Année: 2013 Né attribué par la bibliothéque

# Calcul fonctionnel et opérateurs déffirentiels

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplome de

Master L.M.D.

Université Dr : Tahar Moulay de Saida

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse fonctionnelle

par

**G**uendouzi **K**hayra

Sous la direction de

**Encadreur :** $M^r$ **D.Djellouli**

Soutenue le .../juin/2013 devant le jury composé de

Messieurs :

# Table des matières

Remerciements

*En premier lieu, je tient à remercier notre "Dieu" qui nous à donner le courage et la volonté pour réaliser ce travail.*

*Je tient tout d'abord à remercier Monsieur, "GHOUTI DJELLOULI", Maitre de conférence -A- à l'université de Saïda, pour avoir accepté d'encadrer ce mémoire. je teint à lui témoigner ma gratitude et ma reconnaissance car ce travail n'aurait jamais vu le jour sans son aide considérable, je voudrais également lui exprimer ma sincère remerciements, malgré toutes ses occupations, était toujours à l'écoute de mes préoccupations et de mes questions, et qui m'a aide à progresser.*

*Je remercie d'avance Monsieur "T. GUENDOUZI ", Maitre de conférence -A- à l'université de Saïda, pour sa présence à ma soutenance de master et, pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.*

*Je suit également trés reconnaissant à Monsieur "K. DJERFI", Maitre assistant -A- à l'université de Saïda, pour toute l'aide qu'il m'a accordée durant du travail, en acceptant d'être examinateur de ce travail.*

*Je remercie profodément Madame "F.Z.MOSTEFAI" , Maitre assistant -A- à l'université de Saïda, pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail en acceptant de le juger.*

*Au chef de département.*

*Et aux respectueux enseignants des départements de mathématique.*

*Et à tous les étudiantes et étudiants de mathématique option analyse.*

*J'adresse un vif remerciement à ma famille et mes amis.*

# Index des notations

$A^*$ : Adjoint de l'opérateur $A$.

$\mathbf{H}$ : L'espace de Hilbert.

$\mathcal{L}(\mathbf{H})$ : L'espace des opérateurs lineares bornés sur $\mathbf{H}$.

$X$ : L'espace de Banach.

$\mathcal{L}(X)$ : L'espace des opérateurs lineares bornés sur $X$.

$D(A)$ : Le domaine de $A$

$ImA$ : L'image de $A$.

$\ker(A)$ : Le noyon de $A$.

$\rho(A)$ : L'ensemble résolvant ou résolvante.

$\sigma(A)$ Le spectre.

$\sigma_c(A)$, $\sigma_p(A)$ et $\sigma_r(A)$ : Le spectre continu, ponctuel et résiduel de $A$.

$(A-\lambda)^{-1}$ : l'inverce de $(A-\lambda)$.

$I_A$ : L'identité de $A$.

$\overline{A}$ : La fermeture de l'opérateur $A$.

$U$ : Un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

$m(\lambda_0; A)$ : Algebraic multiplicity.

$P_\sigma(A)$ : Projection de Riesz.

$ind(A)$ : Index de l'opérateur $A$,

$\Re\lambda$ : La partie réelle du nombre complexe $\lambda$.

$P$ : Un opérateur de projéction.

$R_\lambda(A)$ : 'opérateur résolvante de $A$.

$G(A)$ : Graphe de $A$

# Introduction

Ce mémoire est consacrée aux éléments de la théorie spectrale qui peuvent être appliquées aux opérateurs bornés quelle que soit la classe à laquelle ils appartiennent. Trois thèmes principaux sont abordés, à savoir la séparation des spectres et valeurs propres isolées de type fini qui se comportent comme des valeurs propres de matrices et équivalence analytique des opérateurs pour le cas où le paramètre spectral est linéaire ainsi que pour la dépendance non linéaire. La théorie spectrale des opérateurs auto adjoints bornés, est présentée ici comme un raffinement supplémentaire des théorèmes de séparation spectrale de F. Riesz. Les résultats sont développés pour le cas où l'opérateur a des valeurs propres isolé avec les propriétés du même type que les valeurs propres de matrices finies. Le problème de l'intégralité des vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés apparaît de manière naturelle. Les résultats sont appliqués aux opérateurs compacts. Enfin les théorèmes limites pour les spectres et la version de dimension infinie du lemme de Schur sur les formes triangulaires.

# Chapitre 1

# Fonctions Analytiques et Theorie Spectrale des Operateurs Linéaires [14] [16]

## 1.1 Fonctions Analytiques

### 1.1.1 Le plan complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$ avec le module de $z$ est donné par : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

### 1.1.2 Topologie dans le plan complexe

On définit une distance dans le plan complexe par :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ d(z_1, z_2) = \mid z_1 - z_2 \mid$$

**Définition 1.1.1.** *On appelle disque ouvert de centre $z_0$ et de rayon $\tau > 0$ l'ensemble :*

$$D(z_0, \tau) = \{z \in \mathbb{C} / \mid z - z_0 \mid < \tau\}$$

*et par le disque fermé l'ensemble de centre $z_0$ et de rayon $\tau$,tel que : $\overline{D}(z_0, \tau) = \{z \in \mathbb{C} / \mid z - z_0 \mid \leq \tau\}$.*

**Définition 1.1.2.** *(**Connexe**) Un sous-ensemble $U$ de $\mathbb{C}$ est connexe si deux points quelconques de $U$ peuvent être rejoints par une ligne polygonale incluse dans $U$*
*Si de plus $U$ est ouvert alors il est appelé domaine.*

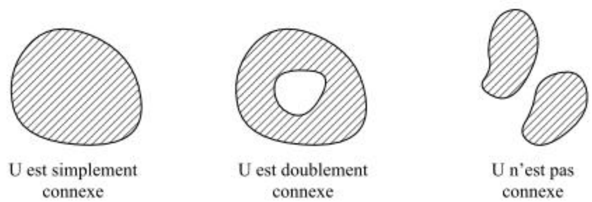


FIGURE 1.1 –

### 1.1.3 Limites et continuité

Dans la suite du paragraphe, on utilisera $f : U \to \mathbb{C}$.

**Définition 1.1.3.** *Soit $z_0 \in U$. On dit que $f$ tend vers une limite $l$ quand $z \to z_0$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mu(\varepsilon) \text{ tel que } \mid z - z_0 \mid < \mu \Rightarrow \mid f(z - z_0) \mid < \mu \Rightarrow \mid f(z) - l \mid < \varepsilon.$$

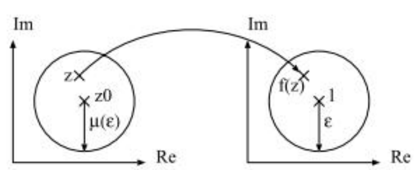


FIGURE 1.2 –

**Remarque 1.1.1.** *D'après la définition, $f$ a une limite si elle tend vers la même valeur suivant toutes les directions du plan. Pour prouver que $f$ n'admet pas de limite en un point il suffit de trouver deux directions d'approche de ce point telles que la fonction ne tende pas vers la même valeur suivant l'une ou l'autre.*

**Définition 1.1.4.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et $f$ définie sur un voisinage de $z_0$. On dit que $f$ est continue en $z_0$ si :*

- *$f$ admet une limite finie en $z_0$*
- *$\lim_{z \to z_0} f(z)$ coïncide avec $f(z_0)$.*

### 1.1.4 Dérivée d'une fonction d'une variable complexe

**Définition 1.1.5.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et soit $f$ définie et continue sur un voisinage de $z_0$. On dit que $f$ est dérivable en $z_0$ si l'expression :*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*admet une limite quand $z$ tend vers $z_0$. On note alors cette limite $f'(z_0)$.*

### 1.1.5 Fonctions analytiques (ou holomorphes)

**Définition 1.1.6.** *On dit d'une fonction $f$ qu'elle est analytique dans un ouvert $U$ du plan complexe si et seulement si elle est dérivable en tout point de $U$.*

**Proposition 1.1.1.** *Soit $f$ analytique sur un domaine $U$. Si $u$ et $v$ sont de classe $\mathbb{C}^2$ sur $U$, alors $u$ et $v$ satisfont l'équation de Laplace dans $U$ :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

## 1.2 Intégration dans le plan complexe

**Définition 1.2.1.** *Soit $\gamma :\ J = [t_a, t_b] \to \mathbb{C}$, avec $[t_a, t_b] \subset \mathbb{R}$, tel que :*

- *$\gamma$ peut être décrite par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ où $x$ et $y$ sont continues sur $J$ et $x'$ et $y'$ continues par morceaux sur $J$.*
- *$\gamma$ est injectif, sauf peut être aux extrémités (pas de point multiples, sauf éventuellement $a = b$).*

*Alors $\gamma$ est appelé chemin.*

*Si de plus $a = b$, $\gamma$ est appelé contour.*

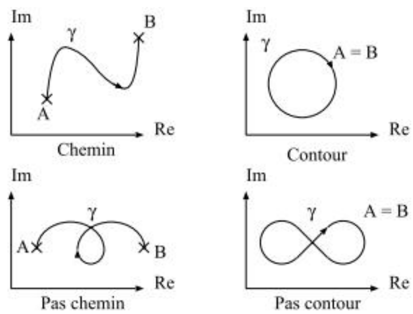


FIGURE 1.3 –

**Remarque 1.2.1.** *Cette définition assez restrictive d'un chemin ne correspond pas à la définition plus générale que l'on trouve dans les ouvrages de références, mais sera néaumoins suffisante dans le cadre du cours)*

### 1.2.1 Intégration le long d'un chemin

Soit $\gamma$ un chemin et soit $f$ définie en tout point de ce chemin. Soit $\{z_0, ..., z_n\}$ une subdivision de $\gamma$, avec $z_0 = a$ et $z_n = b$. Soient de plus $\xi_{1,...,}\xi_n$ tels que $\forall i \in [1, n], \xi_i \in ]z_{i-1}, z_i[$. On définit la suite :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

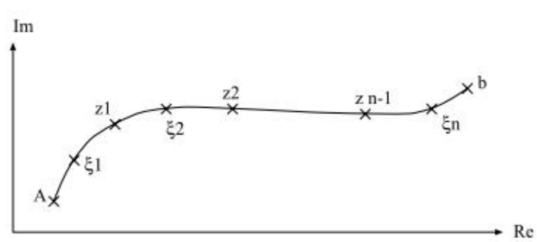


FIGURE 1.4 –

**Définition 1.2.2.** *Si, quand* $n \to \infty$ *de manière à ce que* $\mid z_k - z_{k-1} \mid \to 0$ *pour tout* $k$ *de* $[1, n]$*, la somme* $I_n$ *tend vers une limite indépendante du choix des* $z_k$ *et des* $\xi_k$*, alors cette limite est appelée intégrale de* $f$ *le long de* $\gamma$ *et est notée :*

$$\int_\gamma f(z)dz$$

**propriété 1.2.1.** *Si* $f$ *est continue sur* $U$*, alors son intégrale le long de* $U$ *existe.*
*Si on sépare la partie réelle et la partie imaginaire, on a donc*

$$I = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (vdx + udy)$$

*Les deux intégrales curvilignes qui apparaissent dans l'expression de* $I$ *peuvent être réduites à des intégrales ordinaires en utilisant le paramétrage de* $\gamma : z(t) = x(t)+iy(t)$*. On obtient alors :*

$$I = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t))z'(t)dt$$

*En particulier*
*Soit* $f$ *admettant une primitive, i.e.* $\exists F$ *telle que* $F' = f$ *sur un domaine* $\Omega$ *de* $\mathbb{C}$*. On intègre* $f$ *sur un chemin* $\gamma$ *contenu dans* $\Omega$*, et on a :*

$$I = \int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$$

*si* $a$ *et* $b$ *sont les extrémites du chemin considéré.*

**Proposition 1.2.1.** *Soit* $f$ *intégrable sur un chemin* $\gamma$ *de longueur curviligne* $L$*. Soit* $M = \sup_\gamma(\mid f \mid)$ *(on suppose que* $M$ *est fini). Alors on a :*

$$\mid I \mid \leq ML$$

## 1.3 Intégration de fonctions analytiques

**Définition 1.3.1.** *Soit* $\Omega$ *un ensemble ouvert non vide de* $\mathbb{C}$*, et soit* $Z$ *un espace de Banach. La fonction* $f : \Omega \to Z$ *est dit analytique en* $\lambda_0 \in \Omega$*, si dans certains voisinage* $\mathcal{U}$ *de* $\lambda_0$ *dans* $\Omega$ *la fonction* $f$ *peut être représenté comme la somme d'une série entière en* $\lambda - \lambda_0$*, c'est à dire,*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f_n, \qquad \lambda \in \mathcal{U}. \tag{1.1}$$

*où $f_0, f_1, ....$ sont des vecteurs de $Z$ (qui ne dépendent pas de $\lambda$) et la série (1.1) converge.*

### 1.3.1 Théorème de Cauchy et conséquences

**Théorème 1.3.1.** ***Théorème de Cauchy***
*Soit un domaine $\Omega$ simplement connexe, soit $f$ analytique sur $\Omega$, et soit $\gamma$ un contour quelconque contenu dans $\Omega$.*
*Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

**Proposition 1.3.1.** *Soit $f$ analytique sur un domaine simplement connexe, soit $A$ et $B$ deux points de ce domaine et soit $\gamma_1$ et $\gamma_2$ deux chemins contenus dans $\Omega$ et ayant pour extrémités $A$ et $B$, alors on a :*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

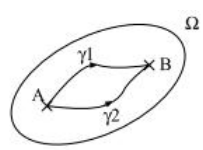


FIGURE 1.5 –

**Remarque 1.3.1.** *Si le domaine n'est pas simplement connexe, le théorème ne s'applique pas :*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0 \text{ mais en general } \int_{\gamma_2} f(z)dz \neq 0$$

**Définition 1.3.2.** • *Soit $\gamma_1$ et $\gamma_2$ deux contours d'un domaine $\Omega$. On dit que ces deux contours sont homotopes si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation*

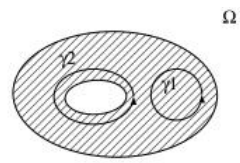


FIGURE 1.6 –

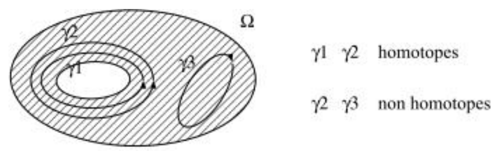


FIGURE 1.7 –

*continue en restant dans* $\Omega$.

• *Un contour est dit homotope à un contour ponctuel dans* $\Omega$ *s'il est homotope àun contour réduit à un point appartenant à* $\Omega$.
• *Un domaine* $\Omega$ *est simplement connexe si tout contour de* $\Omega$ *est homotope a un contour ponctuel.*
• *Un domaine* $\Omega$ *multiplement connexe est un domaine simplement connexe dont on a retiré un ou plusieurs domaines simplements connexes.*

**Proposition 1.3.2.** *Soient* $f$ *une fonction analytique dans un domaine* $\Omega$ *pouvant être non simplement connexe et deux contours* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *de* $\Omega$ *homotopes dans* $\Omega$, *alors on a, en prenant la même orientation pour les deux contours :*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

**Proposition 1.3.3.** *Soit* $f$ *analytique sur un domaine simplement connexe* $\Omega$, *alors* $f$ *admet une primitive sur* $\Omega$.

### 1.3.2 Formule intégrale de Cauchy

**Proposition 1.3.4.** *Soit $f$ analytique sur un domaine $\Omega$ simplement connexe, et $z \in \Omega$. Alors on a, pour tout contour $\gamma$ de $\Omega$ orienté positivement et entourant $z$ :*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

### 1.3.3 Dérivabilité n-ième des fonctions analytiques

**Définition 1.3.3.** *Soit $\Omega$ un ensemble ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to Z$. La fonction $f$ est appelée différentiable sur $\Omega$, si pour chaque $\lambda_0$ dans $\Omega$, la dérivé*

$$f'(\lambda_0) := \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0}(f(\lambda) - f(\lambda_0))$$

*existe.*

**Proposition 1.3.5.** *Soit $f$ analytique sur un domaine $\Omega$, alors $f$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\Omega$. Si de plus $\Omega$ est simplement connexe, pour tout contour $\gamma$ entourant $z$ on a :*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

### 1.3.4 Théorème de Morera

**Théorème 1.3.2.** *Soit $f$ une fonction continue dans un domaine $\Omega$ simplement connexe. Si pour tout contour $\gamma \in \mathbb{C}$ on a*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

*alors $f$ est analytique sur $\Omega$.*

**Lemme 1.3.1.** *Soit $f : \Omega \to Z$ une fonction analytique sur $\Omega$, et soit $\Gamma$ un contour de Cauchy tel que $\Gamma$ et son domaine intérieur sont dans $\Omega$. Donc*

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} f(\lambda) d\lambda \tag{1.2}$$

*pour tout point $\lambda_0$ à l'intérieur de $\Gamma$.*

**Preuve :**

Soit $y$ un vecteur dans $Z$ défini par le côté droit de (1.2). Soit $F$ une fonctionnelle arbitraire linéaire continue sur $Z$. Notons que $F \circ f$ est un scalaire de fonction analytique. Ainsi, par la formule intégrale de Cauchy ,

$$F(f(\lambda_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} F(f(\lambda)) d\lambda$$

nous pouvons maintenant utiliser (**??**) pour conclure que $F(f(\lambda_0)) = F(y)$. Puisque $F$ est une fonctionnelle linéaire arbitraire continue sur $Z$, le théorème de Hahn-Banach implique que $f(\lambda_0) = y$, ce qui montre (1.2).

