Année: 2014 N° attribué par la bibliothèque

Nombres complexes et géométrie

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

licence
Universitaire de Saida
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Probabilites et statistique

Sous la direction de

Encadreur : *Dr* **S.O**uakas

par

1. **O**ussama **B**ouanani
2. **F**ouad **C**herifi
[1]

S. Ouakas	Maître de conférence Univ. Saida	Directrice de mémoire

1. e-mail : oussamaproba@gmail.com
e-mail : fouadproba@gmail.com

Table des matières

Dédicace

Je dédie ce mémoire à Mes parents :
Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.
Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.
Mes frères et soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.
Je souhaite que Dieu leur préserve une longue vie.

oussama

Dédicace

Il m'est agréable de dédier ce modeste travail à :
Mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi,
sans leur amour et leur confiance,
je ne serais jamais arrivée là.
Mes très chers frères qui m'ont toujours soutenue
avec beaucoup d'amour et de compréhension.
Toute la famille «Cherifi ».
Mes amies avec qui j'ai passé des moments mémorables.
Je souhaite que Dieu leur préserve une longue vie..

Fouad

Remerciements

Nous voudrais remercier chaleureusement le directice de mémoire *Dr* S.Ouakas, pour la façon dont elle a encadré notre travail. Ainsi que pour sa disponibilité, ses conseils et ses encouragements. Nous la remercie pour la deuxième fois.
Nous tiens à remercier D.Djebbouri et D.cherifi, pour avoir suivi et encourager depuis la maitrise. Nous le remercie pour avoir guidée dans mes recherches.
Nous remercie particulièrement les enseignants de probabilité, sans oublier les membres du laboratoire de géométrie analyse contrôle et application.
Nous saisi cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants qui m'ont initié aux mathématiques.
Nous pense aussi à ceux et celles avec qui nous étudié. Pour finir, Nous remercie tous les amis et collègues qui m'ont soutenu et encouragé.

Introduction

L'étude des nombres complexes commencée en algèbre est maintenant étroitement liée à la géométrie, à tel point que la contribution des géométries au développement de cette science est peut être plus importante que celle des algébristes. les différents aspects des nombres complexe font l'objet d'études très poussées et posent d'importants problèmes.

Dans ce mémoire, nous avons essayé de présenter quelques applications des nombres complexes en géométrie, notre travail se divise en deux parties, dans la première partie, on introduit les notions fondamentales, on cite en particulier comment on peut les utiliser pour trouver les racines de certains polynômes à coefficients réels ou complexes, comment ils servent à résoudre des problèmes de géométrie plane ainsi que des problèmes d'analyse réelle comme celui de la primitivation de produits de fonctions trigonométrique ou la résolution d'équations trigonométriques. Cette partie servira aussi comme introduction à la notion de structure algébrique et plus particulièrement celle de corps.

Le but essentiel de ce travail est présenté dans la deuxième partie dont en commence par déterminer l'équation complexe de quelques ensembles tels que le cercle et la droite. En suite, on s'intéresse à l'étude de quelques transformations remarquables dans le plan, ou on donne l'expression complexe dans chaque cas, d'une manière détaillée, on étudie l'inversion et l'homographie et on termine ce travail par quelques propriétés.

Chapitre 1

Rappel sur les nombres complexes

Dans tout ce chapiter, on note P plan affine euclidien que ĺon munit d′un repère orthonormè $\mathcal{R}$ $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on désignant par $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel associé à P.

1.1 Construction du corps des nombres complexes

On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois internes $+$ et $\times$ de la manière suivante : Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on pose

$$\begin{array}{rcl}(a, b) + (c, d) & = & (a + c, b + d) \\ (a, b) \times (c, d) & = & (ac - bd, ad + bc)\end{array}$$

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un corps. On peut alors identifier le sous-corps $\mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ au corps $\mathbb{R}$ puisque pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \times (b, 0) = (ab, 0)$$

On noté $\mathbb{C}$ le corps $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois et on appelle nombres complexes ses éléments.
Tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ s'ecrit sous la forme $a + ib$, avec $i = (0, 1)$ que verifié

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$$

En effet :

$$z = (a, b) = (a, 0)(0, b)$$

$$z = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

$$z = a.1 + b.i = a + ib$$

1.2 Les nombres complexes

Définition 1.2.1. *Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i un nombre abstrait imaginaire tel que $i^2 = -1$ alors on note $\mathbb{C}$ L'ensemble des nombres complexes.*

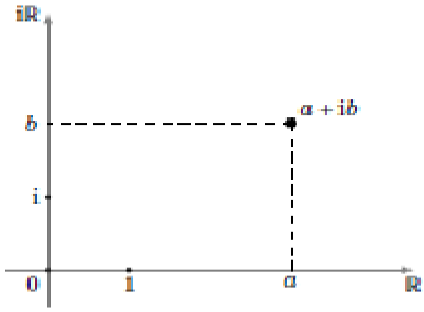


FIGURE 1.1 – Représentation graphique des nombres complexes

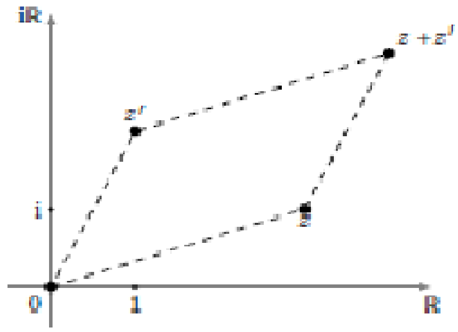
1.2.1 les Operations dans $\mathbb{C}$

Pour le moment, le terme nombre signifie pour nous les nombres rèels. Les opérations que nous connaissons sur les nombres rèels sont la somme et le produit.
Alors dans cette partie, on dèfinit des opération $(+, \times)$ sur les nombres complexes

Définition 1.2.2. *Soient z et z' deux nombres complexes tel que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec (a, a', b, b') sont rèel on définit les opèrations suivantes :*

– ***Addition :*** *La somme de z et z' est un nombre complexe de forme algébrique*

$$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$$



– ***Multiplication :*** *Le produit de z par z' est un nombre complexe de forme algebrique*

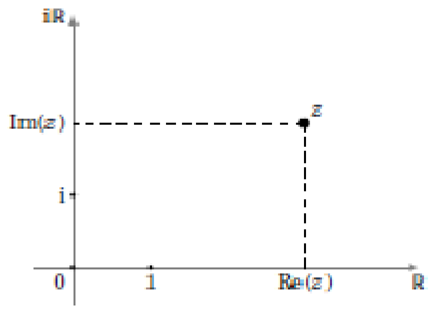
$$(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

c'est la multiplication en utilisant le fait que :

$$i^2=-1$$

1.2.2 Partie rèele et imaginaire Les nombres complexes ne sont pas forcément réels au sens oú ils peuvent posséder une partie imaginaire. Cette partie imaginaire permet d'envisager par exemple l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif, ou même la résolution d'une équation du second degré dont le discriminant est négatif.

