République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr Moulay Tahar de Saida

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

Quelques Aspects sur les Fonctions Harmoniques

Présenté par : ABDELLI Asmaa

Soutenu le : 02 / 07 / 2013

Devant le jury composé de :

A. KANDOUCI : Maître de conférences	**Président**
F. Z. MOSTFAI : Maître de conférences	**Examinatrice**
D. DJEBBOURI : Maître Assistant	**Examinateur**
S. OUAKKAS : Maître de conférences	**Rapporteur**

Dédicace

Il m'est agréable de dédier ce modeste travail à :
Mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi,
sans leur amour et leur confiance,
je ne serais jamais arrivée là.
Mes très chers frères qui m'ont toujours soutenue
avec beaucoup d'amour et de compréhension.
Toute la famille « Abdelli ».
Mes amies avec qui j'ai passé des moments
mémorables.
Tous mes enseignants.

Abdelli Asmaa.

Remerciements

En premier lieu, je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donnée la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

- *je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur **S. OUAKKAS**, qui a dirigé ce mémoire, pour ses nombreux conseils qui m'ont été profitables et ses constants encouragements.*
- *Je remercie vivement monsieur **A. KANDOUCI** qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.*
- *Je remercie également monsieur **D. DJEBBOURI** et mademoiselle **F. Z. MOSTFAI** de s'être intéressés à ce mémoire et d'avoir accepté de faire partie de ce jury.*

Enfin, je suis reconnaissante envers tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, m'ont soutenue et aidée pendant ces années.

Table des matières

Introduction générale

Le but de ce mémoire est d'aborder l'étude des fonctions harmoniques sur les variétés riemanniennes, il s'agit de rechercher les informations sur la géométrie d'une variété contenues dans l'opérateur Laplacien. On cherche la généralisation au cas des variétés riemanniennes de quelques résultats classiques sur les fonctions harmoniques de $\mathbb{R}^m$.

Ce sujet permet de découvrir un peu d'analyse sur les variétés : en plus de la définition du Laplacien sur les variétés riemanniennes, il permet de se familiariser avec quelques outils fondamentaux de la géométrie riemannienne.

Rappelons qu'une fonction $f \in C^\infty(M^m, g)$ est dite harmonique si et seulement si elle est solution de l'équation de Laplace $\Delta f = 0$, notons que l'opérateur de Laplace est un opérateur différentiel du second ordre. L'étude des liens entre l'existence de fonctions harmoniques non-constantes sur une variété riemannienne complète et la géométrie de la variété a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche en analyse géométrique depuis plusieurs dizaines d'années. Les fonctions harmoniques sont en un sens rares sur les variétés possédant une courbure de Ricci positive ou nulle. S.T. Yau a montré en 1975 que sur une variété riemannienne complète de courbure de Ricci positive ou nulle, toutes les fonctions harmoniques bornées sont constante, donc ce mémoire se situe à l'interface entre l'analyse géométrique et la géométrie différentielle.

Ce mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons dans une première partie les notions fondamentales sur les variétés différentiables qui sont des objets mathématiques plus généraux que l'espace $\mathbb{R}^m$, mais qui lui ressemblent localement. Ces notions seront illustrées par des exemples. Ensuite et dans une deuxième partie, on va définir la notion d'une variété riemannienne et définir aussi certains objets mathématiques associés à ce type de variétés (Connexions linéaires, connexion de Levi-Civita et le tenseur de courbure). Notons que le tenseur de courbure est un outil principal pour l'étude géométrique d'une variété riemannienne, il possède des propriétés algébriques remarquables qui permettent dans certains cas de donner une classification de quelques variétés riemanniennes.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse dans un premier lieu à la définition de quelques opérateurs différentiels sur une variété riemannienne (gradient d'une fonction et la divergence d'un champ de vecteur) à partir des isomorphismes musicaux, l'opérateur gradient et l'opérateur divergence nous permettent de définir l'opérateur de Laplace appelé aussi le Laplacien et on donne quelques règles de calcul, on définit ainsi les fonctions harmoniques comme solutions de l'équation de Laplace. Comme premier résultat de ce travail, on caractérise touts les fonctions radiales qui sont harmoniques, ensuite on s'intéresse à la déformation conforme de la métrique où on donne l'effet d'une telle déformation sur les connexions, sur la courbure et sur le Laplacien, comme conséquence on remarque qu'en général le Laplacien n'est pas un invariant conforme c'est-à-dire que l'harmonicité n'est pas préservée en déformant conformément la métrique. Cette méthode nous a permis de construire des exemples de fonctions harmoniques après déformation conforme de la métrique sachant qu'elles n'étaient pas harmoniques par rapport à la métrique initiale. On termine ce chapitre par l'étude du Laplacien et des fonctions harmoniques sur les variétés produit tordu où on traite certains cas particuliers.

