Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier "Allah" qui m'a donné la force pour acherver ce projet

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Kandouci pour avoir accepté de m'encadrer.

Toute ma reconnaissance va également à mes différents professeurs de mathématiques, surtout Monsieur "Gandouzi" pour sa gentillesse et ses encouragements.

Je tiens à remercier Monsieurs le président et les membres du jury , d'avoir bien voulu me faire l'honneur de juger mon travail.

Enfin, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'elaboration de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

À mon chère père :

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

À ma mère :

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

À mes soeurs :

Malika, Mahdjouba et son petit que dieu le protège, Khadidja, Necerin et la petite Ranine. Vous avez contribué en fonction de vos moyens à affermir ma formation. Sincère gratitude.

À mes frères :

Abdelkarim et Mohamed Que dieu t'assistes.

À mes neveux et nièces :

Mosaab, Ikram, Manel, Israa et le petit Islem

Meilleurs vœux de succès dans vos études.

Á mes cousines :

Sihem, Soumia, Akila ,Rania, et la petite Houda.

Vous avez de près ou de loin contribué à ma formation. Affectueuse reconnaissance

À toutes mes amies chaqu'un par son nom.

espécialement Amina Bakour pour tous les bons moments passées ensembles.

À tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie . .

Table des matières

Introduction

De nombreux auteurs ont examiné les extensions des intégrales stochastiques classiques à un certaine classe d'intégrands anticipés. Une bonne liste de références à cette dernière est contenue dans [22]. Parmi les généralisations, nous trouvons l'intégrale stochastique backword classique dans [21], l'élargissement de filtrations [20], l'extension de l'intégration de Stratonovich [23], [25], [24], l'intégration de Skorohod [22], et enfin l'intégrale forward [28],[26], [27]. Remarquons que dans les trois dernières approches l'intégrateur utilisé est éssensiellement le mouvement Brownien.

Les auteurs dans [6] ont définit les intégrales forward, backward ainsi que les intégrales symétriques utilisant la procédure limite. Ces intégrales sont respictivement des extensions pour les intégrales d'Itô, backward et l'intégrale de Stratonovich.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter une nouvelles approche d'intégration stochastique via régularisation. L'idée de cette approche vient suite aux idées de F. Russo et P. Vallois [6] en utilisant la notion d'intégrale forward pour introduire une nouvelle intégrale stochastique par rapport à un processus de Wiener cylindrique.

Rappellons que l'intégrale d'Itô permet de donner un sens à la plupart des équations différentielles stochastiques issues des sciences appliquées. Mais elle a toutefois une limite : elle ne permet de traiter que des intégrands adaptés (ou plus précisément progressivement mesurables). Cette nouvelle approche comble cette lacune et dans la suite nous dégagerons de plus un théorème (dit de **substitution**) permettant de donner un sens à des équations différentielles stochastiques avec données initiales non adaptées.

Le calcul via régularisation a été introduit en 1991 par Francesco Russo et Pierre Vallois dans [6], ensuite étudiée et dévellopée par d'autres auteurs, [7], [8]

L'avantage d'utiliser cette technique de régularisation réside dans le fait que cette approche est naturelle et est relativement simple, et facile à se connecter à d'autres approches. Elle intègre le cadre du calcul stochastique mais la structure probabiliste sur laquelle elle se fonde est minimale. Elle constitue, d'ailleurs, un pont entre le calcul stochastique classique et le calcul trajectoriel. Le calcul via régularisation est tout d'abord un calcul en rapport avec les processus de variation quadratique finie.

Les calculs stochastiques apparaissent comme un cas particulier de calcul via régularisation.

Le mémoire présenté est partagé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, On a définie la représentation de processus de Wiener dans l'espace de Hilbert, et on propose une construction de l'intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener cylindrique.

Nous allons détailler, dans le deuxième chapitre, l'étude de trois nouveaux types d'intégrales de Russo-Vallois. Ensuite nous adoptons l'approche de régularisation pour définir une nouvelle intégrale par rapport au processus de Wiener cylindrique. et on montre qu'elle est une extension de l'intégrale définie dans le chapitre 1.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous étudions une EDPS dans le cadre de cette nouvelle intégration.

Chapitre 1

Intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener cylindrique

En 1827, Robert Brown a observé que de petites particules immergées dans un liquide sont perpétuellement en mouvement, lequel est des plus irréguliers. Historiquement, le mouvement brownien se voulait une tentative pour modéliser ce phénomène. Aujourd'hui, le mouvement brownien est utilisé dans divers domaines tels l'économie, la théorie de la communication, la biologie, les sciences administratives et les mathématiques.

Nous attribuons au mathématicien **Norbert Wiener** l'analyse rigoureuse des mathématiques concernant le mouvement brownien et c'est pourquoi ce processus est aussi connu sous le nom de **Processus de Wiener**.

Ce chapitre est consacré à la construction de l'intégrale stochastique d'Itô par rapport au processus de Wiener cylindrique.

Nous commençons par rappeler quelques faits concernant les opérateur nucléaires et de Hilbert-Schmidt sur les espaces de Hilbert.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Opérateur nucléaires et de Hilbert-Schmidt

Soient E, G deux espaces de Banach et soit $L(E,G)$ l'espace vectoriel de touts opérateurs linéaire bornée de E dans G. On note E^* et G^* les dual espaces de E et G respictivement.

Un élément $T \in L(E,G)$ est dit un opérateur nucléaire s'il existe deux séquences $(a_j))j \subset G$ et $(\varphi_j)_j \subset E^*$ tel que

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(x), \quad \text{pour tout } x \in E,$$

et

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||a_j||_G ||\varphi_j||_{E^*} < \infty.$$

L'espace de tous les opérateurs nucléaires de E dans G est notée $L_1(E,G)$. quand il muni la norme

$$||T||_1 = \inf\left(\sum_{j=1}^{\infty}||a_j||_G||\varphi_j||_{E^*} : T(x) = \sum_{j=1}^{\infty}a_j\varphi(x), x\in E\right),$$

est un espace de Banach .

Soit H un espaces de Hilbert séparables et $\{e_j\}_j$ est une base orthonormée complete sur H .Pour tout $T\in L_1(H,H)$ la trace de T est

$$TrT = \sum_{j=1}^{\infty} < Te_j, e_j >_H . \tag{1.1}$$

On montre que si $T \in L_1(H) := L_1(H,H)$, alors TrT est un nombre réel bien définie et sa valeur ne dépend pas du choix de la base orthonormée.un opérateur définie non-négatif $T\in L(H)$ est nucléaire si et seulement si, pour une base orthonormée $\{e_j\}_j$ dans H,

$$\sum_{j=1}^{\infty} < Te_j, e_j >_H < +\infty.$$

En outre, dans ce cas, $TrT = ||T||_1$.
Soient V et H deux espaces de Hilbert séparables et $\{e_k\}_k$ est orthonormé complet base de V. Un opérateur linéaire borné $T : V \to H$ dit de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{k=1}^{\infty}||Te_k||_H^2 < +\infty.$$

Il s'avère que la propriété ci-dessus est indépendante du choix de la base dans V. L'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de V et H est notée par $L_2(V,H)$. La norme dans cet espace est défini par

$$||T||_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}||Te_k||_H^2\right)^{1/2}, \tag{1.2}$$

et définit un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$< S, T >_2 = \sum_{k=1}^{\infty} < Se_k, Te_k >_H \tag{1.3}$$

Enfin, signalons que 1.1 et 1.2 impliquent que si $T\in L_2(V,H)$, alors $TT^*\in L_1(H)$, où T^* est l'opérateur adjoint de T, et

$$||T||_2^2 = Tr(TT^*). \tag{1.4}$$

Nous concluons cette section par rappelant la définition et quelques propriétés de l'inverse des opérateurs linéaires bornés.
Soit $T\in L(V,H)$ et Ker $T := \{x\in V : T(x) = 0\}$. L'inverse de la opérateur T est défini par :

$$T^{-1} := \left(T_{|_{KerT^\perp}}\right)^{-1} : T(V) \to (KerT)^\perp.$$

Notez que T est un-à-un sur $(KerT)^\perp$ (le complément orthogonal de Ker T) et T^{-1} est linéaire et bijective.
Si $T\in L(V)$ est un opérateur linéaire borné définie sur V et T^{-1} désigne l'inverse de T, alors :

1. $(T(V), <.,.>_{T(V)})$ définie un espace de Hilbert, où

$$<x, y>_{T(V)} := <T^{-1}(x), T^{-1}(y)>_V, \qquad x, y \in T(V).$$

2. Soit $\{e_k\}_k$ une base orthonormée de $(KerT)^{\perp}$. Alors $(Te_k)_k$ est un base orthonormée de $(T(V), <.,.>_{T(V)})$.

Enfin, si $T \in L(V, H)$ et nous avons $Q := TT^* \in L(H)$, alors nous avons $ImQ^{1/2} = ImT$ et

$$||Q^{-1/2}(x)||_H = ||T^{-1}(x)||_V, \qquad x \in ImT,$$

où $Q^{-1/2}$ est l'inverse de $Q^{1/2}$.

1.2 Intégration stochastique par rapport au processus de Wiener

Pour définie l'intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener dans l'espace de Hilbert , on a d'abord définie le processus de Wiener à valeurs dans l'espace de Hilbert (Q-Processus de Wiener).

1.2.1 Processus de Wiener à valeurs dans l'espace de Hilbert

On considère un espace de Hilbert séparable V et un opérateur symétrique nucléaire non négative linéaire tele que ($TrQ < +\infty$).

Définition 1.2.1
Le processus stochastique $\{W(t), t \geq 0\}$, dans V de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, est appelé processus de Wiener avec l'opérateur de covariance Q ($Q(s,t) = min(s,t) := t \wedge s$) si :

1. $W_0 = 0$,
2. *W à trajectoires continues,*
3. *$(W_t)_t$ est un processus à accroissements indépendants*
4. *$E(W_t) = 0$, $Cov[W_t - W_s] = (t-s)Q$, pour tout $0 \leq s \leq t$*
5. *W est adaptée à la filtraction $(\mathcal{F}_t)$, i.e pour tout $t \geq 0$, W_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Nous rappelons (par [1], Section 2.3.2) que la condition (4) ci-dessus signifie que pour tout $h \in V$ et $0 \leq s \leq t$, la variable aléatoire à valeurs réelles $<W_t - W_s, h>_V$ est gaussienne de moyenne nulle et de variance $(t-s) <Qh, h>_H$. En particulier, en utilisant 1.1, nous voyons que $E(||W_t||^2)_H = tTrQ$, qui est l'une des raisons pour lesquelles l'hypothèse $TrQ < \infty$ est essentiel.

A la lumière de ce qui précède, Le processus de Wiener est gaussien et à la structure suivante :
Soit $\{e_i\} \subset V$ un ensemble orthonormé de vecteurs propres de Q à valeurs propres correspondantes $\lambda_i, i \in \mathbb{N}^*$ tels que $TrQ = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ alors

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) e_i \tag{1.5}$$

avec $\beta_i(t) =< W(t), e_i >, \quad i = 1, 2, \ldots$ sont des familles de mouvements browniens mutuellement indépendants sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ce type de structure de processus de Wiener sera utilisé dans la définition de l'intégrale stochastique.

1.2.2 Intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener

Nous esquissons maintenant la construction de l'intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener à valeurs dans l'espace de Hilbert.

Soit $L(V, H)$ désignent l'espace des opérateurs linéaires bornées de V dans H. Pour tout espace de Hilbert H on note $M(H)$ l'espace de tous les processus stochastiques.
$g : [0, T] \times \Omega \to L(V, H)$ tels que

$$E\left(\int_0^T \|g(t)\|^2_{L(V,H)} dt\right) < +\infty \tag{1.6}$$

et pour tout $u \in V$, $g(t)u$ est un processus stochastique H-mesurable à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.
L'intégrale stochastique $\int_0^t g(s)dW(s) \in H$ est défini pour tous $g \in M(H)$ par :

$$\int_0^t g(s)dW(s) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(s) e_i d\beta_i(s) \tag{1.7}$$

dans $L^2(\Omega)$. Nous allons montrer que la série 1.7 est convergente.