Définition 1.2.3. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors a est appelè* ***partie réelle*** *de z et notè $\Re(z)$ et b est appelè* ***partie imaginaire*** *de z et notè $\Im(z)$. la partie rèelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe sont donc des nombres reels.*



Par identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, l'ècriture $z = \Re(z) + i\Im(z)$ est unique :

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ \Im(z) = \Im(z') \end{cases}$$

En particulier un nombre complexe est rèel si seulement si sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe est nul si seulement si sa partie rèelle et sa partie imaginaire sont nulles

Image d'un complexe et affixe d'un point ou d'un vecteur

Chaque nombre complexe est identifie à un point $M(a, b)$ par l'application bijective

$$\begin{gathered} f : \mathbb{C} \longrightarrow p \\ z = a + bi \longrightarrow M(a, b) \end{gathered}$$

- On appelle image du complexe z le point M de coordonnées $(\Re(z), \Im(z))$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$.
- On appelle affixe du point M de coordonnées (a, b) dans le repère orthonormé R le complexe $z = a + ib$.
- On appelle affixe du vecteur $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ le complexe $z = a + ib$.

Remarques 1.2.1. – *On parle du plan complexe plutôt que du plan euclidien quand on idientifie les points par leurs affixes plutôt que par leur coordonnées*

– *Si z_A est l'affixe de A et z_B l'affixe de B, alors l'affixe de vecteurs $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$:*

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$$

1.2.3 Conjugué et module d'un nombre complexe Conjuguè

On définit maintenant de manière algébrique la symétrie par rapport à ĺaxe réel, ćest la notion de conjugué d'un nombre complexe.

Définition 1.2.4. *Soient z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ donc On définit le* ***conjugué*** *$\overline{z}$ de z par la relation :*

$$\overline{z} = a - ib$$

autrement dit $\Re(\overline{z}) = \Re(z)$ et $\Im(\overline{z}) = -\Im(z)$.
Le point $\overline{z}$ est le symétrique du point z par rapport à l'axe réel

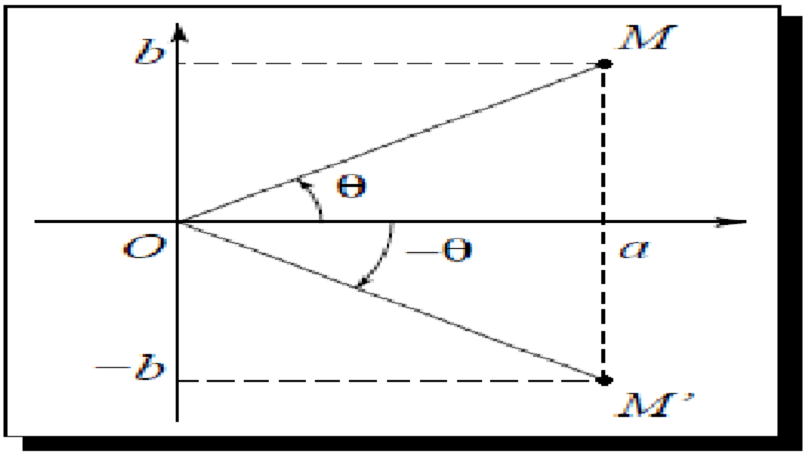


FIGURE 1.2 – Interpretation géometrique de conjugué

Module

En mathématiques, le module d'un nombre complexe est un nombre réel positif qui mesure sa " taille " et généralise la valeur absolue d'un nombre réel.

Définition 1.2.5. *Le module de* $z = a + ib$ *est le rèel positif* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Comme* $z \times \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ *alors le module vaut aussi* $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$

1)*Si* Z *est affixe de* $M(a, b)$ *alors le module de* Z *n'est autre que la distance* $OM = |Z|$

2) *Si* Z *affixe de vecteur* $(\overrightarrow{AB})$ *alors le module de* Z *represente la distance* $AB = |Z_B - Z_A|$

Remarques 1.2.2. *Le module de nombre complex* z *représente une norme eucludienne ie* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $z = a + ib$ *on a*

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\overrightarrow{U}\| \text{ avec } \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- *Si* $Z = a + bi$ *et* $(b = \Im(Z) = 0)$ *on a* $|Z| = \sqrt{a^2} = |a|$ *le module d'nombre rèel est done sa valeur absolue*
- *Le module* $Z = a + bi$ *est toujours superieur à Max(|a|,|b|) car*

$$a^2 + b^2 \geq a^2 \text{ et } a^2 + b^2 \geq b^2$$
$$|Z| \geq |a| \text{ et } |Z| \geq |b|,$$

$$d'o\grave{u}\ |Z| \geq Max(|a|,|b|)$$

Propriétes Soit z et z' deux nombres complexes, alors on a les propriétes suivantes :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
2. $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$
3. $|z|^2 = z \times \overline{z}$,$|\overline{z}| = |z|$,$|zz'| = |z||z'|$
4. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
5. $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
6. $|\Re(Z)| \leq |Z| et |\Im(Z)| \leq |Z|$
7. Inégalité de cauchy schwarz $|\Re(z\overline{z'})| \leq |z||z'|$ L'egalitè étant realiseé si et seulement si, z et z' sont lièes sur $\mathbb{R}$ ie($z = 0$ ou $z \neq 0$ et $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$) ce qui est encore equivalent à dire que $z\overline{z}$ est rèel

   L'inégalité triangulaire : Pour tous nombres complexes z et z', on a :

   $$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

   l′egalitè étant realisée si et seulement si z et z' sont lièes sur $\mathbb{R}$ ie($z = 0$ ou $z \neq 0$ et $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}^+$) ce qui est encore equivalent a' dire que $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$

Proposition 1.2.1. *Soit f : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.*
f est dit involutive si