**Lemme 1.3.2.** *L'analyticité de $f$ implique que $f$ est dérivable. La réciproque est également vraie.*

**Preuve 1.3.1.** *Supposons que $f$ est différentiable sur $\Omega$, et soit $\lambda_0$ un point arbitraire de $\Omega$. Choisissant un cercle $U$ dont le centre est $\lambda_0$ et de rayon $r$, de telle sorte que $U$ et son domaine intérieur sont dans $\Omega$ . Nous allons montrer que*

$$f(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \mu} f(\lambda) d\lambda, \qquad |\mu - \lambda| < r \tag{1.3}$$

*Notons que la dérivabilité de $f$ implique que $f$ est continue, de sorte que le côté droit de 1.3 est bien définie. Soit $F$ une fonctionnelle linéaire arbitraire continue sur $Z$. Alors la fonction scalaire $f$ est dérivable sur $\Omega$, et donc analytique sur $\Omega$,. Alors 1.2 à lieu pour $Ff$ au lieu de $f$. Puisque $F$ est une fonctionnelle linéaire arbitraire continue sur $Z$, on utilisant le fait que*

$$F\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) d\lambda\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F\left(f(\lambda)\right) d\lambda$$

*et le théorème de Hahn-Banach pour conclure que 1.3 est vérifier, De 1.3 et*

$$\frac{1}{\lambda - \mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} (\mu - \lambda_0)^n$$

*pour $|\mu - \lambda_0| < r$ et $\lambda \in \Gamma$, il s'ensuit que*

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda_0)^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} f(\lambda) d\lambda\right)$$

*ce qui prouve l'analyticité de $f$.*

Précisons certains des résultats précédents pour le cas où $Z$ est l'espace de Banach $\mathcal{L}(X,Y)$. Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, et soit $f : \Gamma \to \mathcal{L}(X,Y)$ une fonction continue. Alors la valeur de l'intégrale (2.4) est un opérateur linéaire borné de $X$ dans $Y$ et pour chaque $x \in X$, on a

$$(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)xd\lambda \tag{1.4}$$

De plus, si $A : X_1 \to X$ et $B : Y \to Y_1$ sont deux opérateurs linéaires bornés, alors

$$B(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda)A = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Bf(\lambda)Ad\lambda. \tag{1.5}$$

**Lemme 1.3.3.** *Soit $f : \Omega \to \mathcal{L}(X,Y)$ est analytique sur $\Omega$, et supposons que pour un point $\lambda_0$ dans $\Omega$. l'opérateur $f(\lambda_0)$ est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\lambda_0$ dans $\Omega$ tels que $f(\lambda)$ est inversible pour $\lambda \in \mathcal{U}$ et $f(.)^{-1}$ est analytique sur $\mathcal{U}$.*

**Preuve :**
La dernière énoncé résulte de la formule

$$(f(\lambda)^{-1})' = -f(\lambda)^{-1}f(\lambda)'f(\lambda)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathcal{U}, \tag{1.6}$$

et le fait que la différentiabilité est la même que l'analyticite. ■

## 1.4 Théorie des opérateurs [6]

L'une des classes les plus importantes des opérateurs est la classe des opérateurs non bornes . Cela inclut les opérateurs différentiels qui jouent un rôle essentiel dans les applications. Dans cette partie, une introduction à la théorie des opérateurs non bornés est présentée.

### 1.4.1 Opérateurs linéaires bornés

Dans toute la section, $X, Y$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$. On notera $< ., . >$ et $\| . \|$ le produit scalaire sur $X$ et la norme associée. L'identité de $X$ sera notée simplement par $I$.

**Définition 1.4.1.** *Une application linéaire $A : X \to Y$ est dit opérateur borné, s'il existe un réel $k > 0$ telle que : $\| Ax \|_Y \leq k \| x \|_X$*
*On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaire bornés de $X$ dans $Y$ muni de la norme $\forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$, nous notons $\mathcal{L}(X)$ ou lieu de $\mathcal{L}(X, X)$.*

**propriété 1.4.1.** *Soit $A$ un opérateur linéaire borné sur $\mathbf{H}$. On a les propriétés suivantes :*

$$i)\ \ker A = (ImA^*)^{\perp}, \qquad ii)\ \ker A^* = (ImA)^{\perp},$$
$$iii)\ \overline{ImA} = (\ker A^*)^{\perp}, \qquad iv)\overline{ImA^*} = (\ker A)^{\perp}.$$

**Définition 1.4.2.** ***(Opérateur auto-adjoints)***
*On dit que $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ est un opérateur linéaire auto-adjoint si $A = A^*$, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in \mathbf{H}^2,\ < Ax, y >=< x, Ay >$.*

### 1.4.2 Opérateurs projections

**Définition 1.4.3.** *:**(Opérateur de projection)** Si $P \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ et $P^2 = P$, $P$ appellé un opérateur de projection, si de plus $P$ est hermitien alors, $P$ est appelé un projection orthogonal.*

**Corollaire 1.4.1.** *Si $P$ est un opérateur de projection sur l'espace de Hilbert $\mathbf{H}$, $I - P$ l'est aussi.*

**propriété 1.4.2.** *Si $P$ est un projection orthogonal sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, alors*
*$i)$ $Py = y, \quad \forall y \in ImP$.*
*$ii)$ $ImP$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}$, et $X = \ker P \oplus ImP$.*
*$iii)$ $\forall x \in H,\ (x - Px) \in (ImP)^{\perp}$.*
*$iv)$ $\| P \| = 1$ .*

### 1.4.3 Opérateurs compacts

Soit $\mathbf{H}$ est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de dimension infinie.

**Définition 1.4.4.** *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, on dit que $A$ est compact si pour tout suit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $X$, la suite $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte, il existe une sous-suite*

$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $\{Ax_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $H$. *Cela équivaut à dire l'image par* $A$ *de la boule unité de* $H$ *est relativement compacte dans* $H$.

**propriété 1.4.3.** *Tout opérateur borné de rang fini (i.e. dont l'image est de dimension finie) est compact.*

**propriété 1.4.4.** *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*(i)* $A$ *est compact,*
*(ii)* $A$ *transforme toute suite faiblement convergente en une suite convergente en norme.*

### 1.4.4 Spectre des opérateurs bornés

#### Résolvante

**Définition 1.4.5.** ***(Ensemble résolvant, résolvante)***. *Soit* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *on dit que* $\lambda \in \mathcal{C}$ *appartient à l'ensemble résolvant de* $A$ *si* $\lambda I - A$ *est un isomorphisme de* $H$, *ce qui équivant à dire que* $\lambda I - A$ *est une bijection de* $H$ *dans* $H$ *et que* $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. *L'ensemble résolvant de* $A$ *est noté* $\rho(A)$. *L'opérateur* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est appelé la résolvante de* $A$ *en* $\lambda$ *et noté* $R_\lambda(A)$ *telle que* $R_\lambda(A)(\lambda I - A) = (\lambda I - A)R_\lambda(A) = I$

#### Spectre

**Définition 1.4.6.** *Le spectre* $\sigma(A)$ *de* $A$ *est le complémentaire de* $\rho(A)$ *dans* $\mathbb{C}$.

1. *Le spectre ponctuel* $\sigma_p(A)$ *de* $A$ *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.
2. *Le spectre continu* $\sigma_c(A)$ *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$, $Im\ (A - \lambda I)$ *est dense, et* $(A - \lambda I)^{-1} : Im\ (A - \lambda I) \to D$ *n'est pas borné.*
3. *Le spectre résiduel* $\sigma_r(A)$ *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tels que* $Ker(A - \lambda I) = \{0\}$ *et* $Im\ (A - \lambda I)$ *n'est pas dense.*

**Remarque 1.4.1.** *En dimension finie, on a bien sûr* $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, *C'est une conséquence triviale du théorème du rang. En dimension infinie en revanche, l'ensemble* $\sigma_p(A)$ *peut être strictement inclus dans* $\sigma(A)$

### 1.4.5 L'application résolvante

**Lemme 1.4.1.** *L'application résolvante $\xi \to (\xi - A)^{-1}$ est définie sur le complémentaire du spectre $\sigma(A)$, appelé l'ensemble résolvant de $A$, est différentiable.*

**Preuve :**
La théorie classique des fonctions holomorphes complexes repose sur les propriétés de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi - z)^{-1} d\xi,$ ; le calcul fonctionnel holomorphe fait jouer un rôle analogue aux propriétés de l'intégrale de la résolvante.
Un calcul direct montre que, pour $z_1, z_2 \in \rho(A)$,

$$(z_1 - A)^{-1} - (z_2 - A)^{-1} = (z_1 - A)^{-1}(z_2 - z_1)(z_2 - A)^{-1}$$

On en déduit que

$$(z_1 - A)^{-1}(z_2 - A)^{-1} = \frac{(z_1 - A)^{-1} - (z_2 - A)^{-1}}{(z_2 - z_1)}$$

Cette équation est appelée la première formule de la résolvante. Elle montre que $(z_1-A)^{-1}$ et $(z_2-A)^{-1}$ commutent ; on s'attend donc à ce que les opérateurs construits par le calcul fonctionnel holomorphe commutent également. Faisant tendre $z_2$ vers $z_1$, on voit que l'application résolvante est différentiable dans les complexes en tout $z_1 \in \rho(A)$ ; l'intégrale donnée précédemment est donc définie pour tous les opérateurs de $\mathcal{L}(X)$.
■

#### Holomorphie

**Proposition 1.4.1.** *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert, et l'application résolvante y est non seulement différentiable, mais holomorphe, ou plus exactement analytique, c'est-à-dire développable en série entière ; cette propriété sera fréquemment utilisée par la suite.*

**Preuve :**
Pour la démontrer, on prend $z_1 \in \rho(A)$ et on remarque que, formellement,

$$\frac{1}{z_2 - A} = \frac{1}{z_1 - A} . \frac{1}{1 - \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - A}}$$

, ce qui amène à considérer la série

$$(z_1 - A)^{-1} \sum_{n \geq 0} ((z_1 - z_2)(z_1 - A)^{-1})^n$$

qui doit valoir $(z_2 - A)^{-1}$ si elle converge. Comme cette série converge dans $\mathcal{L}(X)$ si $\mid z_1 - z_2 \mid < \dfrac{1}{\| (z_1 - A)^{-1} \|}$, on en déduit le résultat annoncé : l'application résolvante est développable en série entière dans un disque ouvert centré en $z_1$.

■

**Série de Neumann**

Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire borné sur l'espace de Banach $X$. La résolvante $R(.) = (. - A)^{-1}$ est analytique sur l'ouvert $\rho(A)$. Alors

$$R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n; \qquad \mid \lambda \mid > \| A \| .$$

de ce fait il résulte que $\sigma(A)$ est un ensemble non-vide lorsque $X \neq \{0\}$.

## 1.4.6 Le calcul fonctionnel holomorphe pour un opérateur borné

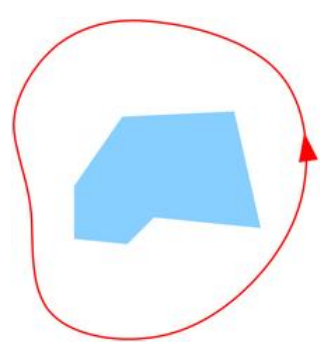

FIGURE 1.8 –

Le spectre $\sigma(T)$ est représenté en sembre, et le chemin d'intégration $\Gamma$ en noire.

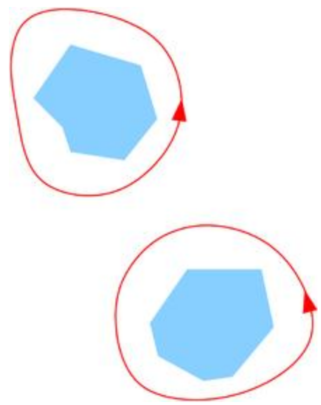

FIGURE 1.9 –

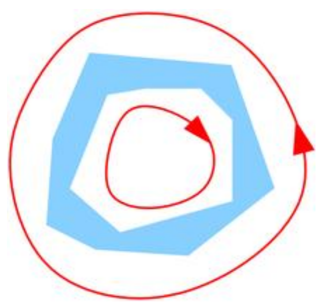

FIGURE 1.10 –

Le cas d'un spectre ayant plusieurs composantes connexes, et le chemin $\Gamma$ correspondant.

Le cas d'un spectre non simplement connexe.

**Proposition 1.4.2.** *si $(A, D(A))$ est fermable de rang fini, alors $A$ est borné sur son domaine.*

**Remarque 1.4.2.** *Si $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ deux opérateurs non bornés. On dit que $A$ est une restriction de $B$ ou,$B$ est l'extension de $A$ si*

$$D(A) \subset D(B), \qquad Ax = Bx \qquad (x \in D(A)). \tag{1.7}$$

*Dans ce cas, nous écrivons* $A \subset B$. *Notez que 1.7 est équivalent à* $G(A) \subset G(B)$.

# Chapitre 2

# Calcul fonctionnel et projections de Riesz

## 2.1 Introduction [4], [5]

Ce chapitre est consacré à la théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés . Il contient des théorèmes sur la décomposition des opérateurs correspondant à des parties séparées du spectre, la version générale de calcul fonctionnel et applications aux équations différentielles.

Dans ce chapitre nous rappelons tout d'abord le cas lorsque l'opérateur $A$ est auto-adjoint compact agissant sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$. Dans ce cas $\mathbf{H}$ se décompose en une somme orthogonale de sous-espaces propres, tel que

$$\mathbf{H} = \ker A \oplus \ker(\lambda_1 - A) \oplus \ker(\lambda_2 - A) \oplus .........$$

où $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... est la suite de différentes valeurs propres non nulles de $A$. Si $A$ n'est pas auto-adjoint une telle décomposition de l'espace n'est pas vrai. c'est déjà évident dans le cas de dimension finie. Par exemple,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sur $\mathbf{H} = \mathbb{C}^2$ a seulement une valeur propre, soit, $\lambda = 0$, et le sous-espace propre correspondant est différent de $\mathbf{H}$.

Le cas de dimension finie donne une indication du type de décomposition dans le cas non auto-adjoint. Supposons que $\mathbf{H}$ est de dimension finie, et soit $\lambda_1, \lambda_2, ....\lambda_r$ les différentes valeurs propres de $A$. Dans $\mathbf{H}$, il existe une base telle que la matrice $J_A$ de $A$ par rapport à cette base a une forme normale de Jordan, c'est-à-dire $J_A$ apparaît comme matrice diagonale par blocs telle que les blocs de la diagonale sont les blocs élémentaires de Jordan de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Soit $\mathbf{M}_v$ l'espace engendré par les vecteurs de base correspondant aux blocs élémentaires de Jordan dans $J_A$ avec $\lambda_v$ sur la diagonale principale. Alors

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}_1 \oplus ... \oplus \mathbf{M}_r \tag{2.2}$$

chaque espace $\mathbf{M}_v$ est invariant par $A$ et la restriction de $A$ à $\mathbf{M}_v$ a une valeur propre simple, $\lambda_v$

Pour trouver l'espace $\mathbf{M}_v$ on n'a pas besoin de connaître la base de Jordan. Il ya une façon directe en effet,

$$\mathbf{M}_v = Im[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v}(\lambda - \mathbf{A})^{-1}d\lambda] \tag{2.3}$$

où $\Gamma_v$ est un contour autour de $\lambda_v$ séparant $\lambda_v$ des autres valeurs propres. Pour le voir, notons que pour la matrice $T$ de type $k \times k$ donnée par (2.1)

$$(\lambda - \mathbf{T})^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_j)^{-1} & (\lambda-\lambda_j)^{-2} & ... & (\lambda-\lambda_j)^{-k} \\ & (\lambda-\lambda_j)^{-1} & & \vdots \\ & & \ddots & (\lambda-\lambda_j)^{-2} \\ & & & (\lambda-\lambda_j)^{-1} \end{pmatrix}$$

et donc $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v}(\lambda - \mathbf{T})^{-1}d\lambda$ est égale à la matrice identité de type $k \times k$ si $j = v$ et égal à la matrice nulle sinon. Il en résulte que

$$[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - \mathbf{A})^{-1} d\lambda] x = \begin{cases} x & si\ x \in M_v, \\ 0 & si\ x \in M_j, \quad j \neq v \end{cases}$$

En particulier (2.3) est vérifiée.