Soit $W^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{m} e_i \beta_i(t)$. Alors, l'intégrale

$$\int_0^t g(s)dW^{(m)}(s) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(s) e_i d\beta_i(s) \tag{1.8}$$

est bien définie pour $g \in M(H)$ et de plus :

$$\int_0^t g(s)dW^{(m)}(s) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t g(s)dW(s) \tag{1.9}$$

dans $L^2(\Omega; H)$. Cette convergence vient du fait que la suite :

$$y_m = \int_0^t g(s)dW^{(m)}(s), \qquad m \in \mathbb{N} \tag{1.10}$$

est une suite de Cauchy dans l'espace des v.a de carré l'intégrable.
On utilisons des propriétes des intégrales stochastique par rapport au $\beta_i(s)$ pour touts $m, n \in \mathbb{N}, m < n$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
E(||y_n - y_m||_H^2) &= \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i E \int_0^t < g(s)e_i, g(s)e_i >_H ds \\
&\leq \left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i\right) E \int_0^t ||g(s)||_{L(V,H)}^2 ds \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Par conséquent, il existe une limite de la suite (y_m) qui définit l'intégrale stochastique $\int_0^t g(s)dW(s)$.

1.3 Intégration stochatique par rapport au processus de Wiener cylindrique

La construction de l'intégrale stochastique dans la section précédent a exigé que Q était un opérateur nucléaire. Toutefois, il est possible d'étendre la définition de l'intégrale stochastique pour le cas général des opérateurs borné auto-adjoint, non-négatif Q sur l'espace de Hilbert V. (Mais il faudra certaines restrictions sur l'intégrer g). L'int'egrale stochastique pour ce cas a été défini par [1]. (Pour éviter les complications triviales nous supposons que Q est strictement positif tels que $Qx \neq 0$ pour $x \neq 0$).

1.3.1 Processus de Wiener cylindrique

Définition 1.3.1
Soit Q un opérateur linéaire borné symétrique (auto-adjoint) et non-négatif sur V. Une famille de variables aléatoires $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t(h), t \geq 0, h \in V\}$ est un processus de Wiener cylindrique sur V si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. *Pour tout $h \in V, \{\tilde{W}_t(h), t \geq 0\}$ définit un mouvement brownien avec variance $t < Qh, h >$,*
2. *Pour tous $s, t \in R_+$ et $h, g \in V$*

$$E(\tilde{W}_s(h)\tilde{W}_t(g)) = (s \wedge t) < Qh, g >$$

Si $Q = Id_V$ est l'opérateur d'identité en V, Alors $\tilde{W}$ sera appelé un process de wiener cylindrique standard . Et Q est un opérateur de covariance de $\tilde{W}$.

1.3.2 Intégrale stochatique par rapport au processus de Wiener cylindrique

Nous présentons le sous espace V_0 de l'espace V définie par $V_0 = Q^{1/2}(V)$ avec la norme

$$||u||_{V_0} = ||Q^{-1/2}u||_V, \qquad u \in V_0$$

Supposons que V_1 est un espace de Hilbert arbitraire tel que V est continu intégrable dans V_1 et l'intégration de V_0 dans V_1 est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

En particulier,

1. lorsque Q = I, alors $V_0 = V$ et l'intégration de V dans V_1 est l'opérateur de Hilbert-Schmidt.
2. Lorsque Q est un opérateur nucléaire, $TrQ < \infty$, alors $V_0 = Q^{1/2}(V)$ Et nous peut prendre $V_1 = V$. Parce que dans ce cas $Q^{1/2}$ est une opérateur de Hilbert-Schmidt alors l'intégration $V_0 \subset V$ est l'opérateur de Hilbert-Schmidt.
On note $L_2^0 = L_2(V_0, H)$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de V_0 dans H. Considérons la norme de l'opérateur $\psi \in L_2^0$:

$$\begin{aligned} ||\psi||^2_{L_2^0} &= \textstyle\sum_{h,k=1}^{\infty} < \psi g_h, f_k >^2_H \\ &= \textstyle\sum_{h,k=1}^{\infty} \lambda_h < \psi e_h, f_k >^2_H \\ &= ||\psi Q^{1/2}||^2_{HS} = Tr(\psi Q \psi^*) \end{aligned}$$

Où $g_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$, et $\{\lambda_j\}, \{e_j\}$ sont des valeurs propres et des vecteurs propres de l'opérateur Q, $\{g_j\}, \{e_j\}$ et $\{f_j\}$ sont des bases orthonormals des espaces V_0 V et H respictivement.
L'espace L_2^0 est une espace de Hilbert séparable avec la norme

$$||\psi||^2_{L_2^0} = Tr(\psi Q \psi^*).$$

En particulier,

1. si Q = I Alors $V_0 = V$ et l'espace L_2^0 devienne $L_2(V, H)$.
2. Lorsque Q est un operateur nucléaire, tels que $TrQ < \infty$, alors $L(V, H) \subset L_2(V_0, H)$
   Supposons que $K \in L(V, H)$ un opérateur linéaire borné de V dans H. On considerons l'opérateur $\psi = K|_{V_0}$, est la restriction de l'opérateur K dans l'espace V_0 car Q est une opérateur nucléaire, alors $Q^{1/2}$ est une opérateur de Hilbert -schmidt. Ainsi, l'integration de J de V_0 dans V est une opérateur de Hilbert- Schmidt. Nous devons calculer la norme $||\psi||_{L_2^0}$ de l'opérateur :$\psi : V_0 \to H$ on obtenons

   $$||\psi||^2_{L_2^0} \equiv ||KJ||^2_{L_2^0} = TrKJ(KJ)^*,$$

   où $J : V_0 \to V$. Car J est une opérateur de Hilbert-schmidt et K est une operateur linéaire borné, en se basant sur la théorie des opérateurs de Hilbert-Schmidt, KJ est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt,et aussi $(KJ)^*$ est un l'opérateur de Hilbert-Schmidt.
   En conséquence,$KJ(KJ)^*$ est un opérateur nucléaire ($TrKJ(KJ^* < +\infty$). Ainsi, $\psi = K|_{V_0}$ estun opérateur de Hilbert- Schmidt sur V_0 , qui est $K \in L_2(V_0, H)$.

Soit$\{g_j\}$ une base orthonormée dans V_0 et $\{\beta_j\}$ une famille des processus de Wiener standard indépendant de valeurs réelles.

Bien que les propositions 1.3.1 et 1.3.2 introduit ci-dessous sont connus, (Voir, e.g. Proposition 4.11 de [1]), de leur importance, nous les formuler à nouveau et fournir des preuves détaillées.

Proposition 1.3.1

$$\tilde{W}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \beta_j(t), \qquad t \geq 0 \tag{1.12}$$

définit le processus de Wiener dans V_1 de opérateur de covariance Q_1 tels que $TrQ_1 < +\infty$.

Preuve

Cela vient du fait que la série 1.12 est convergente dans l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; V_1)$. nous avons :

$$E\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} g_j\beta_j(t) - \sum_{j=1}^{m} g_j\beta_j(t)\right\|_{V_1}^2\right) = E\left(\left\|\sum_{j=m+1}^{n} g_j\beta_j(t)\right\|_{V_1}^2\right)$$

$$= E\left\langle \sum_{j=m+1}^{n} g_j\beta_j(t), \sum_{k=m+1}^{n} g_k\beta_k(t)\right\rangle_{V_1} = E\sum_{j=m+1}^{n} < g_j\beta_j(t), g_j\beta_j(t) >_{V_1}$$

$$= E\left(\sum_{j=m+1}^{n} < g_j, g_j >_{V_1} \beta_j^2(t)\right) = t\sum_{j=m+1}^{n} \|g_j\|_{V_1}^2, \qquad n \geq m \geq 1.$$

De l'hypothèse, l'intégration $J : V_0 \to V_1$ est l'opérateur de Hilbert-Schmidt, alors pour la base g_j orthonormé et complète dans V_0, nous avons :

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||Jg_j||_{V_1}^2 < +\infty.$$

Car $Jg_j = g_j$ pour toute $g_j \in V_0$ alors :

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||g_j||_{V_1}^2 < +\infty \text{ i.e } \sum_{j=m+1}^{n} ||g_j||_{V_1}^2 \to 0 \text{ quand } m, n \to \infty.$$

Les conditions 1), 2), 3) et 5) de la définition de processus de Wiener sont évidemment satisfaits. Le processus défini par 1.12 est gaussienne car $(\beta_j(t))_j \in \mathbb{N}$, sont processus gaussien indépendant. Par théorème de test de Kolmogorov , les trajectoires de processus $\tilde{W}(t)$ sont continues (condition 4. de la définition de processus de Wiener) car $\tilde{W}(t)$ est gaussienne.

Soit $Q_1 : V_1 \to V_1$ réprésente l'operateur de covariance d'un processus $(\tilde{W}(t))_t$ definée par 1.12. a partir de la définition de covariance, pour $a, b \in V_1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
< Q_1a, b >_{V_1} &= E < a, \tilde{W}(t) >_{V_1} < b, \tilde{W}(t) >_{V_1} \\
&= E\left(\sum_{j=1}^{\infty} < a, g_j >_{V_1} < b, g_j >_{V_1} \beta_j^2(t)\right) \\
&= t\sum_{j=1}^{\infty} < a, g_j >_{V_1} < b, g_j >_{V_1} \\
&= t\left\langle\sum_{j=1}^{\infty} g_j < a, g_j >_{V_1}, b\right\rangle_{V_1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$Q_1a = t\sum_{j=1}^{\infty} g_j < a, g_j >_{V_1}.$$

Parce que l'opérateur de covariance Q_1 est non-négatif, alors, (Par Proposition C.3 de [1]), Q_1 est un opérateur nucléaire si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{\infty} < Q_1 h_j, h_j >_{V_1} < +\infty,$$

où $\{h_j\}$ est une base orthonormée dans V_1.

D'après ci-dessus considérations

$$\sum_{j=1}^{\infty} < Q_1 h_j, h_j >_{V_1} \leq t \sum_{j=1}^{\infty} ||g_j||_{V_1}^2$$

et alors :

$$\sum_{j=1}^{\infty} < Q_1 h_j, h_j >_{V_1} \equiv TrQ_1 < +\infty.$$

■

Proposition 1.3.2 *Pour tout $a \in V$ le processus*

$$< a, \tilde{W}(t) >_V = \sum_{j=1}^{\infty} < a, g_j >_V \beta_j(t) \tag{1.13}$$

est un processus de Wiener à valeurs réelles et

$$E < a, \tilde{W}(t) >_V < b, \tilde{W}(t) >_V = (t \wedge s) < Qa, b >_V \qquad pour\ a, b \in V$$

Autre

$$ImQ_1^{1/2} = V_0 \ et\ ||u||_{V_0} = \left\| Q_1^{-1/2} u \right\|_{V_1}.$$

Preuve

Nous montrons que la série 1.13 définée le processus $< a, \tilde{W}(t) >_V$ est convergente dans l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Notons que cette série est la somme de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle. Alors, la série est converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si et seulement si la série suivante $\sum_{j=1}^{\infty} E(< a, g_j >_V \beta_j(t))^2$ est converge.