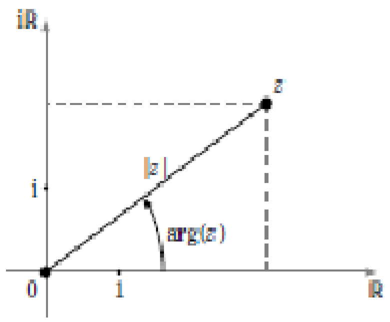
$$f \circ f = Id_{\mathbb{C}}$$

Remarques 1.2.3. *(L'inverse d́un nombre complexe) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b des réels non nuls.*
ĺinverse de z est un nombre complexe de forme algébrique :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

1.2.4 Argument d'un nombre complexe *Un point M peut être repére dans le plan muni d'un repère orthonormè direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *de deux façons :*
Par ses coordonnèes cartesiennes x et y ou pas ses coordonnèes polaires notées r et θ *ou* $r = OM$ *et* $\theta = (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{OM})$ *si M est distinct de O.*

Définition 1.2.6. *Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z dans le plan muni d'un repère orthonormè direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
θ *est appellé L'argument de z et on écrit arg(z)=*$\theta[2\pi]$



Propriétes En désignant par z et z' deux nombres complexes non nuls, λ un réel non nul et n un entier relatif, on a :

1. $Arg(\overline{Z}) = -Arg(Z)[2\pi]$, $Arg(-\overline{Z}) = \pi - Arg(Z)[2\pi]$, $Arg(-Z) = Arg(Z) + \pi[2\pi]$
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ alors $arg(\lambda Z) = arg(Z)[2\pi]$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}^{-*}$ alors $arg(\lambda Z) = arg(Z)[2\pi]$
4. $Arg(ZZ') = arg(Z) + arg(Z')[2\pi]$
5. $Arg(\frac{Z}{Z'}) = arg(Z) - arg(Z')[2\pi]$
6. $Arg(\frac{1}{Z}) = -arg(Z)[2\pi]$
7. $Arg(Z^n) = narg(Z)[2\pi], \forall n \in \mathbb{Z}$

8. si $z_A \neq z_B$,$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$=arg$(\frac{z_D-z_c}{z_B-z_A})$

Remarques 1.2.4. *1. Le nombre complexe $Z=0$ ne posséde pas d'argument car, dans ce cas l'angle $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM})$ n'est pas défini*

2. z est un rèel non nul si et seulement si, $arg(z)=0+k\pi(k\in z)$.

3. z est un reel strictement positif si et seulement si, $arg(z)=0+2k\pi(k\in z)$.

4. z est un reel strictement negatif si et seulement si, $arg(z)=\pi+2k\pi(k\in z)$.

5. z est un imaginaire pur si et seulement si, $arg(z)=\pi+k\pi(k\in z)$.

Calculer de l'argument

Soit $z\in\mathbb{C}$, nous avons le systemes suivant

$$\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{a}{|Z|}\\ \sin(\theta)=\frac{b}{|Z|}\end{cases}$$

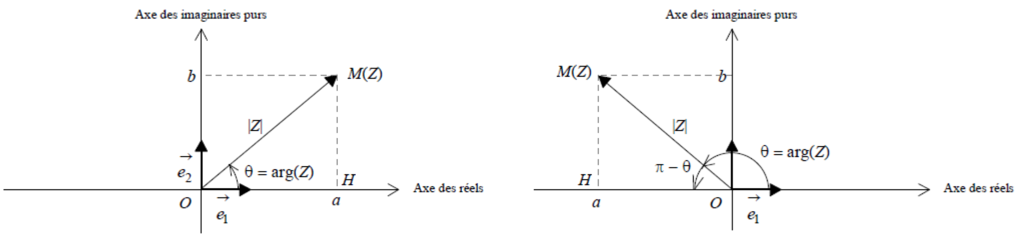


FIGURE 1.3 –

Remarques 1.2.5. *Etant donné un nombre complexe $z=x+iy\in\mathbb{C}$*

- *L'ecriture $z=x+iy$ s'appele la forme algébrique*
- *L'ecriture $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ où $r=|z|,\theta=arg(z)$ s'appele la forme trignométrique*

– *En remarqant que* $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$*, l'écriture* $z = re^{i\theta}$ *s'appelle la forme exponotielle.*
On á propriétes suivantes :
1. $e^{i.0} = e^0 = 1$
2. $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$
3. $\forall\theta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$
4. $\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2, (e^{i\theta} = e^{i\theta'}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}|\theta' = \theta + 2k\Pi)$
5. $\forall\theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin(\theta) = \Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

1.3 Formules de moivre, Formules d'euler, Formules de l'arc moitié

Formules de moivre : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{1.1}$$

Formules d'euler : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}$$

Formules de l'arc moité :
Il s'agit de factoriser une somme ou une diffèrence de deux complexes de module 1 pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i(\frac{a+b}{2})}(e^{i(\frac{a+b}{2})} + e^{-i(\frac{a-b}{2})}) = 2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i(\frac{a+b}{2})}$$

$$e^{ia} - e^{ib} = e^{i(\frac{a+b}{2})}(e^{i(\frac{a-b}{2})} - e^{-i(\frac{a-b}{2})}) = 2i\sin(\frac{a-b}{2})e^{i(\frac{a+b}{2})}$$

On retiendra en particulier que pour $t \in \mathbb{R}$,on a :

$$1 + e^{it} = 2\cos\frac{t}{2}e^{i\frac{t}{2}}$$

et

$$1 - e^{it} = -2i\sin\frac{t}{2}e^{i\frac{t}{2}}$$

1.4 Applications

linèariser de $\cos(\theta)^n\sin(\theta)^n$

Définition 1.4.1. *Il s'agit d'exprimer* $\cos(\theta)^n\sin(\theta)^n$ *comme une combinaison linéaire de* $\cos(k\theta)$ *et* $\sin(k\theta)$ *avec* $k \in \mathbb{N}$*.On utilise pour cela les relation d'Euler, On écrit*

$$\cos(\theta)^m\sin(\theta)^n = (\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})^m(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2})^n$$

Puis on developpe et on regroupe les termes conjugués.

Cas général *Grâçe aux formules d'Euler et à la formule du binôme de Newton on écrit :*

$$\begin{array}{rcl}\cos^n(\theta) & = & \frac{1}{2^n}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n \\ & = & \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\theta}e^{-i(n-k)\theta} \\ & = & \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(2k-n)\theta} \\ & = & \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos((2k-n)\theta) + i\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin((2k-n)\theta)\end{array}$$

d'où

$$\cos^n(\theta) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos((2k-n)\theta)$$

On peut remarquer que l'on a aussi :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin((2k-n)\theta) = 0$$

Développement de $\cos(n\theta) et \sin(n\theta)$

Définition 1.4.2. *Il s'agit d'exprimer* $\cos(n\theta)$ *ou* $\sin(\theta)$ *en fonction de puissances de* $\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta)$ *on utilise la formule de moivre On a :*

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k(\theta)\sin^{n-k}(\theta)i^{n-k}$$

puis on developpe et on considère les parties rèelle et imaginaire.