Enfin dans le troisième chapitre, nous étudions des problèmes de type Liouville et le problème de Dirichlet lorsque la donnée au bord est constante. On montre tout d'abord que sur une variété complète non-compacte avec courbure de Ricci positive ou nulle toute fonction harmonique d'énergie finie est constante. Pour le problème de Dirichlet, on définit pour une fonction le tenseur énergie-impulsion qui est l'analogue du tenseur défini par P. Baird et J. Eells pour une application entre variétés riemanniennes. En calculant la divergence de ce tenseur, on donne une relation de base entre la divergence de ce tenseur et les fonctions harmoniques. Cette relation va nous permettre d'établir une formule de monotonie pour les fonctions harmoniques et grâce à cette formule, nous allons résoudre le problème de Dirichlet lorsque la donnée au bord est constante.

Chapitre 1

Généralités sur les variétés différentiables

1.1 Définitions et premiers exemples

Les variétés topologiques sont des espaces topologiques dont la topologie ressemble à celle des sous-variétés de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.1.1 *Une variété topologique de dimension m est un espace topologique M qui possède les proprietés suivantes :*

1. *M est séparé : $\forall x, y \in M$, il existe deux ouverts disjoints $U, V \subset M$ tel que $x \in U$ et $y \in V$*
2. *La topologie de M admet une base dénombrable.*
3. *$\forall x \in M$, $\exists U$ un ouvert de M contenant x, un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ et un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$.*

Exemples

1. Un ensemble dénombrable ou fini de points muni de la topologie discrète est une variété topologique de dimension zéro.
2. U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction continue. Le graphe de f est le sous ensemble de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ défini par :

$$\Gamma(f) = \left\{ \ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k, x \in U \ \right\}.$$

On munit $\Gamma(f)$ de la topologie induite et on définit l'application

$$\varphi_f : \Gamma(f) \longrightarrow U$$

par

$$\varphi_f(x, y) = x$$

φ_f est un homéomorphisme, donc $\Gamma(f)$ est une variété topologique de dimension m.

Une carte locale de M est un couple (U, φ) où U est un ouvert de M, appelé domaine de la carte et $\varphi : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^m$.

Tout point de M est contenu dans le domaine d'une carte.

Si (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont deux cartes locales telles que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, le changement de cartes est l'application

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2),$$

c'est un homéomorphisme de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ sur $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$.

Un atlas sur M est une famille de cartes locales

$$\mathcal{A} = \left\{ \ (U_i, \varphi_i), i \in I \ \right\}$$

telle que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M.$$

Un atlas $\mathcal{A}$ est dit différentiable si tous ses changement de cartes sont des difféomorphismes.

Définition 1.1.2 *Une variété différentiable M de dimension m est une variété topologique de dimension m munie d'un atlas différentiable $\mathcal{A}$.*

Exemples

1. Une variété différentiable de dimension zéro est un espace dénombrable ou fini de points muni de la topologie discrète.
2. Tout ouvert de $\mathbb{R}^m$ est une variété différentiable de dimension m.

3. Si M et N sont deux variétés différentiables de dimensions respectives m et n, alors $M \times N$ est une variété différentiable de dimension $m+n$.
4. $\mathbb{R}$ est une variété différentiable pour l'atlas formé par une seule carte $(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})$ et c'est aussi une variété différentiable pour l'atlas formé par une seule carte $(\mathbb{R}, \varphi(x) = x^3)$.