**Remarque 2.1.1.** *Dans la formule (2.3) la dimension finie de l'espace ne joue pas un rôle important. En effet, nous le verrons dans ce chapitre, la formule (2.3) peut également être utilisé dans le cas de la dimension infinie pour obtenir des décompositions spectrales de l'espace semblable à celui proposée dans (2.2).*

**Formule intégrale de Cauchy**

**Définition 2.1.1.** *Soit $X$ un espace de Banach complexe, et $\mathcal{L}(X)$ la famille des opérateurs bornés sur $X$ ; si $f$ : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur un ouvert simplement connexe $D$ du plan complexe, et si $\Gamma$ est une courbe de Jordan rectifiable dans $D$ (c'est-à-dire une courbe fermée ne se recoupant pas), la formule intégrale de Cauchy dit que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

*pour tout $z$ à l'intérieur de $\Gamma$ (c'est-à dire tel que l'indice de $z$ par rapport à $\Gamma$ soit égal à 1).*

L'idée du calcul fonctionnel holomorphe est d'étendre cette formule à des fonctions prenant leurs valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(X)$. On aurait donc la définition :

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\xi)(\xi - A)^{-1} d\xi,$$

où $(\xi - A)^{-1}$ est la résolvante de $A$ en $\xi$. Admettant que cette intégrale ait été définie.

### 2.1.1 Intégration à valeurs dans un espace de Banach

Pour une fonction continue $g$ définie sur un voisinage ouvert de $\Gamma$ a valeurs dans $\mathcal{L}(X)$, l'intégrale de contour $\int_\Gamma g$, est définie de façon analogue au cas scalaire : on paramètre chaque $\gamma_i \in \Gamma$ par un intervalle réel $[a, b]$, et l'intégrale est la limite des sommes de Riemann obtenues pour des partitions de plus en plus fines de $[a, b]$, ces sommes convergeant au sens de la norme des opérateurs ($g$ étant continue, il n'est pas nécessaire d'utiliser une intégrale plus générale, telle que l'intégrale de Bochner (en)). On définit alors $\int_\Gamma g = \sum_{\gamma_i} g$. $f$ est supposée être holomorphe (donc continue) sur un voisinage ouvert de $\Gamma$ ; il en est de même de l'application résolvante, comme ce sera démontré plus bas ; ainsi, l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\xi)(\xi - A)^{-1}d\xi$ est bien définie. Nous commençons par la définition du contour intégrales de la forme :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(\lambda)d\lambda, \tag{2.4}$$

où l'intégrale est une fonction à valeurs dans un espace de Banach.

Tout d'abord, quel genre de contours sont utilisés dans (2.4).

**Définition 2.1.2.** *On appel domaine de Cauchy une réunion disjointe de $\mathbb{C}$ d'un nombre fini d'ouvert connexe non-vide.*

**Définition 2.1.3.** *Nous appelons $\Gamma$ contour de Cauchy si $\Gamma$ est le bord orienté d'un domaine de Cauchy bornée dans $\mathbb{C}$.*

### Existence du contour de Cauchy

**Corollaire 2.1.1.** *Si $\sigma$ est un sous-ensemble compact ouvert (non vide) de $\Omega \subset \mathbb{C}$ , alors on peut toujours trouver un contour de Cauchy $\Gamma$ dans $\Omega$ tel que $\sigma$ appartient au domaine interne de $\Gamma$ .*

**Preuve :**

En effet, construisant dans le plan complexe un maillage d'hexagones isométriques d'un diamètre inférieur un tiers de la distance entre $\sigma$ et $\mathbb{C}\setminus\Omega$, et soit $\Delta$ l'intérieur de l'union de tous les maillages d'hexagones fermés qui ont une intersection non vide avec $\sigma$. Alors, la frontière de $\Delta$ est un contour de Cauchy du type souhaité. ■

**Remarque 2.1.2.** *(compacité du spectre) Les deux résultats précédents montrent que, pour un opérateur borné $A$, le spectre $\sigma(A)$ est un fermé borné du plan complexe, et donc un compact du plan. Ainsi, pour tout ouvert $D$ tel que $\sigma(A) \subset D$, il existe un* *ensemble* $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ *de courbes de Jordan lisses orientées positivement tel que* $\sigma(A)$ *est à l'intérieur de* $\Gamma$ *et que le complémentaire de* $D$ *est contenu dans l'extérieur de* $\Gamma$*, ce qui justifie l'existence de l'intégrale définissant* $f(A)$*.*

**Corollaire 2.1.2.** *Pour une collection de courbes de Jordan* $\Gamma = \gamma_1...\gamma_m$ *et un point* $a$ *du plan complexe, l'indice de* $a$ *par rapport à* $\Gamma$ *est la somme des indices de* $a$ *par rapport à chaque* $\gamma_i$*, ce que nous noterons* $ind(a, \Gamma) = \sum_i ind(a, \gamma_i)$*.*

**Théorème 2.1.1.** *Soit* $G \subset \mathbb{C}$ *un ouvert et* $\Gamma \subset G$*. Si* $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est holomorphe sur* $G$*, et si pour tout* $a$ *du complémentaire de* $G$*,* $ind(a, \Gamma) = 0$*, alors l'intégrale de contour* $\int_\Gamma g = 0$*. L'analogue vectoriel de ce résultat, lorsque* $g$ *prend ses valeurs dans* $\mathcal{L}(X)$ *et est holomorphe, se démontre en utilisant l'espace dual* $\mathcal{L}(X)^*$ *de* $\mathcal{L}(X)$*, et en se ramenant au cas scalaire.*

**Preuve :**
En effet, considérons l'intégrale $J = \int_\Gamma g \in \mathcal{L}(X)$. Si on peut montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(X)^*, \varphi(\int_\Gamma g) = 0$, il en résultera que $\int_\Gamma g = 0$. $\varphi$ étant bornée, et l'intégrale étant normalement convergente, on a $\phi(\int_\Gamma g) = \int_\Gamma \phi(g)$. Par composition, $g$ étant supposée holomorphe, il en est de même de $\varphi(g) : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On peut donc lui appliquer le théorème de Cauchy (scalaire), obtenant $\phi(\int_\Gamma g) = \int_\Gamma \phi(g) = 0$.
■

## 2.2 Projections spectrales

### 2.2.1 Décomposition spéctrale

Soit $A$ est un opérateur linéaire borné sur l'espace de Banach $X$. Si $N$ est un sous-espace de $X$ invariant par $A$, alors $A\backslash N$ désigne la restriction de $A$ à $N$.
Supposons que le spectre de $A$ est l'union disjointe de deux sous-ensembles non vide fermé $\sigma$ et $\tau$ (i.e.$\sigma(A) = \sigma \cup \tau$ avec $\sigma \cap \tau = \emptyset$). Nous voulons montrer que cette décomposition du spectre correspond a une décomposition en somme directe de l'espace, $X = M \oplus L$, de telle sorte que $M$ et $L$ sont deux sous-espaces $A$-invariantes de $X$, tels que $\sigma\left(A\backslash M\right) = \sigma$ et que de $\sigma\left(A\backslash L\right) = \tau$. Pour montrer que cette décomposition

spectrale existe nous étudions (cf. formule (2.3) dans l'introduction de ce chapitre) l'opérateur

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda - A)^{-1}d\lambda \tag{2.5}$$

**Définition 2.2.1.** *Un ensemble $\sigma$ est appelé une partie isolée de $\sigma(A)$ si à la fois $\sigma$ et $r := \sigma(A)\backslash\sigma$ sont deux sous-ensembles fermés de $\sigma(A)$.*

Etant donné une partie isolée $\sigma$ de $\sigma(A)$, définissons $P_\sigma$ comme un opérateur linéaire borné sur $X$ défini par (2.5), où nous supposons que $\Gamma$ est un contour de Cauchy (dans l'ensemble résolvant de $A$) autour $\sigma$ qui sépare $\sigma$ de $\tau = \sigma(A)\backslash\sigma$. Par celui-ci, nous entendons que $\sigma$ appartient au domaine interne de $\Gamma$ et $\tau$ au domaine externe de $\Gamma$ où l'on trouve aussi la définition de l'intégrale (2.5). Puisque $(\lambda - A)^{-1}$ est une fonction d'opérateur analytique (en $\lambda$) sur l'ensemble résolvant de $A$, la définition de $P_\sigma$ ne dépend pas du choix particulier du contour $\Gamma$.

### 2.2.2 Projection de Riesz

**Définition 2.2.2.** *L'opérateur $P_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - A)^{-1}d\lambda$ est appelé la projection de Riesz de $A$, correspondant à la partie isolée de $\sigma$.*

**Lemme 2.2.1.** *l'opérateur $P_\sigma$ est une projection, c'est à dire, $P_\sigma^2 = P_\sigma$.*

**Preuve :**
Soit $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux contours de Cauchy autour de $\sigma$ séparant $\sigma$ de $\tau = \sigma(A)\backslash\sigma$. Supposons que $\Gamma_1$ est dans le domaine intérieur de $\Gamma_2$. Alors

$$\begin{aligned} P_\sigma^2 &= (\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda - A)^{-1}d\lambda)(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\mu - A)^{-1}d\mu) \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}d\mu d\lambda \end{aligned}$$

Maintenant, utilisons l'identité de la résolvante,

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}, \qquad \lambda, \mu \in \rho(A), \tag{2.6}$$

et écrivant $P_\sigma^2 = Q - R$, où

$$\begin{aligned} Q &= (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{\mu-\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (\lambda - A)^{-1} (\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{\mu-\lambda} I d\mu) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = P_\sigma, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R &= (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \frac{1}{\mu-\lambda}(\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^2 \int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\mu-\lambda}(\mu - A)^{-1} d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} (\mu - A)^{-1} (\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{\mu-\lambda} I d\lambda) d\mu = 0. \end{aligned}$$

de telle sorte qu'on a utilisé le fait que

$$\int_{\Gamma_2} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} = 2\pi i \quad (\lambda \in \Gamma_1),$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = 0 \quad (\mu \in \Gamma_2),$$

parce que $\Gamma_1$ est dans le domaine intérieur de $\Gamma_2$. En outre, l'échange des intégrales dans le calcul de $R$ est justifiée par le fait que l'intégrale est une fonction d'opérateur continu sur $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. ■

**Théorème 2.2.1.** *Soit $\sigma$ une partie isolée de $\sigma(A)$, et soit $M = ImP_\sigma$. et $L = \ker P_\sigma$ Alors $X = M \oplus L$, où $M$ et $L$ sont des sous-espaces $A$-invariants telle que*

$$\sigma(A\backslash M) = \sigma, \qquad \sigma(A\backslash L) = \sigma(A)\backslash\sigma. \tag{2.7}$$

**Preuve :**

Puisque $P_\sigma$ est une projection, il est clair que $M$ et $L$ sont des sous-espaces fermés et $X = M \oplus L$. De $A(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}A$ pour $\lambda \in \rho(A)$ il en résulte que $AP_\sigma = P_\sigma A$, ce qui implique que $M$ et $L$ sont invariantes par $A$. Il reste à montrer (2.7)

Soit $\Gamma$ un contour de Cauchy autour de $\sigma$ séparant $\sigma$ de $\tau := \sigma(A)\backslash\sigma$. Pour $\mu \notin \Gamma$ posons

$$S(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu-\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda$$

Puisque $P_\sigma$ commute avec $A$ et la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$, donc $P_\sigma$ commute avec $S(\mu)$. Alors, les espaces $M$ et $L$ sont invariantes par $S(\mu)$. On calculons que

$$\begin{aligned} S(\mu)(A-\mu) &= (A-\mu)S(\mu) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu-\lambda}(A-\mu)(\lambda - A)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{-1}{\mu-\lambda}Id\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1}d\lambda \\ &= \begin{cases} I - P_\sigma & \textit{pour } \mu \textit{ l'intérieur } \Gamma, \\ -P_\sigma I & \textit{pour } \mu \textit{ l'extérieur } \Gamma, \end{cases} \end{aligned}$$

soit $\mu \notin \sigma$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\Gamma$ a été choisi tel que $\mu$ est à l'extérieur de $\Gamma$. Mais alors, le calcul ci-dessus montre que

$$(A-\mu)S(\mu)x = S(\mu)(A-\mu)x = -x, \qquad x \in M$$

Car $S(\mu)M \subset M$, il s'ensuit que $A - \mu$ applique $M$ dans un chemin injectif sur $M$ et $(\mu - A\backslash M)^{-1} = S(\mu)\backslash M$. Donc $\mu \in \rho(A\backslash M)$, et nous pouvons conclurons que $\sigma(A\backslash M) \subset \sigma$. De la même manière on montrons que $\sigma(A\backslash L) \subset \tau$.

Finalement, soit $\lambda \notin \sigma(A\backslash M) \cup \sigma(A\backslash L)$. Alors $\lambda - A$ applique $M$ (resp. $L$) dans un chemin injectif sur $M$ (resp. $L$). Il en résulte que $\lambda \in \rho(A)$. si

$$\sigma(A) \subset \sigma(A\backslash M) \cup \sigma(A\backslash L) \subset \sigma \cup \tau = \sigma(A)$$

et alors (2.7) est prouvée. ■

**Remarque 2.2.1.** *Lorsqu'il est appliqué à $\sigma = \sigma(A)$ le théorème 2.2.1 donne*

$$P_{\sigma(A)} = I \tag{2.8}$$

*En effet, soit $\sigma = \sigma(A)$, et soit $M$ et $L$ être aussi dans le théorème 2.2.1 . Alors, $\sigma(A\backslash L) = \sigma(A\backslash\sigma) = \emptyset$. Cela peut se produire que lorsque $L = \{0\}$. Donc $M = X$ et (2.8) est prouvée.*

**Corollaire 2.2.1.** *Supposons que $\sigma(A)$ est une union disjointe de deux sous-ensembles fermé $\sigma$ et $\tau$. Alors*

$$P_\sigma + P_\tau = I, \qquad\qquad P_\sigma \cdot P_\tau = 0 \tag{2.9}$$

**Preuve :**
Choisissons un contour de Cauchy $\Gamma$, $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ comme l'indique par la figure ci-dessous :

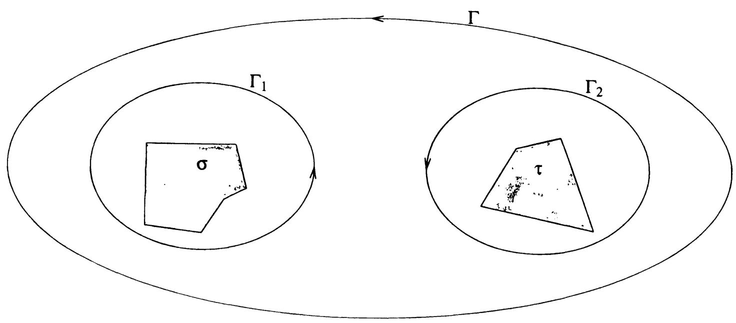


FIGURE 2.1 –

Un argument classique de la théorie des fonctions complexes montre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\lambda - A)^{-1}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\lambda - A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda - A)^{-1}d\lambda. \tag{2.10}$$

Le côté gauche de (2.10) est égale à $P_\sigma + P_\tau$ .Par la formule (2.8) du côté droit de (2.10) est $I$. Donc, la première identité de (2.9) est prouvée. Avec cela, nous avons $P_\sigma P_\tau = P_\sigma(I - P_\sigma) = 0$. ■
La proposition suivante montre que les identités de (2.7) déterminer les espaces $M$ et $L$ de façon unique.

