Remerciement

Louange à notre Seigneur "ALLAH" qui nous a doté de la merveilleuse faculté de raisonnement. Louange à notre Créateur qui nous a incit à acquérir le savoir.

C'est à lui que nous adressons toute notre gratitude en premier lieu.
Je voudrais remercier les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail. Tout d'abord, ce mémoire ne serait pas aussi riche et n'aurait pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de notre encadreur Dr **Fethi MADANI** je le remercies pour la qualité de son encadrement, sa rigueur et sa disponibilité, ses remarques fructueuses et ses directives précieuses, qui ont contribué efficacement à l'avancement de ce travail.

Je remercie également Dr Fatiha MOKHTARI et Dr Rachida ROUANE qui ont accepté de jurer ce travail et Dr Abdeldjebbar KANDOUCI, malgré un emploi du temps fort chargé, a accepté de présider ce jury.
Je n'oublies pas d'adresser notre gratitude à mes amis et collégues pour leurs soutiens et encouragements.

Finalement, je pense que je ne suis arrivé à ce stade que grâce aux encouragements et aides apportés par mes parents et mes frères et sœurs à qui je dois beaucoup de respect et d'admiration, et je leurs dis mille mercis.

Dédicaces

Je rend grâce à dieu de m'avoir donné le courage et la volonté ainsi que la conscience d'avoir pu terminer mes études.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont permis de réussir dans mes études.

Ma chère mère et mon père .

A toute la famille Guendouz, et la famille Guendouzi.

A Mes soeurs et mes frères : El arbi, Mimoun , Boudali, et toute la famille sans exception.

A tous mes amis de la faculté, dans la vie entre autres : Abdelilah, Abdelkrime, Mohamed.

A mon collègue Didaoui.

A mon encadreur Fethi MADANI.

Guendouz Bouaizza.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction aux Lois limites fonctionnelles

1.1 Introduction

Le présent paragraphe est une introduction aux lois limites fonctionnelles à travers un historique. Les lois limites fonctionnelles générées par des processus aléatoires tels que le processus de Wiener et le processus empirique ont suscité un intérêt continu ces derniéres décennies (Strassen [1], Finkelstein [2], Deheuvels [3], Deheuvels et Einmahl [4], Deheuvels et Mason [5, 6], Deheuvels et Lifshits [7], Mason [8]). Ces contributions données par ces auteurs donnent une description du comportement asymptotique de ces processus.Ils représentent un sujet complexe et sont finement extraits d'arguments topologiques, de la théorie des grandes déviations ainsi que d'autres techniques probabilistes. Nous allons présenter quatres exemples introductifs.Considérons $\{W(t) : t \geq 0\}$ un processus de Wiener standard, vérifiant alors $E(W(s)W(t)) = s \wedge t$ pour s, $t \geq 0$. La célèbre loi du logarithme itéré qui suit, datant de 1948, est dûe à Lévy [22]

$$\lim \sup_{T \longrightarrow \infty} \frac{|W(T)|}{\sqrt{2T \log \log T}} = 1 \quad \text{(p.s)}$$

En 1964, Strassen [1] donne une description plus complete du comportement de $W(xT)$, $0 \leq x \leq 1$, $T \longrightarrow \infty$. Nous designons par $(AC[0,1], \mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions absolûment continues sur $[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup

$|| \cdot ||$ la derivee de Lebesgue de $f \in AC[0,1]$. Introduisons

$$\mathbb{S} = \left\{ f \in AC[0,1], f(0) = 0, \left\{ \int_0^1 \dot{f}(u)^2 du \right\}^{1/2} \leq 1 \right\}$$

l'ensemble dit de Strassen qui coïncide avec la boule unité de l'espace de Hilbert à noyau auto-reproduisant associé au processus de Wiener sur $[0,1]$. Notons de plus, que l'ensemble $\mathbb{S}$ est compact. On définit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\eta_n(x) = \frac{|W(nx)|}{\sqrt{2n \log\log n}} \in C[0,1]$$

où $C[0,1]$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup. Strassen [1] a montré une loi limite fonctionnelle qui exprime le fait que la suite $\{\eta_n(\cdot)\}_{n\geq 3}$ est relativement compacte dans $C[0,1]$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites coïncide avec $\mathbb{S}$

Remarque 1.1.1 *Cette notion de convergence d'un ensemble de suites de fonctions aléatoires vers un ensemble de fonctions déterministes s'exprime également grâce à la distance de Hausdorff que l'on définira et utilisera par la suite*

Remarque 1.1.2 *La loi du logarithme itéré pour le processus de Wiener, due à Lévy [22], est une conséquence du théorème de Strassen [1]. On considère* $\Theta : B[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\{\infty\}$, *une fonctionnelle continue sur* $B[0,1]$, *l'ensemble des fonctions bornées sur* $[0,1]$ *muni de la topologie uniforme* $\mathcal{U}$, *et bornée sur* $\mathbb{S}$. *Il suffit alors, d'appliquer le théorème de Strassen et le fait que l'on a presque sûrement*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup \left(\sup_{0 \leq x \leq 1} \Theta(\eta_n(x)) \right) = \sup_{g \in \mathbb{S}} \Theta(g)$$

En 1971, Finkelstein [2] a démontré le même type de résultat pour le processus empirique uniforme.Nous désignons par $\{\alpha_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus empirique uniforme basé sur les $n \geq 1$ premières observations de la suite $\{U_n : n \geq 1\}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $(0,1)$ Plus précisément, nous notons, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{U}_n(t) = \frac{1}{n} \#\{U_i \leq t : 1 \leq i \leq n\}$$

où #E désigne la cardinalité de l'ensemble E. Et nous posons

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{U}_n(t) - t) & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0,1] \end{cases}$$

On définit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$v_n(x) = \frac{\alpha_n(x)}{\sqrt{2n \log \log n}} \in \mathbb{F}[0,1]$$

où $\mathbb{F}[0,1]$ est l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup. On considére l'ensemble

$$\mathbb{F} = \{f \in \mathbb{S}, f(1) = 0\}$$

appelé ensemble de Finkelstein. Finkelstein [2] a montré que la suite de fonctions $\{v_n(\cdot)\}_{n\geq 3}$ est relativement compacte dans $\mathbb{F}[0,1]$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites est égal à $\mathbb{F}$. Plus tard, en 1988, Mason [8] (voir aussi Deheuvels et Mason [5], [9], Eimahl et Mason [10] et Eimahl [11]) a étudié le comportement limite des queues du processus empirique uniforme local. Soit $h_n : n \geq 1$ une suite de constantes positives vérifiant, lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$(Ha) \quad 0 < h_n < 1, h_n \downarrow 0; nh_n \uparrow \infty; nh_n/ \log\log \longrightarrow \infty, n \longrightarrow \infty.$$

On définit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\nu_n(x) = \frac{\alpha_n(h_n x)}{\sqrt{2h_n \log \log n}} \in B[0,1]$$

Mason [87] a montré que sous la condition (Ha), la suite de fonctions $\{\nu_n(\cdot)\}_{n\geq 3}$ est relativement compacte dans $B(0,1)$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites est égal à $\mathbb{S}$. Einmahl et Mason [12] ont établi la version de ce résultat pour le processus empirique de quantile uniforme (voir aussi Kiefer [13], Deheuvels et Mason [5]). Nous désignons par $\{\beta_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus de quantile uniforme basé sur les $n \geq 1$ premiéres observations d'une suite $\{U_n : n \leq 1\}$ d'observations indépendantes de même loi uniforme sur $(0,1)$. Nous notons

$$\mathbb{V}_n(t) = \inf\{u \geq 0 : \mathbb{U}_n(u) \geq t\}, \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$\mathbb{V}_n(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\mathbb{V}_n(t) = 1$ pour $t > 1$, la fonction emprique de quantile correspondant à $\mathbb{U}_n(\cdot)$. Et nous posons

$$\beta_n(t) = \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{V}_n(t) - t) & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0,1] \end{cases}$$

Partant de cet apercu de loi limites fonctionnelles pour divers processus, nous allons concentrer notre attention sur deux ensembles fonctionnels particuliers, en vue d'applications statistiques. Pour tout choix de $a \geq 0$ et $t \in [0,1]$, nous posons, pour tout $s \in [0,1]$,

$$\xi_n(a,t;s) = \alpha_n(t + sa) - \alpha_n(t)$$

et

$$\zeta_n(a,t;s) = \beta_n(t + sa) - \beta_n(t)$$

Deheuvels et Mason [6], Deheuvels [3], Deheuvels et Einmahl [4] ont établi des lois limites fonctionnelles pour des ensembles d'incréments du type ci-dessus, à partir desquelles ils déduisent des lois limites pour des estimateurs fonctionnels de la densité. Par exemple, en 1992, Deheuvels et Mason [6] se sont intéressés au comportement limite des familles de suites de fonctions suivantes pour $h > 0$

$$\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n) = \left\{ \frac{\xi_n(h,t,\cdot)}{\sqrt{2h \log_+ 1/h}}, t \in [0, 1 - h_n] \cap \mathcal{I} \right\},$$

et

$$\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h_n) = \left\{ \frac{\zeta_n(h,t,.)}{\sqrt{2h \log_+ 1/h}}, t \in [0, 1 - h_n] \cap \mathcal{I} \right\},$$

où $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0,1]$ est un intervalle tel que $u < v$ et $\log_+ a = \log(a \vee e)$ pour $a \in \mathbb{R}$. Notons que le logarithme n'est plus itéré. Soit $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes positives qui vérifient la condition (H.a) ainsi que la condition $\log(1/h_n)/\log\log n \longrightarrow \infty$, lorsque $n \longrightarrow \infty$ (voir, e.g., Deheuvels et Mason [6], Csorgo et Révész [16], et Stute [14]). Notons que d'autres conditions peuvent être imposées à $\{h_n : n \geq 1\}$ (voir Deheuvels et Einmahl [4]). Comme mentionné dans la Remarque (0.0.1), la convergence d'un ensemble de suites de fonctions vers un autre ensemble de fonctions s'exprime commodément avec la distance de Hausdorff que l'on note $\triangle$. Ici, lorque $n \longrightarrow \infty$, on a presque sûrement ,

$$\triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) \to 0$$

et

$$\triangle(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) \to 0$$

Dans un premier temps nous présentons quelque notations et définitions pour utilisés tout au long de ce mémoire.

1.2 Notations et définitions

1.2.1 Notations

Nous désignons par $(B[0, M], \mathcal{U})$ l'ensemble $B[0, M]$ des fonctions bornées sur $[0, M]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, induite par la norme-sup$||\cdot||$, définie pour toute fonction $f \in B[0, M]$ par

$$||f|| = \sup_{0\leq t\leq M} |f(t)|$$

Nous désignons, de meme, par $(AC[0; 1]; \mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[0; 1]$ muni de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire, de la forme

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \psi(s)ds \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq M$$

où $\psi(\cdot)$ est intégrable sur $[0, M]$. Cette derniére fonction est la dérivée de Lebesgue de $f(\cdot)$, et est définie de maniére unique $[0, M]$,à une partie de mesure nulle de $[0, M]$ prés. Nous la noterons, indifféremment,

$$\dot{f} = \frac{d}{dt} f(t) = \psi(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq M$$

Pour tout $\epsilon > 0$ et toute partie $A \in B[0, 1]$, posons

$$\mathcal{N}_\epsilon(f) = \{g \in B[0, M] : ||f - g|| < \epsilon\}$$

et, pour toute partie $A \in B[0, M]$, avec la convention $\mathbb{S}\,;\cup_\emptyset(\cdot) = \emptyset\,;$, posons

$$A^\epsilon = \bigcup_{f\in A} \mathcal{N}_\epsilon(f) \begin{cases} \mathcal{N}_\epsilon(f) = \{g \in B[0, M] : ||f - g|| < \epsilon\} & \text{lorsque } A \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{lorsque } A = \emptyset \end{cases}$$

On définit la distance de Hausdorff entre les ensembles $A, B \subseteq B[0, M]$, par

$$\triangle(A,B) = \begin{cases} \inf\{\epsilon > 0; A \subseteq B^\epsilon \quad \text{et } B \subseteq A^\epsilon\} & \text{lorsqu'un tel } \epsilon \text{ existe} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour toute fonction $f \in B[0, 1]$, nous posons

$$|f|_{M,\mathbb{H}} = \begin{cases} \{\int_0^M \dot{f}(u)^2 du\}^{1/2} & \text{si } f \in AC[0,M] \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Et nous désignons par

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_{[0,1]} = \{f \in B[0,1] : |f|_{1,\mathbb{H}} \leq 1\}$$

la boule unité du noyau de l'espace de Hilbert auto-reproduisant associé au processus de Wiener sur $[0, 1]$. Strassen a montré que $\mathbb{S}$, l'ensemble dit de Strassen, est l'ensemble limite dans la loi du logarithme itéré fonctionnelle pour le processus de Wiener. Plus généralement, pour tout $\lambda > 0$, on introduit l'ensemble

$$\mathbb{S}_\lambda = \{f \in B[0,1] : |f|_{1,\mathbb{H}} \leq \lambda\} = \{\lambda^{1/2} f : f \in \mathbb{S}\}$$

Enfin, nous définissons la fonctionnelle $J(\cdot)$ sur les parties de $B[0, M]$ par

$$J(A) = \begin{cases} \inf_{f \in A} |f|^2_{M,\mathbb{H}} & \text{si} \quad A \neq \emptyset \\ \infty & \text{si} \quad A = \emptyset \end{cases} \tag{1.1}$$

Notations $O_{\mathbb{P}}(1)$ et $o_{\mathbb{P}}(1)$

Soient $\{a_n : n \geq 1\}$ une suite de réels et $\{b_n : n \geq 1\}$ une suite de réels positifs. On note

$$a_n = \begin{cases} O(b_n) & \text{si pour un certain} \quad M > 0, \frac{a_n}{b_n} \leq M < \infty \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1 \\ o(b_n) & \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \end{cases}.$$

On utilise des notations similaires pour des suites de variables aléatoires. On dit que $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires est bornée en probabilité si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $0 < M < \infty$ telle que $\mathbb{P}(|X_n| \geq M) \leq \epsilon$, $n \geq 1$.
Dans ce cas, on écrit $X_n = O_{\mathbb{P}}(1)$. Lorsque X_n converge en probabilité vers 0, on écrit $X_n = o_{\mathbb{P}}(1)$.

Propriété 1.2.1 *Pour* $\{X_n : n \geq 1\}$ *et* $\{Yn : n \geq 1\}$ *deux suites de variables aléatoires on a les propriétés suivantes.*
(i) $X_n = o_{\mathbb{P}}(1) \Rightarrow X_n = O_{\mathbb{P}}(1)$
(ii) $O_{\mathbb{P}}(1) + O_{\mathbb{P}}(1) = O_{\mathbb{P}}(1)$ et $O_{\mathbb{P}}(1) \times O_{\mathbb{P}}(1) = O_{\mathbb{P}}(1)$,
(iii) $O_{\mathbb{P}}(1) + o_{\mathbb{P}}(1) = O_{\mathbb{P}}(1) et O_{\mathbb{P}}(1) \times o_{\mathbb{P}}(1) = o_{\mathbb{P}}(1)$,
(iv) $O_{\mathbb{P}}(X_n) + O_{\mathbb{P}}(Y_n) = O_{\mathbb{P}}(X_n \vee Y_n)$ et $O_{\mathbb{P}}(X_n) \times O_{\mathbb{P}}(Y_n) = O_{\mathbb{P}}(X_n Y_n)$.