Il est intéressant de remarquer que la réunion de ces deux atlas n'est pas un atlas différentiable.

Soit M une variété différentiable et soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux atlas différentiables sur M.

On dit que $\mathcal{A}_1$ est contenu dans $\mathcal{A}_2$ si toute carte locale de $\mathcal{A}_1$ est une carte locale de $\mathcal{A}_2$.

Un atlas est dit maximal s'il n'est contenu dans aucun autre atlas différentiable que lui même.

On dira que $\mathcal{A}_1$ est compatible avec $\mathcal{A}_2$ si leur réunion est encore un atlas différentiable.

Tout atlas différentiable est contenu dans un atlas différentiable maximal qui est la réunion de tous les atlas différentiables qui sont compatibles avec lui, donc on peut poser la définition suivante :

Définition 1.1.3 *Une structure différentiable sur une variété topologique est la donnée d'un atlas différentiable maximal.*

Remarques :

1. Une variété topologique peut admettre plusieurs structure différentiable. Milnor a montré en 1956 que la sphére S^7 admet deux structures différentiables qui ne sont pas difféomorphes.
2. Plus récemment, on a construit de exemples de variétés topologiques compactes de dimension 4 qui possédent une infinité de structures différentiables non difféomorphes deux à deux.

1.2 Applications différentiables

Soit $f : M \to N$ une application entre une variété différentiable M de dimension m est une variété différentiable N de dimension n. Soit $p \in M$ et soient (U, φ) est une carte locale au voisinage de p et (V, ψ) est une carte locale au voisinage de $f(p)$.

Définition 1.2.1 *On dit que l'application f est différentiable en p si l'application*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V),$$

est différentiable en $\varphi(p)$.

On dira que f est différentiable sur la variété M si elle est différentiable en tout point de M.

Propriétés 1.2.1
Donnons quelques propriétés des applications différentiables.

1. *La définition de différentiabilité de f est indépendante des cartes choisies.*
2. *Toute application différentiable est continue.*
3. *La composition de deux applications différentiables est une application différentiable.*
4. *On dit que $f : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme si f est bijective et $f^{-1} : N \longrightarrow M$ est différentiable.*

Notation :
L'ensemble des applications différentiables de classe C^∞ de M vers N est noté par $C^\infty(M, N)$.

Définition 1.2.2 *Soit $f : M^m \longrightarrow N^n$ une application différentiable. Soient $p \in M$, (U, φ) une carte locale au voisinage de p et (V, ψ) une carte locale au voisinage de $f(p)$.*

Le rang de f en p noté $rg\ f(p)$ est le rang de l'application

$$D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(f(p)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

1. *Si $rg\ f(p) = dim\ N = n$, on dit que f est une submersion en p.*
2. *Si $rg\ f(p) = dim\ M = m$, on dit que f est une immersion en p.*
3. *La définition du rang de f ne dépend pas des cartes choisies.*

Théorème 1.2.1 ***(Théorème du rang constant)***
Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives m et n et soit $f : M \longrightarrow N$ est une application différentiable de rang canstant k $(0 \leq k \leq n)$.

Pour tout point $p \in M$ il existe une carte locale (U, φ) contenant $f(p)$ telle que :

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$$

pour tout $(x_1, ..., x_m) \in \varphi(U)$.

Définition 1.2.3 *Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable.*

1. *Un point $p \in M$ est dit régulier si f est une submersion en p, sinon il est dit singulier.*
2. *Un point $q \in N$ est dit valeur régulière si $f^{-1}(q)$ est vide ou tout point de $f^{-1}(q)$ est un point régulier.*

Théorème 1.2.2 *Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable, et soit p un point de M tel que $rg\ f(p) = dim\ M = dim\ N$.*

Alors il existe un ouvert U contenant p et un ouvert V contenant $f(p)$ tels que $f : U \longrightarrow V$ réalise un difféomorphisme.