Remarques 1.4.1. *Soit* $z, w \in \mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *Alors*

$$\begin{aligned}(z+w)^n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k w^{n-k}\\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k w^k z^{n-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(z+w)^n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k w^{n-k}\\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k w^k z^{n-k}\end{aligned}$$

Identitè de Lagrange Soit z et z' deux nombre complexe avec $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ ou a,b,a',b' sont des entiers relatifs En ecrivant que $n = |z|^2$ et $m = |z'|^2$ alors :

$$\begin{aligned}n.m &= |z.z'|^2\\ &= |(aa' - bb') + (ab' + ba')i|^2\\ &= (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2\end{aligned}$$

On déduit que le produit n.m est la somme de deux carrés d'éntiers.

Chapitre 2

Nombres complexes et la Géometrie

2.1 Équation complexe d'une droite

Soit

$$ax + by = c$$

l'équation d'une droite $\mathcal{D}$, (a, b, c) sont des nombres réels (a et b n'étant pas nuls en même temps)

Écrivons $z = x + iy$, alors

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

donc $\mathcal{D}$ a aussi pour équation $a(z+\overline{z})-ib(z-\overline{z}) = 2c$ ou encore $(a-ib)z+(a+ib)\overline{z} = 2c$.

Posons $\omega = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$,nous obtenons alors

$$\overline{\omega}z + \omega\overline{z} = k$$

où $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$

cette èquation est l'èquation complexe de la droite $\mathcal{D}$

2.2 Équation complexe d'un cercle

Soit C(Ω, r) le cercle de centre Ω et de rayon r. C'est l'ensemble des points M et tel que $dist(\Omega, M) = r$. Si l'on note ω l'affixe de Ω et z l'affixe de M. Nous obtenons :

$$dist(\Omega, M) = r \Leftrightarrow |z-\omega| = r \Leftrightarrow |z-\omega|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2$$

et en développant nous trouvons que l'équation complexe du cercle centré en un point d'affixe ω et de rayon r est :

$$z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} = r^2 - |\omega|^2$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1. *Un cercle-droite est l'ensemble des point M du plan d'affixe z tel que*

$$az\overline{z} - \overline{w}z - w\overline{z} = k$$

oú $a, k \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$ sont donnès.

- Si $a = 0$ un cercle-droit est une droite
- Si $a \neq 0$ un cercle-droit est un cercle

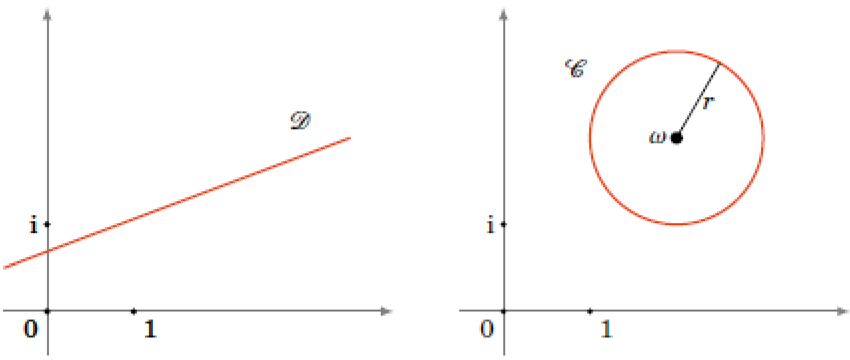


FIGURE 2.1 –

Équation de la forme $\mid \frac{z-a}{z-b} \mid = k$

Soit l'equation de la forme suivante $\mid \frac{z-a}{z-b} \mid = k$ et A,B,M sont des nombres complexes d'affixes respectivement a, b, z Nous allons ètudier l'èquation $\mid \frac{z-a}{z-b} \mid = k$, on a :

$$\frac{|z-a|}{|z-b|} = k \Leftrightarrow |z-a|^2 = k^2|z-b|^2$$

$$\Leftrightarrow (z-a)\overline{(z-a)} = k^2(z-b)\overline{(z-b)}$$

$$\Leftrightarrow (1-k^2)z\overline{z} - z(\overline{a} - k^2\overline{b}) - \overline{z}(a-k^2b) + |a|^2 - k^2|b|^2 = 0$$

On distinque deux cas :
Premier cas si $k = 1$, on pose $w = a - k^2b$ et l'equation obtenue $z\overline{w} + \overline{z}w = |a|^2 - k^2|b|^2$ est bien celle d'une droite. L'ensemble des points qui vérifient $MA = MB$ est la mèditrice de $[AB]$.
Deuxiéme cas Si $k \neq 1$ on pose $w = \frac{a-k^2b}{1-k^2}$ alors l'equation obtenue est $z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w = \frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$. C'est l'equation d'un cercle de centre w et de rayon r satisfaisant $r^2 - |w|^2 = \frac{-|a|^2+k^2+|b|^2}{1-k^2}$, soit $r^2 = \frac{|a-k^2b|^2}{(1-k^2)^2} + \frac{-|a|^2+k^2|b|^2}{1-k^2}$.

2.3 Transformation remarquables du plan

Il s'agit dans ce paragraphe d'étudier la représentation complexe de quelques transformations du plan.
Le plan P est rapporté à un repère orthonormè direct $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{j})$
A tout complexe $z = a + ib$ on associe le point $M = (a, b)$ par l'application

$$\begin{array}{lll} \phi : P & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ M & \longrightarrow & \phi(M) = Z \end{array}$$

Une transformation du plan est une bijection f de P dans P
considèrons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \end{array}$$

L'application bijective $F = \phi \text{ o } f \text{ o } \phi^{-1}$ est la reprèsentation complexe de la transformation f

2.3.1 Expression complexe d'une Translation

Soit M un point du plan d'affixe z et $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque du plan.
On appelle M' l'image du point M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$.
Exprimons l'affixe z' de M' en fonction de z.
Dire que M' est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{u}$ sont égaux.
Deux vecteurs egaux ayant leurs affixes égales , il vient :

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow z' - z = z_{\overrightarrow{u}} \Leftrightarrow z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$$

On deduit la définition suivante

Définition 2.3.1. *(Ecriture complexe d'une translation)*
Lécriture complexe d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ est donneè par :

$$t(z) = z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$$

Réciproquement, la transformation du plan f qui a pour ecriture complexe $f(z) = z' = z + b$ ou b est un nombre complexe, est une translation de vecteur d'affixe b.