**Proposition 2.2.1.** *Supposons que $X = M \oplus L$ où $M$ et $L$ les sous-espaces $A$-invariant . Alors $\sigma(A) = \sigma(A\backslash M) \cup \sigma(A\backslash L)$, et si $\sigma(A\backslash M) \cap \sigma(A\backslash L) = \emptyset$, Alors*

$$M = ImP_{\sigma(A\backslash M)}, \qquad\qquad L = \ker P_{\sigma(A\backslash M)}. \tag{2.11}$$

**Preuve :**
Puisque $M$ et $L$ sont $A-$invariants , l'opérateur $\lambda - A$ a la représentation d'opérateur matricielle de type $2 \times 2$ relative à la somme directe $X = M \oplus L$ :

$$\lambda - A = \begin{pmatrix} \lambda - A_1 & 0 \\ 0 & \lambda - A_2 \end{pmatrix},$$

où $A_1 = A \backslash M$ et $A_2 = A \backslash L$. Alors $\lambda \in \rho(A)$ si et seulement si $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$, et dans ce cas

$$(\lambda - A)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda - A_2)^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Donc $\rho(A) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$ et $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$

Ensuite, supposons que $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$. Soit $\Gamma$ un contour de Cauchy autour de $\sigma(A_1)$ qui sépare $\sigma(A_1)$ de $\sigma(A_2)$ et intégrant (2.12) sur $\Gamma$ parce que de (2.8) et (2.9),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A_1)^{-1} d\lambda = I_M, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A_2)^{-1} d\lambda = 0$$

donc

$$P_{\sigma(A_1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda = \begin{pmatrix} I_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve(2.11) ■

**Proposition 2.2.2.** *Soit* **H** *est un espace de Hilbert, et soit $\sigma$ une partie isolée de $\sigma(A)$. Alors $\{\overline{\sigma} = \overline{\lambda}/\lambda \in \sigma\}$ est une partie isolée de $\sigma(A^*)$ et*

$$(P_\sigma(A))^* = P_{\overline{\sigma}}(A^*) \tag{2.13}$$

**Preuve :**
La première déclaration à propos de $\sigma$ est trivial. Soit $\Gamma$ un contour de Cauchy autour $\sigma$ qui sépare $\sigma$ de $\sigma(A) \backslash \sigma$. Soit $\alpha : J \to \mathbb{C}$ est une paramétrisation de $\Gamma$. notons par $\overline{\Gamma}$ la courbe paramétrée par la fonction $\overline{\alpha(t)}, t \in J$ et soit $-\overline{\Gamma}$ la même courbe avec l'orientation opposée. Alors $-\overline{\Gamma}$ est un contour de Cauchy autour $\overline{\sigma}$ qui sépare $\overline{\sigma}$ de

$\sigma(A^*)\backslash\overline{\sigma}$. Maintenant

$$\begin{aligned}
(P_\sigma(A))^* &= (\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - A)^{-1}d\lambda)^* \\
&= \lim\{\frac{1}{2\pi i}\sum_j(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))(\alpha(s_j)-A)^{-1}\}^* \\
&= \lim\frac{-1}{2\pi i}\sum_j(\overline{\alpha(t_j)}-\overline{\alpha(t_{j-1})})(\overline{\alpha(s_j)}-A^*)^{-1} \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - A^*)^{-1}d\lambda = P_{\overline{\sigma}}(A^*).
\end{aligned}$$

■

## 2.3 Propriétés du calcul fonctionnel

En mathématiques, et plus précisément en analyse, le calcul fonctionnel holomorphe désigne l'application du calcul fonctionnel aux fonctions holomorphes, c'est-à-dire qu'étant donnés une fonction holomorphe $f$ de la variable complexe $z$ et un opérateur linéaire $A$, l'objectif est de construire un opérateur $f(A)$ étendant $f$ de manière " naturelle "

Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire borné agissant sur l'espace de Banach $X$.

Notons que

$$\begin{aligned}
A^n(\lambda - A)^{-1} &= A^{n-1}(A-\lambda+\lambda)(\lambda - A)^{-1} \\
&= \lambda A^{n-1}(\lambda - A)^{-1} - A^{n-1}.
\end{aligned}$$

En procédant de cette manière, on considère que

$$A^n(\lambda - A)^{-1} = \lambda^n(\lambda - A)^{-1} - \sum_{j=0}^{n-1}\lambda^{n-1-j}A^j \tag{2.14}$$

Maintenant, Soi $\Gamma$ un contour de Cauchy autoure du spectre $\sigma(A)$. Notons que l'intégrale sur $\Gamma$ du dernier terme dans (2.14) est l'opérateur nul. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
A^n &= A^n(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda - A)^{-1}d\lambda) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma A^n(\lambda - A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^n(\lambda - A)^{-1}d\lambda
\end{aligned}$$

Soit $P(\lambda) = \sum_{n=0}^{r} \alpha_n \lambda^n$ un polynôme complexe. Les calculs précédents impliquent

$$P(A) := \sum_{n=0}^{r} \alpha_n A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} P(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \tag{2.15}$$

Cette dernière expression de $P(A)$ est le point de départ d'une nouvelle définition.

**Définition 2.3.1.** *Un ensemble ouvert $\Omega$ dans $\mathbb{C}$ est appelé un voisinage ouvert d'un ensemble $\sigma$ si $\sigma \subset \Omega$.*
*Notons par $\mathcal{F}(A)$ la famille de toutes les fonctions à valeurs complexes $f$ qui sont analytique sur un voisinage ouvert (qui peut dépendre de $f$ ) de $\sigma(A)$. Tous les polynômes complexes appartiennent à $\mathcal{F}(A)$. Etant donné $f \in \mathcal{F}(A)$, nous définissons*

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

*où $\Delta$ un domaine de Cauchy borné dans le voisinage ouvert $\Omega$ de $\sigma(A)$ sur lequel $f$ est définie et $\sigma(A) \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset \Omega$..*

**Remarque 2.3.1.** *Notons que $f(A)$ est un opérateur linéaire borné sur $X$. Un argument classique de la théorie des fonctions complexes montre que cette définition ne dépend pas du choix particulier du domaine de Cauchy $\Delta$. En d'autres termes, si $f$ et $g$ appartiennent à $\mathcal{F}(A)$ et $f(\lambda) = g(\lambda)$ sur un voisinage ouvert de $\sigma(A)$, alors $f(A) = g(A)$.*

**Remarque 2.3.2.** *si $\sigma$ est une partie isolée de $\sigma(A)$, alors $P_\sigma$ la projection de Riesz correspondant est égal à $h(A)$, où $h$ est une fonction qui prend la valeur $1$ sur un voisinage ouvert de $\sigma$ et la valeur $0$ sur un voisinage ouvert du complément $\sigma(A)\backslash\sigma$. En particulier, $f(A) = I \quad (resp., f(A) = 0)$ lorsque $f$ est égal à $1 \quad (resp., 0)$ sur un voisinage ouvert de $\sigma(A)$.*

**Théorème 2.3.1.** *Soient $f$ et $g$ dans $\mathcal{F}(A)$ alors :*

**(i)** $\quad (f + g)(A) = f(A) + g(A),$

**(ii)** $\quad (\alpha f)(A) = \alpha f(A), \quad \alpha \in \mathbb{C},$

**(iii)** $\quad (fg)(A) = f(A)g(A).$

**Preuve :**

Soit $\Omega$ l'intersection des domaines de $f$ et $g$. Sur $\Omega$ les fonctions $f+g$, $\alpha f$ et $fg$ sont définies par

$$\begin{aligned} (f+g)(\lambda) &= f(\lambda)+g(\lambda), \qquad (\alpha f)(\lambda)=\alpha f(\lambda), \\ (fg)(\lambda) &= f(\lambda)g(\lambda), \qquad \lambda \in \Omega \end{aligned}$$

Evidement, $f+g$, $\alpha f$, et $fg$ sont dans $\mathcal{F}(A)$. Puisque $f(\lambda)$ apparaît de façon linéaire dans la définition de $f(A)$, les propriétés $(i)$ et $(ii)$ sont faciles à vérifier. Nous montrons $(iii)$.

Soit $\Delta_1$ et $\Delta_2$ deux domaines de Cauchy bornés tels que

$$\sigma(A) \subset \Delta_1 \subset \overline{\Delta_1} \subset \Delta_2 \subset \overline{\Delta_2} \subset \Omega$$

et pour $v=1,2$ soit $\Gamma_v$ est la frontière de $\Delta_v$. Donc

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= (\frac{1}{2\pi i})^2(\int_{\Gamma_1} f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda)(\int_{\Gamma_2} g(\mu)(\mu-A)^{-1}d\mu) \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\lambda-A)^{-1}(\mu-A)^{-1}d\mu d\lambda \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda-A)^{-1}-(\mu-A)^{-1}d\mu d\lambda \\ &= \gamma_1-\gamma_2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (\frac{1}{2\pi i})^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda-A)^{-1}d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\mu-\lambda)^{-1}g(\mu)d\mu)f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda-A)^{-1}d\lambda=(fg)(A), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= (\frac{1}{2\pi i})^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\mu-A)^{-1}d\mu d\lambda \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^2\int_{\Gamma_2}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(\lambda-A)^{-1}d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(\mu-\lambda)^{-1}f(\lambda)d\lambda)g(\mu)(\mu-A)^{-1}d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière égalité, nous utilisons le fait que tous les $\mu$ dans $\Gamma_2$ n'appartiennent pas à $\overline{\Delta_1}$. Alors, pour $\mu \in \Gamma_2$ la fonction $(\mu - \cdot)^{-1} f(\cdot)$ est analytique sur un voisinage ouvert de $\overline{\Delta_1}$, et donc, par le théorème de Cauchy, $\int_{\Gamma_1} (\mu - \lambda)^{-1} f(\lambda) d\lambda = 0$. Notons que dans les calculs ci-dessus la modification de l'ordre des intégrales est autorisé en raison de la continuité de la fonction

$$(\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda) g(\mu) (\mu - \lambda)^{-1} (\mu - A)^{-1}$$

dans $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. ■

**Théorème 2.3.2.** *Soit $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ pour $\lambda$ dans certains voisinage ouvert $\Omega$ de $\sigma(A)$. Alors $f \in \mathcal{F}(A)$ et*

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n, \tag{2.16}$$

*existe et converge .*

**Preuve :**

Soit $\Gamma$ la frontière d'un domaine borné de Cauchy $\Delta$ tels que $\sigma(A) \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset \Omega$. Soit $\rho$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ . Puisque la série converge pour $\lambda \in \Omega$, il s'ensuit que l'ouvert $\Omega$ est un sous-ensemble du disque ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \, |\lambda| < \rho\}$. Cela implique que $f$ est analytique sur $\Omega$ et par conséquent $f \in \mathcal{F}(A)$. De plus, nous voyons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ converge uniformément sur l'ensemble compact $\overline{\Delta}$ et donc aussi sur $\Gamma$. Pour $m \geq 0$ posons $s_m(\lambda) = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n \lambda^n$, et soit $l(\Gamma)$ la longueur du contour $\Gamma$. Donc

$$\begin{aligned}
\| f(A) - \sum_{n=0}^{m} \alpha_n A^n \| &= \| f(A) - s_m(A) \| \\
&= \| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (f(\lambda) - s_m(\lambda))(\lambda - A)^{-1} d\lambda \| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} l(\Gamma) (\max_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda) - s_m(\lambda)\, |) \max_{\lambda \in \Gamma} \| (\lambda - A)^{-1} \| \\
&\quad \longrightarrow 0 \ \ (m \longrightarrow \infty),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (2.16) ■

## 2.4 Considérations spectrales

On vient de voir que, dans le cas général, la définition d'un calcul fonctionnel holomorphe sur un opérateur $A \in \mathcal{L}(X)$ nécessite la connaissance de $\sigma(A)$. Sous des hypothèses plus restrictives, il est réciproquement possible d'énoncer le théorème spectral (pour des opérateurs bornés) à l'aide d'un calcul fonctionnel. Cette section esquisse certains résultats allant dans cette direction.

### 2.4.1 Théorème de l'application spectrale.

On sait que le théorème de l'application spectrale s'applique au calcul fonctionnel polynomial : pour tout polynôme $p$, on a $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$. Ce résultat s'étend au calcul fonctionnel holomorphe, c'est-à-dire que pour toute fonction $f$ holomorphe, on a

**Théorème 2.4.1.** *Si* $f \in \mathcal{F}(A)$, *alors*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda)/\lambda \in \sigma(A)\} = f[\sigma(A)]. \tag{2.17}$$

**Preuve :**
Soit $f$ une fonction analytique sur le voisinage ouvert $\Omega$ de $\sigma(A)$. Soit $\lambda_0 \in \sigma(A)$, et définssons la fonction $g$ sur $\Omega$ par

$$g(z) = (z - \lambda_0)^{-1}(f(z) - f(\lambda_0)), \qquad \lambda_0 \neq z \in \Omega,$$

et $g(\lambda_0) = f'(\lambda_0)$. Evidement, $g \in \mathcal{F}(A)$ et

$$f(z) - f(\lambda_0) = (z - \lambda_0)g(z) = g(z)(z - \lambda_0), \qquad z \in \Omega \tag{2.18}$$

Maintenant appliquons le théorème 3.4.1 Il résulte de (2.18) que

$$f(A) - f(\lambda_0)I = (A - \lambda_0 I)g(A) = g(A)(A - \lambda_0 I)$$

Puisque $\lambda_0 \in \sigma(A)$, l'opérateur $A - \lambda_0 I$ n'est pas inversible. Mais alors, la même conclusion vaut pour $f(A) - f(\lambda_0)I$, ce qui implique que $f(\lambda_0) \in \sigma(f(A))$. Nous avons prouvé que $f[\sigma(A)] \subset \sigma(f(A))$.

Inversement, soit $\beta \in \mathbb{C}\backslash f[\sigma(A)]$. Alors il existe un voisinage ouvert $\Omega_0$ de $\sigma(A)$ telle que $\Omega_0 \subset \Omega$ et $f(z) - \beta \neq 0$ pour $z \in \Omega_0$ .
Posons $h(z) = (f(z) - \beta)^{-1}$ pour $z \in \Omega_0$ alors $h \in \mathcal{F}(A)$ et

$$h(z)(f(z) - \beta) = 1 = (f(z) - \beta)h(z), \qquad z \in \Omega_0,$$

et nous pouvons appliquons le théorème pour montrons que

$$h(A)(f(A) - \beta I) = I = (f(A) - \beta I)h(A).$$

Donc $f(A) - \beta I$ est inversible, et donc $\beta \in \mathbb{C}\backslash\sigma(f(A))$. On voit que $f[\sigma(A)] \supset \sigma(f(A))$ ; et le théorème est démontré. ■

## 2.5 Applcations [2]

### 2.5.1 Equation d'opérateur de type $AZ - ZB = C$

Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, et soit $A : Y \to Y,\ B : X \to X$ et $C : X \to Y$ des opérateurs. Considérons l'équation d'opérateur

$$AZ - ZB = C \tag{2.19}$$

Remarquons que l'équation (2.19) est résoluble si et seulement si il existe un opérateur $Z : X \to Y$ de telle sorte que l'identité de la matrice d'opérateur qui suit est vrai :

$$\begin{pmatrix} I_Y & Z \\ 0 & I_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_Y & -Z \\ 0 & I_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Les différents facteurs dans (2.20) agissent comme opérateurs linéaires bornés sur $X \oplus Y$

**Théorème 2.5.1.** *Supposons que le spectre des opérateurs $A : Y \to Y$ et $B : X \to X$ sont disjoints. Alors l'équation d'opérateur (2.19) a une unique solution $Z : X \to Y$ donnée par*

$$\begin{aligned} Z &= \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1} C (\lambda - B)^{-1} d\lambda \\ &= \tfrac{-1}{2\pi i} \textstyle\int_{\Gamma_B} (\lambda - A)^{-1} C (\lambda - B)^{-1} d\lambda \end{aligned} \tag{2.21}$$

*où $\Gamma_A$ et $\Gamma_B$ sont les contours de Cauchy autour de $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$, respectivement, qui sépare $\sigma(A)$ de $\sigma(B)$.*

**Preuve :**
Le fait que $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont des ensembles disjoints compacts nous permet de choisir les contours de Cauchy $\Gamma_A$ et $\Gamma_B$ comme indiqué. Tout d'abord, nous supposons que $Z : X \to Y$ est une solution de (2.19). Donc

$$Z(\lambda - B) - (\lambda - B)Z = C, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

et donc

$$(\lambda - A)^{-1}Z - Z(\lambda - B)^{-1} = (\lambda - A)^{-1}C(\lambda - B)^{-1} \tag{2.22}$$

pour chaque $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. En particulier, l'identité (2.22) est vrai pour $\lambda \in \Gamma_A$. ensuite, utilisons le fait que $\sigma(A)$ est à l'intérieur de $\Gamma_A$ et $\sigma(B)$ est à l'extérieur $\Gamma_A$, et intégrons (2.22) sur $\Gamma_A$. nous voyons que $Z$ est donné par la première identité dans (2.21) . Si nous remplaçons dans l'integrale ci-dessus $\Gamma_A$ par $\Gamma_B$, on obtient la deuxième identité dans (2.21).