1.2.2 Ensemble de Strassen

Pour toute fonction $f \in B[0, M], 0 < M \leq 1$, on a introduit

$$|f|_{M,\mathbb{H}} = \begin{cases} \{\int_0^M \dot{f}(u)^2 du\}^{1/2} & \text{si } f \in AC[0, M] \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \\ \infty & \text{dans tous les autres cas,} \end{cases}$$

la norme hilbertienne définie sur $B[0, M]$ et

$$\mathbb{S} = \{f \in B[0, 1] : |f|_{1,\mathbb{H}} \leq 1\}$$

l'ensemble de Strassen.

Propriété 1.2.2 *L'ensemble de Strassen est un sous-ensemble compact de* $(C[0, 1], \mathcal{U})$*, l'ensemble des fonctions continues sur* $[0, 1]$ *muni de la topologie uniforme.*

Propriété 1.2.3 *L'ensemble de Strassen est la boule unité de l'espace de Hilbert à noyau auto-reproduisant associé au processus de Wiener sur* $[0, 1]$.

1.2.3 Convergences d'ensembles

distance de Hausdorff

Soit $\Theta : B[0, 1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle, continue sur $B[0, 1]$ muni de la topologie uniforme $\mathcal{U}$, et bornée sur $\mathbb{S}$. On rappelle que $\mathbb{S}$ est un compact de $(B[0, 1], \mathcal{U})$.Le lemme qui suit facilite l'utilisation des lois limites fonctionnelles locales. Il permet de passer aisément des lois limites fonctionnelles (les théorèmes (2.3.1), (2.3.2), (3.2.1), et (3.2.2))

Lemme 1.2.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $\mathcal{F} \subseteq B[0,1]$, on ait*

$$\triangle(\mathcal{F}, \mathbb{S}) < \eta \Rightarrow \left| \sup_{g \in \mathcal{F}} \Theta(g) - \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) \right| < \epsilon \tag{1.2}$$

Notons que ce lemme s'applique à $\mathbb{S}$, ainsi qu'à l'ensemble des compacts de $(B[0,1], \mathcal{U})$.

Preuve. Pour $g \in B[0,1]$ et $A \subseteq B[0,1]$, on note

$$\triangle(g, A) = \inf_{f \in A} ||f - g|| \text{ lorsque } A \neq \emptyset, \triangle(g, A) = \infty \text{ sinon.}$$

Sans perte de généralité on suppose $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car d'aprés la définition de distance hausdorff, $\triangle(\emptyset, \mathbb{S}) = \infty$. Comme $\mathbb{S}$ est compact et Θ continue, il existe $f_0 \in \mathbb{S}$ telle que $\Theta(f_0) = \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1(\varepsilon) > 0$ tel que $||g - f_0|| < \eta_1(\varepsilon) \Rightarrow |\Theta(g) - \Theta(f_0)| < \varepsilon$. Il suit que

$$\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}^{\eta_1(\varepsilon)} \Rightarrow \exists g_0 \in \mathbb{F} : ||g_0 - f_0|| < \eta_1(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{g n \mathcal{F}} \Theta(g) \geq \Theta(g_0) > \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) - \varepsilon$$

. Maintenant, on considére l'hypothèse (H) : pour tout $\eta > 0$, il existe $g \in \mathbb{S}^\eta$, tel que $\Theta(g) > \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$ Sous cette hypothése, il existe une suite $\{g_n : n \in 1\} \subseteq B[0,1]$,telle que $\Theta(g_n) > \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. On a donc $\triangle(g_n, \mathbb{S}) \to 0$ lorque $n \to \infty$, par exemple pour un choix de $\eta = \frac{1}{n}$. Cette propriété implique l'existence d'une suite $\{f_n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{S}$, telle que $||g_n - f_n|| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme $\mathbb{S}$ est compact, il existe une sous-suite convergente $f_{n_k} \to \psi \in \mathbb{S}$ lorsque $k \to \infty$. Et on a donc $\Theta(g_{n_k}) \to \Theta(\psi) \geq \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f)$ lorsque $k \to \infty$, ce qui contredit (H). Le fait que (H) soit impossible implique l'existence d'un $\eta_2(\varepsilon) > 0$, tel que $g \in \mathbb{S}^{\eta_2(\varepsilon)} \Rightarrow \Theta(g) < \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$. Alors, on a l'implication

$$\mathcal{F} \subseteq \mathbb{S}^{\eta_1(\varepsilon)} \Rightarrow \sup_{g n \mathcal{F}} \Theta(g) < \sup_{f \in \mathbb{S}} \Theta(f) + \varepsilon$$

On pose $\eta(\varepsilon) = \eta_1(\varepsilon) \vee \eta_2(\varepsilon)$, pour finalement obtenir (1.2). ∎

Par la suite, on note la distance de Hausdorff entre les ensembles $A, B \subseteq B[0, M]$, par

$$\triangle(A, B) = \begin{cases} \inf\{\epsilon > 0; A \subseteq B^\epsilon \quad \text{et } B \subseteq A^\epsilon\} & \text{lorsqu`un tel } \epsilon \text{ existe} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Une définition équivalente de la distance de Hausdorff est la suivante. Pour toute fonction $f \in B[0, M]$, introduisons

$$d(f, B) = \inf_{g \in B} ||f - g||$$

et

$$\delta(A, B) = \sup_{f \in A} d(f, B).$$

Alors, on définit la distance de Hausdorff entre les ensembles $A, B \subseteq B[0, M]$, par

$$\triangle(A, B) = \delta(A, B) \vee \delta(B, A).$$

Soient $\{A_n : n \geq 1\} \subset B[0, M]$ et $A \subset B[0, M]$. Lorsque $\triangle(A_n, A) \to 0$, quand $n \to \infty$, on dit que la suite d'ensembles $\{A_n : n \geq 1\}$ recouvre complétement A. Autrement dit, la suite $\{A_n : n \geq 1\}$ est relativement compacte et son ensemble limite est A. L'ensemble A est alors à la fois l'adhérence asymptotique (ensemble limite extérieur) et l'intérieur asymptotique (ensemble limite intérieur) de $\{A_n : n \geq 1\}$.Considérons l'exemple de Strassen présenté précédent, où la suite $\{\eta_n(\cdot)\}_{n \geq 3}$ est relativement compacte dans $(C(0, 1), \mathcal{U})$ avec probabilité 1, et que l'ensemble de ses points limites est égal à $\mathbb{S}$. On traduit ces notions de relative compacité et d'ensemble limite par les deux propriétes suivantes.
(i) pour toute suite d'entiers $n_k, k \geq 1$ il existe une sous-suite n_{k_j} et une fonction $g \in \mathbb{S}$ telles que

$$\eta_{n_{k_j}}(x) \to g(x) \quad \text{uniformement} \quad \text{en} \quad x \in [0, 1]$$

(ii) pour tout $g \in \mathbb{S}$, il existe une suite $n_k = n_k(f)$ tel que

$$\eta_{n_k}(x) \to g(x) \quad \text{uniformement} \quad \text{en} \quad x \in [0, 1].$$

1.2.4 Probabilité extérieure

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace muni Ω d'une tribu $\mathcal{A}$.

Définition 1.2.1 *Soient $A, B \in \mathcal{A}$. L'application $\mathbb{P}_e : (\Omega, \mathcal{A}) \to [0, 1]$ est appelée probabilité extérieure si*
(i) $\mathbb{P}_e(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}_e(\Omega) = 1$ *;*

(ii) $\mathbb{P}_e$ estcroissante : $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}_e(A) \leq \mathbb{P}_e(B)$;

(iii) $\mathbb{P}_e$est sous − additive : pour toute suite $\{A_k : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}_e\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_e(A_k)$$

Nous présentons cette définition pour la raison suivante. Soit $X_1, \cdots, X_n$ une suite de variables aléaroire réelles i.i.d. Pour tout $n \leq 1$, on considére $g_n(X_1, \cdots, X_n; x)$, $x \in \mathbb{R}$, une fonction mesurable. Cette mesurabilité n'assure pas le fait que

$$\sup_{x\in I} g_n(X_1, \cdots, X_n; x)$$

soit aussi mesurable. De ce fait, on usera de la convention qui suit. On note (Ω, A, P) l'espace de probablilité sur lequel nos variables aléatoires sont définies. Lorsque $\{A_n : n \geq 1\}$ sont des sous-ensembles (éventuellement non mesurables)Ω de, on écrit $\mathbb{P}(A_n) \to 1$ (ou encore $\mathbb{P}(\bar{A}_n) \to 0$, avec $\bar{A}_n = \Omega - An$), lorsqu'il existe une suite $\{B_n : n \geq 1\} \subseteq \mathcal{A}$, telle que $\bar{A}_n \subseteq B_n$ pour tout $n \geq 1$ et $\mathbb{P}(B_n) \to 0$. Autrement dit, il suffit de travailler sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_e)$.

1.3 Prolongements de fonctions

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes. Pour tout $0 < M \leq \infty$, nous notons $\mathbb{S}_{[0,M]}$ l'ensemble de toutes les fonctions $f(\cdot)$, définies sur $[0, M]$ et telles qu'il existe une fonction $\psi(\cdot)$, définie sur $[0, M]$, et vérifiant

- (i) $f(t) = \int_0^t \psi(u)du$ pour $0 \leq t \leq M$
- (ii) $|f|_{M,\mathbb{H}} = \left\{\int_0^M \psi^2(u)du\right\}^{1/2} \leq 1$

Lemme 1.3.1 *Pour tout $M > 0$, une fonction f appartient à $\mathbb{S}_{[0,M]}$, si et seulement si elle est la restriction à $[0, M]$ d'une fonction appartenant à $\mathbb{S}_{[0,\infty]}$*

Preuve. Considérons une fonction $f \in \mathbb{S}_{[0,M]}$. Par définition, elle est définie sur $[0, M]$ et possède les propriétés suivantes :

$$(i) \quad f(t) = \int_0^t \psi du \quad pour \quad 0 \leq t \leq M;$$

$$(ii) \quad |f|_{M,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^M \psi^2 du \right\}^{1/2} \leq 1$$

Nous étendons à $[0, 1)$ le domaine de définition de cette fonction en posant

$$\tilde{f}(t) \left\{ \begin{array}{rll} f(t) & \text{pour} & 0 \leq t \leq M, \\ f(M) & \text{pour} & t \geq M. \end{array} \right.$$

Nous posons, de même,

$$\widetilde{\psi}(t) \left\{ \begin{array}{rll} \psi(u) & \text{pour} & 0 \leq u \leq M, \\ 0 & \text{pour} & u \geq M. \end{array} \right.$$

On constate alors que $\tilde{f}$ et $\widetilde{\psi}$ vérifient les propriétés

$$(iii) \quad \widetilde{f}(t) = \int_0^t \widetilde{\psi}(u) du \quad pour \quad t \geq 0;$$

$$(iv) \quad |\widetilde{f}|_{\infty,H} = \left\{ \int_0^\infty \widetilde{\psi}^2(u) du \right\}^{1/2} \leq 1$$

Réciproquement, considérons une fonction $g \in \mathbb{S}_{[0,\infty]}$. Par définition, une telle fonction est définie sur $[0, 1)$, et telle que

$$(iii) \quad g(t) = \int_0^t \phi(u) du \quad pourt \geq 0;$$

$$(iv) \quad |g|_{\infty,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^\infty \phi^2(u) du \right\}^{1/2} \leq 1$$

alors, la restriction de g à $[0, M]$, soit

$$\widehat{g}(t) = g(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq g \leq M,$$

est telle que

$$(i) \quad g(t) = \int_0^t \phi(u) du \quad pourt \geq 0;$$

$$(ii) \quad |f|_{M,\mathbb{H}} = \left\{ \int_0^M \phi^2(u) du \right\}^{1/2} \leq \left\{ \int_0^\infty \phi^2(u) du \right\}^{1/2} \leq 1$$

On en déduit que $\widehat{g} \in \mathbb{S}_{[0,M]}$. Ceci complète la démonstration du Lemme 1.2.1
Dans ce qui suit, pour tout choix de $M > 0$, nous supposerons, sans perte de généralité, grâce au Lemme 1.2.1, qu'une fonction $f \in \mathbb{S}_{[0,M]}$ est la restriction à $[0, M]$ d'une fonction de $\mathbb{S}_{[0,\infty]}$.

Chapitre 2

Lois limites fonctionnelles pour le processus empirique uniforme

L'objet de ce chapitre est l'étude du comportement limite des incréments du processus empirique uniforme. Dans un premier temps, nous introduisons des suites de fonctions aléatoires. Nous établissons ensuite deux inégalités (voir la Proposition 2.2.1 et la Proposition 2.2.2) qui constituent la base de la construction du résultat principal de ce chapitre : une loi limite fonctionnelle locale pour les incréments du processus empirique uniforme (voir le Théorème 2.3.2) qui a la particularité d'être uniforme relativement à la taille des incréments.

2.1 Le processus empirique uniforme

Soit $U_1, U_2, ...$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $(0, 1)$. On désigne par $\{\alpha_n(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus empirique uniforme basé sur les $n \geq 1$ premiéres observations $U_1, ..., U_n$. Plus précisément, on note

$$\mathbb{U}_n = n^{-1}\#\{U_i \leq t : 1 \leq t \leq n\}, t \in \mathbb{R}$$

la fonction de répartition empirique, où $\#E$ désigne la cardinalité de l'ensemble E, et on pose

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{U}_n(t) - t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \end{cases}$$

Ensuite, pour tout choix de fenétre $h \geq 0$ et $t \in [0;1]$, on considère la fonction dèincrément

$$\xi_n(h,t,u) = \alpha_n(t+hu) - \alpha_n(t) \quad \text{pour} \quad u \in \mathbb{R}$$

Posons $\log_+ s = \log(s \vee e)$ pour $s \in \mathbb{R}$.Soient $0 < a_n \leq b_n \leq 1, n = 1, 2...$ deux suites de constantes positives, et posons $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$. Pour tout $h_n \mathcal{H}_n$ on s'intéresse au comportement limite, lorsque $n \longrightarrow \infty$, de la famille de fonctions

$$\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n) = \left\{ \frac{\xi_n(h,t,.)}{\sqrt{2h \log_+ 1/h}}, t \in [0, 1-h_n] \cap \mathcal{I} \right\}$$

où $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0;1]$ est un intervalle fixé, tel que $u < v$

2.2 Inégalités de base

Nous présentons deux inégalités sous des conditions minimales. Ces inégalités permettent la construction de lois limites fonctionnelles locales

Proposition 2.2.1 *Il existe une constante universelle $C_4 > 0$ vérifiant la propriètè suivante. Pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, il existe des constantes $0 < a(\epsilon) \leq 1/e$, $0 < c(\epsilon) < 1$ et $n(\epsilon) < \infty$, telles que, pour tout choix de $n \geq n(\epsilon)$ et $a > 0$ vérifiant*

$$\frac{na}{\log n} \quad et \quad a \leq a(\epsilon)$$

on ait

$$\mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right) \leq C_4 a^{1+\epsilon}$$

La démonstration de la Proposition 1.2.1 est reportée à la fin de ce paragraphe. Nous allons faire usage des propriétés suivantes.On désigne par $\{W(t) : t \geq 0\}$ un processus de Wiener standard (avec $E(W(s)W(t)) = s \wedge t$pour $s, t \geq 0$), et par $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ un processus de Poisson standard continu à droite (avec $E(\Pi(t)) = t$, pour $t \geq 0$). Pour tout $a \geq 0$, $t \geq 0$, $n \geq 1$ et $s \geq 0$, on pose

$$L_n(a,t,s) = n^{-1/2}(\Pi(nt + nsa) - \Pi(nt) - nas)$$

Fait 1. Pour tout choix de $n \geq 5$, et de a, t vérifiant $0 \leq t \leq t + a \leq 1$ et $0 \leq a \leq 1/2$, on a pour tout partie mesurable A de $[0, 1]$

$$\mathbb{P}(\xi_n(a, t, \cdot) \in A) \leq 2\mathbb{P}(L_n(a, t, \cdot) \in A)$$

Fait 2. Il est possible de construire $\{\Pi(t) : t \geq 0\}$ et $\{W(t) : t \geq 0\}$ sur le même espace de probabilité, de telle sorte que, pour des constantes universelles C_1, C_2 et C_3, l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \ x \leq T} |\Pi(x) - x - W(x)| \geq C_1 \log T + z\right) \leq C_2 \exp(-C_3 z)$$

ait lieu pour tout $T > 0$ et $z \in \mathbb{R}$.