Car J est l'opérateur de Hilbert-Schmidt, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} E(< a, g_j >_V^2 \beta_j^2(t)) &= \sum_{j=1}^{\infty} < a, g_j >_V^2 \leq ||a||_V^2 \sum_{j=1}^{\infty} ||g_j||_V^2 \\
&\leq C ||a||_V^2 \sum_{j=1}^{\infty} ||J g_j||_{V_1}^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série 1.13 converge. De plus, lorsque $t \geq s \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} E(< a, \tilde{W}(t) >_V < b, \tilde{W}(s) >_V) &= E(< a, \tilde{W}(t) - \tilde{W}(s) >_V < b, \tilde{W}(s) >_V) \\ &+ E(< a, \tilde{W}(s) >_V < b, \tilde{W}(s) >_V) \\ &= E(< a, \tilde{W}(s) >_V < b, \tilde{W}(s) >_V) \\ &= E\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} < a, g_j >_V \beta_j(s)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} < b, g_k >_V \beta_k(s)\right)\right). \end{aligned}$$

On présentons

$$S^a := \sum_{j=1}^{\infty} < a, g_j >_V \beta_j(t), \qquad S^b := \sum_{k=1}^{\infty} < b, g_k >_V \beta_k(t), \qquad \text{pour } a, b \in V.$$

Ensuite,soit S_N^a et S_N^b désignent les sommes partielles de les séries S^a et S^b, respectivement. à partir de les considérations qui précèdent les séries S^a et S^b convergent dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$.
d'où $E(S^a S^b) = \lim_{N\to\infty} E(S_N^a S_N^b)$. En fait,

$$\begin{aligned} E|S_N^a S_N^b - S^a S^b| &= E|S_N^a S_N^b - S_n^a S^b + S^b S_n^a - S^b S^a|. \\ &\leq E|S_N^a||S_N^b - S^b| + E|S^b||S_N^a - S^a| \\ &\leq (E|S_N^a|^2)^{\frac{1}{2}} (E|S_N^b - S^b|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &+ (E|S^b|^2)^{\frac{1}{2}} (E|S_N^a - S^a|^2)^{\frac{1}{2}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

car S_N^a converges vers S^a et S_N^b converges vers S^b en moyenne quadratique.
En autre, $E(S_N^a S_N^b) = t \sum_{j=1}^N < a, g_j >_V < b, g_j >_V$ et quand $N \to +\infty$

$$E(S^a S^b) = t \sum_{j=1}^{\infty} < a, g_j >_V < b, g_j >_V .$$

Notons que

$$\begin{aligned} < Q_1 a, b >_{V_1} &= E(< a, \tilde{W}(1) >_{V_1} < b, \tilde{W}(1) >_{V_1}) = \sum_j = 1^i nfty < a, g_j >_{V_1} < b, g_j >_{V_1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} < a, J g_j >_{V_1} < b, J g_j >_{V_1} = \sum_{j=1}^{\infty} < J^* a, g_j >_{V_0} < J^* b, g_j >_{V_0} \\ &= \left\langle J^* a, \sum_{j=1}^{\infty} < J^* b, g_j > g_j \right\rangle_{V_0} = < J^* a, J^* b >_{V_0} = < J J^* a, b >_{V_1} . \end{aligned}$$

Cela donne $Q_1 = J J^*$, En particulier

$$\left\| Q_1^{\frac{1}{2}} a \right\|_{V_1}^2 = < J J^* a, a >_{V_1} = \| J^* a \|_{V_0}^2, \qquad a \in V_1 \tag{1.14}$$

Nous pouvons utiliser les théorèmes sur les images des opérateurs linéaires (e.g. [1], Appendix B.2, Proposition B.1 (ii)) Par ce théorème $ImQ_1^{\frac{1}{2}} = ImJ$. Mais pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $g_j \in V_0, Jg_j = g_j$, i.e $ImJ = V_0$. alors $ImQ_1^{\frac{1}{2}} = V_0$.
En outre, l'opérateur $G = Q_1^{-\frac{1}{2}}J$ est un opérateur borné de V_0 dans V_1. De 1.14 l'opérateur adjoint $G^* = J^*Q_1^{-\frac{1}{2}}$ est une isométrie, alors G est aussi isométrie. Alors

$$\left\| Q_1^{-\frac{1}{2}} u \right\|_{V_1} = \left\| Q_1^{-\frac{1}{2}} J u \right\|_{V_1} = \|u\|_{V_0} \tag{1.15}$$

■

Dans le cas où Q est une opérateur nucléaire, $Q^{\frac{1}{2}}$ est l'opérateur de Hilbert-Schmidt. Prenant $V_1 = V$, le processus $(\tilde{W}(t))_{t\geq 0}$, définie par 1.14 est le processus de Wiener classique introduit dans la définition1.2.1. L'intégrale stochastique par rapport au pocessus de Wiener cylindrique est défini comme suit.

Comme nous avons déjà écrit ci-dessus, le processus $\tilde{W}(t)$ définie par 1.12 est un processus de Wiener dans l'espace V_1 avec l'opérateur de covariance Q_1 tels que $TrQ_1 < +\infty$. alors, l'intégrale stochastique

$$\int_0^t g(s)d\tilde{W}(s) \in H, \text{ où } g(s) \in L(V_1, H),$$

par rapport au processus de Wiener $\tilde{W}(t)$ est bien défini sur V_1.

Notons que V_1 n'est pas uniquement déterminée. L'espace V_1 peut être un espace de Hilbert arbitraire tel que V est continu intégrable dans V_1 et l'intégration de V_0 en V_1 est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Nous tenons à définir l'intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener cylindrique $\tilde{W}(t)$ (donné par 1.12) tel que l'intégrale est bien définie sur V et ne dépend pas du choix de l'espace deV_1.

On note $N(Y)$ l'espace de tous les processus stochastiques

$$\Phi : [0, T] \times \Omega \to L_2(V_0, H) \tag{1.16}$$

tels que

$$E\left(\int_0^T ||\Phi(t)||^2_{L_2(V_0,H)} dt\right) < +\infty \tag{1.17}$$

et pour tout $u \in V_0, \Phi(t)u$ est un processus stochastique H-mesurable adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

L' intégrale stochastique $\int_0^t \Phi(s)d\tilde{W}(s) \in H$ par rapport au processus de Wiener cylindrique donnée par 1.12 pour tout processus $\Phi \in N(H)$, peut être définie comme limite

$$\int_0^t \Phi(s)d\tilde{W}(s) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m \int_0^t \Phi(s)g_j d\beta_j(s) \qquad surH \tag{1.18}$$

au sense dans $L^2(\Omega)$
Commentaire :

Avant de nous prouver que l'intégrale stochastique donnée par la formule 1.18 est bien définie , rappelons les propriétés de l'opérateur Q_1. De la proposition 1.3.1, processus de Wiener cylindrique $(\tilde{W}(t))_t$ donnée par 1.12 a un opérateur de covariance $Q_1 : V_1 \to V_1$, qui est un opérateur nucléaire dans l'espace V_1 i.e $TrQ_1 < +\infty$. Basons sur la proposition 1.3.2, $Q_1^{1/2} : V_1 \to V_0, ImQ_1^{1/2} = V_0$ et $||u||_{V_0} = \left\| Q_1^{-1/2} u \right\|_{V_1}$ pour $u \in V_0$.

En outre, de les considérations et les propriétés ci-dessus de l'opérateur Q_1 nous pouvons déduire que $L(V_1, H) \in L_2(V_0, H)$. Cela signifie que chaque opérateur $\Phi \in L(V_1, H)$ i.e est linéaire et bornée de V_1 dans H, est un opérateur de Hilbert-Schmidt de V_0 dans H, i.e $\Phi \in L_2(V_0, H)$ quand $TrQ_1 < \infty$ dans V_1. Cela signifie que les conditions 1.16 et 1.17 pour la famille $N(H)$ de intégrands sont des hypothéses naturelles pour l'intégrale stochastique donné par 1.18.

Maintenant, nous allons montrer que la série du côté droit de 1.18 est convergente. Notons

$$\tilde{W}^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_j \beta_j(t)$$

et

$$Z_m = \int_0^t \Phi(s) \tilde{W}^{(m)}(s). \qquad t \in [0, T].$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} E(\|Z_n - Z_m\|_H^2) &= E \left\| \sum_{j=m+1}^{n} \int_0^t \Phi(s) g_j d\beta_j(s) \right\|_H^2 \qquad \text{pour } n \geq m \geq 1 \\ &\leq E \sum_{j=m+1}^{n} \int_0^t \|\Phi(s) g_j\|_H^2 ds \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

car à partir de l'hypothèse 1.17

$$E \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\Phi(s) g_j\|_H^2 \right) ds < +\infty.$$

Ensuite, la suite (Z_m) est suite de Cauchy dans l'espace de variables aléatoire de carré intégrable. Ainsi, l'intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener cylindrique donnée par 1.18 est bien définie.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'espace V_1 n'est pas uniquement déterminée. Par conséquent, le processus de Wiener cylindrique $\tilde{W}(t)$ définie par 1.12 n'est pas aussi uniquement déterminée.

Notons que l'intégrale stochastique défini par 1.18 ne dépend pas du choix de l'espace V_1. Premièrement, dans la formule 1.18, il n'existe pas d'éléments de l'espace V_1 mais que $\{g_j\}$ est une base de V_0 . En outre, dans 1.18, il ne sont pas des vecteur propres de l'opérateur de covariance Q_1. Deuxièmement, la classe $N(H)$ de intégrands ne dépend pas du choix de l'espace V_1 car (par la proposition 1.3.2) les espaces $Q_1^{1/2}(V_1)$ sont identiques pour tout espaces V_1 :

$$Q_1^{1/2}(V_1) : V_1 \to V_0 \qquad \text{et} \qquad ImQ_1^{1/2} = V_0.$$

Par conséquent, l'int'egrale stochastique par rapport au processus de Wiener cylindrique, peut être obtenue dans le sens ci-dessus de la limite des intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à valeurs réelles.

Chapitre 2

Intégrales stochastique par rapport au processsus de Wiener cylindrique via régularisation

Nous venons de souligner que l'un des problèmes posés par l'intégrale d'Itô est qu'elle ne permet pas de traiter des intégrands non progressivement mesurables. Pour obtenir un nouvel objet, nous devons donc changer l'approche d'Itô par une nouvelle approche.

2.1 Intégration stochastique via régularisation

Le but de cette partie est d'introduire les intégrales dites backward, forward et symétrique et la covariance [1], qui sont à la base de calcul via régularisation, par un procédé de type limite.
Nous allons utiliser des théorèmes d'interversion. Pour bien comprendre l'idée, faisons tout d'abord un calcul formel (i.e. sans s'occuper pour l'instant des problèmes d'interversion)

2.1.1 Définition

Soient X une semimartingale continue, H un processus adapté continu à gauche et $t \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$

$$\int_0^t H(s)dX(s) = \int_0^t \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^s H(u)du \right) dX(s) \tag{2.1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^s H(u)du \right) dX(s) \tag{2.2}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_u^{u+\varepsilon} dX(s) \right) H(u)du \tag{2.3}$$

1. Nous gardons la terminologie anglaise ; en français, on peut aussi parler d'intégrale progressive pour forward et de rétrograde pour backward.

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \frac{X(u+\varepsilon) - X(u)}{\varepsilon} H(u)du \tag{2.4}$$

Le calcul précédent repose sur deux résultats-clés : les théorèmes de **Heine-Lebesgue** et de **Fubini**.

Théorème 2.1.1 ***(de Heine-Lebesgue)***
Soit $f: \ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u)du = f(x), \quad \lambda - p.p.$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x}^{x+\varepsilon} f(u)du = f(x), \quad \lambda - p.p.$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x} f(u)du = f(x), \quad \lambda - p.p.$$

λ désignant la mesure de Lebesgue.