2.3.2 Expression complexe d'une Homothètie

Définition 2.3.2. *Soient M et Ω deux points du plan d'affixes respectives z et z_0 et k un rèel non nul.*

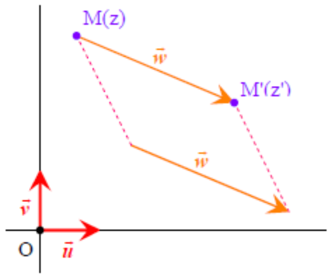


FIGURE 2.2 –

On appelle homothetie de centre Ω et de rapport k notèe $H_{(\Omega,k)}$ l'application du plan dans lui-même que à tout point M associe le point M' définie de la maniére suivante,

$$\begin{cases} P & \to & P \\ M & \mapsto & M' = H_{(\Omega,\theta)}(M) \end{cases}$$

tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, ceci est traduit par

$$z' - z_0 = k(z - z_0) \Leftrightarrow z' = kz + (1-k)z_0$$

Alors Lècriture complexe de l'homothètie de centre Ω et de rapport k est donnée par l'equation suivante :

$$z' = kz + (1-k)z_0 \tag{2.1}$$

Remarque 2.3.1. *Si $k = 1$ on obtient donc l'application identite*
Si $k = 0$ on obtient donc l'application identite constante
Si $k \neq 0$,on a par la définition de homothèties

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$$

$$\Leftrightarrow M = H_{(k,\frac{1}{k})}(M')$$

donc $H_{(\Omega,k)}$ est bijective et l'application inverse est donnée par : $H^{-1}_{(\Omega,k)} = H_{(k,\frac{1}{k})}(M')$

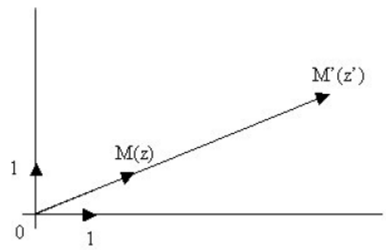


FIGURE 2.3 –

2.3.3 Écriture complexe des symétries glissantes et axiales.

Définition 2.3.3. *(Symétries axiales) Soit Δ_1 la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point Ω alors si*

$$M'(z') = S_{\Delta_1}(M(z)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Re(z') = \Re(z) \\ \Im(z') + \Im(z) = 2\Im(z_0) \end{cases}$$

Alors :

$$\{\Re(z') + i\Im(z') = \Re(z) - i\Im(z) + 2i\Im(z_0) \Rightarrow z' = \overline{z} - \overline{z_0} + z_0\}$$

D'autre part on a

$$S_\Delta \circ S_{\Delta_1} = R_{(\Omega,2\theta)} \Rightarrow S_\Delta = R_{(\Omega,2\theta)} \circ S_{\Delta_1} \tag{2.2}$$

et L'ecriture complexe de rotation :

$$R_{(\Omega,\theta)} = z' = e^{2i\theta}(z - z_0) + z_0 \tag{2.3}$$

Alors d'aprè les équations (2.2) *et* (2.3) *on obtient*

$$S_\Delta : z' = e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{z_0} + z_0 - z_0) + z_0 = e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0$$

Conclusion*(Écriture complexe des symètries axiales) L'application f est une symétrie axiale d'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\overrightarrow{u}$ come vecteur directeur associe : alors*

$$z' = e^{i2\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0$$

où θ dèsigne une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{u})$

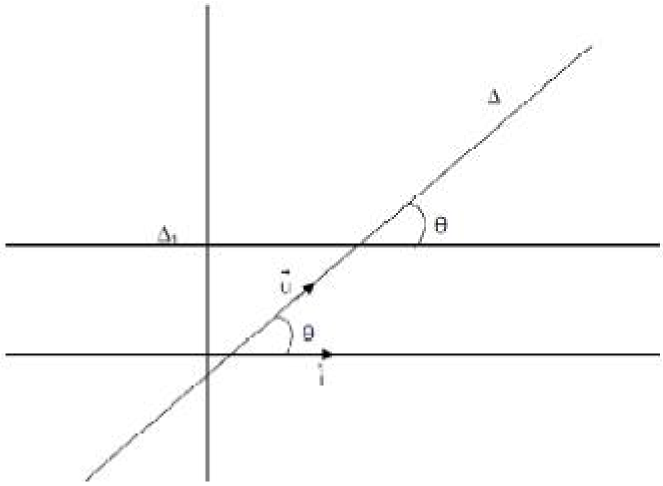


FIGURE 2.4 –

Définition 2.3.4. *(Symètrie glissante) La symètrie glissante f peut être vue comme etant la composée d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteure $\overrightarrow{u}$ et symètrie axiale S_Δ d'axe Δ la forme de f est :*

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Delta \tag{2.4}$$

Une ècriture complexe de S_Δ est : $z' = e^{i2\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0$
L'ecriteur complexe de $t_{\overrightarrow{u}}$ est : $z' = z + z_{\overrightarrow{u}}$
Alors d'après l'equation (2.4) l'ecriteure complexe de f est la suivante :

$$z' = e^{i2\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0 + z_{\overrightarrow{u}}$$

Conclusion *L'application f est une symètrie glissante dans d'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\overrightarrow{u}$ comme vecteur directeur associe, alors*

$$z' = e^{i2\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0 + z_{\overrightarrow{u}}$$

oú θ dèsigne une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{u})$

2.3.4 Expresion complexe d'un symetrie centrale

Définition 2.3.5. *Le point M' est l'image du point M par la symetrie (S_Ω) de centre Ω veut Dire que Ω est le milieu de segment $[M, M']$, autrement dit : $\overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{\Omega M'}$ il vient alors :*

$$S_\Omega(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Omega} = \overrightarrow{\Omega M'} \Leftrightarrow z_0 - z = z' - z_0 \Leftrightarrow z' = -z + 2z_0$$

L'ecriture complexe de la symetrie S_Ω de centre Ω d'affixe z_0 est

$$S_\Omega(z) = z' = -z + 2z_0 \tag{2.5}$$

Remarque 2.3.2. *En comparant les deux équations (2.1) et (2.2), on deduit qu'une symétrie de centre Ω est une homothietè de centre Ω et de rapport -1.*