Fait 3. Pour tout $\lambda > 0$, on pose $W_\lambda(s) = (2\lambda)^{-1/2} W(s)$ pour $s \in [0, 1]$. Alors, pour toute partie fermée F (resp. ouverte G) de $(B[0, 1], \mathcal{U})$, on a

$$(i) \quad \lim_{\lambda \to \infty} \sup \lambda^{-1} \log \mathbb{P}\left(W_\lambda(\cdot) \in F\right) \leq -J(F)$$

$$(ii) \quad \lim_{\lambda \to \infty} \inf \lambda^{-1} \log \mathbb{P}\left(W_\lambda(\cdot) \in G\right) \leq -J(G)$$

où $J(\cdot)$ est définie telle que dans (1.1).

Fait 4. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$J\left(B[0, 1] - \mathbb{S}^\epsilon\right) \geq (1 + \epsilon)^2.$$

Preuve de la Proposition 2.2.1 Soient $n \geq 5$, $0 < a \leq 1/e$ et $0 \leq t \leq t + a \leq 1$, choisis ainsi, de sorte que $\log_+(1/a) = \log(1/a)$ et les conditions du Fait 1 soient satisfaites. Fixons $0 < \epsilon \leq 1$ et posons $\epsilon_1 = \sqrt{1 + 2\epsilon} - 1$ et $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon_1^2$. On observe que $2\epsilon_1 + \epsilon_1^2 = 2\epsilon$, tel que $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ et $0 < \epsilon_2 = \epsilon - \epsilon_1 < \epsilon$. Nous faisons usage de la définition du Fait 1 et du fait que les accroissements du processus de Poisson sont stationnaires, pour écrire l'inégalité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a, t, \cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) &\leq 2\mathbb{P}\left(\frac{L_n(a, t, \cdot)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \\ &= 2\mathbb{P}\left(\frac{\Pi(na\cdot) - na\cdot}{\sqrt{2na \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \end{aligned}$$

On note que l'on a la relation $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$. D'aprés l'inégalité ci-dessus et le Fait 2 on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a,t,\cdot)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon}\right) &\leq 2\mathbb{P}\left(\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1}\right) \\ &\quad +2\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{W(nas)-\{\Pi(nas)-nas\}}{\sqrt{2na\log_+(1/a)}}\right| \geq \epsilon_2\right) \\ &= 2P_{1,n}(\epsilon_1) + 2P_{2,n}(\epsilon_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Remarque 2.2.1 *Justifions l'inégalité précédent, ci dessus. Soient* A, B, C *les ensembles suivants.* $A = \{f : f \in \mathbb{S}^{\epsilon}\}, B = \{g : g \in \mathbb{S}^{\epsilon_1}\}, C = \{h : ||h|| < \epsilon_2\}$. *On a* $f = f - g + g$ *et*

$$\{g \in B \quad et \quad f - g \in C\} \Rightarrow \{f \in A\}.$$

De ce fait, on a

$$\{f \notin A\} \Rightarrow \{g \notin B \quad \text{ou} \quad f - g \notin C\}.$$

On obtient donc, le résultat voulu

$$\mathbb{P}[f \notin A] \leq \mathbb{P}[g \notin B] + \mathbb{P}[f - g \notin C].$$

Evaluons, tout d'abord, $P_{1,n}(\epsilon_1)$. *Rappelons que nous avons l'égalité en loi suivante pour le processus de Wiener,*

$$\{n^{-1/2}W(nt) : t \geq 0\} = \{W(t) : t \geq 0\}.$$

Alors, on observe que

$$\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log_+(1/a)}} = \frac{W(\cdot)}{\sqrt{2\log_+(1/a)}} = W_{\{\log(1/a)\}}(\cdot)$$

De ce fait, on évalue

$$P_{1,n}(\epsilon_1) = 2\mathbb{P}\left(\frac{W(na\cdot)}{\sqrt{2na\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1}\right) = 2\mathbb{P}(W_{\{\log(1/a)\}}(\cdot) \notin \mathbb{S}^{\epsilon_1})$$

On pose $F = B[0,1] - S^{\epsilon_1}$, qui est fermé dans $(B[0,1], \mathcal{U})$. Par application de fait 4, on a l'inégalité

$$J(F) = J\left(B[0,1] - \mathbb{S}^{\epsilon}\right) \geq (1+\epsilon)^2.$$

D'après le fait 3 (i), il existe un $a(\epsilon) \in (0, 1/e]$, tel que, pour tout $0 < a \leq a(\epsilon)$,

$$\begin{aligned} P_{1,n}(\epsilon_1) = \mathbb{P}\left(W_{\{\log(1/a)\}}(\cdot) \in F\right) &\leq \exp\left(-\{\log(1/a)\}\{(1+\epsilon_1)^2 - \epsilon_2\}\right) \\ &= a^{1+\epsilon+\epsilon_1} < a^{1+\epsilon} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} P_{2,n}(\epsilon_2) &= 2\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{W(nas) - \{\Pi(nas) - nas\}}{\sqrt{2na\log_+(1/a)}}\right| \geq \epsilon_2\right) \\ &\leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq x\leq na}|\Pi(x) - x - W(x)| \geq C_1\log(na) + z_n\right) \\ &\leq 2C_2\exp(-C_3 z_n), \end{aligned} \tag{2.3}$$

où

$$z_n = \epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)} - C_1\log(na). \tag{2.4}$$

De cette définition (2.4), nous déduisons que

$$\frac{C_3 z_n}{\log(1/a)} = C_3\epsilon_2\sqrt{2}\left\{\frac{na}{\log(1/a)}\right\}^{1/2}\left\{1 - \frac{C_1\log(na)}{\epsilon_2\sqrt{2na\log(1/a)}}\right\} \tag{2.5}$$

On fixe $c > 0$, et on considère les deux cas suivants.

Cas 1. Pour $n^{-1/2} \leq a \leq 1/e$, on a

$$\frac{\log(na)}{\sqrt{na\log(1/a)}} \leq \frac{\log(n/e)}{\sqrt{n^{1/2}\log n^{1/2}}} \leq \frac{\sqrt{2\log n}}{n^{1/4}}$$

Cas 2. Pour $\frac{c\log n}{n} \leq a \leq n^{-1/2}$, et tout

$$n \geq n_1(c) = \inf\left\{m \geq 5 : \forall n \geq m, \frac{1}{2}\log n \leq \log\left(\frac{n}{c\log n}\right) \leq \log n\right\}$$

on a

$$\frac{\log(na)}{\sqrt{na\log(1/a)}} \leq \frac{\log n^{1/2}}{\sqrt{(c\log n)(\frac{n}{c\log n})}} \leq \frac{\frac{1}{2}\log n}{\sqrt{\frac{1}{2}c(\log n)}} = \frac{1}{\sqrt{2c}}$$

Maintenant, pour $c > 0$, et $n_1(c)$ définis au cas 2, posons

$$n_2(c, \epsilon_2) = \inf \left\{ m \leq n_1(c) : \forall n \geq m, \frac{\sqrt{2 \log n}}{n^{1/4}} \leq \frac{\epsilon_2 \sqrt{2}}{2C_1} \right\}$$

et sélectionnons $c > 0$ tel que

$$c = c(\epsilon_2) = \frac{1}{\epsilon_2^2} \max \left\{ C_1^2, \frac{8}{C_3^2} \right\}$$

On déduit des cas 1 et 2 que pour tout $a > 0$ tel que $\frac{c(\epsilon) \log n}{n} \leq a \leq 1/e$, lorsque $n \geq n_3(\epsilon_2) = n_2(c(\epsilon_2), \epsilon)$, n a

$$\frac{C_1 \log(na)}{\epsilon_2 \sqrt{2na \log(1/a)}} \leq \frac{C_1}{\epsilon_2 \sqrt{2}} \max \left\{ \frac{\sqrt{2 \log n}}{n^{1/4}}, \frac{1}{\sqrt{2c(\epsilon_2)}} \right\} \leq \frac{1}{2}$$

et

$$\left\{ \frac{na}{\log(1/a)} \right\}^{1/2} \geq \left\{ \frac{na}{\log(\frac{n}{c(\epsilon_2) \log n})} \right\}^{1/2} \geq \left\{ \frac{na}{\log n} \right\}^{1/2} \geq \sqrt{c(\epsilon_2)} \geq \frac{2\sqrt{2}}{C_3 \epsilon_2}$$

On combine les inègalités précédentes avec (2.5) et la définition (2.4) de z_n pour obtenir que

$$\frac{C_3 z_n}{\log(1/a)} \geq C_3 \epsilon_2 \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{C_3 \epsilon_2} \times \frac{1}{2} = 2$$

Alors, d'après (2.3) et (2.5), on a

$$n \geq n_3(\epsilon) \ \text{ et } \ \frac{c(\epsilon_2) \log n}{n} \leq a \leq 1/e \Rightarrow P_{2,n}(\epsilon_2) \leq C_2 a^2$$

Sous les hypothèses $0 < \epsilon \leq 1$ et $0 < a \leq 1/e < 1$, il s'ensuit que

$$P_{2,n}(\epsilon_2) \leq C_2 a^2 \leq C_2 a^{1+\epsilon} \tag{2.6}$$

Ceci combiné avec (2.1) et (2.2), implique

$$P(\epsilon) = 2P_{1,n}(\epsilon_1) + 2P_{2,n}(\epsilon_2) \leq 2(C_2 + 1) a^{1+\epsilon}$$

d'où on obtient

$$\mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^\epsilon\right) \leq C_4 a^{1+\epsilon}$$

, où $C_4 = 2(C_2+1)$ et $n(\epsilon) = n_3(\epsilon_2)$, avec $\epsilon_2 = \frac{1}{2}\{\sqrt{1+2\epsilon}-1\}^2$ ■

Proposition 2.2.2 *Pour toute fonction $f \in \mathbb{S}$ telle que $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, et ϵ tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$, il existe $a'(\epsilon, f) > 0$, $n_3(\frac{1}{2}\epsilon) < \infty$ et $c(\frac{1}{2}\epsilon) > 0$ (les deux derniers dépendant uniquement de ϵ), tels que l'on ait la propriété suivante. Pour tout sous-intervalle $\mathcal{I} = [u,v]$ de $[0,1]$, tel que $|\mathcal{I}| = |v-u| > 0$, lorsque*

$$n \geq n_3(\frac{1}{2}\epsilon), \frac{c(\frac{1}{2})\log n}{n} \leq a \leq a'(\epsilon, f) \wedge \frac{1}{2}|\mathcal{I}|$$

on a

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \leq 2\exp\left(\frac{-1}{4}\{|\mathcal{I}| \wedge \frac{1}{1}a^{-\epsilon/2}\}\right)$$

Preuve Sans perte de généralité, on suppose $|\mathcal{I}| < \frac{1}{2}$, sinon, on remplace $\mathcal{I} = [u,v]$ par $[u, u+\frac{1}{2}]$. Soient $n \geq 5$, $0 < a < |\mathcal{I}| \wedge (1/e)$, et $\mathcal{I} \subseteq [0, 1-a]$ choisis, de telle sorte que $\log_+(1/a) = \log(1/a)$ et les hypothèses du Fait 1 soient vérifiées. On choisit $f \in \mathbb{S}$ tel que $0 < |f|_{\mathbb{H}} < 1$, et ϵ tel que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}}$, ce qui implique que $1-\epsilon > 1 - \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}} > \frac{1}{2}$. On se réfère aux arguments donnés dans la preuve de (1.1), ainsi qu'à la définition $L_n(a,t,s) = n^{-1/2}(\Pi(nt+nsa) - \Pi(nt) - nas)$ et aux le fait 1 et fait 2, pour obtenir les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
Q_n(\epsilon) &= \mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{L_n(a,t,.)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f)\right) \\
&\leq 2\prod_{j=1}^{\lfloor|\mathcal{I}|\rfloor}\left\{1 - \mathbb{P}\left(\forall t \in \mathcal{I} : \frac{L_n(a, t+(j-1)a, \cdot)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad 2\exp\left(-\lfloor |\mathcal{I}|/a \rfloor \mathbb{P}\left(\frac{\Pi(na\cdot) - na\cdot}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f)\right)\right)$$

$$\leq \quad 2\exp\left(-\lfloor |\mathcal{I}|/a \rfloor \left\{P_{3,n}(\epsilon) - P_{2,n}(\frac{1}{2}\epsilon)\right\}\right) \tag{2.7}$$

où

$$P_{3,n}(\epsilon) = \mathbb{P}\left(\frac{W_n(na.)}{\sqrt{2a\log(1/a)}} \in \mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)\right) = \mathbb{P}\left(W_{\log(1/a)}(\cdot) \in G\right)$$

et, avec $P_{2,n}(\cdot)$ défini comme dans (1.3)

$$P_{2,n}(\frac{1}{2}\epsilon) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}\left|\frac{W(nas) - \{\Pi(nas) - nas\}}{\sqrt{2na\log_+(1/a)}}\right| \geq \frac{1}{2}\epsilon\right)$$

Observons que $G = \mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)$ est un sous-ensemble ouvert de $(B[0,1],\mathcal{U})$. Par application de fait 3 (ii) et de l'hypothése que $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|f|_{\mathbb{H}} < \frac{1}{2}$, on a

$$J(\mathcal{N}_{\frac{1}{2}\epsilon}(f)) \leq \left(|f|_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2}\epsilon\right)^2 < \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)^2 = 1 - \epsilon\left(1 - \frac{1}{4}\epsilon\right) < \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)$$