1.3 Vecteurs tangents à une variété différentiable

Définition 1.3.1 *Soit M un variété différentiable et soit $x \in M$. Un vecteur tangent à M en x est une classe d'équivalence dans l'ensemble des courbes différentiable $\gamma : I \longrightarrow M$ telle que*

$$\gamma(0) = x,$$

pour la relation d'équivalence notée $\sim$ définie par :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \text{dans une carte locale}(U, \varphi) \text{ au voisinage de } x$$

on ait

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

Cette notion du vecteur tangent ne dépend pas de la carte choisie.

On note T_xM est l'ensemble des vecteurs tangents à M en x.

Proposition 1.3.1 *L'ensemble T_xM admet une structure naturelle d'espace vectoriel de dimension $dim\ M = m$.*

Preuve

Soit (U, φ) une carte locale au voisinage de x. On définit une application

$$T_\varphi : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

par la formule

$$T_\varphi([\gamma]) = (\varphi \circ \gamma)'(0).$$

Cette application possède les propriétes suivantes :

1. T_φ est une application bijective.
2. Si (U', ψ) une carte locale au voisinage de x. on a

$$T_\varphi = D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) \circ T_\psi.$$

Ces deux propriétes permettent de définir sur T_xM une structure d'espace vectoriel.

Soit M une variété différentiable, on considére l'ensemble TM définie par :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

TM est appelé le fibré tangent à la variété M.

On note

$$\begin{array}{rccc} \pi : & TM & \longrightarrow & M \\ & X_x \in T_xM & \longmapsto & \pi(X_x) = x \end{array}$$

la projection canonique.

Théorème 1.3.1 ***(Structure de variété sur le fibré tangent)***

Soit M une variété différentiable de dimension m.

L'ensemble TM peut être muni canoniquement d'une structure différentiable de dimonsion $2m$ telle que $\pi : TM \longrightarrow M$ sont une submersion.

Preuve

Soit (U, φ) une carte locale de M. On définit l'application

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

par

$$\Phi(X_x) = (\varphi(x), (\varphi \circ \gamma)'(0)).$$

Où γ est une courbe qui represente V_x. On munit TM de la topologie pour laquelle les Φ sont des homéomorphismes .

Le changement de cartes entre les cartes $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ et $(\pi^{-1}(V), \Psi)$ est donné par

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m$$

avec

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(x, u) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), D(\psi \circ \varphi^{-1})(x)(u)).$$

Cette application est clairement différentiable.

L'expression locale de π dans les cartes $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ et (U, φ) est la projection canonique de

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

cela nous montre que π est une submersion.

Exemple 1.3.1
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$.
l'application

$$\begin{array}{ccc} TU & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^m \\ [\ \gamma\ ] & \longmapsto & (\gamma(0), \gamma'(0)) \end{array},$$

définit une identification naturalle entre TU et $U \times \mathbb{R}^m$

1.4 Champs de vecteurs

Définition 1.4.1 *Un champ de vecteurs différentiable sur une variété différentiable M est une application différentiable*

$$X : M \longrightarrow TM$$

telle que

$$\pi \circ X = Id_M.$$

On note $\Gamma(TM)$ l'ensembles des champs de vecteurs sur M.

1.5 Les règles de calcul local dans une variété différentiable

Dans cette partre, nous allons présenter les bases du calcul local dans une variété différentiable, on donne une interprétation pratique des champs de vecteurs.

Pour cela, M désigne une variété différentiable de dimonsion m. Pour $x \in M$, on considère T_x^*M l'espace vectoriel dual de T_xM et on définit

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M,$$

et on note

$$\pi^* : T^*M \longrightarrow M$$

la projection canonique.

Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, la différentielle de f est l'application différentiable

$$df : TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$df(X_x) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \Bigg|_{t=0} ,$$

où

$$\gamma :]-a, a[\longrightarrow M,$$

est une courbe différentiable passant par x et qui représente X_x et

$$d_xf : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme linéaire donc $d_xf \in T_x^*M$ et on a

$$d(f_1, f_2) = f_1 df_2 + f_2 df_1.$$

Soit (U, φ) une carte locale sur M et soit $\{\ e_1, ..., e_m\ \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Pour $x \in M$, on note

$$\varphi(x) = (x_1(x), ..., x_m(x)),$$

on a donc m-fonctions différentiables sur U appelées système de coordonnées sur U.

Pour $x \in U$, on définit l'application

$$T_\varphi^x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

par :

$$T_\varphi^x([\gamma]) = (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

T_φ^x est un isomorphisme linéaire et donc $\{\ (T_\varphi^x)^{-1}(e_1), ..., (T_\varphi^x)^{-1}(e_m)\ \}$ est une base $T_x M$ on note

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = (T_\varphi^x)^{-1}(e_i),\ \forall i = 1, ..., m.$$

La famille $\left\{\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial}{\partial x_m}(x)\ \right\}$ est une base $T_x M$, ainsi tout champ de vecteurs X sur M s'écrit localement

$$X/_{U} = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où les X_i sont des fonctions différentiables sur U

Pour toute coordonnée : $x_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, sa différentielle est

$$dx_i : TU \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\{\ d_x x_1, ..., d_x x_m\ \}$ est une base de $T_x^* M$, c'est la base duale de $\left\{\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial}{\partial x_m}(x)\ \right\}$, on donc

$$d_x x_i(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)) = \delta_{ij}$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si \;\; i \neq j \\ 1 & si \;\; i = j. \end{cases}$$

L'ensemble T^*M peut être muni canoniquement d'une structure de variété différentiable de dimonsion $2m$ et la projection

$$\pi^* : T^*M \longrightarrow M$$

est une submersion.

T^*M est appelé le fibre cotangent sur M, on a toute 1-forme différentiable α va s'écrire dans la carte (U, φ) de la manière suivante :

$$\alpha/_{U} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i dx_i.$$

Où

$$\alpha_i = \alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}), \;\; i = 1, ..., m.$$

1. Soit $X \in \Gamma(TM)$,
$$df(X) = X(f)$$
et
$$X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1)$$
$\forall f, f_1, f_2 \in C^\infty(M)$.
2. Si $\varphi = (x_1, ..., x_m)$ est un système de coordonnées locales sur U et si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi$$
3. Soient $(x_1, ..., x_m)$ et $(y_1, ..., y_m)$ deux systèmes de coordonnées locales sur le même ouvert U.
On a les relations suivantes
$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et

$$dy_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} dx_j$$

1.6 Variétés riemanniennes.

Dans cette partie, on va définir la notion des variétés riemanniennes qui va nous permettre dans la suits de définir certains objets mathématiques (isomorphismes musicaux, gradient d'une fonction, divergence d'un champ de vecteurs, l'opérateur Laplacien).

1.6.1 Définitions et propriétés

Un métrique riemannienne sur une variété différentiable M est la donnée en tout point $x \in M$, d'un produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ sur T_xM de telle sorte que la propriété suivante soit verifiée :

Pour tout systéme local de coordonnées $(x_1, ..., x_m)$ sur un ouvert U de M, les fonctions $g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$g_{ij} = \left\langle \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

sont différentiables pour tout $i = 1, ..., m$.

Une variété différentiable munie d'une métrique riemannienne est appelée variété riemannienne. Notons $g = \langle \ , \ \rangle$, l'expression locale de g dans $(x_1, ..., x_m)$ est donnée par

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx_i dx_j$$

où

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}), \ \forall i, j = 1, ..., m.$$

Propriétés 1.6.1
Comme propriétés, on a :

1. *Si (U, φ) est une carte locale de M, les fonctions g_{ij} sont appelées les composantes de la métrique g relativement à la carte (U, φ) localement, on a*

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^i$$

où

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ et } Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

2. *Un repére local dans une variété riemannienne (M, g) est la donnée d'un ouvert U de M d'une famille de champ de vecteurs $(X_1, ..., X_m)$ dans U telle que, pour tout $x \in M$, $\{ X_1(x), ..., X_m(x) \}$ est une base de T_xM.*