Preuve. Voir [18], théorème 8, page 217. ■

Lemme 2.1.1 ***(de Fubini, version stochastique)***
Si M est une martingale continue de carré intégrable et si $H : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est un processus borné $\mathbb{P}_{prog} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$-mesurable, alors, pour tous $s, t \geq 0$, on a :

$$\int_0^s \left(\int_0^t H(u,v)dM(u) \right) dv = \int_0^t \left(\int_0^s H(u,v)dv \right) dM(u)$$

Preuve. Voir [19] page 165. ■

Avant de définir précisément les objets que nous allons étudier, faisons une remarque trés importante. Pour passer de 2.1 à 2.4 on a "remplacé" $H(s)$ par la quantité $\frac{1}{\varepsilon} \int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^{s} H(u)du$, qui (vu le théorème de Heine-Lebesgue) en est une bonne approximation quand ε tend vers 0. On aurait pu tout aussi bien utiliser la quantité $\frac{1}{2\varepsilon} \int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^{s+\varepsilon} H(u)du$ ou encore $\frac{1}{\varepsilon} \int_{s}^{s+\varepsilon} H(u)du$ Si H était déterministe, cela aurait peu d'importance. Mais ici, ce n'est pas le cas et ce choix a des répercussions beaucoup plus fortes ! Par exemple, le choix $\int_s^{s+\varepsilon} H(u)du$ impose un caractère anticipant pour H. Nous verrons plus loin les conséquences de ce choix.

Définition 2.1.1 *Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu et $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus dont les trajectoires sont dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ i.e. pour tout $a > 0$, $\int_0^a |Y_t|dt < \infty$ p.s. On pose, pour $\varepsilon > 0$, les intégrales stochastiques généralisés et les covariance seront définies par une procédure de régularisation. plus précisément,*
Soit $I^-(\varepsilon, Y, dX)$(resp.$I^+(\varepsilon, Y, dX)$, $I^0(\varepsilon, Y, dX)$ et $C(\varepsilon, Y, X)$) est $\varepsilon-$ intégrale Forward (resp. ε-intégrale Backword, $\varepsilon-$ integrale symétrique et $\varepsilon-$ covariance) :

$$I^-(\varepsilon, Y, dX)(t) = \int_0^t Y(s)\frac{X(s+\varepsilon) - X(s)}{\varepsilon}ds; \qquad t \geq 0,$$

$$I^+(\varepsilon, Y, dX)(t) = \int_0^t Y(s)\frac{X(s) - X(s-\varepsilon)}{\varepsilon}ds; \qquad t \geq 0,$$

$$I^o(\varepsilon, Y, dX)(t) = \int_0^t Y(s)\frac{X(s+\varepsilon) - X(s-\varepsilon)}{2\varepsilon}ds; \qquad t \geq 0,$$

$$C(\varepsilon, X, Y)(t) = \int_0^t \frac{(X(s+\varepsilon) - X(s))(Y(s+\varepsilon) - Y(s))}{\varepsilon}ds; \; t \geq 0,$$

On remarque que ces quatre processus sont continus.

Définition 2.1.2 *Une famille de processus $(H_t^{(\varepsilon)})_{t\in[0,T]}$ est dite converger vers $(H_t)_{t\in[0,T]}$ dans le sens ucp(convergence uniforme en probabilité), si $\sup_{0\leq t\leq T} |H_t^{(\varepsilon)} - H_t|$ tend vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$.*

Définition 2.1.3 *A condition que les limites correspondantes existent dans le sens ucp, on définit les intégrales et les covariances par les formules suivantes :*

$$\textbf{\textit{Intégrale forward}}: \quad \int_0^t Y d^- X = \lim_{\varepsilon\to 0^+} I^-(\varepsilon, Y, dX)(t).$$

$$\textbf{\textit{Intégrale backward :}} \quad \int_0^t Y d^+ X = \lim_{\varepsilon\to 0^+} I^+(\varepsilon, Y, dX)(t).$$

$$\textbf{\textit{Intégrale symétrique :}} \quad \int_0^t Y d^o X = \lim_{\varepsilon\to 0^+} I^o(\varepsilon, Y, dX)(t).$$

$$\textbf{\textit{Covariance :}} \quad [X, Y]_t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} C(\varepsilon, X, Y)(t). \; \textit{Quand } X = Y \textit{ alors } [X] = [X, X].$$

Définition 2.1.4

1. *Si $[X]$ existe, X est dit un processus à variation quadratique finie et $[X]$ est appelé la variation quadratique de X.*
2. *Si $[X] = 0$, X est appelé un processus à variation quadratique nulle.*
3. *Un vecteur $(X^1, ..., X^n)$ d'un processus continu est dit avoir tous ces autocovariance si $[X^i, X^j]$ existe pour tout $1 \leq i, j \leq n$.*
   Nous allons aussi utiliser la terminologie des crochets au lieu de la covariance.

Remarque 2.1.1

1) *Si* $(X^1, ..., X^n)$ *a tous ces autocovariance, alors*

$$[X^i + X^j, X^i + X^j] = [X^i, X^i] + 2[X^i, X^j] + [X^j + X^j]. \tag{2.5}$$

De l'égalité précédente, il s'ensuit que $[X^i, X^j]$ *est la différence de deux processus de plus en plus, présentant une variation borné ; par conséquent, le crochet est un intégrateur classique au sens de Lebesgue-Stieltjes*

2.1.2 Propriétés fondamentales

Soients X, X', Y, Y' quatre processus avec X, X' sont continus et Y, Y' ayant leurs trajectoires dans $L^1_{loc}(R_+)$. le signe (*) se tiend pour l'un des trois symboles -, + ou 0.

1. $(X, Y) \mapsto \int_0^{\cdot} Y d^* X$ et $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ sont des opérateurs bilinéaires.
2. La covariance des processus continus est un opérateur symétrique.
3. Quand il existe , $[X]$ est un processus croissant,
4. Si τ est un temps d'arrêt, $[X^\tau, X^\tau]_t = [X, X]_{t\wedge\tau}$ et :
$$\int_0^t Y \mathbb{1}_{[0,\tau]} d^* X = \int_0^t Y d^* X^\tau = \int_0^t Y^\tau d^* X^\tau = \int_0^{t\wedge\tau} Y d^* X,$$
où X^τ est le processus X arrêté au temps τ, défini par $X_t^\tau = X_{t\wedge\tau}$.
5. Si ξ et η sont deux v.a. fixées
$$\int_0^{\cdot} (\xi Y_s) d^*(\eta X_s) = \xi\eta \int_0^{\cdot} Y_s d^* X_s.$$
6. Les intégrales via régularisation ont aussi la propriété de localisation suivante
Supposons que $X_t = X'_t, Y_t = Y'_t, \forall t \in [0, T]$ sur un sous-ensemble Ω_0 *de* Ω . Alors
$$\mathbb{1}_{\Omega_0} \int_0^t Y_s d^* X_s = \mathbb{1}_{\Omega_0} \int_0^t Y'_s d^* X'_s, \qquad t \in [0, T].$$
7. Si Y est un processus élémentaire du type $Y_t = \sum_{i=1}^{N} A_i 1_{I_i}$, où A_i sont des v.a. et (I_i) est une famille d'intervalles réels d'extrémité $a_i < b_i$, Alors
$$\int_0^t Y_s d^* X_s = \sum_{i=1}^{N} A_i (X_{b_i\wedge t} - X_{a_i\wedge t}).$$

Les propriétés suiventes sont élémentaires de la définition des intégrales via régularisation.

Proposition 2.1.1 *1. Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus continue et* $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ *est un processus dans* $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. *Alors*

2. $[X,Y]_t = \int_0^t Y d^+X - \int_0^t Y d^-X$.

3. $\int_0^t Y d^o X = \frac{1}{2}\left(\int_0^t Y d^+X - \int_0^t Y d^-X\right)$.

4. Temps renversé :Soit $\hat{X}_t = X_{T-t}, t \in [0,T]$. *Alors*
- $\int_0^t Y d^\pm X = -\int_{T-1}^T \hat{Y} d^\pm \hat{X}, \qquad 0 \le t \le T;$
- $\int_0^t Y d^o X = -\int_{T-1}^T \hat{Y} d^o \hat{X}, \qquad 0 \le t \le T;$
- $[\hat{X},\hat{Y}]_t = [X,Y]_T - [X,Y]_{T-t}, \qquad 0 \le t \le T;$

5. Intégration par parties : Si Y *est continue,*

$$\begin{aligned} X_tY_t &= X_0Y_0 + \int_0^t X d^-Y + \int_0^t Y d^+X \\ &= X_0Y_0 + \int_0^t X d^-Y + \int_0^t Y d^-X + [X,Y]_t. \end{aligned}$$

6. Inégalités Kunita-Watanabe : Si X *et* Y *sont des processus à variation quadratique finie, on a*

$$|[X,Y]| \le \{[X][Y]\}^{1/2}.$$

7. Soit X *un processus à variation bornée et* Y *un processus à trajectoires localement bornées dont l'ensemble des points de discontinuités est au plus dénombrable. Alors*

a) $\int_0^t Y d^+X = \int_0^t Y d^-X = \int_0^t Y dX$, *Où* $\int_0^t Y dX$ *est une intégrale de Lebesgue-Stieltjes.*

b) $[X,Y] = 0$ *En particulier, une variation bornée et un processus continu est un processus à variation quadratique nulle.*

8. Soit X *un processus absolument continue et* Y *un processus à trajectoires localement bornées. Alors*

$$\int_0^t Y d^+X = \int_0^t Y d^-X = \int_0^t Y X' ds.$$

Remarque 2.1.2 *Si les trajectoires de* Y *ont leur point de discontinuités un ensemble non dénombrable, 7) peut échouer. Prendre un exemple*
$Y = 1\!\!1_{supp} dV$, *où* V *est une fonction continue croissante telle que* $V'(t) = 0$ *p.p. par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors* $Y = 0$ *Lebesgue p.p., et* $Y = 1\!\!1, dV$ *p.p. donc*

$$\int_0^t Y dV = V(t) - V(0), \quad I^-(\varepsilon, Y, dV)(t) = 0 \quad \int_0^t Y D^- V = 0.$$

Preuve

Points $1), 2), 3), 4)$ suivent immédiatement de la définition 2.1.2. Pour illustration, nous avons seulement prouvé l'assertion 3) par changement de variable $u = T - s$, on obtient

$$\int_0^t Y_s \frac{X_s - X_{s-\varepsilon}}{\varepsilon} ds = -\int_{T-t}^T \hat{Y}_u \frac{\hat{X}_{u+\varepsilon} - \hat{X}_u}{\varepsilon} du, \quad 0 \le t \le T.$$

Puisque X est continue, on peut prendre la limite de deux membres et le résultat est immédiatement.
5) suit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui dit que

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\int_0^t (X_{s+\varepsilon} - X_s)(Y_{s+\varepsilon} - Y_s) ds\right| \le \left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (X_{s+\varepsilon} - X_s)^2 ds \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (Y_{s+\varepsilon} - Y_s)^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

6)est une conséquence de 5).
7) Nous utilisons Fubini, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t Y_s (X_{s+\varepsilon} - X_s) ds &= \frac{1}{2}\int_0^t ds Y_s \int_s^{s+\varepsilon} dX_u \\ &= \int_s^{s+\varepsilon} dX_u \frac{1}{\varepsilon}\int_{u-\varepsilon}^{u\wedge t} Y_s ds. \end{aligned}$$

Puisque les sauts de Y sont au plus dénombrable, donc

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{u-\varepsilon}^{u} Y_s ds \to Y_u, d|X| p.p.$$

où $|X|$ désigne la variation totale de X. Puisque $t \to Y_t$ est localement bornée, Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\int_0^t Y d^- X = \int_0^t Y dX.$$

Le fait que $\int_0^t Y d^+ X = \int_0^t Y dX$ le rest de la preuve se fait d'une manière similaire.
b)est une conséquence du point 1)
8) peut être atteint en utilisant les propriétés d'intégration élémentaire similaires. ■

Remarque 2.1.3 *Le point 2) de la proposition 2.1.1 indique que l'intégrale symétrique est la moyenne des intégrales forward et backward. et le point 3) relie l'intégrale backward à l'intégrale forward. C'est pourquoi, dans la suite, nous nous contenterons de donner la plupart des résultats seulement pour l'intégrale forward.*

2.1.3 Liens avec l'intégrale d'Itô

Commençons par montrer que l'intégrale forward que nous venons de définir coincide, sous certaines hypothèses, avec l'intégrale d'Itô.