Il reste à montrer que (2.19) est résoluble, donc soit $Z$ l'opérateur linéaire borné de $X$ dans $Y$ défini par la première identité dans (2.21). Alors

$$\begin{aligned} AZ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} A(\lambda - A)^{-1}C(\lambda - B)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} (A - \lambda + \lambda)(\lambda - A)^{-1}C(\lambda - B)^{-1}d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} \lambda(\lambda - A)^{-1}C(\lambda - B)^{-1}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} C(\lambda - B)^{-1}d\lambda \end{aligned}$$

Notons que le deuxième intégrale dans la dernière identité est égal à l'opérateur nul . Donc

$$\begin{aligned} AZ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1}C(\lambda - B)^{-1}(\lambda - B + B)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1}Cd\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} (\lambda - A)^{-1}C(\lambda - B)^{-1}Bd\lambda \\ &= C + ZB \end{aligned}$$

Il en résulte que $Z$ est une solution de (2.19). ■

**Corollaire 2.5.1.** *Soit $J : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(X,Y)$ un opérateur linéaire borné défini par $J(Z) = AZ - ZB$. Alors $J$ est inversible si $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$.*

**Preuve :**
Notons que

$$(J - \lambda I)(Z) = (A - \lambda)Z - ZB, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

Il en résulte que $J - \lambda I$ est inversible, lorsque $\sigma(A - \lambda) \cap \sigma(B) = \emptyset$, et donc

$$\sigma(J) \subset \{\alpha - \beta \backslash \alpha \in \sigma(A),\ \beta \in \sigma(B)\} \tag{2.23}$$

alors le spectre de $J$ est égale à la partie droite de (2.23)(voir [1]). ■

**Théorème 2.5.2.** *Soit $A : Y \to Y$, $B : X \to X$ et $C : X \to Y$ des opérateurs agissant entre espaces de Banach, et supposons que le spectre de $A$ et $B$ sont dans le demi-plan ouvert $\mathfrak{Re}\lambda < 0$. Alors l'équation d'opérateur*

$$AZ + ZB = C \tag{2.24}$$

*a une solution unique $Z$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$, noté par*

$$Z = -\int_0^\infty e^{tA} C e^{tB} dt \tag{2.25}$$

**Preuve :**
De la condition sur $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$, il en résulte que $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$. Selon le théorème 3.5.1 implique que l'équation

$$AZ + ZB = AZ - Z(-B) = C$$

a une unique solution $Z$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$. Nous devons montrer que $Z$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$ est donnée par (2.25).

L'intégrale dans (2.25) est considéré comme un intégrale impropre de Riemann-Stieltjes. Notons que l'intégrale est continue, le fait que $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont dans le demi-plan ouvert $\mathfrak{Re}\lambda < 0$ implique (voir la première partie de la démonstration du théorème (1.1.7)) qu'il existe des constantes positives $\epsilon$ et $M$ tels que

$$\| e^{tA} \| \leq M e^{-\epsilon t}, \qquad \| e^{tB} \| \leq M e^{-\epsilon t} \qquad (t \geq 0)$$

Il en résulte que l'intégrale dans (2.25) est bien défini. Ensuite, observons que

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}Ce^{tB}) = Ae^{tA}Ce^{tB} + e^{tA}Ce^{tB}B$$

d'où

$$\begin{aligned} -C &= \lim_{\tau\to\infty}(e^{\tau A}Ce^{\tau B} - C) \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\{A(\int_0^\tau e^{tA}Ce^{tB}dt) + (\int_0^\tau e^{tA}Ce^{tB}dt)B\} \\ &= -(AZ+ZB), \end{aligned}$$

où $Z$ est la partie droite de (2.25). ■

### 2.5.2 Equations différentielles de type $y' = Ay$

Soit $A$ un opérateur linéaire borné sur l'espace de Banach $X$. Considérons l'équation

$$y'(t) = Ay(t), \qquad 0 \leq t < \infty \tag{2.26}$$

**Définition 2.5.1.** *Une fonction $y : [0,\infty) \to X$ est dit une solution de (2.26) si $y$ est continue sur $[0,\infty)$ et*

$$\lim_{h\to 0} \| Ay(t) - \frac{1}{h}(y(t+h) - y(t)) \| = 0$$

*pour chaque $t > 0$.*

**Remarque 2.5.1.** *Bien sûr, les solutions de (2.26) sont de la forme $y(t) = e^{Ax}x$ où $x$ est un vecteur de $X$ et d'aprés le th( 2.3.2) on obtient*

$$f(A) = e^{tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda \tag{2.27}$$

*où $\Gamma$ est un contour de Cauchy $\sigma(A)$. Et donc, d'après le théorème (1.1.3), l'opérateur $e^{tA}$ est aussi donné par*

$$e^{tA} = \sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v!}t^vA^v \tag{2.28}$$

**Lemme 2.5.1.** *La fonction $t \mapsto e^{tA}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(X)$ est dérivable et*

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA} \tag{2.29}$$

**Preuve :**

fixant $t$ dans $\mathbb{R}$, et choisissons $h \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\mid h \mid \parallel A \parallel \leq \frac{1}{2}$. Du calcul fonctionnel il en résulte que $e^{(t+h)A} = e^{hA}e^{tA}$. Donc

$$\begin{aligned} \parallel \frac{1}{h}\{e^{(t+h)A} - e^{tA}\} - Ae^{tA} \parallel &\leq \parallel \frac{1}{h}\{e^{hA} - I\} - A \parallel \cdot \parallel e^{tA} \parallel \\ &= \parallel \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} h^v A^v \parallel \cdot \parallel e^{tA} \parallel \\ &\leq \mid h \mid \cdot \parallel e^{tA} \parallel (\sum_{v=2}^{\infty} \mid h \mid^{v-2} \parallel A \parallel^v) \\ &\leq 2 \mid h \mid \cdot \parallel e^{tA} \parallel \cdot \parallel A \parallel^2 \longrightarrow 0 \qquad (h \to 0) \end{aligned}$$

d'où (2.29)est prouvée. ■

**Théorème 2.5.3.** *Soit le problème*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & 0 \leq t < \infty, \\ y(0) = x, \end{cases} \tag{2.30}$$

*a exactement une solution, $y(t) = e^{tA}x$.*

**Preuve :**

Posons $y(t) = e^{tA}x$ avec $e^{0A} = I$, et donc $y(0) = x$. Appliquons le lemme 2.5.1 pour montrer que $y$ est une solution de (2.30).

Supposons $w : [0, \infty) \to X$ est une deuxième solution de (2.30) et considérons $g(t) = e^{-tA}w(t)$ pour $t \geq 0$, alors

$$\frac{d}{dt}g(t) = e^{-tA}(-A)w(t) + e^{-tA}Aw(t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2.31}$$

Soit $F$ un fonctionnelle linéaire quelconque continue sur $X$, alors $h = F \circ g$ est une fonction scalaire continue sur $[0, \infty)$ et selon (2.31) la dérivée $h'(t) = 0$ pour $t > 0$. Il en résulte que $h$ est constante sur $[0, \infty)$, et donc

$$F(e^{-tA}w(t)) = F(x), \qquad t \geq 0$$

Une application de théorème de Hahn-Banach donne $e^{-tA}w(t) = x$ pour $t > 0$ et comme $(e^{hA})^{-1} = e^{-hA}$ pour chaque $h \in \mathbb{R}$ donc $w(t) = e^{tA}x, t \geq 0$. ■

**Lemme 2.5.2.** *Si $\sigma(A)$ est dans le demi-plan ouvert $\mathfrak{Re}\lambda < \gamma$, alors il existe une constante $C$ (en fonction de $A$ et $\gamma$) de telle sorte que*

$$\| e^{tA} \| \leq Ce^{\gamma A}, \qquad t \geq 0 \tag{2.32}$$

*Inversement, de (2.32), il en résulte que $\sigma(A)$ est dans le demi-plan fermé $\mathfrak{Re}\lambda \leq \gamma$ .*

# Chapitre 3

# Valeurs propres de type fini [10], [13]

## 3.1 Introduction

Les résultats de la section précédente sont développés pour le cas où l'opérateur a valeurs propres isolé avec les propriétés du même type que les valeurs propres d'une matrices finies. Le problème de l'intégralité des vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés apparaît de manière naturelle. Les résultats sont appliqués aux opérateurs compacts. Ce chapitre contient également des théorèmes limites pour les spectres et la version de dimension infinie du lemme de Schur sur les formes triangulaires.

## 3.2 Définitions et propriétés principales

Dans cette section, $A$ est un opérateur linéaire borné agissant sur un espace de Banach $X$. Soit $\sigma$ une partie isolée de $\sigma(A)$. Nous sommes intéressons aux conditions qui garantissent que la projection de Riesz $P_\sigma$ correspondant est de rang fini. Pour cet effet, nous avons besoin de la définition suivante.

**Définition 3.2.1.** *Un point $\lambda_0$ est appelé une valeur propre de type fini si l'espace $X$ admet une décomposition en somme directe, $X = M \oplus L$, avec les propriétés suivantes :*
$(E_1)$ *$M$ et $L$ sont des sous-espaces invariants $A$,*
$(E_2)$ $\dim M < \infty$,

$(E_3)$ $\sigma(A\backslash M) = \{\lambda_0\}, \ \lambda_0 \notin \sigma(A\backslash L)$

**Remarque 3.2.1.** *1- Comme le spectre d'un opérateur agissant sur un espace de dimension finie est constitué uniquement de valeurs propres, les conditions $(E2)$ et $(E3)$ impliquent que $\lambda_0$ est une valeur propre de $A\backslash M$ et donc aussi de $A$.*
*2- Un opérateur peut avoir des valeurs propres qui ne sont pas de type fini. Par exemple, soit $S : l_2 \to l_2$ le shift a gauche de $l_2$, i.e., $S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...) = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ...)$. Alors, chaque $\lambda$ dans le disque unité ouvert est une valeur propre de $S$. En effet,*

$$S(1, \lambda, \lambda^2, ...) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, ...), \qquad |\lambda| < 1.$$

*Mais aucune de ces valeurs propres sont de type fini, parce que (comme il ressort le théorème suivant) valeurs propres de type fini sont des points isolés dans le spectre.*

**Théorème 3.2.1.** *Un point $\lambda_0$ de $\sigma(A)$ est une valeur propre de type fini si et seulement si $\lambda_0$ est un point isolé dans $\sigma(A)$ et la projection de Riesz $P_{\{\lambda_0\}}$ correspondante est de rang fini,*

**Preuve :**
Notons que $\lambda_0$ est un point isolé de $\sigma(A)$ signifie que l'ensemble $\{\lambda_0\}$ est une partie isolée de $\sigma(A)$. Maintenant, soit $\lambda_0$ un tel point, et supposons que la projection de Riesz $P_{\{\lambda_0\}}$ correspondante est de rang fini. Posons $M = ImP_{\{\lambda_0\}}$ et $L = \ker P_{\{\lambda_0\}}$. Alors le théorème 2.2.1 on dit que $X = M \oplus L$ et les propriétés $(E_1), (E_2)$ et $(E_3)$ détiennent. Donc $\lambda_0$ est une valeur propre de type fini. ■

Inversement, supposons que $\lambda_0$ est une valeur propre de $A$ de type fini. Alors $X$ admet une décomposition en somme directe, $X = M \oplus L$, avec les propriétés $(E_1), (E_2)$ et $(E_3)$ . Appliquons la proposition 2.2.1. Il en résulte que $\sigma(A) = \{\lambda_0\} \cup \sigma(A\backslash L)$. Puisque $\lambda_0 \notin \sigma(A\backslash L)$, nous concluons que $\lambda_0$ est un point isolé de $\sigma(A)$ et $M = ImP_{\{\lambda_0\}}$. Mais $\dim M < \infty$. Donc $P_{\lambda_0}$ a rang fini.■ ■
Soit $\lambda_0$ une valeur propre de $A$ de type fini, et soit $X = M \oplus L$ la décomposition de somme directe avec les propriétés $(E_1), (E_2)$ et $(E_3)$. De la proposition 2.2.1 il s'ensuit que $M$ et $L$ sont déterminés de façon unique. En effet, $M = ImP_{\{\lambda_0\}}$. et $L = \ker P_{\{\lambda_0\}}$.

**Définition 3.2.2.** *Le dimension de l'espace $M$ est appelé la multiplicité algébrique de la valeur propre $\lambda_0$ et est notée $m(\lambda_0; A)$. Autrement dit,*

$$m(\lambda_0; A) = rangP_{\{\lambda_0\}} \tag{3.1}$$

*La multiplicité géométrique de $\lambda_0$, comme valeur propre de $A$ est, par définition, égale à* $\dim \ \ker(\lambda_0 - A)$.

**Corollaire 3.2.1.** *Soit $\sigma$ une partie isolée de $\sigma(A)$. Alors la projection de Riesz $P_\sigma$ correspondante est de rang fini si et seulement si $\sigma$ constitué d'un nombre fini de valeurs propres de $A$ de type fini. En outre, dans ce cas,*

$$rangP_\sigma = \sum_{\lambda\in\sigma} m(\lambda; A) \tag{3.2}$$

**Preuve :**
L'espace $M := ImP_\sigma$ est un sous-espace invariant de $A$ dans $X$ et $\sigma(A\ M) = \sigma$. Supposons que $P_\sigma$ est de rang fini. Ensuite, nous savons à partir de l'algèbre linéaire que $\sigma(A\backslash M)$ se compose d'un nombre fini de valeurs propres, par exemple $\lambda_1, ...., \lambda_r$, et $M$ admet une décomposition en somme directe $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_r$. telle que $AM_j \subset M_j$ et $\sigma(A\backslash M_j) = \{\lambda_j\}$ pour $j = 1, ..., r$. Maintenant, posons $L_j = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_{j-1} \oplus ... \oplus M_{j+1} \oplus M_r \oplus \ker P_\sigma$. Alors, $X = M_j \oplus L_j$ et les conditions $(E_1), (E_2)$ et $(E_3)$ sont remplies. Il s'ensuit que $\sigma$ se compose d'un nombre fini de valeurs propres de type fini.

Pour prouver la réciproque, supposons que $\sigma = \{\lambda_1, ...., \lambda_r\}$, où $\lambda_1, ...., \lambda_r$ sont (diffirent) valeurs propres de $A$ de type fini. Alors (cf corollaire 2.2.1)

$$ImP_\sigma = ImP_{\{\lambda_0\}} \oplus \cdots \oplus ImP_{\{\lambda_r\}}$$

Donc $rangP_\sigma = \sum_{j=1}^{r} rangP_{\{\lambda_j\}} = \sum_{j=1}^{r} m(\lambda_j; A) < \infty$ ■

Le théorème suivant décrit le comportement de la résolvante dans un domaine d'une valeur propre de type fini. ■

**Théorème 3.2.2.** *Soit $\lambda_0$ une valeur propre de $A$ de type fini. Alors, la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$ admet à $\lambda_0$ une extension du type suivant :*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{v=-q}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^v B_v \tag{3.3}$$

*où $B_{-1}, ..., B_{-q}$ sont des opérateurs de rang fini . Ici $q \leq m(\lambda_0; A)$ et la série d'opérateur dans (3.3) converge en norme pour tout $\lambda$ dans certains disque pointé $0 <\mid \lambda - \lambda_0 \mid< \epsilon$.*

**Preuve :**

Posons $M = ImP_{\{\lambda_0\}}$ et $L = \ker P_{\{\lambda_0\}}$. Alors $X = M \oplus L$ et relativement à cette décomposition en somme directe $\lambda - A$ admet la représentation matricielle d'opérateur de type $2 \times 2$ suivante :

$$\lambda - A = \begin{pmatrix} \lambda - A_1 & 0 \\ 0 & \lambda - A_2 \end{pmatrix},$$

où $A_1 = A \backslash M$ et $A_2 = A \backslash L$. Puisque $\lambda_0$ est un point isolé de $\sigma(A)$, il résulte que pour $\delta > 0$

$$(\lambda - A)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\lambda - A_2)^{-1} \end{pmatrix}, \qquad 0 <\mid \lambda - \lambda_0 \mid< \delta \tag{3.4}$$

Notons que $A_1$ agit sur un espace de dimension finie et $A_1$ a précisément un point dans son spectre, notamment $\lambda_0$. Si $M$ a une base telle que la matrice de $A_1$ par rapport à cette base a une forme normale de Jordan avec $\lambda_0$ dans le diagonale principale. Considérons ce qui suit le bloc Jordan de type $m \times m$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 & \end{pmatrix}$$

Comme il est bien connu

$$(\lambda - A)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_0)^{-1} & (\lambda - \lambda_0)^{-2} & \cdots & (\lambda - \lambda_0)^{-m} \\ & (\lambda - \lambda_0)^{-1} & \cdots & (\lambda - \lambda_0)^{-m+1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\lambda - \lambda_0)^{-1} \end{pmatrix}$$