2.3.5 Expression complexe d'une rotation

Définition 2.3.6. *Soient M et Ω deux point distincs du plan d'affixes respectives z et z_0 et θ un rèel. La rotation de centre Ω et d'angle θ notèe $R_{\Omega,\theta}$. Est une application du plan dans lui-même qui transforme tout point M en un unique point M' de la maniére suivante :*

$$\begin{cases} P & \rightarrow & P \\ M & \mapsto & M' = R_{\Omega,\theta}(M) \end{cases}$$

tel que :

$$\Omega M' = k\Omega M \tag{2.6}$$

et

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \theta[2\pi] \tag{2.7}$$

D'après la propriete 7 de l'argument d'un nombre complexes (page 16) l'equation(2.7) ce devient : $arg(\frac{z'-z_0}{z-z_0}) = \theta[2\pi]$ et comme la rotation est une isometre, il suit alors : $\mid \frac{z'-z_0}{z-z_0} \mid = 1 \Leftrightarrow \frac{z'-z_0}{z-z_0} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - z_0 = ze^{i\theta} - z_0e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - z_0 = ze^{i\theta} + (1 - e^{i\theta})z_0$

En posant $a = e^{i\theta}$, lècriture complexe de la retation $R_{\Omega,\theta}$ est donnèe par l'équation suivante

$$z' = az + (1 - a)z_0$$

Reciproquement si f est une transformation de la forme

$$z' = az + b$$

avec $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

Si $|a| = 1$, alors f est une rotation dangle $\theta = arg(a)[2\pi]$ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$

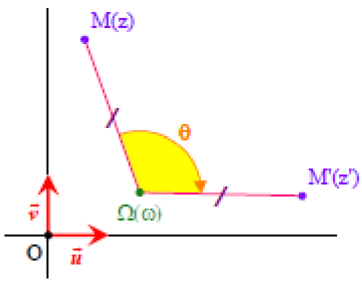


FIGURE 2.5 –

2.3.6 Expression complexe d'un similitude directe

Définition 2.3.7. *Soient M et Ω deux point du plan d'affixes respectives z et z_Ω*
On appelle M' l'image du point M par simulitude directe (S) de centre Ω d'angle θ et de rapport k c'est à dire

$\Omega M' = k\Omega M$ *et* $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta 2\Pi$

Exprimons l'affixe z' du point M' en fonction de z, on a :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta 2\pi \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z' - z_\Omega| = k|z' - z_\Omega| \\ arg(\frac{z'-z_\Omega}{|z-z_\Omega|}) \equiv \theta 2\pi \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z'-z_\Omega|}{|z'-z_\Omega|} = ke^{i\theta} \\ arg(\frac{z'-z_\Omega}{|z-z_\Omega|}) \equiv \theta 2\pi \end{cases}$$

Alors : $(z' - z_\Omega) = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) \Rightarrow z' = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

Conclusion *L'expression complexe d'une similitude directe de centre* Ω *et d'angle* θ *et de rapport* k *est :*

$$S_{\Omega,k,\theta}(M) = M' \Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$$

Remarque 2.3.3. *L'expression complexe de la forme*

$$f(z) = az + b$$

avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus 1$ *est la similitude directe de centre* Ω *d'affixe* $\frac{b}{1-a}$ *du rapport* $k = |a|$ *et d'angle* θ *=arg(a)* 2π

Si $|a| = 1$ *alors* $f = R_{(\Omega,\theta)}$ *et si* $\theta \equiv 0\Pi$ *et* $a \in \mathbb{C}^* \setminus 1$ *donc* $f = H_{(\Omega,a)}$

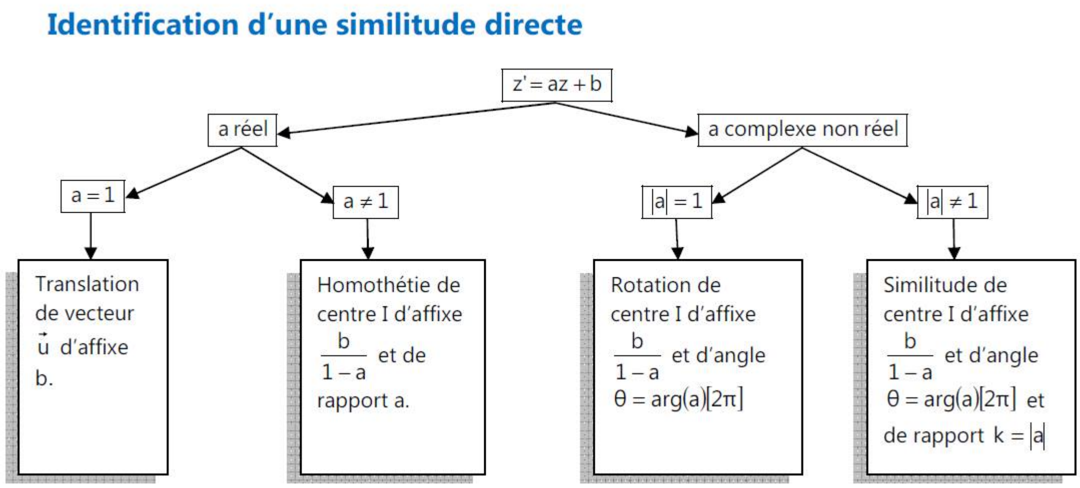
2.3.7 Expression complexe d'un similitude indirecte

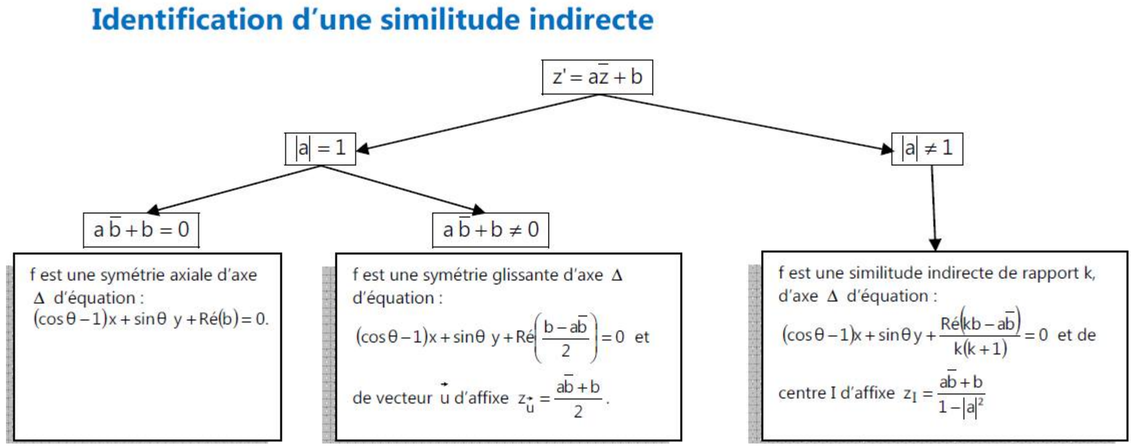
Définition 2.3.8. *Une similitude indirecte f peut être vue comme la composèe d'un antideplacement g (réflexion ou symétrie glissée) et d'une homothétie h de rapport k*
-Une expression complexe de l'antideplacement g est $g(z) = a\overline{z}+b$ ou a est un complexe de module 1 et une expression complexe d'une homothietie h est $h(z) = kz + d$
Pour tout nombre complexe z (affixe d'un point M) nous povons écrire :