Proposition 2.1.2 *Soient X une $\mathcal{F}$-semimartingale continue, de décomposition canonique $X = M + V$(M étant une martingale locale continue et V un processus à variation finie localement bornée), définie sur [0,1] et Y un processus borné F-prévisible défini sur $[0,1]$ vérifiant, pour tout $t \geq 0$:*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{s\in S(Y)}(d|V|(s) + d < M, M > (s)) = 0, \mathbb{P}.p.s. \tag{2.6}$$

où $S(Y)$ désigne l'ensemble des $u > 0$ tels que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{u-\varepsilon}^{u} f(s)ds \neq f(u)$. Alors, pour tout $t \geq 0$, l'intégrale $\int_0^t Y(s)d^- X(s)$ existe et on a :

$$\int_0^t Y(s)d^- X(s) = \int_0^t Y(s)dX(s) \tag{2.7}$$

L'assertion 2.6 est en particulier réalisée si Y est continu à gauche ou encore si V et $< M, M >$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est un corollaire immédiat du théorème de Heine-Lebesgue).

Preuve

La preuve consiste seulement à justifier les étapes des calculs 2.1 à 2.4 présentés dans la section précédente. En raisonnant par localisation, on peut supposer que M et V sont des processus bornés. Soient $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0$ On a :

$$I^-(\varepsilon, Y, dX)(t) = I^-(\varepsilon, Y, dM)(t) + I^-(\varepsilon, Y, dV)(t)$$

1. Traitons déjà le cas de $I^-(\varepsilon, Y, dV)(t)$:
   Le théorème de Fubini classique donne :
   $$I^-(\varepsilon, Y, dV)(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^{s} Y(u)du \right) dV(s)$$
   Or 2.6 implique :
   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{s-\varepsilon}^{s} Y(u)du = Y(s), \;\; d|V| - p.s.$$
   Par le théorème de la convergence dominée, il vient :
   $$\int_0^t Y d^- V = \int_0^t Y(u)dV(u)$$
2. Traitons maintenant le cas de $I^-(\varepsilon, Y, dM)(t)$:
   La version stochastique du théorème de Fubini 2.1.1 donne :
   $$I^-(\varepsilon, Y, dM)(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^{(s-\varepsilon)\vee 0} Y(u)du \right) dM(s)$$
   Par 2.6, il vient :
   $$\lim_{\varepsilon 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_s^{(s-\varepsilon)} Y(u)du = Y(s), \quad d<M,M> -p.s.$$
   D'où :
   $$E\left[\left(I^-(\varepsilon, Y, dM) - \int_0^t Y(u)dM(u)\right)^2\right]$$
   $$= E\left[\left(\int_0^t \left[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{(s-\varepsilon)\vee 0} Y(u)du - Y(s)\right] dM(s)\right)^2\right]$$
   $$= E\left[\int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{(s-\varepsilon)\vee 0} Y(u)du - Y(s)\right)^2 d<M,M>(s)\right]$$
   et, grâce au théorème de la convergence dominée :
   $$\lim_{\varepsilon \to 0} I^-(\varepsilon, Y, dX)(t) = \int_0^t Y(u)dM(u) \tag{2.8}$$

dans L^2 et donc en probabilité. ■

Le résultat suivant montre que notre nouvelle intégrale apporte quelque chose de nouveau lorsque l'intégrand auquel on a affaire n'est pas progressivement mesurable (sinon, on retombe sur l'intégrale d'Itô traditionnelle).

Proposition 2.1.3 *Soient X un processus F-adapté et càdlàg et t un réel ≥ 0. On suppose que l'intégrale $\int_0^1 Y d^- X$ existe pour tout processus borné, càglàd et $\mathcal{F}$-prévisible. Alors X est une semimartingale. En particulier, si Y vérifie les hypothèses précédentes, on a :*

$$\int_0^t Y d^- X = \int_0^t Y dX$$

Preuve Voir [6] page 408 ■

Le théorème suivent donne une formule de substitution pour l'intégrale forward par rapport à une martingale, ce résultat nous permet de construire facilement une solution à un système d'équations différentielles stochastiques anticipée de condition initiale.
Dabord, on rappellons le lemme de **Kolmogorov**.

Lemme 2.1.2 ***Kolmogorov***
Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_1}$,$R_1$ est le cube unité de $\mathbb{R}^n$ un processus stochastique à valeurs réelles. Supposons qu'il existe des constantes $p > 1, q > 0$ et $\varepsilon > 0$, tel que $s, t \in \mathbb{R}_1$

$$E\{|x_t - x_s|^p\} \leq q|t-s|^{n+\varepsilon},$$

Alors

i) *X a une version continue.*

ii) *Il exite des constantes c, k ne dépendant que de n, p et ε, et une v.a. Y tels que, en probabilité, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_1$*

$$\|x_t - x_s\| \leq Y\|t-s\|^{\varepsilon/p}(\log \frac{k}{\|t-s\|})^{2/p}$$

et

$$E(Y^p) \leq cq;$$

iii *Si $E(\|X_t\|^p) < \infty$. pour certains t, alors*

$$E(\sup_{t \in \mathbb{R}_1} |X_t|^p) < \infty.$$

Preuve Voir [17]. page 273 ■

Théorème 2.1.2 ***(de substitution)***
Supposons que :

1. *$G : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est une v.a.,*
2. *α est un réel > 1,*
3. *q est un réel $> \frac{2\alpha}{\alpha-1}$*
4. *δ est un réel $> \frac{d(2\alpha+q)}{2\alpha}$*
5. *$X : \mathbb{R}^d \times \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est une v.a.r. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{P}_{prog}$-measurable vérifiant, pour tout N positive :*

$$\begin{cases} (i) \quad E\left[\int_0^1 |X(0,s)|^q ds\right] < \infty, \\ (ii) \quad E\left[\int_0^1 |X(a,s) - X(b,s)|^q ds\right] \leq C_N|a-b|^\delta; \forall |a| \leq N, \forall |b| \leq N. \end{cases} \tag{2.9}$$

6. $M : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est une martingale locale continue vérifiant $d\langle M, M\rangle(t) = h(t)dt$ et

$$E\left[\int_0^1 h(t)^\alpha dt\right] < +\infty \tag{2.10}$$

Alors $\int_0^1 X(G,u)d^- M_u$ existe et on a la formule de substitution :

$$\int_0^1 X(G,u)d^- M_u = \left(\int_0^1 X(a,u)dM_u\right)_{a=G} \tag{2.11}$$

Preuve

Si $a \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$U(a) = \int_0^1 X(a,s)dM(s)$$

et

$$V(\varepsilon,a) = I^-(\varepsilon, X, dM)(1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee 0}^s X(a,u)du\right) dM(s)$$

Posons $p = \frac{2\alpha\delta}{3\alpha+q}$ et $\gamma = \frac{q\alpha}{2\alpha+q}$. On a alors $p > d$ (hypothèse 4) et $1 < \gamma < \alpha$ (hypothèse 3). Grâce aux inégalités BDG et de Jensen, il vient :

$$E(|U(a)|^{2\gamma}) \le CE\left[\left(\int_0^1 X(a,s)^2 h(s)ds\right)^\gamma\right] \le CE\left[\int_0^1 X(a,s)^{2\gamma} h(s)^\gamma ds\right].$$

Soient $p' = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $q' = \frac{2\alpha+q}{2\alpha}$. L'inégalité de Hölder (p' *et* q' sont conjugués) donne :

$$E(|U(a)|^{2\gamma}) \le C'\left(\int_0^1 X(a,s)^q ds\right)^{\frac{1}{q'}}$$

où $C' = C\left(\int_0^1 h(s)^\alpha ds\right)^{\frac{1}{p'}}$. On obtient donc, vu l'hypothèse formulée sur X :

$$E(|U(a)|^{2\gamma}) < +\infty \tag{2.12}$$

Des calculs identiques donneraient aussi :

$$E(|V(\varepsilon,a)|^{2\gamma}) < +\infty \tag{2.13}$$

et

$$E(|V(\varepsilon,a) - V(\varepsilon,b)|^{2\gamma}) + E(|U(a) - U(b)|^{2\gamma}) \le k_N|a-b|^p, \forall |a| \le N, \forall |b| \le N \tag{2.14}$$

En particulier, et grâce au lemme de Kolmogorov 2.1.2, l'inégalité 2.14 implique que U admet une version continue U_0 qui vérifie en outre :

$$E(|U_0(a) - U_0(b)|^{2\gamma}) \le k_N|a-b|^p, \forall |a| \le N, \forall |b| \le N$$

Le théorème suivant va nous être utile :

Lemme de de Garsia, Rodmich et Rumsey

Soient $p > d, \gamma > 0, 0 < m < p - d, N > 0, K_N = \{a \in \mathbb{R}^d, |a| \le N\}$ et $\{V(a), a \in K_N\}$ une famille de v.a. vérifiant :

$$E(|V(a) - V(b)|^{2\gamma}) \le k|a-b|^p, \forall a, b \in K_N$$

Alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$, ne dépendant pas de V, et une v.a. $\Gamma \geq 0$ telles que :

$$|V(a) - V(b)|^{2\gamma}) \leq C_1 |a-b|^m \Gamma, \quad \forall a, b \in K_N$$

et

$$E(\Gamma) \leq C_2 k$$

Ici, on déduit l'existence de deux constantes $C_1, C_2 > 0$ et d'une variable aléatoire $\Gamma(\varepsilon)$ telles que :

$$|V(\varepsilon, a) - V(\varepsilon, b)|^{2\gamma} \leq C_1 |a-b|^m \Gamma(\varepsilon), \tag{2.15}$$

et :

$$E(\Gamma(\varepsilon)) \leq C_2 k_n. \tag{2.16}$$

Grâce à l'inégalité :

$$P(|V(\varepsilon, G) - U_0(G)| > \tau) \leq P(|G| > N) + P(|V(\varepsilon, G 1\!\!1_{|G| \leq N}) - U_0(G 1\!\!1_{|G| \leq N})| > \tau)$$

on peut supposer que $|G|$ est majoré par N. Soit (G_n) une suite de v.a. discrètes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, G_n \in K_N$ et $||G - G_n||_\infty \leq \frac{1}{n}$. De 2.15 et 2.16, on déduit :

$$E(|V(\varepsilon, G) - V(\varepsilon, G_n)|^{2\gamma}) \leq C_1 E(|G - G_n|^m \Gamma(\varepsilon)) \leq C_1 C_2 k_N \left(\frac{1}{n}\right)^m \tag{2.17}$$

De même, on montrerait que :

$$E(|V_0(G) - V_0(G_n)|^{2\gamma}) \leq C_4 \left(\frac{1}{n}\right)^m \tag{2.18}$$

Pour chaque $a > 0$, $V(\varepsilon, a)$ converge vers $U_0(a)$ dans $L^{2\gamma}$ (d'aprés la proposition 2.1.2 et la propriété 2.12). Si G est une v.a. discrète, il est facile de voir que cela implique $V(\varepsilon, G)$ converge vers $U_0(G)$ dans $L^{2\gamma}$. Si G est quelconque, on utilise 2.17 et 2.18. ■

2.1.4 Exemple d'application de théorème de substitution à la résolution d'équations différentielles stochastiques avec donnée initiale non adaptée

Faisons une remarque importante (en vue des applications) sur le théorème de substitution 2.1.2. Si W est un mouvement brownien, on peut simplifier les hypothèses du théorème : il suffit en effet de supposer l'existence de $q > 2$ et $\delta > d$ vérifiant l'hypothèse 5) pour assurer 2.11 (choisir $\alpha > 1$ suffisamment grand pour que $\delta > \frac{d(2\alpha+q)}{2\alpha}$ et $q > \frac{2\alpha}{\alpha-1}$).