Mais alors on peut conclure que

$$(\lambda - A_1)^{-1} = \sum_{j=1}^{q} (\lambda - \lambda_0)^{-j} (A_1 - \lambda_0)^{j-1}, \qquad \lambda \neq \lambda_0 \tag{3.5}$$

où $q \leq \dim M = m(\lambda_0; A)$. Ensuite, rappelons que $\lambda_0 \notin \sigma(A \backslash L)$. Donc $\lambda_0 - A_2$ est inversible, et donc

$$(\lambda - A_2)^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} -(\lambda - \lambda_0)^v (A_2 - \lambda_0)^{-v-1} \tag{3.6}$$

pour $\mid \lambda - \lambda_0 \mid < \| (\lambda_0 - A_2)^{-1} \|^{-1}$ . De (3.4), (3.5) et (3.6), il est maintenant clair que (3.3) détient à condition que nous définissons

$$B_v = \begin{pmatrix} (A_1 - \lambda_0)^{-v-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v = -1, ..., -q$$

et

$$B_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(A_2 - \lambda_0)^{-v-1} \end{pmatrix}, \qquad v = 0.1, 2, ....$$

Notons que les opérateurs $B_{-1}, ..., B_{-q}$ sont de rang fini. ■

Soit $\lambda_0$ un point isolé dans $\sigma(A)$. Alors (avec des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.2.2 on peut montrer que la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$ admet le développement suivant :

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^v B_v \tag{3.7}$$

dans certains disque pointé $0 <\mid \lambda - \lambda_0 \mid < \epsilon$. Notons que dans cette extension du coefficient $B_{-1}$ est précisément la projection de Riesz $P_{\{\lambda_0\}}$. Donc si (3.7) détient et le rang $B_{-1} < \infty$, alors $\lambda_0$ est une valeur propre de type fini. En outre, dans ce cas $B_v = 0$ pour $v < -m(\lambda_0; A)$. ■

## 3.3 Chaines de Jordant

**Définition 3.3.1.** *Soit $A : X \to X$ un opérateur agissant sur l'espace de Banach $X$, et soit $\lambda_0$ une valeur propre de $A$. Un ensemble ordonné $\{x_0, x_1, ...x_{r-1}\}$ dans $X$ est appelée une chaîne de Jordan de $A$ à $\lambda_0$ si $x_0 \neq 0$ et*

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0, \quad Ax_j = \lambda_0 x_j + x_{j-1} \quad (j = 1, 2, ..., r-1) \tag{3.8}$$

**Remarque 3.3.1.** *1- Notons que le premier vecteur de la chaîne de Jordan est un vecteur propre de A. Les éléments* $x_1, ...x_{r-1}$ *dans (3.8) sont appelés vecteurs propres généralisés de A*

*2- Chaînes de Jordan peut être caractérisé de la manière suivante. Soit* $\{x_0, x_1, ...x_{r-1}\}$ *des vecteurs de* $X$*. Alors* $\{x_0, x_1, ...x_{r-1}\}$ *est une chaîne de Jordan de* $A$ *à* $\lambda_0$ *si et seulement si les vecteurs* $x_0, x_1, ...x_{r-1}$ *sont linéairement indépendants, l'espace* $M_0 = span\{x_0, x_1, ...x_{r-1}\}$ *et* $A-$*invariant, et la matrice* $A\backslash M_0$ *relativement à la base* $x_0, x_1, ...x_{r-1}$ *est d'un seul bloc de Jordan avec* $\lambda_0$ *sur la diagonale principale, c-à-d, par rapport à* $x_0, x_1, ...x_{r-1}$

$$matrice(A\backslash M_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 3.3.1.** *Si* $\lambda_0$ *est une valeur propre de type fini, alors* $ImP_{\{\lambda_0\}}$ *a une base de vecteurs propres et des vecteurs propres généralisés.*

**Preuve :** L'espace $M = ImP_{\{\lambda_0\}}$ est de dimension finie et $A$-invariant donc $M$ a une base telle que, par rapport à cette base, la matrice de Jordan de $A\backslash M$ a une forme normale. Il en résulte que les éléments de base sont des vecteurs propres ou vecteurs propres généralisés de $A$.■

**Proposition 3.3.2.** *Les vecteurs* $x_0, x_1, ..., x_{r-1}$ *forment une chaîne de Jordan de* $A$ *à* $\lambda_0$ *si et seulement si* $x_0 \neq 0$ *et*

$$y(t) = e^{\lambda_0 t}(\sum_{v=0}^{r-1} \frac{1}{v!} t^v x_{r-1-v}) \tag{3.9}$$

*satisfait à l'équation différentielle* $y'(t) = Ay(t), -\infty < t < \infty$

**Preuve :**

Supposons $x_0, ..., x_{r-1}$ forment une chaîne de Jordan pour $A$ à $\lambda_0$. Alors, pour $\lambda$ dans l'ensemble résolvant de $A$

$$(\lambda - A)^{-1} x_j = \sum_{v=0}^{j} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{v+1}} x_{j-v}, \quad j = 0, ..., r-1 \tag{3.10}$$

Prenons un contour de Cauchy $\Gamma$ autour du spectre de $A$. Alors

$$\begin{aligned}
e^{tA}x_{r-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1}x_{r-1}d\lambda \\
&= e^{t\lambda_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda-\lambda_0)^n(\lambda - A)^{-1}x_{r-1}d\lambda\right) \\
&= e^{t\lambda_0}\sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{n!}t^n x_{r-1-n} = y(t).
\end{aligned}$$

Selon le lemme 2.5.1, cela implique que $y(\cdot)$ est une solution de $y'(t) = Ay(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Ensuite, supposons que la fonction $y(\cdot)$ donnée par (3.9) satisfait à l'équation différencielles $y'(t) = Ay(t)$, $-\infty < t < \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_0)y(t) &= y'(t) - \lambda_0 y(t) \\
&= e^{\lambda_0 t}\sum_{j=0}^{r-2}\frac{1}{j!}t^j x_{r-2-j}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $(A-\lambda_0)x_0 = 0$ et $(A-\lambda_0)x_j = x_{j-1}$ pour $j = 1, ..., r-1$. Donc $x_0, x_1, ..., x_{r-1}$ est une chaîne de Jordan. ■

La solutions de

$$y'(t) = Ay(t), -\infty < t < +\infty$$

de la formule (3.9) sont appelés solutions élémentaires.

**Remarque 3.3.2.** *Notons que les solutions élémentaires sont précisément les solutions dont la valeur initiale à 0 est un vecteur propre ou vecteur propre généralisé. Si la valeur initiale est une combinaison linéaire des vecteurs propres et des vecteurs propres généralisés (éventuellement correspondant à différentes valeurs propres ), il est évident que la solution est une combinaison linéaire des solutions élémentaires. Ainsi, si la base linéaire de tous les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés de $A$ est dense dans l'espace $X$, alors toute solution de $y'(t) = Ay(t)$, $-\infty < t < \infty$, peut être approchée uniformément sur un intervalles finie par des combinaisons linéaires des solutions élémentaires.*

**Remarque 3.3.3.** *De ces observations sur l'importance de la complétude des vecteurs propres et des valeurs propres généralisées est apparent. La complétude est également important si l'on veut calculer $f(A)$ pour les fonctions $f$ différents de $e^t$. Pour les opérateurs compacts le problème de la complétude (i.e., dans quelles conditions est la base linéaire de vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés denses)*

**Corollaire 3.3.1.** *Soit $\lambda_0$ une valeur propre de $A$ de type fini, et soit $\{x_0, x_1, ..., x_{r-1}\}$ une chaîne de Jordan de $A$ à $\lambda_0$. Alors,(3.10) est vérifiée.*

**Preuve :**
Soit $\Gamma$ un contour de Cauchy entournons $\lambda_0$ qui sépare $\lambda_0$ de $\sigma(A)\backslash\{\lambda_0\}$. En intégrant (3.10) sur $\Gamma$ on voit que $P_{\{\lambda_0\}}x_j = x_j$ pour $j = 0, ..., r-1$. Il en résulte (cf proposition 3.3.1) que $ImP_{\{\lambda_0\}}$ est précisément l'espace engendré par tous les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés de $A$ correspondant à $\lambda_0$. Pour cette raison $ImP_{\lambda_0}$ est souvent appelé le sous-espace propre généralisé de $A$ correspondant à la valeur propre $\lambda_0$. Notons que l'espace propre généralisé de $A$ correspondant à $\lambda_0$ est égal à $\ker(\lambda_0 - A)^r$ pour tout $r \geq m(\lambda_0, A)$. ■

## 3.4 Valeurs propres des opérateurs compacts

**Théorème 3.4.1.** *Soit $A$ un opérateur compact sur un espace de Banach, et soit $\sigma$ une partie isolée de $\sigma(A)$. Si $0$ n'appartient pas à $\sigma$, alors la projection de Riesz correspondant $P_\sigma$ est de rang fini*

**Preuve :**
Soit $\Gamma$ un contour de Cauchy autour $\sigma$ qui sépare $\sigma$ dans $\sigma(A)\backslash\sigma$. Puisque $0 \notin \sigma$ on peut supposons sans perte de généralité que $0$ appartient au domaine externe de $\Gamma$.

Il en résulte que

$$\begin{aligned} P_\sigma &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda}(\lambda - A + A)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda} I d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= A(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda) \end{aligned}$$

Donc $P_\sigma$ est compact. Puisque $P_\sigma$ est une projection, celà implique que $rangP_\sigma$ est fini. ■

**Corollaire 3.4.1.** *Tout point non nulle dans le spectre d'un opérateur compact est une valeur propre de type fini*

**Preuve :**

Soit $\lambda_0$ un point différent de zéro dans le spectre de l'opérateur compact $A$, alors $\lambda_0$ est un point isolé dans $\sigma(A)$. D'après le théorème 3.4.1, l'opérateur $P_{\{\lambda_0\}}$ est de rang fini. Ainsi, d'après le théorème 1.1, le point $\lambda_0$ est une valeur propre de type fini. ■ Dans le reste de cette partie $A$ est un opérateur compact agissant sur un espace de Hilbert séparable **H**. Nous savons maintenant que la partie non nulle du spectre de $A$ est un ensemble fini ou dénombrable de valeurs propres de type fini. Cet ensemble ne peut s'accumuler à 0. Dans ce qui suit

$$\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), ... \tag{3.11}$$

désigne la suite (finie ou infinie) de valeurs propres non nulles de $A$ avec les conditions suivante :

$(i)$ chaque valeur propre non nulle de $A$ apparaît dans la suite (3.11) autant de fois que la valeur de sa multiplicité algébrique,

$(ii)$ les valeurs propres sont classés selon l'ordre décroissant de valeur absolue, i.,e., $\mid \lambda_1(A) \mid \geq \mid \lambda_2(A) \mid \geq \mid \lambda_3(A) \mid \geq \cdots$.

Le lemme suivant est appelé le lemme de Schur.

**Lemme 3.4.1.** *Soit $A$ un opérateur compact sur un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, et soit $E_A$ désigne la plus petite variété linéaire fermé de $\mathbf{H}$ contenant tous les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés de $A$ correspondant à des valeurs propres non nulles. En $E_A$ il existe une base orthonormée $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ tel que pour $j = 1, 2, \cdots$*

$$A\varphi_j = a_{1j}\varphi_1 + \cdots + a_{jj}\varphi_j, \quad a_{jj} = \lambda_j(A). \tag{3.12}$$

**Preuve :**
Soit $\mu_1, \mu_2, \cdots$ sont les différentes valeurs propres non nulles de $A$. Supposons $\mid \mu_1 \mid \geq \mid \mu_2 \mid \geq \cdots$, et soit $m_j$ la multiplicité algébrique de $\mu_j$. Evedement,

$$E_A = \overline{span\{ImP_{\{\mu_j\}} \backslash j = 1, 2, \cdots\}}.$$

Dans $ImP_{\{\mu_j\}}$. et on choisit une base $w_{j1}, \cdots, w_{jm_j}$; telle que la matrice de $A \backslash ImP_{\{\mu_j\}}$. relative à cette base a une forme normale de Jordan . Ceci est fait pour chaque $j$. Considérons l'ensemble

$$V = \{w_{11}, \cdots, w_{1m_1}, w_{21}, \cdots, w_{2m_2}, w_{31} \cdots\}$$

Alors $V$ est ensemble linéairement indépendant des vecteurs et $E_A = \overline{spanV}$. Maintenant, appliquons le procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à $V$. Le système orthonormée résultant $\varphi_1, \varphi_1, \cdots$ a des propriétés souhaitées. ■

**Remarque 3.4.1.** *Dans le cas particulier où $E_A = \mathbf{H}$ le lemme de Schur montre que $\mathbf{H}$ a une base orthonormée $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ de sorte que la matrice de $A$ par rapport à cette base est une matrice triangulaire supérieure avec des éléments diagonales non nuls .*

*En général, on peut écrire $\mathbf{H} = E_A \oplus E_A^{\perp}$. Posons la matrice d'opérateur de $A$ de type $2 \times 2$ par rapport à la décomposition $\mathbf{H} = E_A \oplus E_A^{\perp}$. Car $E_A$ est invariante par $A$. Donc*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} : E_A \oplus E_A^{\perp} \to E_A \oplus E_A^{\perp}. \tag{3.13}$$

**Lemme 3.4.2.** *L'opérateur $A_{22}$ dans (3.13) est un opérateur compact et $\sigma(A_{22})$ n'a pas d'éléments non nuls.*

**Remarque 3.4.2.** *Opérateur compact $A$ dont le spectre se compose uniquement de l'élément zéro est appelé un opérateur de Volterra. Notons que le système de vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés de $A$ est complet si, par exemple, $dimE_A^{\perp} < \infty$ ou l'opérateur $A_{22}$ opérateur de Volterra dans* (3.13) *est l'opérateur nule.*

## 3.5 Valeurs propres et continuité des spectres

Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire borné agissant sur l'espace de Banach $X$. Dans cette section, nous décrivons ce qui se passe au spectre ou des parties du spectre de $A$ si l'opérateur $A$ est soumis à une petite perturbation.

**Théorème 3.5.1.** *Soit $\Omega$ un voisinage ouvert de $\sigma(A)$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sigma(B) \subset \Omega$ pour tout opérateur $B$ sur $X$ avec $\| A - B \| < \epsilon$.*

**Preuve :**
Choisissons un contour de Cauchy $\Gamma$ dans $\Omega$ autour de $\sigma(A)$. on pose

$$\gamma = min\{\| (\lambda - A)^{-1} \|^{-1} \quad \backslash \lambda \in \Gamma\}. \tag{3.14}$$

Supposons que $\| A - B \| \leq \frac{1}{2}\gamma$. Alors

$$\| (\lambda - A) - (\lambda - B) \| \leq \frac{1}{2}(\lambda - A)^{-1} \|^{-1}, \qquad \lambda \in \Gamma. \tag{3.15}$$

Puisque $\lambda - A$ est inversible pour $\lambda \in \Gamma$, on peut appliquer le corollaire II.8.2 dans [GG] pour montrer que $\sigma(B) \cap \Gamma = \emptyset$ et

$$\begin{aligned} \| (\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1} \| &\leq \frac{\| (\lambda - A)^{-1} \|^2 \| A - B \|}{1 - \| (\lambda - A)^{-1} \| \| A - B \|} \\ &\leq 2 \| (\lambda - A)^{-1} \|^2 \| A - B \|, \qquad \lambda \in \Gamma \end{aligned}$$

Soit $P$ la projection de Riesz correspondant à la partie de $\sigma(B)$ à l'intérieur de $\Gamma$. Alors

$$\begin{aligned} \| I - P \| &= \| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1}] d\lambda \| \\ &\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \| (\lambda - A)^{-1} - (\lambda - B)^{-1} \| d\lambda \\ &\leq C \| A - B \|, \end{aligned}$$

où

$$C = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \| (\lambda - A)^{-1} \|^2 \, d\lambda < \infty. \tag{3.16}$$

Maintenant, posons $\epsilon = min\{\frac{1}{2}\gamma, (C+1)^{-1}\}$ et soit $\| A - B \| < \epsilon$. Alors $\| I - P \| < 1$. Mais $I - P$ est une projection, et donc $I - P = 0$. Notons que $I - P$ est la projection de Riesz correspondant à la partie de $\sigma(B)$ à l'extérieur $\Gamma$. Puisque $I - P = 0$, il en résulte que $\sigma(B)$ est à l'intérieur $\Gamma$, et donc $\sigma(B) \subset \Omega$. ∎

Le théorème suivant concerne le comportement des valeurs propres de type fini sous de petites perturbations.