$$f(z) = (h \circ g)(z) = h(a\overline{z} + b) = ka\overline{z} + kb + d = a'\overline{z} + b$$

ou $a' = ka$ et $b' = kb + d$
Conclusion *L'application complexe de la forme $f(z) = a\overline{z} + b$ ou a et b son deux complexe non nul est géometriqument une similitude indirecte*

Remarques 2.3.1. *Soit f la transformation complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ ou a est un nombre complexe non nul et b un complexe*
Si $|a| = 1$: f est un antidèplacement
Si $|a| \neq 1$: f est une similitude indirecte de rapport $k = |a|$





2.4 Inversion

En géometrie une inversion est une transformation qui inverse les distances par rapport un point donné, appelé centre de l'inversion, cela signifie que l'image d'un point d'autre plus èloignè du centre de l'ineversion que le point d'origine est prochè

Définition 2.4.1. *Une inversion d'un espace affine euclidien P dans P de pôle Ω_0 et de rapport k non nul est une transformation de $P - \{\Omega_0\}$ dans $P - \{\Omega_0\}$ qui à tout point M associe le point M' défini par :*

$$\overrightarrow{\Omega_0 M'} = \frac{k}{\Omega_0 M^2} \overrightarrow{\Omega_0 M} \tag{2.8}$$

Notons que le point M' est l'unique point de la droit $(\Omega_0 M)$ vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{\Omega_0 M'}.\overrightarrow{\Omega_0 M} = k \tag{2.9}$$

ou les distances $\Omega_0 M'$ et $\Omega_0 M$ sont orientèes.

Remarques 2.4.1. *I)Constatons aussi que, pour un pôle et une puissance donnèe, tout point M du plan a un inverse unique puisqu'il n'existe qu'un seul point M' situè sur ΩM tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\overrightarrow{\Omega M}}$. Si on trace le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$ tout point a' l'intèrieur du cercle aura son inverse a' l'extèrieur et réciproquement. On*

peut dire que l'inversion rapproche ce qui loin du pôle et éloigne ce qui en est proche. L'image du pôle est rejetèe en l'infini
On peut égalment remarquer que si M' est l'inverse de M est l'inverse de M', on dit que l'inversion est une involution car $\iota[\iota(M)] = M$
$II)$ Soit $\iota_{(\Omega,k)}$ l'inversion de centre $\Omega \in \mathbb{C}$ de rapport k ,alors il est simple de verifier que $\iota_{(\Omega,k)} = T_{\overrightarrow{\omega}} \circ \iota_{(O,k)} \circ T_{\overrightarrow{-\omega}}$ ou $T_{\overrightarrow{-\omega}}, T_{\overrightarrow{\omega}}$ sont les translations de vecteur ω, $-\omega$ et $\iota_(o.k)$ l'inversion de centre l'origine de rapport k

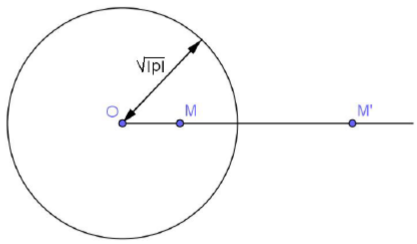


FIGURE 2.6 –

2.4.1 Écriture complexe

Définition 2.4.2. *Considérons les points Ω, m, m' et leur affixes w, z, z' respectivement. Nous allons transformer la relation $M' = \iota(M)$ en une relation entre z et z'. La premiére condition $M' \in [\Omega M)$ s'écrit $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$. La deuxième condition $\Omega M.\Omega M' = r^2$ devient en écriture complexe $|z - \omega|.|z' - \omega| = r^2$, ce qui donne à l'aide de la première condition $\lambda|z - \omega|^2 = r^2$ donc $\lambda = \frac{r^2}{|z-\omega|^2}$. Nous exprimons alors z' comme une fonction de z :*

$$z' = \omega + r^2 \frac{z - \omega}{|z - \omega|^2} = \omega + \frac{r^2}{\overline{\overline{z - \omega}}}$$

Ceci nous permet de donner la définition complexe de l'inversion :
L'inversion est une application $\iota : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Définie par $\iota(z) = \omega + \frac{r^2}{\overline{z-\omega}}$ pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{\omega\}$ et prolongée par $\iota(\omega) = \infty$ et $\iota(\infty) = \omega$.

Exemple 2.4.1. *L'inversion de cercle* $C(0,1)$ *a pour écriture complexe* $\iota(z) = \frac{1}{\bar{z}}$*(que l'on prolonge en* $\iota(0) = \infty$ *et* $\iota(\infty) = 0$.)

2.5 Homographies

Défnitions et prémières propriétés

Etant donnée quatres nombres complexes a, b, c et d on introduit l'application $h_{a,b,c,d}(z)$ défnit par $h_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{\frac{-d}{c}\}$. Signalons d'abord que si $ad - bc = 0$ alors $h_{a,b,c,d}$ est constante en effet si $c = 0$ alors $a = 0$ Par suite $h_{a,b,c,d}(z) = \frac{b}{d}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, sinon on aura $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(cz+d)-(ad-bc)}{c(cz+d)} = \frac{a}{c}$. On supposera donc dans la suite que $ad - bc \neq= 0$

Définition 2.5.1. *On appelle fonction homographique ou homographie toute application défnie par*

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

oú $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *et* $ad - bc \neq= 0$
On notera $h_{a,b,c,d}(z)$ *l'homographie :* $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ *défnie sur* $\mathbb{C}\backslash\{\frac{d}{c}\}$. *L'homographie* $h_{a,b,c,d}(z)$ *n'est pas défnie en* $\frac{-d}{c}$ *et ne prend pas la valeur* $\frac{a}{c}$ *c'est une bijection de* $\mathbb{C}\backslash\{\frac{-d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\}$.