L'intérêt du théorème de substitution est qu'il permet de donner un sens à des intégrales du type $\int_0^1 X(G,s)dW_s$ avec G $\mathcal{F}_1$-mesurable (ce qui est impossible avec l'intégrale d'Itô traditionnelle). C'est pourquoi le théorème de substitution intervient naturellement et de manière fondamentale dans la résolution d'équations différentielles stochastiques avec donnée initiale non adaptée. Décrivons cela. Soit $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in [0,1]), P)$ un espace probabilisé sur lequel est défini un mouvement brownien W, et soient $b : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sigma : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications $\mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables vérifiant une condition de Lipschitz globale :

$$|b(s,x) - b(s,y)| + |\sigma(s,x) - \sigma(s,y)| \leq K_1 |x-y|, \forall s \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

et une condition de croissance linéaire :

$$|b(s,x)| + |\sigma(s,x)| \leq K_2(1+|x|),\ \forall s \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

Proposition 2.1.4 *Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution forte de l'équation :*

$$Y_t = a + \int_0^t b(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s)dW_s \tag{2.21}$$

que l'on note $t \mapsto X(a,t)$. De plus, pour tous $q > 0$ et $t \geq 0$, on a :

$$E\left(\int_0^t |X(0,s)|^q ds\right) < +\infty \tag{2.22}$$

et

$$E\left(\int_0^t |X(a,s) - X(b,s)|^q ds\right) \leq C_{q,t}|a-b|^q,\ \forall a,b \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

Preuve. C'est une généralisation de [21], théorème 2.1 page 211. ■

On peut maintenant énoncer le :

Théorème 2.1.3 *Soit ζ une v.a. $\mathcal{F}_1$-mesurable. Alors, $\mathbb{P}$.p.s. :*

$$X(\zeta,t) = \zeta + \int_0^t \beta(s,X(\zeta,s))ds + \int_0^t \sigma(s,X(\zeta,s))d^-W_s$$

Preuve.
Montrons que le processus $[0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (s,a) \mapsto \sigma(s,X(a,s))$ vérifie les hypothèses du théorème 2.1.2 de substitution. Grâce à la remarque précédente, il suffit de montrer que 2.9 sont vérifiées avec $q > 2$ et $\delta > 1$ (en fait, on prendra même $\delta = q$). D'aprés 2.20, on a, pour tout $q > 0$:

$$\int_0^t |\sigma(s,X(0,s))|^q ds \leq \int_0^t K_2(1+|X(0,s)|^q)ds$$

et, vu 2.22 :

$$E\left[\int_0^t |\sigma(s,X(0,s))|^q ds\right]$$

De même, en utilisant 2.19 et 2.23, il vient :

$$E\left[\int_0^t |\sigma(s,X(a,s)) - \sigma(s,X(b,s))|^q ds\right] \leq K_1^q C_{q,t}|a-b|^q$$

Le théorème de substitution implique donc :

$$\int_0^t \sigma(s,X(\zeta,s))d^-W_s = \left(\int_0^t \sigma(s,X(a,s))dW_s\right)_{a=\zeta}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^t \sigma(s,X(\zeta,s))d^-W_s &= \left(X(a,t) - a - \textstyle\int_0^t \beta(s,X(a,s))ds\right)_{a=\zeta} \\ &= X(\zeta,t) - \zeta - \textstyle\int_0^t \beta(s,X(\zeta,s))ds\end{aligned}$$

et finalement :

$$X(\zeta,t) = \zeta + \int_0^t \beta(s,X(\zeta,s))ds + \int_0^t \sigma(s,X(\zeta,s))d^-W_s$$

■

2.2 Intégrales stochastique par rapport au processsus de Wiener cylindrique via régularisation

Dans cette partie, fortement inspiré dans les intégrales via régularisation, nous définissons une nouvelle intégrale stochastique par rapport au processus de Wiener cylindrique. nous allons étudier le lien entre cette nouvelle intégrale et l'intégration définie dans la partie précédente. Nous allons commencer à donner la définition suivante

On note V_Q un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$< h, g >_{V_Q} := < Qh, g >_V, \quad h, g \in V$$

Définition 2.2.1 *Soit g un processus stochastique à valeurs dans V_Q tel que les coefficients de Fourier $< g, v_j >_{V_Q}$ sont finis pour tout t et ω. Supposons que pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe*

$$c_j = \int_0^T < g, v_j >_{V_Q} d^- \tilde{W}_s(v_j)$$

et que $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m c_j$ converge en probabilité.

Nous définissons l'intégrale Forward de Russo-Vallois $\int_0^T g_s d^- \tilde{W}_s$ par

$$\int_0^T g_s d^- \tilde{W}_s = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m c_j.$$

***Remarque* 2.2.1**

1. *Il est clair que la définition de l'intégrale Forward de Russo-Vallois est un opérateur linéaire.*
2. *Nous notons que cette définition ne nécessite pas une condition de la capacité d'adaptation sur le processus g par la définition 2.2.1.*
3. *Dans le cas où $V = \mathbb{R}$ et $Q = Id_{\mathbb{R}}$ l'intégrale Forward de Russo-Vallois est égale à l'intégrale forward dans le sens de la définition 2.1.3.*

Proposition 2.2.1 *Pour tout processus prévisible $g \in L^2(\Omega \times [0, T], V_Q)$ l'intégrale (2) est égale à l'intégrale Forward de Russo-Vallois.*

Preuve

Comme $< g, v_j >_{V_Q}$ est prévisible et appartient à $L^2(\Omega \times [0, T])$ nous avons

$$c_j = \int_0^T < g, v_j >_{V_Q} d^- \tilde{W}_s(v_j) = \int_0^T < g, v_j >_{V_Q} d\tilde{W}_s(v_j).$$

La convergence de la série dans $L^2(\Omega)$

$$\int_0^T g_s d\tilde{W}_s = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T < g, v_j >_{V_Q} d\tilde{W}(v_j),$$

il s'ensuit que

$$\int_0^T g_s d^- \tilde{W}_s = \int_0^T g_s d\tilde{W}_s.$$

$\blacksquare$

Chapitre 3

Applications

3.1 Rappel sur les équation aux dérivés partielles stochastiques

Le problème général est comme suit. Supposons qu'un système physique régie par une équation aux dérivées partielles. Supposons que le système est perturbé au hasard, peut-être par un bruit blanc.

Si $u(x,t)$ est la position de l'une des chaînes de caractères au niveau du point x et du temps t, alors $u(x,t)$ aurait satisfaire l'équation d'onde $u_{tt} = u_{xx}$.

Soit $\dot{W}$ représente l'intensité du bombardement au point x et du temps t. de sorte que, après soustraction d'une intensité moyenne, $\dot{W}$ peut être approximée par un bruit blanc, et l'équation finale est

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \dot{W}(x,t),$$

où $\dot{W}$ est un bruit blanc à la fois dans le temps et dans l'espace.

La particularité de cette équation est qu'aucune des dérivées partielles en elle existe. Cependant, on peut la réécrire comme une équation intégrale, puis montrer que, dans cette forme il existe une solution continue, mais non-différentiable.

Dans les dimensions supérieures , la solution se révèle être une distribution, non pas une fonction. C'est l'un des obstacles techniques en la matière : il faut faire face à la distribution-évalué des solutions, ce qui a généré un certain nombre d'approches, plus impliquant une utilisation assez importante de l'analyse fonctionnelle. Notre objectif est d'étudier les équations aux dérivé partielles stochastiques en concentrant plus sur les équations paraboliques.

Notre point de vue est plus orienté que la théorie habituelle, et, nous l'espérons, un peu plus intuitive. Nous considérons un bruit blanc $\dot{W}$ comme une mesure sur l'espace euclidien, $W(dx,dt)$, et construire les intégrales stochastiques de la forme $\int f(x,t)dW$ directement, après la construction originale d'Itô. Il s'agit d'un deux paramètres intégrante, mais il est particulièrement simple, connu en la théorie à deux paramètres comme " intégrale faiblement adapté ". Nous résoudrons les équations en termes de ces intégrales.

Nous aurons besoin d'une certaine théorie des espaces nucléaires, de l'espace élémentaire de Sobolev, et la convergence faible des processus stochastiques à valeurs dans l'espace de Schwartz.

Soit $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une martingale dans $\mathbb{R}^d$ de measure covariance $Q(dx, dy, ds) = d < M(dx), M(dy) >_s$ et une mesure dominante K. Soit $\mu(\lambda) = E\{k(\lambda)\}$. Supposons que, pour $p > 0$ et tout $T > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} \frac{1}{(1+|x|^p)(1+|y|^p)} \mu(dxdyds) < \infty.$$

alors $M_t(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d \times [0,T]} \phi(x) M(dxds)$ existe pour tout $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$

Soit L un opérateur de second ordre différentiel auto-adjoint uniformément elliptique à coefficients bornés lisses. Soit T un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^d$. à coefficients bornés lisses. Considérons le EDPS suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} & = LV + T\dot{M}, \\ V(x,0) & = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous avons clairement besoin d'imposer que V et M ont des valeurs de distribution, si seulement pour donner un sens au terme $T\dot{M}$. Nous supposons qu'ils ont des valeurs dans l'espace de Schwartz, $S'(\mathbb{R}^d)$. Nous voulons couvrir deux situations : la première est le cas où 3.1 détient dans $\mathbb{R}^d$. Bien qu'il n'y ait pas de conditions aux limites en tant que tel, le fait que $V_t \in S'(\mathbb{R}^d)$. implique une condition de bornétude à l'infini.
Le second est le cas dans lequel D est un domaine borné en $\mathbb{R}^d$, et les conditions aux limites homogénes sont imposées à ∂D. Supposons que 3.1 détient sur $\mathbb{R}^d$. Supposons pour l'instant que

$$Tf(x) = g(x) \int f(y)h(y)dy$$

pour g et h deux bonnes fonctions.
Dans ce cas, $TM_t(x) = g(x)M_t(h)$. Maintenant $M_t(h)$ est une martingale à valeurs réelles, et donc l'équation 3.1 peut être réecrit :

$$\begin{cases} dV_t & = LVdt + gdM_t(h) \\ \\ V(x,0) & = 0 \end{cases}$$

cette équation diffère de 3.1 dans le terme dérivé qu'est à un seul paramètre

Soit T^* l'adjoint formel de T. La forme faible de 3.1 est

$$V_t(\phi) = \int_0^t V_S(L\phi)ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}}^d T^*\phi(x)M(dxds), \phi\varepsilon S(\mathbb{R}^d) \tag{3.2}$$

Notons que lorsque nous intégrons par parties, 3.2 suit facilement pour ϕ de support compact, mais pour passer à diminuer rapidement ϕ, nous devons utiliser le fait que V et $T\dot{M}$ ne tendent pas trop vite à l'infini.
En cas que D est une région bornee avec un bord lisse, soit B l'opérateur $B = d(x)D_N + e(x)$, où D_N est la dérivée normale sur ∂D, et D et e sont sur $C^\infty(\partial D)$. Considérons le problème limite à valeurs initiales

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} & = LV + T\dot{M}, \quad \text{on} \quad D \times [0, \infty); \\ BV & = 0, \quad \text{on} \quad \partial D \times [0, \infty); \\ V(x, 0) & = 0 \quad \text{on D.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Soient $C_\infty(D)$ et $C_0^\infty(D)$ respectivement l'ensemble des fonctions lisses sur D et la ensemble de fonctions lisses à support compact dans D. Soit $C^\infty(\bar{D})$ l'ensemble des fonctions dans $C^\infty(D)$ dont les dérivées s'étendent toutes les fonctions continues sur $\bar{D}$. Enfin, soit

$$S_B = \left\{ \phi \in C^\infty(\overline{D}) : \quad B\phi = 0\,\text{sur}\partial D \right\}$$

La forme faible de 3.3 est

$$V_t(\phi) = \int_0^t V_S(L\phi)ds + \int_0^t \int_D T^*(x)M(dxds), \phi \in S_B \tag{3.4}$$

Pour calculer 3.4 de 3.3, on multiplie par ϕ et on intégre formellement sur $D \times [0, T]$, (i.e Voir $T\dot{M}$ comme s'il s'agissait d'une fonction différentiable) et on utilie une forme du théorème de Green pour déterminer les dérivées par rapport à ϕ. Cela fonctionne sur la première intégrale si V et ϕ de satisfont la condition limite. Sauf T est d'ordre zéro, il peut ne pas fonctionner pour le deuxième, pour $\dot{M}$ peut ne pas satisfaire les conditions aux limites. (Il ne fonctionnera que si a support compact dans D). cependant, l'équation que nous voulons résoudre est 3.4.l'hypotèse que 3.4 a lieu ϕ satisfisant les conditions aux limites est essentiellement une condition aux limites sur V.