   Notons que tout système local de coordonnées $(x_1, ..., x_m)$ définit un repère local

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}.$$

3. *Soit (M, g) une variété riemannienne orientée, on définit la forme volume de la variété (M, g) par*

$$dv_g = \sqrt{|g|}\ dx_1 \wedge ... \wedge dx_m$$

où

$$|g| = det(g_{ij}), \quad i, j = 1, ..., m.$$

1.7 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.7.1 ***(Connexion linéaires)***

Une connexion linéaire sur une variété M est une application

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *$\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à X :*

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y,$$

où $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$.

2. $\nabla_X Y$ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire par rapport à* Y *:*

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2,$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

3. ∇ *vérifie la règle de Leibniz*

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

où $f \in C^\infty(M)$.

$\nabla_X Y$ *est appelé la dérivée covariante de* Y *dans la direction de* X *.*
Localement, on a si

$$X = X_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

et

$$Y = Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

alors

$$\nabla_X Y = X(Y_j)\frac{\partial}{\partial x_j} + X_i Y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Une connexion ∇ *est dite sans torsion si* $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, *on a*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

où $[X, Y]$ *est le crochet de Lie .*

Définition 1.7.2 *Soit* (M, g) *une varieté riemannienne.*
Une connexion ∇ *sur* M *est dite métrique ou compatible avec* g *si* $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, *on a :*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Théorème 1.7.1 ***(Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne)***
Sur une variété Riemannienne (M, g), il existe une unique connexion linéaire sans torsion compatible avec la métrique g. Cette connexion est appelée la connexion de Levi-Civita.

Dans un système de coordonnées (x^i) sur M, ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k donnés par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

En effet, si

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ et } Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

on a

$$\nabla_X Y = X^i (\frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Proposition 1.7.1 *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, et ∇ la connexion de Levi-Civita. Si (U, φ) est une carte sur M et les champs de base $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$ associés, alors les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} g^{kl} \{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \}$$

où, g_{ij} sont les coordonnées de g relativement à la carte (U, φ).

1.8 Courbure d'une varieté riemannienne

Le tenseur de courbure est un outil principal pour l'étude géométrie d' une variété riemannienne.

Dans cette section, nous allons introduire cette notion en donnant certaines de ses proprietés.

Soit (M, g) une variété riemannienne, muni de sa connexion de Levi-Civita ∇ .

Définition 1.8.1 ***(Tenseur de courbure)***

Le tenseur de courbure associé à ∇ est défini par :

$$\begin{array}{rcl} R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ (X, Y, Z) & \longmapsto & R(X, Y)Z \end{array}$$

où

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.8.2 ***(Courbure de Ricci)***

La courbure de Ricci notée Ric est définie par :

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= tr_g R(*, X)Y \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, X)Y, e_i), \end{aligned}$$

où (e_i) est une base orthonormée locale sur M et $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.8.3 ***(Tenseur de Ricci)***

Le tenseur de Ricci de la variété (M, g) est donné par :

$$\begin{array}{rcl} Ricci : \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ X & \longmapsto & Ricci(X) \end{array}$$

tel que

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X, e_i)e_i$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur M.

Remarque *:*

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$Ric(X, Y) = g(Ricci(X), Y).$$

Définition 1.8.4 ***(Courbure scalaire)***

On appelle courbure scalaire la fonction définie sur M *par :*

$$R_g = tr_g Ric = \sum_{i=1}^{m} Ric(e_i, e_i)$$

où $(e_i)_{i=1}^{m}$ *est une base orthonormée locale sur* M*.*

Chapitre 2

L'opérateur Laplacien et les fonctions harmoniques sur une variété riemannienne

Dans ce chapitre, on va définir quelques opérateurs sur les variétés riemanniennes, ces opérateurs vont nous permettre de définir le Laplacien et par suite les fonctions harmoniques qui sont solutions de l'équation de Laplace dont on donne explicitement quelques règles de calcul. Pour ce type de fonctions, on a dans une première partie caractérisé toutes les fonctions harmoniques radiales, ensuite on étudie l'harmonicité après déformation conforme de la métrique.

