,z)| \leq M, \ \forall (y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Alors l'équation (5.1) admet au moins une solution continue $z(x)$ sur $[0,1]$.

Preuve. Pour tout $z \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère l'opérateur T défini par :

$$\forall x \in [0,1], \ Tz(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y,z(y))dy$$

Il est clair que les points fixes de T sont les solutions de l'équation (5.1).
Montrons que l'opérateur T satisfait aux conditions du Lemme 5.0.1.

Etape 1. On montre que l'opérateur T applique les fonctions continues sur les fonctions continues, c.a.d :

$$T\left(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$

La fonction $K(x,y)$ est continue sur le compact $[0,1][0,1]$ et donc K est uniformément continue sur $[0,1] \times [0,1]$.
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe alors un $\delta > 0$ tel que

$$|K(x,y) - K(\tilde{x},\tilde{y})| < \frac{\epsilon}{M} \ si \ |(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})| < \delta.$$

Par suite, pour tout z choisi arbitrairement dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} |Tz(x) - Tz(\tilde{x})| &= \left| \int_0^1 (K(x,y) - K(\tilde{x},y))f(y,z(y))dy \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x,y) - K(\tilde{x},y)|\,|f(y,z(y))|dy \\ &\leq M \int_0^1 |K(x,y) - K(\tilde{x},y)|\,dy \\ &< \epsilon, \quad \text{pourvu que } |x - \tilde{x}| < \delta. \end{aligned}$$

Cela signifie que $T(z) \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Etape 2. Choix du sous-ensemble S.
Considérons le sous ensemble de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ donné par :

$$\mathcal{S} = \{u \in C([0,1]) : \|u\| \leq \rho\}$$

Il est clair que $\mathcal{S}$ est convexe et fermé.
Choisissons ρ de telle sorte que :

$$T(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$$

La fonction K est continue sur le compact $[0,1] \times [0,1]$, elle y est alors bornée, d'où l'existence d'une constante positive β tel que :

$$|K(x,y)| \leq \beta, \text{ pour tout } (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |Tz(x)| &= \left| \int_0^1 K(x,y) f(y, z(y)) dy \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x,y)||f(y,z(y))dy| \\ &\leq M\beta. \end{aligned}$$

En fin, si on choisit ρ tel que

$$\rho = M\beta$$

Alors,

$$\|T(z)\| \leq \rho$$

et ainsi

$$T(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}.$$

Des étapes 1 et 2, on déduit que $T(\mathcal{S})$ est uniformément bornée et équicontinue sur $\mathcal{S}$, d'où par le théorème d'Arzéla-Ascoli $T(\mathcal{S})$ est relativement compacte. Pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder, il retse à monter que T est continue sur $\mathcal{S}$.

Etape 3. Montrons que $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continue.
De la définition de $\mathcal{S}$ il s'ensuit que $|z(x)| \leq \rho$ pour tout $x \in [0,1]$.
La fonction $f(y,z)$ étant continue sur le compact $[0,1] \times [-\rho, \rho]$ implique que f est uniformément continue sur $[0,1] \times [-\rho, \rho]$.
Par suite, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|f(y,z) - f(\tilde{y}, \tilde{z})| < \frac{\epsilon}{\beta} \text{ si } |(y,z) - (\tilde{y}, \tilde{z})| < \delta$$

Par conséquent, pour tout z_1 et z_2 choisis arbitrairement dans $\mathcal{S}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|T(z_1) - T(z_2)\| &= \sup_{x\in[0,1]} |\int_0^1 K(x,y)(f(y,z_1(y)) - f(y,z_2(y)))dy| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)||(f(y,z_1(y)) - f(y,z_2(y)))|dy \\
&\leq \beta \int_0^1 |(f(y,z_1(y)) - f(y,z_2(y)))|dy \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Les conditions du théorème de Schauder sont maintenant satisfaites, donc l'opérateur T admet au moins un point fixe qui est solution de l'équation (5.1)

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressé à la notion de compacité. Les espaces de dimenssion finie sont les espaces où la boule unité fermée est compacte. Les sous-ensembles compacts dans un espaces de dimenssion fini sont exactements les fermés, bornés. Dans les espaces de dimension infinie la boule unité n'est plus compacte. La notion d'équicontinuité est ajoutée à fin de caractériser complètement les sous-ensembles compacts. Le théorème d'Arzéla-Ascoli reste le théorème principal de notre mémoire. En perspective, nous pouvons nous intéresser à la généralisation du théorème d'Arzéla-Ascoli, ceci fait l'objet du célèbre théorème dû à A. Ambrosetti qui fait appel à une nouvelle notion dite mesure de non-compacité.

Bibliographie

[1] Benjamin Fine, Gerhard Rosenberg, The fundamental theorem of algebra, Springer 1997.

[2] A. Friedman, Foundations of modern analysis, Holt Rinehart andWinston, 1970.

[3] Roger Godement, Analyse mathématique, Springer, 2003.

[4] A. Granas, Fixed point theory, Springer 2003.

[5] E. Kreyszig, Introduction to functional analysis with applications, Wiley 1989.

[6] P. Kumlin, Exercises, Mathematics, Chalmers & GU 2011/2012.

[7] M. Roseau, Equations différentielles, Edition Masson, 1976.

[8] Georges Skandalis, Topologie et analyse 3e année, Édition Dunod,Collection Sciences Sup, 2001.

[9] Claude Wagschal, Topologie et analyse fonctionnelle, Édition Hermann, Collection Méthodes, 1995.