La situation ci-dessus, dans laquellle on considère l'intégrale, plutôt que de l'équation différentielle fondamentale, est analogue à de nombreuses situations dans lesquelles le raisonnement physique amène directement à une équation intégrale, puis les mathématiques prend le relais pour extraire l'équation aux dérivées partielles. Voir ´les dérivations au sens physique de l'équation de la chaleur, " l'équation de Navier-Stokes, et l'équation de Maxwell", par exemple.
Comme dans le cas d'une seule variable, il est possible de traiter les fonctions de test $\varphi(x, t)$ à deux variables.

undelineunderlineExemple 3.1.1
Montrer que si V satisfait 3.4 et si $\varphi(x, t)$ est une fonction lisse telles que pour chaque t, $\varphi(., t) \in S_B$, alors

$$V_t(\varphi(t)) = \int_0^t V_S(L\varphi(s) + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s))ds + \int_0^t \int_D T^*\varphi(x, s)M(dxds). \tag{3.5}$$

Soit $G_t(x, y)$ la fonction de Green pour l'équation différentielle homogène. Si $L = \frac{1}{2}\Delta$, $D = \mathbb{R}^d$, alors

$$G_t(x, y) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{2t}}.$$

Pour un quelconque L, $G_t(x, y)$ sera toujours lisse sauf à $t = 0, x = y$, et sa régularité s'étend même à la limite : si $t > 0$, $G_t(x, .) \in C^\infty(\bar{D})$. Il est positif, et pour $\tau > 0$,

$$G_t(x,y) \leq Ct^{-d/2}e^{\frac{|y-x|^2}{\delta t}}, xy \in D, 0 \leq t \leq \tau, \tag{3.6}$$

où $C > 0$ et $\delta > 0$. (C peut dépendre de τ). Cela est vrai pour $D = \mathbb{R}^d$. et pour D bornnée. Si $D = \mathbb{R}^d, G_t(x,.)$ décrait rapidement vers l'infini par 3.6, il est donc dans $S(\mathbb{R}^d)$. En outre, pour y fixe, $(x,t) \mapsto G_t(x,y)$ satisfait l'équation différentielle homogène associée vers des conditions aux limites.

Définissons $G_t(\phi, y) = \int_D G_t(x,y)\phi(x)dx$.

Alors si ϕ est lisse, $G_0\phi = \phi$. Cela peut se résumer dans l'équation intégrale :

$$G_{t-s}(\phi, y) = \phi(y) + \int_s^t G_{u-s}(L\phi, y)du, \; \phi \in S_B \tag{3.7}$$

La rúgularité de G implique que si $\phi \in C_\infty(\bar{D})$, alors $G_t(\phi,.) \in S_B$. Dans le cas $D = \mathbb{R}^d$,. on a si $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ alors $G_t(\phi,.) \in S(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 3.1.1 *[17]*

Il existe un processus unique $\{V_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans $S'(R^d)$ qui satisfait 3.4. Il est donné par

$$V_t(\phi) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} T^* G_{t-s}(\phi, Y)M(dYds) \tag{3.8}$$

Le résultat d'une région bornée est similaire à l'exception de létat de l'unicité.

Théorème 3.1.2 *Il existe un processus $\{V_t, t \geq 0\}$ à valeurs dans $S'(R^d)$ qui satisfait 3.5.V peut être étendue à un processus stochastique $\{V_t(\phi), t \geq 0, \phi \in S_B\}$; ce processus est unique. il donnée par*

$$V_t(\phi) = \int_0^t \int_D T^* G_{t-s}(\phi, Y)M(dYds), \phi \in S_B \tag{3.9}$$

3.1.1 Interprétation probabiliste d'équations aux dérivées partielles

Temps d'atteinte d'une frontière

Soit E un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière ∂E. Par la théorie des équations aux dérivées partielles, on sait qu'il existe une solution unique à l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\triangle u & = 1 \text{ sur } E \\ u & = 0 \text{ sur } \partial E \end{cases} \tag{3.10}$$

Le but de la présente section est de trouver une représentation probabiliste de la solution de 3.10. A cet effet, on se donne $x \in E$ et on considère un mouvement brownien n-dimensionnel W à partir duquel on construit le processus stochastique $X = W + x$. On définit alors $\tau_x = \inf\{t \geq 0, X_t \in E\}$ le temps d'atteinte du bord de E par une trajectoire de X partant de x.

Théorème 3.1.3 *Avec les notations précédentes :*

$$(\forall x \in E) \qquad u(x) = E(\tau_x)$$

En particulier,$u > 0$ sur tout E.

Preuve

Pour un temps d'arrêt τ . En prenant l'espérance de la formule pour ce temps d'arrêt, on aboutit à :

$$E(u(X_\tau,\tau)) = E(u(X_0,0)) + E\left(\int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Lu\right) ds\right) \tag{3.11}$$

On applique 3.12 avec $Lu = \frac{1}{2}\triangle u$ pour tout $n > 0$:

$$E(u(X_{\tau x \wedge n})) = E(u(X_0)) + E\left(\int_0^{\tau_x \wedge n} \frac{1}{2}\triangle u(X_s) ds\right), \tag{3.12}$$

Puisque $\frac{1}{2}\triangle u = -1$ et que u est bornée, on a $\lim_{n\to\infty} E(x^n) < \infty$ et la variable aléatoire τ_x est intégrable. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient alors

$$u(x) = E(u(X_{\tau_x})) + E\left(\int_0^{\tau_x} \mathbb{1} ds\right) = E(u(X_t a u_x)) + E(\tau_x)$$

mais $u = 0$ sur ∂E et donc $u(X_{\tau_x}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

En remarquant que u est bornée, $E(\tau_x) < \infty$ et donc presque sûrement pour tout $x \in E, \tau_x < \infty$. Les trajectoires du processus X, mouvement brownien partant de x, atteignent donc avec probabilité 1 le bord ∂E. Dans le cas non stationnaire, l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = -\frac{1}{2}\triangle u \qquad \text{sur } E \times \mathbb{R} \\ \\ u(x,0) & = f(x) \text{ sur } \partial E \end{cases} \tag{3.13}$$

C'est l'équation de la chaleur, et on peut montrer que

$$u(x,t) = E(f(X_t))$$

est solution de ce problème, si f est continue et bornée.

3.1.2 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur, également appelée équation de diffusion, s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Il s'agit d'une équation parabolique linéaire du second ordre dont les solutions sont des fonctions analytiques de x, ce qui signifie que $\forall t > t_0, u(x,t)$ possède une série convergente en termes de $x - x_0$.

Solution fondamentale de l'éauqtion de la chaleur

On résout le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sous les conditions $\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = u_0(x) u \to 0 \text{ quand } x \to \pm\infty. \end{cases}$

Si la solution $u(x,t)$ d'une équation aux dérivées partielles dépend seulement d'une combinaison de deux variables indépendantes, le problème peut être réduit à une équation dif'erentielle ordinaire dans laquelle cette combinaison est la variable.
La solution de cette seconde équation est similaire à celle de l'équation aux dérivées partielles d'origine. Ceci peut être fait grâce à l'invariance $x \mapsto \lambda x$ et $t = \lambda^2 t \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ Avec les nouvelles variables $X - \lambda x$ et $T = \lambda^2 t$, on a $\frac{\partial u}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$, $\frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{X}{\sqrt{T}}$ est la seule combinison de X et T qui est indépendante de λ, et donc la solution sera en fonction de $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$ seulement, telle que $u(x,t) = U(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Ici, on va chercher à avoir une solution de la forme $u_\delta(x,t) = t^{-1/2} U_\delta(\xi)$. Le terme $t^{-1/2}$ est ajouté car l'équation de diffusion étant linéaire, $u \mapsto \mu u$ est aussi invariant, et on veut s'assurer que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx$ est constante pour tout t.
En dérivant, on obtient :

$$\frac{\partial u_\delta(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} t^{-3/2} U_\delta(\xi) - \frac{1}{2t} t^{-1/2} \xi U_\delta^{'}(\xi)$$

et

$$\frac{\partial u_\delta(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} t^{-1/2} U_\delta^{'}(\xi)$$

$$\frac{\partial^2 u_\delta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{t\sqrt{t}} U_\delta^{''}(\xi)$$

Finalement, en considérant l'équation de la chaleur :

$$U_\delta^{''}(\xi) + \frac{1}{2} U_\delta(\xi) + \frac{1}{2} \xi U_\delta^{'}(\xi) = 0$$

Cette équation correspond à la forme développée de :

$$U_\delta^{''} + (\frac{1}{2}\xi U_\delta)^{'} = 0$$

On intègre une première fois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U''{}_\delta + \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2}\xi U_\delta)^{'} = U_\delta^{'} + \frac{1}{2}\xi U_\delta = 0$$

puis une seconde fois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_\delta^{'}}{U_\delta} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\xi d\xi$$

soit :

$$\ln U_\delta = \left[-\frac{1}{4}\xi^2\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$U_\delta = Ce^{-\frac{1}{4}\xi^2} + D$$

On choisit $D = 0$ et on normalise la solution grâce à $C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = 1$
Finalement :

$$u_\delta(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Solution générale d'un problème avec condition initiales

On résout le problème :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sous les conditions $-\infty < x < \infty, t > 0$ et $u(x,0) = u_0(x)$ où $u_0(x)$ se comporte suffisamment bien, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lim\limits_{|x| \to +\infty} u_0(x) e^{-ax^2} = 0, \forall a > 0 \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u_0(x,t) e^{-ax^2} = 0, \forall a > 0, t > 0. \end{cases}$$

On peut écrire la donnée initiale de ce problème de la façon suivante :

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\delta(\xi - x)d\xi \text{ avec } \delta(.) \text{ la fonction de Dirac}$$

On rappelle que la solution fondamentale de l'équation de diffusion est :

$$u_\delta(s,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{s^2}{4\tau}}$$

et qu'elle a la valeur initiale :

$$y_\delta(s,0) = \delta(s)$$

Puisque $u_\delta(s - x, \tau) = u_\delta(x - s, \tau)$, on a $u_\delta(s - x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}}$ pour solution de l'équation de la chaleur en utilisant x ou s comme variable spatiale indépendante. Sa valeur initiale est : $u_\delta(s - x, 0) = \delta(s - x)$.

Donc pour chaque s, la fonction $u_0(s)u_\delta(s - x, \tau)$, fonction de x et de t, s fixé, satisfait :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_0(s)u_\delta(s - x)$$

L'équation de diffusion étant linéaire, en intégrant s de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient une autre aolution de l'équation de diffusion :

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} ds$$

avec

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s)\delta(s - x)ds = u_0(x)$$

3.2 Exemple d'application de notre approche via régularisation

Prenons l'EDPS suivante avec les conditions de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} udt & = \triangle_u dt + g(t,x,u)d\tilde{W}_t, \quad t \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 1; \\ u(t,0) & = u(t,1) = 0; \\ u_0 & = f(x,F). \end{cases} \tag{3.14}$$

Sous les hypothèses suivantes :

a) $(\tilde{W}_t)_t$ est un processus de Wiener cylindrique standard dans $L^2([0,1])$.

b) g est une fonction continue et satisfait

$$|g(t,x,y_1) - g(t,x,y_2)| = C|y_1 - y_2|,$$

c) $f(.,z) \in C_0([0,1])$ et satisfait

$$|f(x,z_1) - f(x,z_2)| \leq C_N|z_1 - z_2|,$$

pour $|z_1|, |z_2| \leq N, N > 0$.

d) F est de dimension d et $\mathcal{F}_T$-mesurable

Définition 3.2.1 *Une solution mild de l'EDPS 3.14 est un processus stochastique u telle qu'il satisfait*

$$u(t,x) = \int_0^1 G(t-s,x,y)f(y.F)dy + \int_0^t G(t-s,x,.)g(s,.,u)d^-\tilde{W}_s.$$

où $G(t,x,y)$ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur avec les conditions de Dirichlet aux limites.