Alors, d'aprés le fait 3 (ii), il existe un $a_1'(\epsilon, f) \in (0, 1/e]$, tel que pour tout $0 < a \leq a_1'(\epsilon, f)$,

$$P_{3,n}(\epsilon) = \mathbb{P}\left(W_{\log(1/a)}(\cdot)\right) \in G \geq \exp\left(-\left\{\log(1/a)\right\}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)\right\}\right) = a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}$$

Considérons n et a tels que

$$n \geq n_3(\frac{1}{2}\epsilon) \quad \text{et} \quad \frac{c(\frac{1}{2}\epsilon)\log n}{n} \leq a \leq (1/e) \wedge \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon}$$

Rappelons (2.6), c'est à dire $P_{2,n}(\epsilon_2) \leq C_2 a^2$ On peut écrire

$$C_2 a^2 = a^{1-\frac{1}{2}\epsilon} \times a \times C_2 a^{\frac{1}{2}\epsilon}$$

Comme $a \leq (1/e) \wedge \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon}$, le fait que $a < \frac{1}{e}$ implique que $a < \frac{1}{2}$. De plus, le fait que $a \leq \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon}$ implique que

$$C_2 a^{\frac{1}{2}\epsilon} \leq \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{(2/\epsilon)\times(\epsilon/2)} = 1$$

On a donc

$$P_{2,n}(\frac{1}{2}\epsilon) \leq C_2 a^2 \leq \frac{1}{2} a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}$$

En résumé de ces arguments, on obtient l'implication

$$n \geq n_3(\frac{1}{2}\epsilon) \ \text{ et } \ \frac{c(\frac{1}{2}\epsilon)\log n}{n} \leq a \leq (1/e) \wedge \left\{\frac{1}{C_2}\right\}^{2/\epsilon} \Rightarrow \mathbb{P}_{2,n}(\frac{1}{2}\epsilon) \leq C_2 a^2 \leq \frac{1}{2} a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}$$

Ensuite, on observe que, si $a < \frac{1}{2}|\mathcal{I}|$, alors

$$\left\lfloor \frac{|\mathcal{I}|}{a} \right\rfloor \geq \frac{|\mathcal{I}|}{a} - 1 \geq \frac{|\mathcal{I}|}{2a}$$

Ceci combiné avec (2.7), nous montre que

$$Q_n(\epsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\mathrm{I}}{4a} \times a^{1-\frac{1}{2}\epsilon}\right)$$

ce qui prouve Proposition 2.2.2. Notons que $n_3(\cdot)$ et $c(\cdot)$ sont identiques à ceux de la Proposition 2.2.1 ■

2.3 Lois limites fonctionnelles

Nous présentons deux lois limites fonctionnelles qui résultent des inégalités de base présentées précedemment

Théorème 2.3.1 *supposons que* $\{h_n, n \geq 1\}$ *vérifie les conditions suivants lorsque* $n \to \infty$

$$h_n \longrightarrow 0 \ \text{ et } \ \frac{nh_n}{\log n} \longrightarrow \infty \tag{2.8}$$

Alors ,pour tout $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$,lorsque $n \longrightarrow \infty$ on a

$$\triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{2.9}$$

Commentaires. sur les hypothéses

1. Il est courant que l'on considére $\{h_n : n \geq 1\}$ une suite de constantes positives vérifiant une ou plusieurs conditions, parmi les suivantes
   (H.1) (i) $0 < h < 1$ et (ii) $h_n \longrightarrow 0$, (iii) $h_n \downarrow$, $nh_n \uparrow \infty$
   (H.2) $nh_n / \log\log n \longrightarrow \infty$
   (H.3) $nh_n / \log n \longrightarrow c \in (0, \infty)$
   (H.4) $nh_n / \log n \longrightarrow 0$
   (H.5) $nh_n / \log n \longrightarrow \infty$
   (H.5') $nh_n / \log(1/h_n\sqrt{n}) \longrightarrow \infty$
   (H.6) $\log(1/h_n)/ \log\log n \longrightarrow \infty$
   (H.6') $(\log(1/h_n))/ \log\log n \longrightarrow d \in [0, \infty)$
   (H.6") $(\log(1/h_n\sqrt{n}))/ \log\log n \longrightarrow d \in [-\infty, +\infty]$
   (H.7) $(\log(1/h_n))/ \log n \longrightarrow 1$

2. Nous distinguons quatre catégories d'incréments $\xi_n(h_n, t, s)$ qui dépendent de la vitesse à laquelle h_n tend vers 0. Les incréments sont dits :
   (a) Incréments larges, lorsque h_n vérifie les conditions
      – (H.1) et (H.1) $(iii) \Rightarrow h_n \geq 1/n$
      – (H.6')$\Rightarrow h_n = 1/(\log n)^{d_n}$, avec $d_n \longrightarrow d \in [0, \infty)$
      – (H.6")$\Rightarrow h_n > \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$,avec $d \longrightarrow [-\infty; 0]$.
   (b) Incréments standards, lorsque h_n vérifie les conditions
      – (H.1)-(H.5)-(H.6)$\Rightarrow \frac{\log n}{n} < h_n < \frac{1}{(\log n)^\alpha}, 0 < \alpha < \infty$
   (c) Incréments intermédiaires, lorsque h_n vérifie les conditions
      – (H.3))$\Rightarrow h_n = c_n \log n/n$ avec $c_n \longrightarrow c \in (0, \infty)$
      – (H.6")$\Rightarrow$ pour $d = \infty : h_n < \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^\alpha}, \alpha > 0$
   (d) Incréments petits, lorsque h_n vérifie les conditions
      – (H.1)-(H.4)-(H.7)$\Rightarrow \frac{1}{n} < h_n < \frac{\log n}{n}$

3. pour $\{h_n, 1 \geq 1\}$ vreifiant certaines conditions les comportement limite lorsque $n \longrightarrow \infty$,des familles des suites de fonctions suivantes à été étudie antérierement à celui de $\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{*}_{n,\mathcal{I}}(h_n) &= \left\{ \frac{\xi_n(h_n, t, .)}{\sqrt{2h_n \log\log n}}, t \in [0, 1-h_n] \cap \mathcal{I} \right\} \\
\mathcal{F}^{**}_{n,\mathcal{I}}(h_n) &= \left\{ \frac{\xi_n(h_n, t, .)}{\sqrt{2h\{\log(\frac{1}{h_n}) + \log\log n\}}}, t \in [0, 1-h_n] \cap \mathcal{I} \right\}
\end{aligned}$$

ou $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ est un intervalle tel que $u < v$

Considérons la condition (2.8) qui implique (2.9). La propriété (2.9) est inplicitement connue, une version presque sûre a été énoncée pour la première fois dans le Theorem 3.1 de Deheuvels et Mason [6], sous des conditions plus fortes que (2.8). La convergence (2.9) n'a pas lieu p.s. sans des conditions supplémentaires. Si en plus de la condition (2.9), on suppose les conditions (H.1)(ii),(iii) et (H.6) satisfaites, alors, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) = o(1)$$

Deheuvels [3] montrent respectivement, que sous les conditions (H.1) et (H.6'), lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\triangle(\mathcal{F^{*}}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_{d+1}) = o(1) \quad \text{et} \quad \triangle(\mathcal{F^{**}}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_{d}) = o(1)$$

Deheuvels et Einmahl [20] ont établi que lorsque les conditions (H.1) et (H.2) sont vérifiées, lorsque $n \to \infty$, on a p.s.

$$\triangle(\mathcal{F^{*}}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) = o(1)$$

Deheuvels et Einmahl [4] dit que, pour toute suite $\{hn : n \geq 1\}$ suivant les conditions (H.1)(i) et (H.5)-(H.6) ou (H.6'), lorsque $n \to \infty$,

$$\triangle(\mathcal{F^{**}}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}_{d/d+1}) = o(1)$$

Dans le théorème suivante ,nous présentons un exstension du théorème précédente dans context d'uniformité relativement à la taille des incréments (on considère le supremum, relativement aux tailles d'incréments h, de la distance de Hausdorff entre les ensembles de fonctions concernés)

Théorème 2.3.2 *Supposons que lorsque $n \longrightarrow \infty$,les suites $0 < a_n < b_n < 1$ soient telles que :*

$$b_n \longrightarrow 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \longrightarrow \infty \tag{2.10}$$

Alors pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ et tout inervalle $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ on a

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{2.11}$$

2.3.1 Preuve du Théorème (2.3.1)

siot $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ un intervalle fixé,tel que $u < v$ et conséderons l'evenement suivant :

$$\left\{ \exists t \in [0, 1-a] \cap \mathcal{I}, \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right\} = \bigcup_{t \in [0,1-a] \cap \mathcal{I}} \left\{ \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right\}$$

Nous allons travailler avec $\mathcal{I} = [0, 1]$,posons $t_j = (j-1)a$ avec $j = 1, ..., \lfloor \frac{1}{a} \rfloor - 1$ et $t_{\frac{1}{a}} = 1 - a$ observons que pour tout $\epsilon > 0$

$\left\{ \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right\} \subseteq \left\{ \frac{\xi_n(a,t_j,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \notin \mathbb{S}^{\frac{\epsilon}{2}} \right\} \bigcap \left\{ \frac{\|\xi_n(a,t,.) - \xi_n(a,t_j,.)\|}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} > \frac{\epsilon}{2} \right\}$

l'inclusion ci-dessus combinée avec l'inégalité de bonferonni que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(\epsilon) &= \mathbb{P}\left(\exists t \in [0, 1-a] \cap \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \notin \mathbb{S}^\epsilon \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{1}{a} \rfloor} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \notin \mathbb{S}^{\frac{\epsilon}{2}} \right) + \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1-a]} \frac{\| \xi_n(a,t,.) - \xi_n(a,t_j,.) \|}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \geq \frac{\epsilon}{2} \right) \\
&= P_{1,n}(\epsilon/2) + P_{2,n}(\epsilon/2)
\end{aligned}$$

Une majoration de $P_{1,n}(\epsilon/2)$ est immédiate lorsque l'on utilise la Proposition 1.2.1 sous la condition $\frac{na}{\log n}$ *et* $a \leq a(\epsilon)$ vérifiée pour a. Nous obtenons vérifie pour a. Nous obtenons

$$\mathbb{P}_{1,n}(\epsilon/2) \leq \lfloor 1/a \rfloor * C_4 a^{1+\epsilon}$$

on observe que $\lfloor \frac{1}{a} \rfloor \leq (\frac{1}{a}) + 1 \leq 2a$ car $a < 1/e$ dans la Proposition 2.2.1. Alors

$$P_{1,n}(\epsilon/2) \leq 2C_4 a^{\epsilon/2} \tag{2.12}$$

Maintenant,nous allons évaluer $P_{2,n}(\epsilon/2)$ pour l'intervalle $\mathcal{I}$ et $a > 0$ nous considérons le moduele de continuté du processus uniforme définie par

$$\omega_{n,\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a) = \sup_{s,T \in \mathcal{I}} |\alpha_n(t) - \alpha_n(s)|$$

observe que

$$P_{2,n}(\epsilon/2) \leq \mathbb{P}\left(\frac{2\omega_{n,\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \geq \epsilon/2\right)$$

Fait 5. Soit $0 < a \leq \delta \leq \frac{1}{2}$. Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\omega_{n,\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a) \geq \lambda\sqrt{a}\right) \leq \frac{20}{a\delta^3}\exp\left(-(1-\delta)^4\frac{\lambda^2}{2}\psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{na}}\right)\right)$$

où pour tout $0 \leq x \leq 1, \psi(x) = 2h(1+x)/x^2$ avec $h(1+x) = (1+x)\log(1+x) - x$. D'aprés le Fait ci dessus, pour $a \leq \delta \leq 1/2$ et $\sqrt{2\log(1/a)}\epsilon/4 > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{2\omega_{n,\mathcal{I}}^{|\cdot|}(a)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \geq \epsilon/2\right) \leq \frac{20}{a\delta^3}\exp\left(-(1-\delta)^4\log(\frac{1}{a})\frac{\epsilon^2}{32}\psi\left(\sqrt{\frac{\log(\frac{1}{a})\epsilon}{2na}}\right)\right) \tag{2.13}$$

D'aprés l'inégalité (2.12) et (2.13) nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(\epsilon) &\leq \mathbb{P}_{1,n}(\epsilon/2) + \mathbb{P}_{2,n}(\epsilon/2) \\
&\leq 2C_4 a^{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{20}{a\delta^3}\exp\left(-(1-\delta)^4\log(\frac{1}{a})\frac{\epsilon^2}{32}\psi\left(\sqrt{\frac{\log(\frac{1}{a})\epsilon}{2na}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Maintenant,considérons $h_n; n \geq 1$ une suite de constantes positives qui, lorsque $n \longrightarrow \infty$, vérifie la condition suivant,

$$h_n \longrightarrow 0 \quad et \quad \frac{nh_n}{\log n} \longrightarrow \infty$$

Pour le choix de $a = h_n$ vérifiant l'hypothése ci-dessus, nous obtenons que, lorsque $n \longrightarrow \infty$, $\mathbb{P}_{1,n}(\frac{\epsilon}{2}) = o(1)$. D'autre part, observons que, sous les mêmes conditions, lorsque $n \longrightarrow \infty$, $\psi\left(\sqrt{\frac{\log(1/a)}{2na}}\right) = 2(1 + o(1))$ on obtient $\mathbb{P}_{2,n}(\epsilon/2) = o(1)$ Nous complétons la preuve du Théorème 2.3.1 en combinant le fait $\mathbb{P}_n(\epsilon) = o(1)$ avec la Proposition 2.2.2, puis en faisant appel à la définition de la distance de Hausdorff.

2.3.2 Preuve du Théorème (2.3.2)

"Bornes externes"

Dans cette section, nous allons démontrer la proposition suivante qui correspond à la partie "bornes externes" du Théorème (2.3.2).

Proposition 2.3.1 *pour tout* $0 < \epsilon_0 < 1$ *et* $0 < \epsilon_1 < 1$ *il existe des constantes* $0 < r_1(\epsilon_0, \epsilon_1) < \infty$ *et* $0 < b_1(\epsilon_0, \epsilon_1) < \infty$ *telles que pour*
$\mathcal{H}_n(\epsilon_0, \epsilon_1) = \left[\frac{r_1(\epsilon_0,\epsilon_1)\log n}{n}, b_1(\epsilon_0, \epsilon_1)\right]$ *et tout* n *assez grand,on ait*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathcal{H}_n(\epsilon_0,\epsilon_1)} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^{\epsilon_1}\right) \geq 1 - \epsilon_0$$

Lorsque $\mathcal{H}_n$ *vérifie les hypothéses du Théorème (2.3.2), une conséquence directe de la Proposition (2.3.1)est la suivante. Pour tout* $0 < \epsilon < 1$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$*,on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^{\epsilon}\right) \longrightarrow 1$$

Nous allons présenter deux lemmes et une proposition qui permettront d'établir la démonstration de la Proposition (2.3.1).