Enfin et dans une dernière partie de ce chapitre on étudie le Laplacien et l'harmonicité sur les variétés produit tordu.

2.1 Les isomorphismes musicaux

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, g_x est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur T_xM, En tout point x de M, on peut identifier T_xM à T_x^*M à l'aide de l'isomorphisme noté $\#_x$, et défini par :

$$\begin{array}{rccc} \#_x : & T_x^*M & \longrightarrow & T_xM \\ & \omega_x & \longmapsto & \#_x(\omega_x) \end{array}$$

tel que : pour tout $X_x \in T_xM$,

$$g_x(\#_x(\omega_x), X_x) = \omega_x(X_x).$$

$\#_x$ est un isomorphisme, on note b_x son inverse qui est défini par :

$$\begin{array}{rccl} b_x : & T_xM & \longrightarrow & T_x^*M \\ & X_x & \longmapsto & b_x(X_x) \end{array}$$

tel que : pour tout $Y_x \in T_xM$,

$$b_x(X_x)(Y_x) = g_x(X_x, Y_x).$$

On peut définir les opérateurs $\#$ et b, appelés opérateurs musicaux de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \# : & \Gamma^*(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & \omega & \longmapsto & \#(\omega) \end{array}$$

tel que pour tout $x \in M$, on a

$$(\#(\omega))_x = \#_x(\omega_x),$$

et

$$\begin{array}{rccl} b : & \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma^*(TM) \\ & X & \longmapsto & b(X) \end{array}$$

tel que : pour tout $x \in M$,

$$(b(X))_x = b_x(X_x)$$

Voir [3] pour plus de détails concernant ces notions.

Proposition 2.1.1 *Les opérateurs $\#$ et b sont des isomorphismes inverse l'un de l'autre et sont également définis par :*

$$\begin{cases} \#(\omega) \ \ \textit{est tel que } g(\#(\omega), X) = \omega(X) \\ \\ b(X) \ \ \textit{est tel que } b(X)(Y) = g(X, Y) \end{cases} \tag{2.1}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma^*(TM)$

Preuve :

La linéarité est une conséquence de la linéarité des $\#_x$ et b_x, pour tout $x \in M$. Il suffit de montrer que les opérateur $\#$ et b sont inverse l'un de l'autre.

Soient $x \in M$, $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma^*(TM)$.
D'une part, on a

$$g_x(\#_x(b_x(X_x)), Y_x) = (b_x(X_x))(Y_x = g_x(X_x, Y_x),$$

et comme g_x et non dégénérée, alors pour tout $x \in M$ il suit que

$$\#_x(b_x(X_x)) = X_x$$

et

$$((\# \circ b)(X))_x = X_x,$$

enfin on déduit que

$$\# \circ b = Id_{\Gamma(TM)}.$$

D'autre part, on a

$$((b \circ \#)(\omega))_x(X_x) = (b_x(\#_x(\omega_x))(X_x) = g_x(\#_x(\omega_x, X_x) = \omega_x(X_x),$$

alors

$$((b \circ \#)(\omega))_x = \omega_x,$$

pour tout $x \in M$, et

$$b \circ \# = Id_{\Gamma^*(TM)}.$$

En rappelant que

$$(\omega(X))_x = \omega_x(X)_x,$$

et

$$(g(X, Y)) = g_x(X_x, Y_x),$$

on aura à partir des définitions de $\#_x$ et b_x les relations suivantes .

$$\begin{cases} g_x((\#(\omega))_x, X_x) = \omega_x(X_x) \\ (b(X))_x(Y_x) = g_x(X_x, y_x) \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} (g((\#(\omega)), X))_x = (\omega(X))_x \\ ((b(X))(Y))_x = (g(X, y))_x) \end{cases}$$

d'où les relations voulues.