Nous rappelons que G (t, x, y) satisfait

$$\int_0^1 G(t,x,y)^p dy \leq C_p t^{\frac{1-p}{2}} \text{ pour tout } p > 0. \tag{3.15}$$

Remarque 3.2.1 *Supposons que $\{Y_n(z) : z \in \mathbb{R}^d, n \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires telle que $Y_n(z)$ converge en probabilité vers $Y(z)$ quand n tend vers l'infini, pour chaque $z \in \mathbb{R}^d$. Supposons que*

$$E|Y(z_1) - Y(z_2)|^p \leq C_N|z_1 - z_2|^\alpha.$$

pour $|z_1|, |z_2| \leq N, N > 0$ et pour certaines constantes $p > 0$ et $\alpha > d$. Alors, pour toute F v.a. de dimension d, on a :

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(F) = Y(F).$$

en probabilité. En outre, la convergence est aussi dans $L^p(\Omega)$ Si F est bornée.

Théorème 3.1 *On suppose que a), b), c) et d) sont satisfait. Alors il existe une solution mild u pour l'EDPS 3.14.*

On rappelle le lemme important suivant :

Lemme 3.2.1 ***Lemme de Gronwall***
Soit f une application localement intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, a et b deux applications croissante et non négative telles que :

$$f(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Alors, on a

$$\forall t \in [0,T],\ f(t) \leq a(t)e^{b(t)t}$$

<u>**Preuve**</u>

Etape 1 (problèmes auxiliaires) Nous considérons la famille des problèmes suivantes

$$v^z(t,x) = \int_0^1 G(t-s,x,y)f(y,z)dy + \int_0^t G(t-s,x,.)g(s,.,v^z)d\tilde{W}_s. \tag{3.16}$$

Remarquons que $z \in \mathbb{R}^d$ est un paramètre. Il est connu qu'il existe une unique solution $v^z(t,x)$ pour le problème 3.16, et elle vérifie $\sup_{0\leq t\leq T, 0\leq x\leq 1} E[|v^z(t,x)|^2] < \infty$.

Etape 2 (Estimation de $v^z(t,x)$) Nous prétendons que $v^z(t,x)$ vérifie

$$E|v^{z_1}(t,x) - v^{z_2}(t,x)|^2 \leq C_N|z_1 - z_2|^2, \tag{3.17}$$

pour $|z_1|, |z_2| \leq N, N > 0$. En effet, nous avons

$$E|v^{z_1}(t,x) - v^{z_2}(t,x)|^2 \leq C(\sup_y E|f(y,z_1) - f(y,z_2)|^2)$$

$$+C\int_0^t\int_0^1 G^2(t-s,x,y)E|g(t,y,v^{z_1}) - g(t,y,v^{z_2})|^2 dyds.$$

Par hypothèse b), c) il s'ensuit

$$E|v^{z_1}(t,x) - v^{z_2}(t,x)|^2 \leq C_N|z_1 - z_2|^2$$

$$+C\int_0^t \sup_y E|v^{z_1}(t,y) - v^{z_2}(t,y)|^2 \int_0^1 G^2(t-s,x,y)dyds$$

Prenant la bonne superieure nous obtenons

$$\sup_x E|v^{z_1}(t,x) - v^{z_2}(t,x)|^2 \leq C_N|z_1 - z_2|^2$$

$$+\int_0^t \sup_y E|v^{z_1}(t,y) - v^{z_2}(t,y)|^2 |(t-s)^{-\frac{1}{2}}|ds.$$

Enfin par la lemme de Gronwall 3.2.1 nous obtenons l'inégalité 3.17

Etape 3 (Notre solution)

Nous allons montrer que $u(t,x) := v^F(t,x)$ est une solution mild du problème 3.14. Soit $\{v_j, j \in \mathbb{N}\}$ une base orthonormale de $L^2([0,1])$.

En combinant l'ypothèse *b*), l'inégalité 3.15 et l'étape 2, on obtient

$$E| < G(t-s,x,.)(g(s,.,v^{z_1}) - g(s,.,v^{z_1})), v_j > |^2 \leq C_N|z_1 - z_2|^2. \tag{3.18}$$

et

$$E|\int_0^t G(t-s,x,.)(g(s,.,v^{z_1}) - g(s,.,v^{z_1}))d\tilde{W}_s|^2 \leq C_N|z_1 - z_2|^2, \tag{3.19}$$

pour $|z_1|, |z_2| \leq N, N > 0$.

De l'inégalité 3.18 et par les théorèmes de substitution de Russo-Vallois (le théorème 2.1.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} c_j &= \int_0^t < G(t-s,x,.)g(s,.,u), v_j > dB_s^-(v_j) \\ &= (\int_0^t < G(t-s,x,.)g(s,.,v^z), v_j > dB_s(v_j))(F). \end{aligned}$$

En outre, en utilisant la remarque 3.2.1 et l'inégalité 3.19 nous avons $\sum_{j=1}^{m} c_j$ converge en probabilité et

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m} c_j &= \int_0^t G(t-s,x,.)g(s,.,u)d^-\tilde{W}_s \\ &= (\int_0^t G(t-s,x,.)g(s,.,v^z)d\tilde{W}_s)(F).\end{aligned}$$

Ainsi $u(t,x) := v^F(t,x)$ est une solution mild de l'EDPS 3.14.

$\blacksquare$

Conclusion et Perspectives

Une extension intéressante et potentiel : c'est l'extension de l'intégrale stochastique au dimensions infinie dans la configuration de Da Prato et Zabczyk [1]. Cette intégrale stochastique de dimension infinie peut être écrite comme une série des intégrales stochastiques d'Itô , voir par exemple la présentation récente de [2]. nous pensent que peut utiliser un système similaire présentées dans le section 2 du premier chapitre.

Il est connue que la relation entre l'intégrale de Skorohod-Itô et produit de Wick :

$$\int_0^t X_t d\tilde{W}_s = \int_0^t X_t \diamond \tilde{W}_s ds.$$

Un travail intéressant de futur d'étudier cette relation de type entre les intégrales via régularisation (forward et symétrique) pour le processus de Wiener cylindrique et les produits de distribution définies via l'intermédiaire de l'expansion en série (voir [10], [11] et [12]).

($\bullet$) En outre, nous sommes intéressés à étudier les solutions généralisées de EDPS par rapport au processus de Wiener cylindrique dans une algèbre de type Colombeau dans le nouvel esprit donné par [11] et [12].

($\bullet$) un travail future intéréssant aussi est l'étude de l'influence de changement de filtrations sur le calcul stochastique en utilisant cette approche de régularisation.

($\bullet$) Nos résultats servent éventuellement pour résoudre certaines équations différentielles stochastiques que représentent des modèles en finance et en biologie.

Bibliographie

[1] DaPrato G., Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[2] R. C. Dalang et Lluis Quer-Sardanyons, Stochastic integrals for spde's : a comparison, Expositiones Mathematicae. 29 (2011). pp. 67- 109.

[3] Jean-Yves Caby, Mathématiques topologie et analyse, Ediscience, Dunod, Paris, 2005.

[4] L. Gawarecki and V. Mandrekar. Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. Probability and its Applications (New York). Springer, Heidelberg, 2011.

[5] F. Russo, P. Vallois, Elements of stochastic calculus via regularizations . Séminaire de Probabilités XL, Lecture Notes in Math. 1899 (2007) 147-186.

[6] F. Russo, P. Vallois, Forward, backward and symmetric stochastic integration , Probab. Theory Related Fields. 97 (1993) 403-421.

[7] F. Russo, P. Vallois,The generalized covariance process and Ito formula , Stochastic Processes and their Applications. 59 (1995) 81-104.

[8] F. Russo, P. Vallois, Stochastic calculus with respect to a finite variation process, Stochastics and Stochastic Reports. 70 (2000) 1-40 .

[9] C.Girolami,F.RUSSO ,Infnite dimensional stochastic calculus via regularization,April 15th, 2010

[10] P. Catuogno, S. Molina and C. Olivera : On Hermite representation of distributions and products. Integral Transforms and Special Functions . 18 (2007). pp. 233-243.

[11] P. Catuogno and C. Olivera, Tempered Generalized Functions and Hermite Expansions, Nonlinear Analysis. 74 (2011). pp. 479-493.

[12] P. Catuogno and C. Olivera, On Stochastic generalized functions, Infi- nite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 14 (2011). pp. 237-260.

[13] S. Lototsky, B. Rozovskii, Wiener chaos solutions of linear stochastic evolution equations, Ann. Probab. 34 (2006) 638-662.

[14] M. Metivier, J. Pellaumail, Stochastic Integration. Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, New York- London- Toronto, 1980.

[15] D. Nualart , The Malliavin calculus and related topics, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[16] S. Tindel, Stochastic parabolic equations with anticipative initial condition , Stochastics and Stochastic Reports. 62 (1997) 1-20.

[17] J. B. Walsh, An introduction to stochastic partial differential equations , In : Ecole dEte de Probabilites de Saint Flour XIV, Lecture Notes in Mathematics. 1180 (1986) 265-438.

[18] Nelson Dunford et Jacob Schwartz, Linear operators, Interscience, New York/London, 1958

[19] Daniel Revuz et Marc Yor, Continuous martingales and Brownian motion, Berlin Heidelberg New-York, Springer, 1991.

[20] Jeulin, T. : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. (Lect. Notes Math., vol. 833) Berlin Heidelberg New York : Springer 1980

[21] H. Kunita, Stochastic differential equations and stochastic flow of diffeomorphisms, Ecole d'été de Saint-Flour XII, Heidelberg New-York, Springer, 1982.

[22] Nualart, D. : Non causal stochastic integrals and calculus. Stochastic analysis and related topics (Proceedings Silivri 1986). Korzelioglu, H., Ustunel, A.S. (eds.) (Lect. Notes Math., vol. 1316, pp. 80-129) Berlin Heidelberg New York : Springer 1986

[23] Ogawa, S. : Une remarque sur l'approximation de l'int6grale stochastique du type noncausal par une suite d'int6grales de Stieltjes. Tohoku Math. J. 36, 41-48 (1984)

[24] Nualart, D., Pardoux, E. : Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Theory Relat. Fields 78, 535-581 (1988)

[25] Zakai, M. : Stochastic integration, trace and skeleton of Wiener functionals. Stochastics 33, 93-108 (1990)

[26] Berger, M.A., Mizel, V.J. : An extension of the stochastic integral. Ann. Probab. 10, (2) 435-450 (1982)

[27] Asch, J, Potthoff, J. : Ito lemma without non-anticipatory conditions. Probab. Theory Relat. Fields 88, 17-46 (1991)

[28] Kuo, H.H., Russek, A. : White noise approach to stochastic integration. J. Multivariate Anal. 24, 218-236 (1988)

[29] Vincent.Barra, Modélisation des processus aléatoires Introduction aux équations différentielles,Institut Supérieur d'Informatique, de Modélisation et de leurs Applications, Campus des Cézeaux - B.P. 1025 - 63173.

[30] M. Robert Piché,Resolution de l'Èquation de Black et Scholes, Unevrsite de technologie de tampere,Juin 2008

[31] A.Karczewska, Stochastic Integral with respect to Cylindrical Wiener Process,Institute of Mathematics, Maria CurieñSk lodowska University pl. M. CurieñSk lodowskiej 1, PLñ20ñ031 Lublin, Poland,21 november 2005