Lemme 2.3.1 *pour tout* $0 < \epsilon < 1$*,il existe un* $0 < a_1(\epsilon) \leq 1/e$ *tel que l'on ait la proprieté suivante pour tout* $f \in \mathbb{S}$ $0 \leq \lambda \leq 1$ *et* $t \leq s \leq s + \lambda a \leq t + a$ *on pose*

$$f_{s,\lambda}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ f\left(\frac{s-t}{a} + \lambda u\right) - f\left(\frac{s-t}{a}\right) \right\} \quad pour \quad 0 \leq u \leq 1$$

Alors on a

$$f_{s,\lambda} \in \mathbb{S} \quad et \quad | f_{s,\lambda} |_{\mathbb{H}} \leq | f |_{\mathbb{H}}$$

De plus pour tout $0 \leq a \leq a_1(\epsilon)$ *et* $0 \leq t < 1 - a$ *on a implications*

$$\left\{ \frac{\xi(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \in \mathcal{N}_\epsilon(f) \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \frac{\xi(\lambda a, s, .)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(\frac{1}{a})}} \in \mathcal{N}_{6\epsilon}(f_{s,\lambda}) \text{ pour tout } s, \lambda \right.$$

$$\left. \text{tel que } t \leq s \leq t + s(1-\lambda)aet1/2 \leq \lambda \leq 1 \right\} \tag{2.14}$$

$$\left\{ \frac{\xi(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(\frac{1}{a})}} \in \mathbb{S}^\epsilon \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \frac{\xi(\lambda a, s, .)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(\frac{1}{a})}} \in \mathbb{S}^{6\epsilon} \text{ pour tout s}, \lambda \right.$$

$$\left. \text{tel que } t \leq s \leq t + s(1-\lambda)aet1/2 \leq \lambda \leq 1 \right\} \tag{2.15}$$

preve soit $0 < \epsilon < 1/e$ on considére que l'évenement

$$A_{n,\epsilon} = \left\{ \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^\epsilon \right\}$$

a lieu Alors il existe une fonction $f \in \mathbb{S}$ telle que

$$\left\| \frac{\xi(a,t,.)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} - f \right\| < \epsilon$$

D'aprés l'ingalité triangulaire et les définitions suivant (2.16) et (2.17)

$$|f|_{\mathbb{H}} = \begin{cases} \{\int_0^M f(u)^2 du\}^{\frac{1}{2}} & \text{si} f \in AC[0,M] \quad et \quad f(0) = 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_{[0,1]} = \{f \in B[0,1], |f|_{\mathbb{H}} \leq 1\} \tag{2.17}$$

$$\left\| \frac{\xi(a,t,.)}{\sqrt{2a\log_+(\frac{1}{a})}} \right\| \leq \epsilon + \parallel f \parallel = \epsilon + \sup_{0\leq u\leq 1} \left| \int_0^u f(v)dv \right| < \epsilon + |f|_{\mathbb{H}} \leq \epsilon + 1$$

D'aprés l'inegalité $\parallel \frac{\xi(a,t,.)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} - f \parallel < \epsilon$ et d'une application de l'inégalité triangulaire on observe que ,pour tout $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$
on a

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq u\leq 1} \left| \frac{\xi(a,t,u)}{\sqrt{2a\log_+(1/\lambda a)}} - f(u) \right| &\leq \sup_{0\leq u\leq 1} \left| \frac{\xi(a,t,u)}{\sqrt{2a\log_+(1/\lambda a)}} - f(u) \right| + \sup_{0\leq u\leq 1} \left| \frac{\xi(a,t,u)}{\sqrt{2a\log_+(1/\lambda a)}} \right| \\
&\quad \times \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2} - 1 \right| \\
&\leq \epsilon + \sup_{0\leq u\leq 1} \left| \frac{\xi(a,t,u)}{\sqrt{2a\log_+(1/\lambda a)}} \right| \times \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2} - 1 \right| \\
&\leq \epsilon + (1+\epsilon)M(a) \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

avec

$$M(a) = \sup_{\frac{1}{2}\leq\lambda\leq 1} \left| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right| = \left| \left\{ \frac{\log(1/a)}{\log(2/a)} \right\}^{1/2} - 1 \right|$$

comme $M(a) \to 0$ lorsque $a \longrightarrow 0$ $\exists a_1(\epsilon)$ tel que $0 < a_1(\epsilon) < 1/e$ et $M(a) < \epsilon/(\epsilon+1)$ pour tout $0 < a < a_1(\epsilon)$.Alors d'aprés (2.18) pour tout $0 < a < a_1(\epsilon)$ et $1/2 \leq \lambda \leq 1$ on a

$$\left\| \frac{\xi(a,t,.)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(\frac{1}{\lambda a})}} - \frac{f}{\sqrt{\lambda}} \right\| \leq \sqrt{2}(\epsilon + (1+\epsilon)M(a)) \leq 2\sqrt{2\epsilon} < 3\epsilon \tag{2.19}$$

pour un fonction $f \in \mathbb{S}$ tell que ci-dessus,et pour tout $0 < \lambda < 1$,$t \leq s \leq s + \lambda a \leq t + a$ on considére :

$$f_{s,\lambda}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ f\left(\frac{s-t}{a} + \lambda u\right) - f\left(\frac{s-t}{a}\right) \right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leq u \leq 1$$

on observe que $f_{s,\lambda}(0) = 0$, $\dot{f}_{s,\lambda}(u) = \lambda^{1/2}\dot{f}\left(\frac{s-t}{a} + \lambda u\right)$ et

$$\int_0^1 (\dot{f}_{s,\lambda}(u))^2 du = \int_0^1 \left(\lambda^{1/2}\dot{f}\left(\frac{s-t}{a} + \lambda u\right)\right)^2 du = \int_{\frac{s-t}{a}}^{\frac{s-t}{a}} \dot{f}(v)^2 dv \leq 1$$

Autrement dit,on a $|f_{s,\lambda}|_{1,\mathbb{H}} \leq |f|^2_{1,\mathbb{H}} \leq 1$. Alors,il s'ensuit que $f_{s,\lambda} \in \mathbb{S}$. Ceci prouve que l'on a bien $|f_{s,\lambda}|_{\mathbb{H}} \leq |f|_{\mathbb{H}}$. Maintenant,obsreve que

$$\begin{aligned} \xi_n(\lambda a, s, .) &= \alpha_n(s + \lambda a.) - \alpha_n(s) \\ &= \alpha_n(t + ((s-t)/a)a + \lambda a.) - \alpha_n(t) \\ &\quad -\alpha_n(t + ((s-t)/a)a) + \alpha_n(t) \\ &= \xi_n(a, t, (s-t)/a + \lambda.) - \xi_n(a, t, (s-t)/a) \end{aligned}$$

D'après cette observation, (2.19) et l'inégalité triangulaire, lorsque $0 < a < a_1(\epsilon), \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ et $t \leq s \leq s + \lambda a \leq t + a$ on a

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\xi_n(\lambda a, s, .)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/\lambda a)}} - f_{s,\lambda}\right\| &\leq \left\|\frac{\xi_n(a, t, ((s-t)/a) + \lambda.)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/\lambda a)}} - \frac{f((s-t)/a) + \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right\| \\ &+ \left\|\frac{\xi_n(a, t, ((s-t)/a))}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/\lambda a)}} - \frac{f((s-t)/a)}{\sqrt{\lambda}}\right\| < 6\epsilon \end{aligned}$$

D'où, les faits (2.14) et (2.15) sont vérifiés. ■

Pour $0 < a \leq 1/e$, on pose $t_j = (j-1)a$ pour $j = 1, \cdots, N-1$, avec $N = \lfloor 1/a \rfloor$, et tel que $\lfloor u \rfloor$ vérifiant $\lfloor u \rfloor \leq u < \lfloor u \rfloor + 1$ désigne la partie entière de $u \in \mathbb{R}$. On pose également $t_N = 1 - 2a$.

Lemme 2.3.2 *pour tout $0 < \epsilon < 1$,il existe un $0 < a < a_1(\epsilon) \leq 1/e$ tel que la propriete suivante soit verifié,pour tout $0 < a < a_2(\epsilon)$ on a l'implication*

$$\bigcap_{j=1}^{N} \left\{\frac{\xi(2a, t_j, .)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/2a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon/6}\right\} \Rightarrow \left\{\frac{\xi_n(a, t, .)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon}, \forall 0 \leq t \leq 1-a\right\} \quad (2.20)$$

Preuve. Nous allons appliquer la relation (2.15) du Lemme 2.3.1 pour un choix de $\epsilon/6$ au lieu de ϵ,et $\lambda = \frac{1}{2}$. Alors pour tout $0 < 2a < a_1(\epsilon/6)$ et $0 < t_j \leq 1 - 2a$ on a l'implication

$$\left\{ \frac{\xi(2a, t_j, .)}{\sqrt{2(2a) \log_+(1/2a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon/6} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{\xi(a, t, .)}{\sqrt{2(2a) \log_+(1/2a)}} \in \mathbb{S}^{\epsilon} : \forall t, t_j \leq t \leq t_j + (1 - \frac{1}{2})2a = t_j + a \right\} \quad (2.21)$$

on observe que $\cup_{j=1}^{N}[t_j, t_j + a] = [0, (N-1)a] \cup [1 - 2a, 1 - a]$. comme $a(N-1) = a\lfloor 1/a \rfloor - a > a((1/a) - 1) - a = 1 - 2a$
il suit que $\cup_{j=1}^{N+1}[t_j, t_j + a] \supseteq [0, 1 - 2a] \cup [1 - 2a, 1 - a] = [0, 1 - a]$. Alors on posant $a_2(\epsilon) = \frac{1}{2}a_1(\epsilon/6)$ on obtient (2.20) d'après l'implication établie en début de preuve ■

Proposition 2.3.2 *Il existe $C_5 > 0$ une constante universelle tele que la proprieté suivante soit vérifié pour tout $0 < \epsilon < 1$ il existe des constantes $0 < a_3(\epsilon) \leq 1/e$ et $a < C_1(\epsilon) < \infty$ et $n_1(\epsilon) < \infty$ tel que pour tout $n \geq n_1(\epsilon)$ et $a > 0$ verifiant*

$$\frac{na}{\log n} \geq c_1(\epsilon) \quad et \quad a \leq a_3(\epsilon) \quad (2.22)$$

on ait

$$\mathbb{P}\left(\exists \lambda \in [\frac{1}{2}, 1], \exists s \in [0, 1 - \lambda a] : \frac{\xi(\lambda a, s, .)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(\frac{1}{\lambda a})}} \notin \mathbb{S}^{6\epsilon} \right) \leq C_5 a^{\epsilon/6} \quad (2.23)$$

Preuve on observe que $\bigcup_{t=0}^{1-a}[t, t + (1-\lambda)a] = [0, 1 - a + (1-\lambda)a] = [0, 1 - \lambda a]$. D'aprés cette observation et une application du lemme (2.3.1) on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(a) &= \left\{ \exists \lambda \in [\frac{1}{2}, 1], \exists s \in [0, 1 - \lambda a] : \frac{\xi_n(\lambda a, s, .)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/\lambda a)}} \notin \mathbb{S}^{6\epsilon} \right\} \\
&= \bigcup_{0 \leq t \leq 1-a} \left\{ \exists \lambda \in [\frac{1}{2}, 1], \exists s \in [t, t + (1-\lambda)a] : \frac{\xi_n(\lambda a, s, .)}{\sqrt{2\lambda a \log_+(1/\lambda a)}} \notin \mathbb{S}^{6\epsilon} \right\} \\
&\subseteq \bigcup_{0 \leq t \leq 1-a} \left\{ \frac{\xi_n(a, t, .)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon} \right\} = \left\{ \exists t \in [0, 1 - a] : \frac{\xi_n(a, t, .)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon} \right\}
\end{aligned}$$

puis d'aprés le lemme (2.3.2) lorsque $0 < a < a_1(\epsilon) \wedge a_2(\epsilon)$ et$n \geq 1$ on a

$$\varepsilon_n(a) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\lfloor 1/a \rfloor} \left\{ \frac{\xi_n((2a,(j-1)a,.)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon/6} \right\}$$

Remplaçonsϵ par $\epsilon/6$ et a par $2a$ dans la Proposition (2.2.1). Alors lorsque $0 < a < a_3(\epsilon) = \frac{1}{2}a(\epsilon/6) \wedge a_1(\epsilon) \wedge a_2(\epsilon), n \geq n_1(\epsilon) = n(\epsilon/6)$ et $na/\log n \geq c_1(\epsilon) = \frac{1}{2}c(\epsilon/6)$ on a :

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n(a)) \leq \sum_{j=1}^{\lfloor 1/a \rfloor} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_n((2a,(j-1)a,.)}{\sqrt{2(2a)\log_+(1/(2a))}} \notin \mathbb{S}^{\epsilon/6} \right) \leq \lfloor 1/a \rfloor C_4 (2a)^{1+\epsilon/6}$$

Pour finir on observe que $\lfloor 1/a \rfloor \leq (1/a) + 1 \leq 2/a$ (car $a < 1/e$ dans le lemme (2.3.1) et le lemme (2.3.2) et $2^{1+\epsilon/6} < 2^2$ (car $0 < \epsilon < 1$) impliquent

$$\mathbb{P}(\varepsilon(a)) \leq 8C_4 a^{\epsilon/6}$$

Pour obtenir l'inégalité (2.23), il suffit de poser $C_5 = 8C_4$.