**Théorème 3.5.2.** *Soit $\sigma$ un ensemble fini de valeurs propres de $A$ de type fini, et Soit $\Gamma$ un contour autour $\sigma$ qui sépare $\sigma$ de $\sigma(A) \backslash \sigma$. Alors il existe $\epsilon > 0$ telque pour tout opérateur $B$ sur $X$ avec $\| A - B \| < \epsilon$ ce qui suit est vrai : : $\sigma(B) \cap \Gamma = \emptyset$, la partie de $\sigma(B)$ à l'intérieur $\Gamma$ est un ensemble fini de valeurs propres de type fini et*

$$\sum_{\lambda \text{ à } l'intérieur \ \Gamma} m(\lambda; B) = \sum_{\lambda \text{ à } l'intérieur \ \Gamma} m(\lambda; A) \tag{3.17}$$

Pour prouver le théorème 3.5.2, nous utilisons le lemme suivant (dû à B. Sz.-Nagy [1,2]).

**Lemme 3.5.1.** *Soient $P$ et $Q$ deux projections sur l'espace de Banach $X$. Si $\| P - Q \| < 1$, alors*

$$X = \ker P \oplus ImQ, \qquad X = ImP \oplus \ker Q \tag{3.18}$$

*En outre, $P$ et $Q$ ont le même rang.*

**Preuve :**

Notre hypothèse implique que les opérateurs $S := I - P + Q$ et $T := I - Q + P$ sont inversibles. Soit $x \in X$, posons $y = S^{-1}x$. Alors $x = Sy = (I - P)y + Qy \in \ker P + ImQ$. En outre, si $z \in \ker P \cap ImQ$, alors $Tz = z - Qz + Pz = 0$, et donc $z = 0$. Cela prouve la première identité dans (3.18). En inversant les rôles de $P$ et $Q$, on obtient la deuxième identité dans (3.18).

∎

**Preuve du théorème 3.5.2** :

Posons $\epsilon = min\{\frac{1}{2}\gamma, (C + 1)^{-1}\}$, où les constantes $\gamma$ et $C$ sont définis dans (3.14) et

(3.16), respectivement. Puisque $\epsilon \leq \frac{1}{2}\gamma$, on peut utiliser les mêmes arguments dans la preuve du théorème 3.5.1 pour montrer que $\sigma(B) \cap \Gamma = \emptyset$. Soit $P$ (resp. $Q$) est la projection de Riesz correspondant à la partie de $\sigma(A)$ (resp. $\sigma(B)$) à l'intérieur de $\Gamma$. Alors $P = P_\sigma$ est de rang fini (corrolaire 3.2.1) et (voir la preuve du théorème 3.5.1)

$$\| P - Q \| \leq C \| A - B \| < 1$$

Maintenant appliquant le lemme 3.5.1. Nous obtenons $rangQ = rangP < \infty$. Mais alors nous pouvons utiliser le corrolaire 3.2.1 pour terminer la preuve. ■

# Chapitre 4

# Classe des opérateurs différentielles ordinaires sur un demi-plan

## 4.1 Introduction

Les opérateurs différentiels ordinaires sur un demi-plan diffèrent complètement de leurs contrepartie sur un intervalle fini. Dans ce chapitre ces différences sont représenté pour une classe spécifique des opérateurs différentiels sur $[0, \infty)$. Les opérateurs concernés n'ont pas de résolvante compacte. Leurs spectres et des spectres essentiel sont décrits. En outre, La fonction de Green et les caractéristiques Fredholm sont calculés explicitement.

## 4.2 Inversibilité et la fonction de Green [4]

Soit $T$ l'opérateur différentiel dans $L_2^n([0, \infty))$ associé à

$$\begin{cases} f'(t) = -Af(t), & t \geq 0, \\ f(0) \in L. \end{cases} \tag{4.1}$$

où $A$ est la matrice de type $n \times n$ et $L$ est un sous-espace de $C^n$. Dans cette section, nous étudions l'inversibilité de $T$ et le calcule de son noyau résolvant (La fonction de Green).

**Théorème 4.2.1.** *Soit $T$ l'opérateur différentiel de $L_2^n([0,\infty))$ associé à (4.1). Alors $T$ est inversible si et seulement si $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et*

$$C^n = L \oplus \ker P. \tag{4.2}$$

*où $P$ est la projection de Riesz de $A$ correspondant à des valeurs propres de $A$ dans demi-plan ouvert à gauche. En outre, dans ce cas, l'inverse de $T$ est l'opérateur intégral sur $L_2^n([0,\infty))$ donné par*

$$(T^{-1}g)(t) = \int_0^\infty \gamma(t,s)g(s)ds, \qquad 0 \le t < \infty,$$

*avec*

$$\gamma(t,s) = \begin{cases} e^{-tA}(I-\Pi)e^{sA}, & 0 \le s \le t < \infty, \\ -e^{-tA}\Pi e^{sA}, & 0 \le t < s < \infty, \end{cases} \tag{4.3}$$

*où $\Pi$ est la projection de $C^n$ sur $L$ le long de $\ker Q$.*

**Preuve :**

(i). Montrons d'abord que pour $f \in D(T)$ et $Tf = g$ l'égalité suivante est vrai :

$$Pf(0) = -\int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds. \tag{4.4}$$

Puisque $Tf = g$, nous avons $f'(t) = -Af(t) + g(t)$ a.e. sur $[0,\infty)$, et par conséquent

$$f(t) = e^{-tA}f(0) + e^{-tA}\int_0^t e^{sA}g(s)ds, \qquad t \ge 0. \tag{4.5}$$

Multipliant (4.5) à gauche par $Qe^{tA}$ on obtiens

$$Pe^{tA}f(t) = Pf(0) + \int_0^t Pe^{sA}g(s)ds, \qquad t \ge 0. \tag{4.6}$$

Rappelons que $Q$ est la projection de Riesz de $A$ correspondant aux valeurs propres de la demi-plan ouverte à gauche . Cela implique (cf. Lemme 2.5.2) que $\left\|Pe^{tA}\right\| \le \gamma e^{-\delta t}$ pour certaines constantes $\gamma \ge 0$ et $\delta > 0$. Il s'ensuit que $Pe^{tA}h(t)$ est intégrable sur $0 \le t \le \infty$ pour toute $h \in L_2^n([0,\infty))$, en particulier, pour $h = f$ et $h = g$. Celui-ci implique que le côté droit de (4.6) a une limite pour $t \to \infty$. Puisque le côté gauche de (4.6) est intégrable sur $[0,\infty)$, cette limite doit être nulle, ce qui prouve (4.4).

(ii) Supposons que $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et que $T$ est inversible. Nous allons montrer que (4.2) détient. Soit $x \in L \cap \ker P$, et considérons la fonction $f(t) = e^{-tA}x$. Puisque $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, $x \in \ker P$ implique que $f \in L_2^n([0,\infty))$. Mais alors $f \in D(T)$ et $Tf = 0$. Par conséquent, par l'injectivité de $T$, on a $f = 0$. Il s'ensuit que $x = f(0) = 0$, et donc $L \cap \ker P = \{0\}$.

Ensuite, soit $y \in C^n$, et considérons la fonction

$$g_k(t) = \begin{cases} Ay, & 0 \leq t \leq k, \\ 0, & t > k, \end{cases} \tag{4.7}$$

où $k$ est un entier arbitraire positif . Comme $T$ est surjective, il existe $f_k \in D(T)$ de telle sorte que $Tf_k = g_k$ Il en résulte (de (4.4)) que

$$Pf_k(0) = -\int_0^\infty Pe^{sA} g_k(s)ds = Py - Pe^{kA}y.$$

Nous savons que $f_k(0) \in L$. par conséquent,

$$Py - Pe^{kA}y = f_k(0) - (I-P)f_k(0) \in L + \ker P.$$

La fonction $Pe^{tA}$ est exponentiellement décroissance sur $0 \leq t < \infty$. Donc $Pe^{kA}y \to 0$ si $k \to \infty$. Maintenant utilisant que $L + \ker P$ est fermé (en raison de dimension finie), et il s'ensuit que $P_y \in L + \ker P$. Mais alors $y = P_y + (I-P)y \in L + \ker P$. Rappelons que $y$ est un vecteur arbitraire de $\mathbb{C}^n$. Nous pouvons donc conclure que $L + \ker P = \mathbb{C}^n$.

(iii). Supposons que $T$ est inversible. Nous allons montrer que $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ suffisamment petit l'opérateur $T - \alpha I$ est de nouveau inversible. Notons que $D(T-\alpha I) = D(T)$ et pour $f \in D(T-\alpha I)$

$$([T-\alpha I]f)(t) = f'(t) + (A - \alpha I_n)f(t), \qquad t \geq 0, a.e..$$

où $I_n$ est la matrice identité $n \times n$. Il s'ensuit que $T - \alpha I$ est l'opérateur différentiel sur $L_2^n([0,\infty))$ associé au problème (4.1) avec $A - \alpha I_n$ au lieu de $A$. Maintenant soit $\alpha \neq 0$ suffisamment petit. Alors $A - \alpha I_n$ n'a pas valeurs propres sur l'axe imaginaire. Ainsi, par le résultat de la preuve de la partie (ii),

$$\mathbb{C}^n = L \oplus \ker P_\alpha, \tag{4.8}$$

où $P_\alpha$ est la projection de Riesz de $A$ correspondant aux valeurs propres dans le demi-plan ouvert $\Re\lambda < \alpha$. Nous concluons que pour $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ suffisamment petit, $\ker P_\alpha = \ker P_{-\alpha}$. Mais pour $\alpha > 0$ l'espace $\ker P_{-\alpha}$ contient les vecteurs propres de $A$ correspondant à des valeurs propres sur l'axe imaginaire, tandis que ces vecteurs sont pas dans $\ker P_\alpha$. donc $A$ a aucun valeurs propres sur l'axe imaginaire.

Les résultats prouvent dans les parties (ii) et (iii) montrent que pour l'inversibilité de $T$ il est nécessaire que $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et la décomposition (4.2) détient. La dernière partie de la preuve concerne la suffisance de ces conditions et de la formule de l'inverse.

(iv). Supposons que $A$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire et que (4.2) détient. Tout d'abord, nous montrons que $T$ est injective. Supposons $Tf = 0$. Par (4.4) et (4.5), on obtient $f(t) = e^{-tA}f(0)$ avec $f(0) \in \ker P$. Puisque $f \in D(A)$, et $f(0) \in L$, et par conséquent $f(0) = 0$ par (4.2). Nous concluons que $f = 0$, ce qui montre que $T$ est injective. Ensuite, soit $g \in L_2^n([0,\infty))$, et supposons

$$x = -\Pi \int_0^\infty P e^{sA} g(s) ds,$$

où $\Pi$ est la projection de $\mathbb{C}^n$ sur $L$ au long de $\ker P$. Notons que $Pe^{sA}g(s)$ est intégrable sur $[0,\infty)$, et donc $x$ est un vecteur bien défini de $L$. Définissons

$$f(t) = e^{-tA}x + e^{-tA}\int_0^t e^{sA}g(s)ds, \qquad 0 \le t < \infty. \tag{4.9}$$

Alors $f$ est absolument continue sur les sous-intervalles compacts de $[0,\infty)$, le vecteur initial $f(0) = x \in L$ et

$$f'(t) = -Af(t) + g(t), \qquad 0 \le t < \infty. \tag{4.10}$$

Pour montrer que $f \in D(T)$, nous devons montrer que $f \in L_2^n([0,\infty))$. Pour ce faire, notons que $P\Pi = Q$. Cela nous a permet de réécrire $f$ sous la forme

$$f(t) = -e^{-tA}(I-P)\Pi\int_0^\infty Pe^{sA}g(s)ds + \int_0^\infty h(t-s)g(s)ds, \qquad 0 \le t < \infty \tag{4.11}$$

où

$$h(t) = \begin{cases} e^{-tA}(I-P), & t \ge 0 \\ -e^{-tA}P, & t < 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

où, nous avons utilisé que $A$ commute avec $P$. Notons que $h$ est une fonction noyau à valeurs matricielles, qui est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, a un saut de discontinuité à 0 et

$$\| h(t) \| \leq ce^{-d|t|}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

pour certaines constantes $c \geq 0$ et $d > 0$. Il en résulte que l'intégrale dans le côté droit de (4.11) définit un opérateur linéaire borné sur $L_2^n([0,\infty))$. La même chose est vraie pour le premier terme de la partie droite de (4.11), parce que $e^{-tA}(I-P)$ et $Pe^{tA}$ sont des matrices à coefficients de carré intégrable. En particulier, $f \in D(T)$.

Nous avons maintenant montrer que $T$ est bijective et $T^{-1}g$ est la fonction définie par le côté droit de (4.11). Donc $T^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur $L_2^n([0,\infty))$, et si $T$ est inversible. Il reste à établir la formule (4.3) pour le noyau résolvant. Pour obtenir (4.3), on utilise le fait que $\Pi(I-P) = 0$ et $P(I-\Pi) = 0$. Ces deux égalités implique que $(I-P)\Pi P + P = \Pi$. Puisque $T^{-1}$ est donné par la droite de (4.11), le dernier identité, $Pe^{tA} = e^{tA}P$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et les formules (4.11) et (4.12) donner la représentation désirée (4.3) ■

## 4.3 Le spectre [11]

Soit $T$ l'opérateur différentiel à associé à $L_2^n([0,\infty))$

$$\begin{cases} f'(t) = -Af(t), & t \geq 0 \\ f(0) \in L. \end{cases} \tag{4.13}$$

avec $A$ est une matrice de type $n \times n$ et $L$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$. Le théorème suivant décrit le spectre de $T$.

**Théorème 4.3.1.** *Soit $T$ l'opérateur différentiel dans $L_2^n([0,\infty))$ associé avec (4.13), et soit $a_1, ..., a_s$ sont les parties réelles des valeurs propres de $A$ rangé sous forme une suite croissante. Supposons $a_0 = -\infty$ et $a_{s+1} = \infty$. Alors le spectre $\sigma(T)$ est l'ensemble du plan complexe ou se compose des demi-plans fermés $\Re\lambda \leq a_{j-1}$ et $\Re\lambda \geq a_j$ pour certains $1 \leq j \leq s+1$.*

**Preuve :**
Supposons $\sigma(T) \neq \mathbb{C}$. Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$, et $\lambda_0 = a + ib$ avec $a$ et $b$ réel. L'opérateur

$T-\lambda_0 I$ est l'opérateur différentiel associé au problème (4.13) avec $A-\lambda_0 I$ au lieu de $A$ (cf. partie (iii) de la preuve du théorème 4.2.1). Puisque $T-\lambda_0 I$ est inversible, nous pouvons appliquer le théorème 4.2.1 pour montrer que $A$ n'a pas de valeurs propres sur la ligne $\Re\lambda = a$ et

$$\mathbb{C}^n = L \oplus \ker Q_a, \tag{4.14}$$

où $Q_a$ est la projection de Riesz correspondant à les valeurs propres $A$ dans le demi-plan $\Re\lambda < a$. En particulier, $a_{j-1} < a < a_j$ pour certains $j \in \{1, 2, ..., s+1\}$.

Dans ce qui suit, $Q_a$ représente la projection de Riesz de correspondant les valeurs propres $A$ dans $\Re\lambda < a$. Nous avons

$$\ker Q_\alpha \subset \ker Q_a, \qquad \ker Q_\alpha \neq \ker Q_a, \qquad \alpha > a_j, \tag{4.15}$$

$$\ker Q_\alpha = \ker Q_a, \qquad a_{j-1} < \alpha \leq a_j, \qquad (b)$$

$$\ker Q_\alpha \supset \ker Q_a, \qquad \ker Q_\alpha \neq \ker Q_a \qquad \alpha \leq a_{j-1}, \qquad (c)$$

Mais alors nous voyons de (4.14) que

$$L + \ker Q_\alpha \neq \mathbb{C}^n (\alpha > a_j), \qquad L \cap \ker Q_\alpha \neq \{0\} (\alpha \leq a_{j-1}). \tag{4.16}$$

Maintenant, soit $\lambda \in \mathbb{C}$, et posons $\alpha = \Re\lambda$. Alors $Q_\alpha$ est la projection de Riesz de $A-\lambda$ correspondant aux valeurs propres dans le demi-plan ouvert à gauche . Donc, d'après le théorème 4.2.1 et (4.16), l'opérateur $T-\lambda I$ n'est pas inversible si $\Re\lambda > a_j$ ou $\Re\lambda \leq a_{j-1}$. Puisque $\sigma(T)$ est fermé, nous concluons que les demi-plans fermés $\Re\lambda \geq a_{j-1}$ et $\Re\lambda \geq a_{j-1}$ sont dans $\sigma(T)$.