2.5.1 Etude Géométrique des fonctions homographiques

Soit

$$f(z) = h_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}, (ad - bc \neq 0)$$

On distingue deux cas
Si 1)$c = 0$, ce qui implique $d \neq 0$, donc f s'ecrit

$$f(z) = \alpha z + \beta(\alpha = \frac{a}{d}, \beta = \frac{b}{d})$$

(a)Si $\alpha = 1$, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe β, f est une bijection de $\mathbb{C}$, son application reciproque est la translation de vecteur $\overrightarrow{-u}$, $f^{-1}(z) = z - \beta$
(b) Si $\alpha \neq 1$, f admet un seul point fixe $z_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$, alors

$$f(z) = \alpha(z - z_0) + z_0$$

ce qui implique que f est une similitude directe de centre z_0 de rapport $|\alpha|$ f est une homothétie si et seulement si α est réelle
2) Si $c \neq 0$ alors :
Pour interpréter géometriquement f écrivons

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}} = \alpha + \frac{\beta}{z+\delta}$$

Cette ecriture est appeleé forme reduite de f. Considérons maintenant les applications :
- $t : z \longrightarrow z + \delta$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affxe δ.
- $s : z \Longrightarrow \overline{z}$: la symetrie par rapport a l'axe des réelles.
- $\iota : z \longrightarrow \frac{1}{z}$: l'inversion de centre l'origine de rapport 1.
- $h : z \longrightarrow \alpha + \beta z$:la similitude directe.

D'après la forme reduite de f on déduit que

$$f = h \circ \iota \circ s \circ t.$$

Dans une derniére partie,on citè d'autre applications des nombres complexes en géometrie

Proposition 2.5.1. *Soit A, B, C d'affixes a, b, c, On note j le nombre $e^{\frac{i2\pi}{3}}$. Alors on a :*

$$(ABCquilatraldirect) \Leftrightarrow (a + bj + cj^2) \tag{2.10}$$

$$(ABCquilatralindirect) \Leftrightarrow ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0) \tag{2.11}$$

Preuve 2.5.1. *Le triangle ABC est èquilatéral direct si et seulement si $rot(B, \frac{\pi}{3})$ transforme C en A, ce qui èquivalent à*

$$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$$

Autrement dit $(a-b)=(c-b).(-j^2) \Rightarrow a+cj^2+b(-1-j^2)=0$ *de puis*

$$(-1-j^2)=(-1+(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j \Rightarrow a+cj^2+b(-1-j^2)=a+cj^2+bj$$

2)Le triangle est équilatéral indirect si $a+bj^2+cj=0$,*et il sera équilatéral si et seulement si*

$$(a+cj^2+bj).(a+bj^2+cj)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

Proposition 2.5.2. *Soit ABC un triangle équilatéral. Alors on a :*
1) Pour tout M

$$MA+MB \geq MC$$

2)$MA+MB=MC$ *si et seulement si M est sur l'arc du cercle (ABC) limité par A et B,ne contenant pas C (on réfléchira a d'autre maniére a quelle condition sur les affixes de* z_1 *et* z_2 *l'inégalité* $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ *est-elle une égalité ?*

Preuve 2.5.2. *Soit* a,b,c,z *les affixes de* A,B,C,M *supposons* ABC *direct, on a* $a+bj+cj^2$ *d'apre la proposition (1.1) D'où* $(z-a)+j(z-b)+j^2(z-c)=0$ *et* $(z-a)+j(z-b)=-j^2(z-c)$. *L'inégalité trianguaire donne*

$$MC=|-j^2(z-c)|=|(z-a)+j(z-b)| \leq |(z-a)|+|j(z-b)|=MA+MB$$

2)L'inégalité $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ *est une égalité si et seulment si les images vectorielles de* z_1 *et* z_2 *sont colinéaire de même sens.L'inégalité est une égalité si et seulement si les conditions équivalentes ci-dessous sont satisfaites*

$$(arg(z-a)=arg(j(z-b))) \Leftrightarrow (arg(\frac{z-a}{z-b}))=arg(j)=\frac{2\pi}{3}$$

Ceci équivaut à l'appartenance de M à l'arc indiqué.

Proposition 2.5.3. *Soit E un espace eucludien orienté de dimension3,* $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ *un repére orthonoremé direct ,* A,B,C *trois points tels que* $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ *soient deux*

orthogonaux et de même norme. Autrement dit,ce sont trois arêtes d'un cube de sommet 0. Soit P le plan passant par O de direction P=vect($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$)
Soit a, b, c les affixes des projections orthogonales A', B', C' de A, B, C sur p.
Alors, on deduit la propriéte suivant $a^2 + b^2 + c^2 = 0$(en condidérant la matrice de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ dans la base B=($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$) et utilisant les propriétés des matrices orhogonales)

Preuve 2.5.3. *Soit la matrice*

$$M = M_B(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Posons $||\overrightarrow{OA}|| = ||\overrightarrow{OB}|| = ||\overrightarrow{OC}|| = l$, longueur de l'arête du cube.
Alors $\frac{1}{l}M$ est une matrice orthogonale.On a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a_1 + ia_2)^2 + (b_1 + ib_2)^2 + (c_1 + ic_2)^2 \\ &= ((a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)) + 2i(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) \end{aligned}$$

La transposée d'une matrice orthogonale est orthogonale, donc les vecteurs colonnes $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$ de la transposée ${}^tM$ sont de même normes et deux à deux orthogonaux, on a donc

$$a^2 + b^2 + c^2 = (||\overrightarrow{V_1}||^2 - ||\overrightarrow{V_2}||^2) + 2i\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = 0$$

Bibliographie

[1] **A**rnaud Boudin et **É**enyamus boutin-Pascal Ramon." Les nombres complexes et gèometrie "

[2] **A**Dahan-Dalmedico et **J**Peiffer. Une histoire des mathématiques(les nombre complexe) -Routes et dédales 1986

[3] **D**ominique Flament, Histoire des nombres complexes : Entre algèbre et géométrie, Paris, CNRS Éditions, 2003

[4] **G**uyauliac-jean delcourt-Reny Goblot "algêbre et géométrie"

[5] **J**ean-Marielion université de reunes "inversion complexes"

[6] **M**elanie Sedda-Arnaud Cerckel-benjamin Legat-Jules Wacquez 1 Avril 2011 "inversion"

[7] **P**ierre Puseux université de pau des pays de l'adour "introduction a analyse complexes "