Preuve de la proposition(2.3.1) Fixons $0 < \epsilon_0 < 1$ et $0 < \epsilon_1 < 1$.Dans le cadre des notations de la Proposition (2.3.2), on pose $\epsilon = \frac{1}{6}\epsilon_1$ et $a^{-j}b$ pour $j = 1, ..., k$ et $b > 0$ on suppose que b et $k \geq 1$ vérifient

$$\frac{n2^{-k}b}{\log} \geq c(\frac{1}{6}\epsilon_1) \quad \text{et} \quad b \leq a_3(\frac{1}{6}\epsilon_1) \tag{2.24}$$

et on applique la proposition (2.3.2) pour obtenir les inégalites

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\exists h \in [2^{-k}b, b], \exists t \in [0, 1-h] \frac{\xi_n(h,t,.)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} \notin \mathbb{S}_1^{\epsilon} \right) \\
\leq \;& \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(\exists \lambda \in [\frac{1}{2}, 1], \exists s \in [0, 1-\lambda a] \frac{\xi_n(\lambda 2^{-j}b, s, .)}{\sqrt{2\lambda 2^{-j} b \log_+(1/\lambda 2)}} \notin \mathbb{S}_1^{\epsilon} \right) \\
\leq \;& C_5 \sum_{j=0}^{k-1} (2^{-j}b)^{\frac{1}{36}\epsilon_1} \leq C_5 b^{\frac{1}{36}\epsilon_1} \sum_{j=0}^{k-1} \{2^{-\frac{1}{36}\epsilon_1}\}^j \leq \frac{C_5 b^{\frac{1}{36}\epsilon_1}}{1 - 2^{-\frac{1}{36}\epsilon_1}}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

observe qu'il existe un $0 \leq b_1(\epsilon_0, \epsilon_1) \leq a_3(\frac{1}{6}\epsilon_1)$ tel que pour $b = b_1(\epsilon_0, \epsilon_1)$, on ait

$$\frac{C_5 b^{\frac{1}{36}\epsilon_1}}{1 - 2^{-\frac{1}{36}\epsilon_1}} < \epsilon_0$$

Pour ce choix de $b > 0$, on choisit K dans (2.25) de sorte que

$$2^{-k-1} b < \frac{c(\frac{1}{6}\epsilon_1) \log n}{n} \leq 2^{-k} b$$

pour finir le choix $r_1(\epsilon_0, \epsilon_1) = 2c(\frac{1}{36}\epsilon_1)$ nous permet de conclure à

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{h \in \mathcal{H}_n(\epsilon_0, \epsilon_1)} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^{\epsilon_1} \right) \geq 1 - \epsilon_0$$

"Bornes internes"
soit $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$.Rappellons la définition suivante

$$\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h) = \left\{ \frac{\xi_n(h, t, .)}{\sqrt{2h \log_+(\frac{1}{h})}} : t \in [0, 1-h] \cap \mathcal{I} \right\}$$

Dans cette section, nous allons montrer la proposition suivante, qui correspond à la partie dite "bornes internes" du Théorème (2.3.2)

Proposition 2.3.3 *Fixons un intervalle $\mathcal{I} = [u, v] \in [0, 1]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$ pour tout $0 < \epsilon_0 < 1$ et $0 < \epsilon_1 < 1$ il existe des constantes $0 < r_2(\epsilon_0, \epsilon_1) < \infty$ et $0 < b_2(\epsilon_0, \epsilon_1) < \infty$ telles que*
si on pose
$\mathcal{H}_n(\epsilon_0, \epsilon_1) = \left[\frac{r_2(\epsilon_0, \epsilon_1) \log n}{n}, b_2(\epsilon_0, \epsilon_1)\right]$
Alors pour tout n assez grand,on a :

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcap_{h \in \mathcal{H}_n(\epsilon_0, \epsilon_1)} \mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)^{\epsilon_1} \right) \geq 1 - \epsilon_0$$

Une conséquence directe de la Proposition (2.3.3). Sous les hypothéses du Théoréme (2.3.2), avec $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a pour tout $0 < \epsilon < 1$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{h \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)^{\epsilon}\right) \longrightarrow 1$$

Remarque 2.3.1 *pour démontre le proposition (2.3.3) nous introduisons quelques notations. Pour tout $g \in B[0,1]$ et $0 < \lambda \leq 1$ on pose*

$$g_\lambda(u) = \lambda^{-\frac{1}{2}} g(\lambda u) \quad pour \quad 0 < u < 1 \quad et \quad g_{1/\lambda}(u) = \begin{cases} \lambda^{\frac{1}{2}} g(u/\lambda) & pour \;\; 0 < u < \lambda \\ \lambda^{\frac{1}{2}} g(1) & pour \;\; \lambda < u < 1 \end{cases}$$

On observe que pour tout $f, g \in B[0,1]$ et $0 < \lambda \leq 1$

$$[g_{1/\lambda}] = g \quad et \quad \| f_\lambda - g_\lambda \| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \| f - g \| \tag{2.26}$$

De plus, lorsque $g \in \mathbb{S}$ on voit que $g_\lambda(0) = g_{1/\lambda}(0) = g(0)$,et

$$\dot{g}_\lambda(u) = \lambda^{\frac{1}{2}} \dot{g}(\lambda u) \quad et \quad \dot{g}_{1/\lambda}(u) = \begin{cases} \lambda^{-\frac{1}{2}} \dot{g}(u/\lambda) & pour \;\; 0 < u < \lambda \\ 0 & pour \;\; \lambda < u < 1 \end{cases}$$

Alors ,lorsque $g \in \mathbb{S}$

$$\| g_\lambda \| \leq |g_\lambda|^2_{\mathbb{H}} = \int_0^1 \lambda \dot{g}(\lambda u)^2 du = \int_0^\lambda \dot{g}(v)^2 dv \leq |g|^2_{\mathbb{H}} \leq 1 \tag{2.27}$$

D'ou $g_\lambda \in \mathbb{S}$ de même

$$\| g_{1/\lambda} \| \leq |g_{1/\lambda}|^2_{\mathbb{H}} = \int_0^\lambda \lambda^{-1} \dot{g}(u/\lambda)^2 du = \int_0^1 \dot{g}(v)^2 dv \leq |g|^2_{\mathbb{H}} \leq 1 \tag{2.28}$$

d'ou $g_{1/\lambda} \in \mathbb{S}$

Lemme 2.3.3 *soient $f^{[1]}, ..., f^{[N]} \in B[0,1]$ et $\epsilon > 0$ tel que*

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{N}_\epsilon(f^{[j]}) \tag{2.29}$$

Alors pour tout $0 < \lambda < 1$ on a

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{N}_{\epsilon/\sqrt{\lambda}}(f_\lambda^{[j]}) \tag{2.30}$$

Preuve. On fixe $\epsilon > 0, 0 < \lambda < 1$ et $g \in \mathbb{S}$ d'aprés (2.28) on a $g_{1/\lambda} \in \mathbb{S}$. Alors d'aprés l'inégalité (2.29) il existe un $j \in [0, ..., N]$ tel que $\| f^{[j]} - g_{1/\lambda} \| < \epsilon$. Ainsi, considérant (2.26) on obtient

$$\| f_\lambda^{[j]} - [g_{1/\lambda}]_\lambda \| = \| f_\lambda^{[j]} - g \| < \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow g \in \mathcal{N}_{\epsilon/\sqrt{\lambda}}(f_\lambda^{[j]})$$

ce qui prouve (2.30). ■

Lemme 2.3.4 *pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $a_5(\epsilon) \in [0, 1/e]$ telle que ,pour tout $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ et $0 < a \leq a_5(\epsilon)$*
on ait l'implication

$$\left\| \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} - f \right\| < \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{\xi_n(\lambda a,t,.)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/\lambda a)}} - f_\lambda \right\| < 2\epsilon\sqrt{2} \tag{2.31}$$

Preuve. Supposons que le terme de gauche dans (2.31)a lieu pour une certaine fonction $f \in \mathbb{S}$. Alors d'aprés (2.26) on a l'inégalité

$$\left\| \frac{\xi_n(\lambda a,t,\lambda)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/\lambda a)}} - f_\lambda \right\| < \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\| \frac{\xi_n(a,t,.)}{\sqrt{2a\log_+(1/a)}} - f \right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \tag{2.32}$$

On remarque $\xi_n(\lambda a, t, .) = \xi_n(a, t, \lambda.)$ puis on applique l'ingalité triangulaire et les inégalites (2.28) et (2.32), pour obtenir pour tout $0 < \lambda \leq 1$

$$\left\| \frac{\xi_n(\lambda a,t,.)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/\lambda a)}} - f_\lambda \right\| \leq \left\| \frac{\xi_n(a,t,\lambda.)}{\sqrt{2\lambda a\log_+(1/a)}} - f_\lambda \right\| \times \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \parallel f_\lambda \parallel \times \Big| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2} - 1 \Big| \\
\leq\ & \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2} + \Big| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2} - 1 \Big| \\
\leq\ & \frac{\epsilon}{\sqrt{\lambda}} + \Big| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2} - 1 \Big|
\end{aligned}
$$

on choisit $a_5(\epsilon) > 0$ assez petit de sorte que pour tout $0 < a < a_5(\epsilon)$. on ait

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1} \Big| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(1/\lambda a)} \right\}^{1/2} - 1 \Big| = \Big| \left\{ \frac{\log_+(1/a)}{\log_+(2/a)} \right\}^{1/2} - 1 \Big| \leq \epsilon\sqrt{2}$$

Comme $\epsilon/\sqrt{\lambda} < \epsilon\sqrt{2}$ pour tout $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, l'implication de (1.31) découle des inégalités précédentes ■

preuve de la proposition (2.3.3)

Comme $\mathbb{S}$ est un sous-espace compact de $(B[0,1], \mathcal{U})$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite finie de fonctions $f^{[i]}, ..., f^{[N]} \in \mathbb{S}$ telle que $0 < |f^{[j]}|_{\mathbb{H}} < 1$ pour $j = 1, ..., N$ et

$$\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{N}_\epsilon(f^{[j]})$$

On considére la constante $a'(\epsilon, f)$ de la Proposition (2.2.2) et on choisit un intervalle $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$, tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$. On se restraint au cas $\mathcal{I} \subseteq [0, 1]$ parce qu'alors on aura $\mathcal{I} \subseteq [0, 1 - a]$ lorsque $0 < a < a_3(\mathcal{I}) = 1 - v$ et donc $\mathcal{I} \cap [0, 1 - a] = \mathcal{I}$. En vue d'utiliser la proposition (2.2.2) , on considére $S(a)$ la somme d'un série convergente ,qui est définir par

$$S(a) = 2N \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-1}{4} \{|\mathcal{I}| \wedge \frac{1}{2}\} (2^{-k} a)^{-\epsilon/2} \right)$$

On remarque $S(0) \downarrow 0$ lorsque $a \downarrow 0$.Alors pour tout choix $0 < \varepsilon_0 < 1$ il existe un $a'_1(\varepsilon_0)$ tel que $S(a) < \varepsilon_0$ pour tout $0 < a \leq a'_1(\varepsilon_0)$. Afin de satisfaire les conditions de la proposition

(2.2.2) on fait les choix arbitraires suivants. Pour un choix de ϵ tel que

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq N} |f^{[j]}|_{\mathbb{H}}$$

on pose

$$a''(\epsilon_0, \epsilon) = \min_{j=1,\dots,N} \{a'(\epsilon, f^{[j]})\} \wedge |\mathcal{I}| a_1'(\epsilon_0) \wedge a_3(\mathcal{I}) \wedge a_5(\epsilon)$$

Nous allons montrer que lorsque

$$n \geq n_3(\frac{1}{2}\epsilon) \quad \text{et} \quad a \in \mathcal{H}_n = [2c(\frac{1}{2}\epsilon) n^{-1} \log n, a''(\epsilon_0, \epsilon)] \tag{2.33}$$

on a : $\mathbb{P}(\mathcal{B}_n) < \epsilon_0$, ou $\mathcal{B}_n$ désigne l'événement

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \exists j = 1, ..., N, \exists a \in \mathcal{H}_n, \forall t \in \mathcal{I} : \frac{\xi_n(a, t, .)}{\sqrt{2a \log_+(1/a)}} \notin \mathcal{N}_{2\epsilon\sqrt{2}}(f^{[j]} \right\}$$

Pour cela, nous appliquons le Lemme (2.3.3) et le lemme (2.3.4) pour observer que sous la condition (2.33)

$$\mathcal{B}_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{k=0}^{M} \mathcal{B}_n(k, j)$$

avec $a'' = a''(\epsilon_0, \epsilon), M = \inf\{k \geq 0, 2^{-k} a'' \leq 2c(\frac{1}{2}\epsilon) n^{-1} \log n\}$ et ,pour $k = 0, ..., M$ et $j = 1, ..., N$

$$\mathcal{B}_n(k, j) = \left\{ \forall t \in 1 : \frac{\xi_n(2^{-k} a'', t, .)}{\sqrt{2(2^{-k} a'') \log_+(1/(2^{-k} a''))}} \notin \mathcal{N}_\epsilon(f^{[j]}) \right\}$$

Ensuite, nous combinons les conditions de la proposition (2.2.2) avec la définition de $S(\cdot)$ et l'inégalité de Bonferroni, pour obtenir que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{B}_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{N} [\bigcup_{k=0}^{M} \mathcal{B}_n(k, j)] \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{M} \mathbb{P}(\mathcal{B}_n(k, j)) \leq S(a'') < \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ici, on a utilisé le fait que $a'' = a''(\epsilon_0, \epsilon) \leq a'_1(\epsilon_0)$ ce qui implique le fait que $S(a'') < \epsilon_0$ comme $\epsilon > 0$ peut étre choisi aussi petit que nécessaire, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcap_{n \in \mathcal{H}_n(\epsilon_0, \epsilon_1)} \mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)^{\epsilon_1}\right) \geq 1 - \epsilon_0$$

de la définition de l'évènement $\mathcal{B}_n$ et de l'inégalité (2.34), en sélectionnant $2\epsilon\sqrt{2} < \varepsilon_1$. La preuve de la Proposition (2.3.3) est alors complétée $\blacksquare$

Preuve de Théorème (2.3.2)

Rappelons que sous les conditions du Théorème (1.3.2) et la proposition (2.2.1) et la proposition (2.3.3) implique la proposition (2.3.3) et la proposition (2.3.2). Autrement dit pour tout $0 < \epsilon < 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathcal{H}_n} \mathcal{F}_n(h) \subseteq \mathbb{S}^{\epsilon}\right) \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{H}_n(\epsilon_0, \epsilon_1)} \mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)^{\epsilon}\right) \longrightarrow 1$$

D'aprés la distance de Hausdorff,on obtient directement l'assertion suivante

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1)$$

$\blacksquare$

Chapitre 3

Lois limites fonctionnelles pour le processus de quantiles

L'objet de ce chapitre est l'étude du comportement limite des incréments du processus empirique de quantile uniforme. Le résultat principal qui est une loi limite fonctionnelle uniforme pour ces suites de fonctions aléatoires (voir le Théorème 3.2.2), est analogue au résultat obtenu pour les incréments du processus empirique uniforme (Chapitre 1) et en découle.Nous présentons également des lois limites pour les modules de continuité du processus empirique uniforme, et du processus empirique de quantile uniforme, qui sont uniformes relativement à la taille des incréments

3.1 Le processus empirique de quantile uniforme

Nous désignons par $\{\beta_{n(t)} : 0 \leq t \leq 1\}$ le processus empirique de quantile uniforme basé sur les $n \geq 1$ premières observations de la suite $\{U_n : n \geq 1\}$ d'observations indépendantes de même loi uniforme sur $(0, 1)$. On désigne par

$$\mathbb{V}_n(t) = \inf\{u \geq 0 : \mathbb{U}_n(u) \geq t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

$\mathbb{V}_n(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\mathbb{V}_n(t) = 1$ pour $t > 1$, la fonction emprique de quantile correspondant à $\mathbb{U}_n(\cdot)$. La fonction empirique de quantile $\mathbb{V}_n(\cdot)$ se définit également de la manière suivante. Pour tout $n \geq 0$, posons $\mathbb{U}_{0,n} = 0$ et $\mathbb{U}_{n+1,n} = 1$, et, pour tout $n \geq 1$, notons $\mathbb{U}_{1,n} \leq ... \leq \mathbb{U}_{n,n}$ la statistique d'ordre de $\mathbb{U}_1, ..., \mathbb{U}_n$, obtenue en classant ces variables aléatoires par ordre croissant. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$\mathbb{V}_n(t) = \begin{cases} \mathbb{U}_{1,n} & \text{pour} \quad t = 0 \\ \mathbb{U}_{i,n} & \text{pour} \quad \frac{i-1}{n} < t < \frac{i}{n}, i = 1, ..., n \end{cases}$$

Et on pose

$$\beta_n(t) = \begin{cases} n^{1/2}(\mathbb{V}_n(t) - t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \end{cases}$$

Ensuite, pour tout choix de $a \geq 0$ et $t \in [0, 1]$, nous posons, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\zeta_n(a, t, s) = \beta_n(t + sa) - \beta_n(t)$$