Enfin, soit $a_{j-1} < \Re\lambda < a_j$, et soit $\alpha = \Re\lambda$. Alors $A - \lambda I_n$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et (4.14) détient avec $\alpha$ o la place de $a$. Il résulte de Théorème 4.2.1 que $T-\lambda I$ est inversible, et donc $\lambda \notin \sigma(T)$.■

■

Les résultats de cette section et la précédente sont d'un intérêt particulier pour un certain nombre de différents choix de $L$. Ici, nous Illustrons ceci par deux corollaires ; le premier concerne le cas $L = \{0\}$ et dans le second, nous prenons $L = \mathbb{C}^n$.

**Corollaire 4.3.1.** *Soit $T$ l'opérateur différentiel dans $L_2^n([0,\infty))$ associé à (4.13). Supposons que $L = \{0\}$. Alors, le spectre de $T$ se compose de demi-plan fermé $\Re\lambda \geq a$,* *où* $a = \min\{\Re\lambda \backslash \lambda \in \sigma(A)\}$*. En outre, pour* $\Re\lambda < a$

$$([\lambda - T]^{-1}f)(t) = -\int_0^t e^{(t-s)(\lambda-A)}f(s)ds, \qquad ,0 \leq t < \infty.$$

**Preuve :**

Par le théorème 4.2.1, l'opérateur $T$ est inversible si et seulement si tous les valeurs propres de $A$ se trouvent dans le demi-plan de droite ouverte et, dans ce cas

$$(T^{-1}f)(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \qquad ,0 \leq t < \infty.$$

Maintenant, appliquons ce résultat à $T$ et $A$ remplacé par $T - \lambda I$ et $A - \lambda I_n$, respectivement, d'où le corollaire. ■

**Corollaire 4.3.2.** *Soit* $T$ *l'opérateur différentiel dans* $L_2^n([0,\infty))$ *associé à (4.13). Supposons que* $L = \mathbb{C}^n$*. Alors, le spectre de* $T$ *se compose de demi-plane fermé* $\Re\lambda \leq b$*, où* $b = \max\{\Re\lambda \backslash \lambda \in \sigma(A)\}$*. En outre, pour* $\Re\lambda > b$

$$([\lambda - T]^{-1}f)(t) = \int_t^\infty e^{(t-s)(\lambda-A)}g(s)ds, \qquad ,0 \leq t < \infty.$$

## 4.4 Caractéristique de Fredholm [7], [12] et [5]

Cette section concerne les propriétés de Fredholm de l'opérateur différentiel associé à

$$\begin{cases} f'(t) = -Af(t), & t \geq 0 \\ f(0) \in L. \end{cases} \tag{4.17}$$

où $A$ est une matrice de type $n \times n$ et $L$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^n$. nous allons montrer les deux théorèmes suivants.

**Théorème 4.4.1.** *Soit* $T$ *l'opérateur différentiel dans* $L_2^n([0,\infty))$ *associé à (4.17). Alors* $T$ *est un opérateur de Fredholm si et seulement si* $A$ *n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, et dans ce cas*

$$indT = dimL - dimM, \tag{4.18}$$

*où* $M$ *est l'espace engendré par les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisée de* $A$ *correspondant aux valeurs propres de* $A$ *dans le demi-plan ouvert gauche. En* *outre, le spectre essentiel de $T$ est constitué de l'union des lignes parallèles à l'axe imaginaire à travers les valeurs propres de $A$.*

**Théorème 4.4.2.** *Soit $T$ l'opérateur différentiel dans $L_2^n([0,\infty))$ associé à (4.17), et supposons que $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Soit $Q$ le Projection de Riesz correspondant aux valeurs propres de $A$ dans le demi-plan ouvert gauche , et posons $M = ImQ,\ N = \ker Q$. Alors $T$ est un opérateur de Fredholm et*

$$\ker T = \{f \backslash\ f(t) = e^{-tA}x,\ x \in L \cap N\}, \tag{4.19}$$

$$ImT = \{g \in L_2^n([0,\infty)) \backslash \int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds \in L + N\}, \tag{4.20}$$

$$n(T) = \dim(L \cap N), \qquad d(T) = \dim \mathbb{C}^n \backslash (L + N), \tag{4.21}$$

$$indT = \dim L - \dim M. \tag{4.22}$$

*En outre, soit $\Gamma$ l'opérateur linéaire borné sur $L_2^n([0,\infty))$ définie par*

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty \gamma(t,s)f(s)ds, \qquad t \geq 0,$$

*avec*

$$\gamma(t,s) = \begin{cases} e^{-tA}[I - Q - (I-Q)S^+Q]e^{sA}, & 0 \leq s < t < \infty, \\ -e^{-tA}[Q + (I-Q)S^+Q]e^{sA}, & 0 \leq t < s < \infty,, \end{cases}$$

*où $S^+ : M \to L$ est un inverse généralisé de l'opérateur $S = Q\backslash L : L \to M$ dans le sens faible (c'est à dire, $SS^+S = S$). alors*

$$T = T\Gamma T, \qquad \Gamma f = \Gamma T \Gamma f \qquad ((\Gamma f)(0) \in L) \tag{4.23}$$

*Il est commode de montrer le second théorème d'abord.*

**Preuve du théorème 4.4.2** :
(i). Pour $f \in D(T)$ et $Tf = g$ les identités suivantes sont remplies :

$$Qf(0) = -\int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds, \tag{4.24}$$

$$f(t) = e^{-tA}(I-Q)f(0) \tag{4.25}$$

où $h$ est la matrice de fonction de type $n \times n$ définie par la formule (4.12) dans la section de inversibilité et la fonction de Green. Puisque $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, nous savons que

$$\| h(t) \| \leq ce^{-d|t|}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

pour certaines constantes positives $c$ et $d$. D'où l'intégrale (4.25) est bien défini. Notons que la formule (4.24) est prouvé dans la partie (i) de la preuve du théorème 4.2.1. La formule (4.25) résulte de (4.24) et l'identité (4.5) dans la section de inversibilité et la fonction de Green.

(ii). Montrons (4.19) et (4.20). Supposons que $f \in \ker T$. Alors $g = Tf = 0$, et (**??**) implique que $f(t) = e^{-tA}z$ pour certains $z \in \ker Q = N$. De plus, $z = f(0) \in L$. Donc $z \in L \cap N$. Réciproquement, si $f(t) = e^{-tA}z$ avec $z \in L \cap N$, alors $f \in D(T)$ et $Tf = 0$. Donc $f \in \ker T$ et (4.19) est prouvée.

Supposons $g \in ImT$. Donc $g = Tf$ pour certains $f \in D(T)$. La formule (4.24) nous dit que

$$\int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds \in L + N. \tag{4.26}$$

Inversement, si $g \in L_2^m([0,\infty))$ et (4.26) est vérifiée, alors il existe $x \in L$ tels que $Qx$ est égal à la partie gauche de (4.26). Alors,

$$f(t) = e^{-tA}(I - Q)x + \int_0^\infty h(t-s)g(s)ds, \qquad 0 \leq t < \infty. \tag{4.27}$$

Alors $L_2^m([0,\infty))$

$$\begin{aligned} f(t) &= -e^{-tA}x + e^{-tA}\int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds + \int_0^\infty h(t-s)g(s)ds \\ &= -e^{-tA}x + e^{-tA}\int_0^t e^{sA}g(s)ds \qquad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé que $Q$ commute avec $A$. Du calcul ci-dessus, il est clair que $f$ est absolument continue sur chaque sous-intervalle compact de $[0,\infty)$, le vecteur $f(0) = -x \in L$ et $f' = -Af + g$. Donc $f \in D(T)$ et $Tf = g$. Donc $g \in ImT$, et nous avons montré (4.20).

(III). Ensuite, nous prouvons (4.21) et (4.22). Notons que l'application

$x \to e^{-tA}x$ est un isomorphisme de $L \cap N$ sur $\ker T$, car de (4.19). Il s'ensuit que la première identité dans (4.21) est satisfaite. Pour montrer la seconde, définir

$$J : L_2^m([0,\infty)) \to \frac{\mathbb{C}^n}{L+N}, \qquad Jg = [\int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds],$$

où $[y]$ désigne le coset $y + (L+N)$ pour tout $y \in \mathbb{C}^n$. Selon (4.20), nous avons $\ker J = ImT$. Donc, pour prouver la seconde identité dans (4.21), il suffit de montrer que $J$ est surjective. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Alors $(I-Q)x \in N$, et si $[x] = [Qx]$. Posons

$$g_k(t) = \begin{cases} -Ax & pour \quad 0 \le t \le k, \\ 0 & pour \quad t > k. \end{cases}$$

Alors $g_k \in L_2^n([0,\infty))$ pour $k := 1, 2, ...$ et

$$Jg_k = -[\int_0^k Qe^{sA}Axds] \tag{4.28}$$

$$= [Qx - Qe^{kA}x] \to [Qx], \qquad k \to \infty.$$

Ici, nous avons utilisé que $Qe^{tA}x$ est de façon progressive. Puisque $\mathbb{C}^n/(L+N)$ est de dimension fini, l'image de $J$ est fermé, et donc (4.28)) implique que $[x] = [Qx] \in ImJ$ . Donc $J$ est surjective, ce qui terminé la démonstration de (4.21)).

D'après le théorème **??**, nous savons que $T$ est fermé. donc, les identités dans (4.21)) impliquent que $T$ est de Fredholm et

$$\begin{aligned} indT &= \dim(L \cap N) - \{n - \dim(L+N)\} \\ &= \dim L + \dim N - n \\ &= \dim L - \dim M, \end{aligned}$$

parce que $M$ et $N$ sont des sous-espaces complémentaires de $\mathbb{C}^n$.

(iv). Il reste à établir (4.23)). Soit $g \in Im\ T$. Nous savons (voir (4.20))) que

$$x := \int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds \in L + N. \tag{4.29}$$

Donc $z = Qz \in QL = ImS$. Pur $x = S^+z$. Alors $x \in L$ et

$$Qx = QS^+z = SS^+z = z,$$

parceque $SS^+S = S$. Donc $x \in L$ et $Qx$ est égale à l'intégrale dans (4.29)). Maintenant définissent $f$ par le côté droit de (4.27)). Alors (comme nous l'avons vu précédemment), la fonction $f \in D(T)$ et $Tf = g$. En raison de la forme particulière de $x$, la fonction $f$ peut être réécrite comme

$$f(t) = -e^{-tA}(I-Q)S^+ \int_0^\infty Qe^{sA}g(s)ds + \int_0^\infty h(t-s)g(s)ds \tag{4.30}$$

$$= \int_0^\infty \gamma(t,s)g(s)ds = (\Gamma g)(t), \qquad 0 \leq t < \infty$$

Nous concluons que $T\Gamma g = g$ pour chaque $g \in ImT$, et donc la première identité dans (4.23)) détient.

Pour tout $f \in L_2^n([0,\infty))$ la fonction $\Gamma f$ est absolument continue sur chaque sous-intervalle compact de $[0,\infty)$ et $(\Gamma f)' = -A(\Gamma f) + f$. Alors, si, de plus, $(\Gamma f)(0) \in L$, alors $\Gamma f = D(T)$ et $T\Gamma f = f$, ce qui prouve la seconde identité dans (4.23)). Notons que la première partie de (4.30)) implique que $\Gamma$ est un opérateur linéaire borné sur $L_2^n([0,\infty))$■

**Preuve du théorème 4.4.1** Supposons que $A$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imagenaire. Notons que l'espace $M$ est précisément l'image de la projection $Q$ apparaissant dans le théorème 4.4.2. Donc, nous savons d'après le théorème 4.4.2 que $T$ est un opérateur de Fredholm d'indice donnée par (4.18)).

Pour prouver la réciproque, supposons que $A$ a des valeurs propres sur l'axe imaginaire. Nous devons montrer que $T$ n'est pas un opérateur de Fredholm. Par contradiction, supposons que $T$ est un opérateur de Fredholm. Alors, pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha$ suffisamment petit, l'opérateur $T + \alpha I$ est encore un opérateur de Fredholm et

$$ind(T + \alpha I) = indT. \tag{4.31}$$

Notons que $D(T + \alpha I) = D(T)$ et pour $f \in D(T + \alpha I)$

$$((T + \alpha I)f)(t) = f'(t) + (A + \alpha I_n)f(t), \qquad t \geq 0, a.e..$$

où $I_n$ est la matrice d'identité de type $n \times n$ . Il s'ensuit que $T + \alpha I$ est l'opérateur différentiel sur $L_2^n([0,\infty))$ associé au problème (4.17)) avec $A + \alpha I_n$ à la place de $A$.

Maintenant soit $\alpha \neq 0$ suffisamment petit. Alors $A + \alpha I_n$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Ainsi, par ce que nous avons démontré jusqu'à présent,

$$ind(T + \alpha I) = \dim L - \dim M_\alpha, \tag{4.32}$$

où $M_\alpha$ est le sous-espace spectral engendré par les vecteurs propres et les vecteures propres généralisée de $A$ correspondant à des valeurs propres dans le demi-plan $\Re\lambda < \alpha$. En comparant (4.31)) et (2.5)), nous voyons que $\dim M_\alpha = \dim M_{-\alpha}$. Mais cela contredit le fait que $A$ a valeurs propres sur l'axe imaginaire. Donc $T$ n'est pas un opérateur de Fredholm.

Il reste à montrer la déclaration sur le spectre essentiel de $T$. Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Nous avons déjà vu que $T - \mu I$ est l'opérateur différentiel associé au problème (4.17)) avec $A - \mu I_n$ en place de $A$. Alors, selon la première partie du théorème, l'opérateur $T - \mu I$ est Fredholm si et seulement si $A - \mu I_n$ n'a aucune valeur propre sur l'axe imaginaire. Donc, $\mu \in \sigma_{ess}(T)$ si et seulement si il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $ia$ est une valeur propre de $A - \mu I_n$,ou, dune façon équivalente, $ia + \mu$ est une valeur propre de $A$. Il s'ensuit que $\mu \in \sigma_{ess}(T)$ si et seulement si la ligne par $\mu$ parallèle à l'axe imaginaire contient une valeur propre de $A$. En d'autres termes, $\sigma_{ess}(T)$ est précisément l'union des lignes parallèles à l'axe imaginaire à travers les valeurs propres de $A$

# Bibliographie


[1] Birkhauser Verlag, Basel, On a spectral equivalence of operators, in : Topics in Operator

[2] Birkhauser Verlag, Basel, On a spectral equivalence of operators, in : Topics in Operator Theory (Constantin Apostol Memorial Issue), Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 32, 1988, pp. 15-35.

[3] Birkhauser Verlag, Basel, Explicit Wiener-Hopf factorization and realization, in : Constructive Methods for Wiener-Hopf Factorization, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 21, 1986, pp. 235-316.

[4] Beauzamy, B. Un operateur sans sous-espace invariant : simplification de l'exemple de P. Enflo, Integral Equations and Operator Theory 8 (1985), 314-384.

[5] Calderon, A.P. The analytic calculation of the index of elliptic equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 57 ((1967), 1193-1194.

[6] Dunford, N., Schwartz, J.T. Linear Operators, Part II : Spectral Theory (Self Adjoint Operators in Hilbert Space), Wiley-Inter science, New York, 1963.

[7] Fredholm theory of Wiener-Hopf equations in terms of realization of their symbols, Integral Equations and Operator Theory 8 (1985), 590-613.

[8] Fedosov, B.V. Direct proof for the formula for the index of an elliptic system in Euclidean space, funct. Anal. Appl 4 (1970), 339-341.

[9] Fund. J. Anal. Equivalence, linearization and decompositions of holomorphic operator functions, 28 (1978), 102-144

[10] Gel'fand, I.M. Lectures on Linear Algebra, Interscience Publ., New York, 1961.

[11] Gohberg, I., Kaashoek, M.A., Lay, D.C. Spectral classification of operators and operator functions, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 587-589.

[12] Gohberg, I.C., Krem, M.G. The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear op- erators, Uspekhi Math. Nauk 12, 2(74) (1957), 43-118 (Russian) ; English Transl., Amer. Math. Soc. Transl. (Series 2) 13 (1960), 185-265..

[13] Lidskii, V.B. Theorems on the completeness of the system of eigenelements and adjoined elements of operators having a discrete spectrum, Dokl. Akad. Nauk SSSR 119 (1958), 1088-1091 (Russian) ; English Transl., Amer. Math. Soc. Transl. (Series 2) 47 (1965), 37-41.

[14] Nelson Dunford et Jacob T. Schwartz (en), Linear Operators, Part I : General Theory, Interscience, 1958

[15] Riesz, F., Sz. -Nagy, B. Legons d'Analyse Fonctionnelle, Academie des Sciences de Hongrie, 1955.

[16] Steven G Krantz (en), Dictionary of Algebra, Arithmetic, and Trigonometry. CRC Press, 2000. ISBN 1-58488-052-X.