Soient $0 < a_n \leq b_n \leq 1, n = 1, 2, ...$ deux suites de constantes positives, et posons $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$. Pour $h \in \mathcal{H}_n$, on s'intéresse au comportement limite, lorsque $n \longrightarrow \infty$, de la famille de suites de fonctions

$$\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h_n) = \left\{ \frac{\zeta_n(h, t, .)}{\sqrt{2h \log_+ 1/h}}, t \in [0, 1 - h_n] \cap \mathcal{I} \right\}$$

où $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0; 1]$ est un intervalle fixé, tel que $u < v$

3.2 Lois limites fonctionnelles

Le Théorème suivante est l'énoncé d'une loi limite fonctionnelle qui décrit le comportement limite des incréments du processus empirique de quantile uniforme. Cette loi est une conséquence de la loi limite fonctionnelle présentée dans le Théorème (2.3.1) dans le chapitre1

Théorème 3.2.1 *supposons que $\{h_n, n \geq 1\}$ vérifie les conditions suivants lorsque $n \longrightarrow \infty$ $h_n \longrightarrow 0$ et $\frac{nh_n}{\log n} \longrightarrow \infty$*
Alors ,pour tout $\mathcal{I} = [u, v]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$, lorsque $n \longrightarrow \infty$ on a

$$\triangle(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h_n), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1)$$

Le Théorème suivant, est une version généralisée de la loi limite fonctionnelle du Théorème(2.2.1). Cette nouvelle loi limite fonctionnelle locale est établie uniformément relativement à la taille h des incréments

Théorème 3.2.2 *Supposons que lorsque* $n \longrightarrow \infty$*,les suites* $0 < a_n < b_n < 1$ *soient telles que :*

$$b_n \longrightarrow 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n} \longrightarrow \infty \tag{3.1}$$

Alors pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ *et tout inervalle* $\mathcal{I} = [u, v]$ *tel que* $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$ *on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \triangle(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{3.2}$$

3.3 Preuve du Théorème (3.2.1)

Soit $\{S(t); t \geq 0\}$ un processus appelé sommes partielles et définie ci-aprés. Désignons par $\lceil t \rceil = \min n \in \mathbb{Z} : n \geq t$, la partie entiére supérieure de t. Dans la suite, on utilisera la notation $S(t) = S_{\lceil t \rceil}$. On considére $\{w_i : i \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle standard. Alors, on

$$S_0 = 0 \quad et \quad S_i \sum_{j=1}^{i} w_j, i \geq 1$$

Fait 6. Pour tout $n \geq 0$, nous avons l'égalité en distribution

$$\{U_i, n : i = 0, \cdots, n+1\} = \{S_i / S_{n+1} : i = 0, \cdots, n+1\}$$

Fait 7. Il est possible de construire $\{S(t) : t \geq 0\}$ et le processus de Wiener $\{W(t) : t \geq 0\}$ sur un même espace de probabilité, de telle sorte que pour des constantes universelles B_1, B_2 et B_3, l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} |S_k - k - W(k)| \geq B_1 \log T + z \right) \leq B_2 \exp(-B_3 z)$$

ait lieu pour tout $T > 0$ et $z \in \mathbb{R}$
D'aprés la définition de $\mathbb{V}_n(t)$ et l'égalité en distribution de Fait 6, on voit que pour tout $n \geq 0$, on a l'égalité en distribution

$$\mathbb{V}_n(t) = \frac{S(nt)}{S(n+1)} = \frac{S(nt)}{n} \frac{n}{S_{n+1}}, 0 \leq t \leq 1$$

Par application du théoréme central limite, on observe que lorsque $n \to \infty$

$$\frac{n}{S_{n+1}} = \frac{n}{S_n - n + n + w_{n+1}} = \left\{1 + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

Tenant compte des deux précédentes observations et de la définition de $\zeta_n(h,t,s)$ lorsque $n \to \infty$ et $h \to 0$, on obtient l'égalité en distribution qui suit.

$$\begin{aligned}
\zeta_n(h,t,s) &= \sqrt{n}\left[\left\{\frac{S(n(t+sh)) - S(nt)}{n} - sh\right\}\left\{1 + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} + shO_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\{S(n(t+sh)) - S(nt) - nsh\} \times \left\{1 + O_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\} + shO_{\mathbb{P}}(1) \\
&= n^{-1/2}\{S(n(t+sh)) - S(nt) - nsh\} \times \{1 + o_{\mathbb{P}}(1)\} + o_{\mathbb{P}}(1)
\end{aligned}$$

De ce fait, nous nous intéressons aux accroissements de $S(\cdot)$. Par définition des sommes partielles, pour $h \geq 0$ et $s \in \mathbb{R}$, on remarque que pour tout choix de $t \in \mathbb{R}$, on a l'égalité en distribution :

$$\begin{aligned}
S(nt + nsh) - S(nt) - nsh &= \sum_{nt < i \leq nt+nsh} w_i - nsh \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil nsh \rceil} w_i - nsh + \kappa \\
&= S(nsh) - nsh + \kappa
\end{aligned}$$

où κ est une petite erreur majorée par $2\max_{1 \leq i \leq n+1} w_i$

3.4 Modules de continuité

Nous présentons des lois limites nouvelles pour les modules de continuité du processus empirique uniforme, et du processus empirique de quantile uniforme. Leur originalité vient de leur uniformité relativement à la taille h des incréments.
Pour $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0,1]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v-u| > 0$,nous considérons les statistiques suivantes

$$\omega_{n,\mathcal{I}}^{\pm}(h) = \sup_{s,t \in \mathcal{I}}\{\alpha_n(t) - \alpha_n(s)\}, \omega_{n,\mathcal{I}}(h) = \omega_{n,\mathcal{I}}^{-}(h) \vee \omega_{n,\mathcal{I}}^{+}(h)$$

$$\begin{aligned}
\delta^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h) &= \sup_{s,t\in\mathcal{I}}\{\beta_n(t)-\beta_n(s)\}, \delta_{n,\mathcal{I}}(h)=\delta^{-}_{n,\mathcal{I}}(h)\vee\delta^{+}_{n,\mathcal{I}}(h)\\
\Omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h) &= \sup_{t\in\mathcal{I}\cap[0,1-h]}\{\alpha_n(t+h)-\alpha_n(t)\}, \Omega_{n,\mathcal{I}}(h)=\Omega^{-}_{n,\mathcal{I}}(h)\vee\omega^{+}_{n,\mathcal{I}}(h)\\
\Xi^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h) &= \sup_{t\in\mathcal{I}\cap[0,1-h]}\{\beta_n(t+h)-\beta_n(t)\}, \Xi_{n,\mathcal{I}}(h)=\Xi^{-}_{n,\mathcal{I}}(h)\vee\Xi^{+}_{n,\mathcal{I}}(h)
\end{aligned}$$

corollaire 3.4.1 *Supposons que lorsque $n\longrightarrow\infty$,les suites $0<a_n<b_n<1$ soient telles que :*

$$b_n\longrightarrow 0 \quad et \quad \frac{na_n}{\log n}\longrightarrow\infty \tag{3.3}$$

Alors pour $\mathcal{H}_n=[a_n,b_n]$, lorsque $n\longrightarrow\infty$ on a

$$\begin{aligned}
\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right| &= o_{\mathbb{P}}(1), \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\omega_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1)\\
\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\delta^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right| &= o_{\mathbb{P}}(1), \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\delta_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1)\\
\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right| &= o_{\mathbb{P}}(1), \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1)\\
\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Xi^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right| &= o_{\mathbb{P}}(1), \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Xi_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|=o_{\mathbb{P}}(1)
\end{aligned}$$

Preuve du Corollaire La fonctionnelle $\Theta(f)=\pm f(1)$ est continue sur $(C[0,1],\mathcal{U})$ et vérifie le fait que $\sup_{f\in\mathbb{S}}(\pm f(1))=1$. Rappelons que sous les conditions du Théorème (3.3.2) lorsque $n\longrightarrow\infty$

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h),\mathbb{S})=o_{\mathbb{P}}(1) \tag{3.4}$$

On observe que

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{f\in\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)}\Theta(f)-\sup_{f\in\mathbb{S}}\Theta(f)\right| &= \sup_{n\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in\mathcal{I}\cap[0,1-h]}\frac{\pm\{\alpha_n(t+h)-\alpha_n(t)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|\\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}-1\right|
\end{aligned}$$

On applique le Lemme 1 dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)$ et où l'on a (3.4) pour obtenir que, lorsque $n \longrightarrow \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| = o_{\mathbb{P}}(1)$$

Sur le même principe, rappelons que sous les conditions du Théorème (3.2.2), lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\triangle(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h),\mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{3.5}$$

Puis, on applique le Lemme 1.1 dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h)$ et où l'on a (3.5) pour obtenir que lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\Xi^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| = o_{\mathbb{P}}(1)$$

Maintenant, on choisit $\Theta(f) = \sup_{0\le u,v\le 1} \pm\{f(u) - f(v)\}$ continue sur $(C[0,1],\mathcal{U})$ et qui vérifie $\sup_{f\in\mathbb{S}} \pm\{f(u) - f(v)\} = 1$. On observe que

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{f\in\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h)}\Theta(f) - \sup_{f\in\mathbb{S}}\Theta(f)\right| \\
=\ &\sup_{n\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{t\in\mathcal{I}\cap[0,1-h]}\frac{\pm\{\alpha_n(t+uh) - \alpha_n(t) - \alpha_n(t+vh) + \alpha_n(t)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| \\
=\ &\sup_{n\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{a,b\in\mathcal{I}}\frac{\pm\{\alpha_n(a) - \alpha_n(b)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| \\
=\ &\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\omega^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right|
\end{aligned}$$

et de même, que

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{f\in\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h)}\Theta(f) - \sup_{f\in\mathbb{S}}\Theta(f)\right| &= \sup_{n\in\mathcal{H}_n}\left|\sup_{a,b\in\mathcal{I}}\frac{\pm\{\beta_n(a) - \beta_n(b)\}}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right| \\
&= \sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left|\frac{\delta^{\pm}_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right|
\end{aligned}$$

3.5 Preuve du Théorème (3.2.2)

Dans ce paragraphe, nous supposerons la condition du Théorème (2.3.2) vérifiée. Nous allons montrer que le fait que lorsque $n \longrightarrow \infty$,

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{3.6}$$

implique que, lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \triangle(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{3.7}$$

Lorsque (3.6) est vrai, on a la propriété suivante énoncée dans le Corollaire (3.4.1) Lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\omega_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1) \tag{3.8}$$

où $\omega_n(h) = \omega_{n,[0,1]}(h)$ représente le module de continuité du processus empirique. A partir de , nous allons établir dans le Lemme suivante, des bornes pour le module de continuité du processus empirique de quantile $\delta_n(h) = \delta_{n,[0,1]}(h)$

Fait 8. On a, presque sûrement,

$$(i) \sup_{0 \le t \le 1} |\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t)) - t| \quad = \quad \frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad n \ge 1, \tag{3.9}$$

$$(ii) \sup_{0 \le t \le 1} |\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(t)) - t| \quad = \quad (1 + o(1)) \frac{\log n}{n} \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty \tag{3.10}$$

Lemme 3.5.1 *Lorsque $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ vérifie les conditions suivante : lorsque $n \longrightarrow \infty$, les suites $0 < a_n \le b_n \le 1$ sont telles que*

$$b_n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{na_n}{\log n}$$

on a l'implication

$$\begin{aligned} &\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \left| \frac{\omega_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - 1 \right| = o_{\mathbb{P}}(1) \\ = \quad &\forall \theta > 0, \mathbb{P} \left(\left[\frac{\delta_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} \right] \ge 1 + \theta \right) \to 0 \end{aligned}$$

Preuve. Pour tout $\theta \in (-1, 1)$ et $h > 0$, on pose

$$\widetilde{h}_n(h,\theta) = h\left\{1 + (1+\theta)\left(\frac{2\log_+(1/h)}{nh}\right)^{1/2}\right\}$$

On se place sur l'événement de probabilité 1 où Fait 8 (i) a lieu et on applique l'inégalité triangulaire, pour obtenir les relations d'événements suivantes.

$$\begin{aligned}
&\left\{\beta_n(t+h) - \beta_n(t) \geq (1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)}\right\} = \left\{\mathbb{V}_n(t+h) \geq \mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h,\theta)\right\} \\
\subseteq \ & \left\{\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h,\theta)) - \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t+h)) - \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t))\right\} \\
\subseteq \ & \left\{\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h,\theta)) - \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq h + \frac{2}{n}\right\} \\
= \ & \left\{\alpha_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h,\theta)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq \sqrt{n}(h - \widetilde{h}_n(h,\theta)) + \frac{2}{\sqrt{n}}\right\} \\
= \ & \left\{\alpha_n(\mathbb{V}_n(t) + \widetilde{h}_n(h,\theta)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \leq -(1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)} + \frac{2}{\sqrt{n}}\right\}
\end{aligned}$$

Maintenant, on fixe un $\theta > 0$. Sous la condition (3.1) du la théorème (3.2.2), il existe un $n(\theta) < 1$ tel que, pour tout $n \geq n(\theta)$ et $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, on ait

$$\widetilde{h} = \widetilde{h}_n(h,\theta) \in \mathcal{H}'_n = \left[\frac{1}{2}a_n, 2b_n\right]$$

et l'inégalitè

$$-(1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)} + \frac{2}{\sqrt{n}} \leq -(1+\frac{1}{2}\theta)\sqrt{2\widetilde{h}_n\log_+(1/\widetilde{h}_n)}$$

L'intervalle $\mathcal{H}'_n = [\frac{1}{2}a_n, 2b_n]$ vérifie (2.1) lorsque c'est le cas pour $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$. Pour $n \geq n(\theta)$, on voit que lorsque pour un certain $h \in \mathcal{H}_n$ et un certain $t \in [0,1]$,

$$\beta_n(t+h) - \beta_n(t) \geq -(1+\theta)\sqrt{2h\log_+(1/h)}$$

il suit que, pour $\widetilde{h} = \widetilde{h}_n(h;\theta) \in \mathcal{H'}_n$ et $\widetilde{t} = \mathbb{V}_n(t) \in [0,1]$,

$$-\left(\alpha_n(\widetilde{t}+\widetilde{h}) - \alpha_n(\widetilde{t})\right) \geq (1+\frac{1}{2}\theta)\sqrt{2\widetilde{h}_n \log_+(1/\widetilde{h}_n)}$$

De là, pour tout choix de $\theta > 0$, lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H'}_n}\left[\frac{\omega^-_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \frac{1}{2}\theta\right) \to 0 \\ \Rightarrow \quad & \mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left[\frac{\delta^+_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \theta\right) \to 0 \end{aligned}$$

On conserve les mêmes arguments, cette fois-ci avec un changement de signe, pour obtenir que pour tout $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H'}_n}\left[\frac{\omega^+_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \frac{1}{2}\theta\right) \to 0 \\ \Rightarrow \quad & \mathbb{P}\left(\sup_{h\in\mathcal{H}_n}\left[\frac{-\delta_{n,\mathcal{I}}(h)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - 1\right] \geq \theta\right) \to 0 \end{aligned}$$

On combine ces deux implications pour finalement conclure à (3.2) du théorème (3.2.2).

$$\sup_{h\in\mathcal{H}_n} \triangle(\mathcal{G}_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1)$$

■

Utilisant la définition de $\xi_n(h,t;s)$, pour $h > 0$ et $t \in [0,1]$, on pose

$$\xi^V_n(h;t;u) = \xi_n(h;\mathbb{V}_n(t);u) = \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)+hu) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \tag{3.11}$$

pour $u \in [0,1]$. Considérons $\mathcal{F}_{n,I}(h)$ l'ensemble de suites de fonctions . De maniére analogue, pour tout $h \in \mathcal{H}_n$, on pose

$$\mathcal{F}^V_{n,\mathcal{I}}(h_n) = \left\{\frac{\xi^V_n(h,t,\cdot)}{\sqrt{2h\log_+ 1/h}}, t \in [0,1-h_n] \cap \mathcal{I}\right\} \tag{3.12}$$

où $\mathcal{I} = [u,v] \subseteq [0,1]$ tel que $u < v$.

Lemme 3.5.2 *Sous la condition $b_n \to 0$ et $\frac{na_n}{\log n} \to \infty$, lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}_n} \triangle(\mathcal{F}^V_{n,\mathcal{I}}(h), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}}(1)$$

Preuve On fixe $\epsilon > 0$ et $\mathcal{I} = [u, v] \subseteq [0, 1]$ tel que $|\mathcal{I}| = |v - u| > 0$. Etant donné que sous la condition $b_n \to 0$ et $\frac{na_n}{\log n} \to \infty$, l'assertion (3.6) est vérifiée, d'aprés la définition de la distance de Hausdorff, il suffit de prouver que, lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$\begin{array}{rcl} (i) \;\; \mathbb{P}\left(\mathcal{F}^V_{n,\mathcal{I}}(h_n) \subseteq \mathbb{S}^\epsilon : \forall h \in \mathcal{H}_n\right) & \to & 1 \\ (ii) \;\; \mathbb{P}\left(\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}^V_{n,\mathcal{I}}(h_n)^\epsilon : \forall h \in \mathcal{H}_n\right) & \to & 1 \end{array} \tag{3.13}$$

Par définition des incréments, et des définitions (3.11) et (3.12) ci-dessus, on a $\mathcal{F}^V_{n;I}(h) \subseteq \mathcal{F}_{n;[0,1]}(h)$, alors (3.13)$(i)$ est une consequence de (3.6). Pour établir (3.13)(ii), on fixe un intervalle $\mathcal{I}' = [u', v']$ tel que $u < u' < v' < v$. On considére l'évènement $\mathcal{C}_n = \{\mathbb{U}_n(s) \in \mathcal{I}, \forall s \in \mathcal{I}'\}$. D'aprés le théorème de Glivenko-Cantelli, $\mathcal{P}(\mathcal{C}_n) \to 1$ lorsque $n \to \infty$. De plus, on a $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n \cap \mathcal{D}_n) \to 1$ lorsque $n \to \infty$, où

$$\mathcal{D}_n \left\{\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}^V_{n,\mathcal{I}'}(h_n)^{\epsilon/2} : \forall h \in \mathcal{H}_n\right\}$$

On se place sur l'événement $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{D}_n$. Pour tout $f \in \mathbb{S}$ et $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, il existe $s_n = s_n(h; f) \in \mathcal{I}'$, tel que

$$\left\|\frac{\xi_n(h; s_n; \cdot)}{\sqrt{2h \log_+(1/h)}} - f\right\| < \frac{1}{2}\epsilon \tag{3.14}$$

Observons que

$$\begin{array}{rcl} \xi_n(h; s_n; \cdot) - \xi_n(h; \mathbb{V}_n(U_n(s_n)); \cdot) & = & \alpha_n(sn + h\cdot) - \alpha_n(s_n) \\ & - & \alpha_n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n)) + h\cdot) - \alpha_n n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n))) \\ & = & \{\alpha_n(s_n + h\cdot) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n)) + h\cdot)\} \\ & - & \{\alpha_n(s_n) - \alpha_n n(\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n)))\} \\ & \leq & 2\omega\left(||\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}||\right) \end{array}$$

On pose $t_n = t_n(h,f) = \mathbb{U}_n(s_n) = \mathbb{U}_n(s_n(h,f)) \in \mathcal{I}$. On applique l'inégalité triangulaire et la relation $\inf_{h\in\mathcal{H}_n} \sqrt{2h\log_+(1/h)} = \sqrt{2a_n\log_+(1/a_n)}$, pour obtenir les inégalités suivantes qui sont uniformes en $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$.

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\xi_n(h;s_n;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - \frac{\xi_n^V(h;t_n;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\right\| &= \left\|\frac{\xi_n(h;s_n;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - \frac{\xi_n(h;\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n(s_n));\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}}\right\| \\
&\leq \frac{2\omega\left(||\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}||\right)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} \\
&\leq \frac{2\omega\left(||\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}||\right)}{\sqrt{2a_n\log_+(1/a_n)}} \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Maintenant, on combine la condition $b_n \to 0$ et $\frac{na_n}{\log n} \to \infty$ avec (3.10) du Fait 8, pour voir que lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$||\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}|| = (1 + o_{\mathbb{P}}(1))\frac{\log n}{n} = o_{\mathbb{P}}(a_n) \qquad (3.16)$$

On fixe $\rho > 0$. Appliquons le résultat (3.8), en remplaçant l'intervalle $\mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$ par $[\rho a_n, \rho a_n]$, pour obtenir que, lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$\omega_n(\rho a_n) = (1 + o_{\mathbb{P}}(1))\rho_n^{1/2}\sqrt{2a_n\log+(1/a_n)} \qquad (3.17)$$

Comme $\rho > 0$ peut être choisi aussi petit qu'il convient dans (3.17), d'aprés (3.15) et (3.16), lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a

$$\frac{2\omega\left(||\mathbb{V}_n(\mathbb{U}_n) - \mathbb{I}||\right)}{\sqrt{2a_n\log_+(1/a_n)}} \qquad (3.18)$$

La réunion des points (3.14), (3.15) et (3.18), montre que lorsque $n \longrightarrow \infty$, pour tout $f \in \mathbb{S}$ et $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, il existe $t_n \in \mathcal{I}$, tel que

$$\left\|\frac{\xi_n^V(h;s_n;\cdot)}{\sqrt{2h\log_+(1/h)}} - f\right\| < \epsilon \qquad (3.19)$$

avec une probabilité qui tend vers 1. D'où le résultat cherché (2.13)(ii). ■

Preuve du Théorème (3.2.2) Nous allons montrer (3.7) sachant que (3.6) est vérifié.

D'aprés la définition (3.11), on a

$$\alpha(\mathbb{V}_n(t+hu)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) = \xi((h, \mathbb{V}_n(t), \tau_{n,t,h}(u)) = \xi^V(h, t, \tau_{n,t,h}(u))$$

où pour $u \in [0,1]$, on pose,

$$\tau_{n,t,h}(u) = \frac{\mathbb{V}_n(t+hu) - \mathbb{V}_n(t)}{h} = u + \frac{\beta_n(t+hu) - \beta_n(t)}{h\sqrt{n}} = u + \frac{\xi_n(h,t,u)}{h\sqrt{n}}$$

Observons que, pour tout $h > 0$et t, $u \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \zeta_n(h,t,u) + \xi^V(h,t,\tau_{n,t,h}(u)) &= \beta_n(t+hu) - \beta_n(t) + \alpha_n(\mathbb{V}_n(t+hu)) - \alpha_n(\mathbb{V}_n(t)) \\ &= \sqrt{n}((\mathbb{V}_n(t+hu) - (t+hu) - \mathbb{V}_n(t) - t)) \\ &\quad +(\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t+hu)) - \mathbb{V}_n(t+hu) - \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t)) + \mathbb{V}_n(t)) \\ &= \sqrt{n}(\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t+hu)) - (t+hu) + \mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n(t)) - t) \end{aligned}$$

Usant des égalités ci-dessus, de l'inégalité triangulaire et de (3.9) du Fait 8, pour tout $h > 0$ et t tel que $0 \le t \le t+h \le 1$ et $u \in [0,1]$, on a

$$||\zeta_n(h,t,u) + \xi^V(h,t,\tau_{n,t,h}(u))|| \le 2\sqrt{n}||\mathbb{U}_n(\mathbb{V}_n) - \mathbb{I}|| \le \frac{2}{\sqrt{n}} \tag{3.20}$$

On applique le Lemme (3.5.1), pour $\theta = 1$, et on observe que lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a avec probabilité 1, uniformément en tout $h \in \mathcal{H}_n = [a_n, b_n]$, t tel que $0 \le t \le t+h \le 1$, et $u \in [0,1]$,

$$||\tau_{n,t,h} - \mathbb{I}|| \le \frac{\delta_n(h)}{h\sqrt{n}} \le \frac{2\sqrt{2h\log_+(1/h)}}{h\sqrt{n}} \le 2\left\{\frac{2\log+(1/h)}{nh}\right\}^{1/2} \le 2\left\{\frac{2\log+(1/a_n)}{na_n}\right\}^{1/2} \to 0 \tag{3.21}$$

Rappelons la définition (3.12) de

$$\mathcal{F}^V_{n,\mathcal{I}}(h_n) = \left\{\frac{\xi^V_n(h,t,\cdot)}{\sqrt{2h\log_+ 1/h}}, t \in [0, 1-h_n] \cap \mathcal{I}\right\}$$

et posons

$$\mathcal{F}^{V,\tau}_{n,\mathcal{I}}(h_n) = \left\{\frac{\xi^V_n(h,t,\tau_{n,t,h}(\cdot))}{\sqrt{2h\log_+ 1/h}}, t \in [0, 1-h_n] \cap \mathcal{I}\right\} \tag{3.22}$$

D'aprés $\triangle(\mathcal{F} \circ \mathcal{T}, \mathbb{S}) \leq \triangle(\mathcal{F}, \mathbb{S}) + \sqrt{\theta}$ et (3.21), lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a avec probabilité qui tend vers 1

$$\triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}^{V,\tau}(h_n), \mathbb{S}) \leq \triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}^{V}(h_n), \mathbb{S}) + \sqrt{2}\left\{\frac{2\log+(1/a_n)}{na_n}\right\}^{1/4}$$

Ceci, combiné avec la condition de théorème (3.2.2) et l'assertion du Lemme (3.5.2), implique que lorsque $n \longrightarrow \infty$,

$$\sup_{h\in\mathcal{H}} \triangle(\mathcal{F}_{n,\mathcal{I}}^{V,\tau}(h_n), \mathbb{S}) = o_{\mathbb{P}} \tag{3.23}$$

On combine l'inégalité triangulaire avec (3.20), (3.22), (3.23), et l'observation que $-\mathbb{S} = \{-f : f \in \mathbb{S}\} = \mathbb{S}$, pour voir que pour tout $h > 0$ et t tel que $0 \leq t \leq t + h \leq 1$, et $u \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} ||\zeta_n(h,t,u) - f|| &= ||\zeta_n(h,t,u) + \xi^V(h,t,\tau_{n,t,h}(u)) - \xi^V(h,t,\tau_{n,t,h}(u)) - f|| \\ &\leq ||\zeta_n(h,t,u) + \xi^V(h,t,\tau_{n,t,h}(u))|| + ||\xi^V(h,t,\tau_{n,t,h}(u)) + f|| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{n}} + o_{\mathbb{P}} \\ &= o_{\mathbb{P}} \end{aligned}$$

La preuve du Théorème (3.2.2) est alors complétée. ■

Conclusion

Le travail présenter dans ce manuscrit, nous a permi de vérifier le comportement limite (ç-à-d : la convergence d'un ensemble de suites de fonctions aléatoires vers un ensemble de fonctions déterministes), où on a considéré les deux processus, le processus empirique uniforme et le processus du quantiles, grâce à la distance de Hausdorff.

Bibliographie

[1] Strassen, V. (1964). An invariance principle for the law of the iterated logarithm. Z. Wahrscheinlichkeit. Verw. Gebiete. 3, 211-226.

[2] Finkelstein, H. (1971). The law of the iterated logarithm for empirical distributions. Ann. Math. Statist. 42, 607-615.

[3] Deheuvels, P. (1992). Functional laws of the iterated logarithm for large increments of empirical and quantile processes. Stochastic Process. Appl. 43, 133-163.

[4] Deheuvels, P. et Einmahl, J. H. J. (2000). Functional limit laws for the increments of Kaplan-Meier product-limit processes and applications. Ann. Probab. 28, 1301-1335.

[5] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1990) Nonstandard functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes. Ann. Probab. 18, 1693-1722.

[6] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1992). Functional laws of the iterated logarithm for the increments of empirical and quantile processes. Ann. Probab. 20, 1248-1287.

[7] Deheuvels, P. et Lifshits, M. A. (1994). Necessary and sufficient conditions for the Strassen law of the iterated logarithm in nonuniform topologies. Ann. Probab. 22, 1838-1856.

[8] Mason, D. M. (1988). A strong invariance theorem for the tail empirical process. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 24, 491-506.

[9] Deheuvels, P. et Mason, D. M. (1991) A tail empirical process approach to some nonstandard laws of the iterated logarithm. J. Theoret. Probab. 4, 53-85.

[10] Einmahl, J. H. J. et Mason, D. M. (1988). Laws of the iterated logarithm in the tails for weighted uniform empirical processes. Ann. Probab. 16, 126-141.

[11] Einmahl, J. H. J. (1992) The a.s. behavior of the weighted empirical process and the LIL for the weighted tail empirical process. Ann. Probab. 20, 681-615.

[12] Einmahl, J. H. J. et Mason, D. M. (1988). Strong limit theorems for weighted quantile processes. Ann. Probab. 16, 1623-1643.

[13] Kiefer, J. (1972) Iterated logarithm analogues for sample quantiles when $p_n \downarrow 0$. Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. I : Theory of statistics, 227-244.

[14] Stute, W. (1982a). The oscillation behavior of empirical processes. Ann. Probab. 10, 86-107.

[15] Deheuvels, P. et Ouadah, S. (2011). Uniform in bandwidth functional limit laws. J. Theor. Probab., accepté pour publication.

[16] Csörgo, M. et Révész, P. (1981). Strong approximations in probability and statistics. Probability and Mathematical Statistics. 284 pp.

[17] Csörgo, M. et Horváth, L. (1993). Weighted approximations in probability and statistics. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley and Sons.

[18] Deheuvels, P. (1997). Strong laws for local quantile processes. Ann. Probab. 25, 2007-2054.

[19] Deheuvels, P. (2000). Strong approximation of quantile processes by iterated Kiefer processes. Ann. Probab. 28, 909-945.

[20] Deheuvels, P. et Einmahl, J. H. J. (1996) On the strong limiting behavior of local functionals of empirical processes based upon censored data. Ann. Probab. 24, 504-525.

[21] Mason, D. M. (2004). A uniform functional law of the logarithm for the local empirical process. Ann. Probab. 32, 1391-1418.

[22] Lévy, P. (1948). Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Gauthier-Villars, Paris. 365 pp.