2.1.1 Les isomorphismes musicaux en coordonnées locales

Soit (U, φ) une carte local sur M, $\{U, (\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1,\dots,n}\}$ et $\{U, (dx^i)_{i=1,\dots,n}\}$ sont respectivement le repère et le corepère local associés à la carte donnée (U, φ).

En utilisant la covention d'**Einstein** pour les indices, on a pour $\omega \in \Gamma^*(TM)$,

$$\omega = \omega_i dx^i.$$

Pour $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j},\ Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

La métrique g s'écrit sous la forme

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}).$$

Comme

$$g(\#(\omega), X) = \omega(X),$$

alors

$$g_{ij}(\#(\omega))^i X^j = \omega_j X^j,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

En particulier pour $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors

$$g_{ij}(\#(\omega))^i = \omega_j,$$

d'où

$$(\#(\omega))^i = g^{ij}\omega_j,$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}).

Enfin nous obtenons la formule suivante :

$$\#(\omega) = g^{ij}\omega_j \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.2}$$

De même, pour l'opérateur b nous avons d'une part

$$(b(X))(Y) = (b(X))_j (Y)^j,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(b(X))(Y) &= g_{ij} X^i . Y^j \\ &= \omega_j X^j,\end{aligned}$$

pour tout $Y \in (TM)$, en particulier pour $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, on obtient la formule

$$(b(X))_j = g_{ij} X^i,$$

par suite on déduit que :

$$b(X) = g_{ij} X^i dx^j \tag{2.3}$$

2.2 Les opérateurs sur une variété riemannienne

2.2.1 L'opérateur gradient sur une variété riemannienne

Définition 2.2.1 *: Soit (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur gradient (noté grad) par :*

$$\begin{array}{rccl} grad: & C^\infty(M) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & f & \longmapsto & grad(f) = \#(df) \end{array}$$

où df est la différentielle de f, tel que pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a

$$g(gradf, X) = df(X) = X(f).$$

Proposition 2.2.1 ***(Expression du gradient en coordonnées locales)***

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, (U, φ) une carte sur M avec les champs de base associée $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x^m}$, alors pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on a :

$$gradf = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.4}$$

Preuve

On applique directement la définition de l'application $\#$ (voir proposition 2.2.1), et la définition de la différentielle la fonction $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ relativement à la carte (U, φ) sur M, on a

$$\begin{aligned} df &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ \# df &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

où $dx^1, ..., dx^m$ est la base duale.

Propriétés 2.2.1

Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour toutes $f, h \in C^{\infty}(M)$ on a

1. $grad(f + h) = gradf + gradh$
2. $grad(fh) = hgrad(f) + fgrad(h)$
3. $(grad(f))(h) = (grad(h))(f)$

Preuve :

Soit $f, h \in C^{\infty}(M)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

1.

$$\begin{aligned} g(grad(f+h), X) &= X(f+h) \\ &= X(f) + X(h) \\ &= g(gradf, X) + g(gradh, X) \\ &= g(gradf + gradh, X), \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g(grad(fh), X) &= X(fh) \\ &= hX(f) + fX(h) \\ &= hg(gradf, X) + fg(gradh, X) \\ &= g(hgradf + fgradh, X), \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (gradf)(h) &= g(gradh, gradf) \\ &= g(gradf, gradh) \\ &= (gradh)(f), \end{aligned}$$

2.2.2 L'opérateur divergence sur une variété riemannienne

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété riemannienne (M, g), l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \nabla X : & \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & Z & \longmapsto & \nabla_Z X \end{array} \tag{2.5}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire (∇X est un tenseur de type (1,1)).

Si $x \in M$, alors

$$\begin{array}{rccc} (\nabla X)_x : & T_xM & \longrightarrow & T_xM \\ & v & \longmapsto & (\nabla_v X)_x \end{array} \tag{2.6}$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 2.2.2 *: Soit (M, g) une variété riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $divX$ est une fonction sur M définie par :*

$$\begin{array}{rccc} div : & \Gamma(TM) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & X & \longmapsto & divX \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} divX &= tr_g(\nabla X) \\ (divX)(x) &= tr_g((\nabla X)_x) \qquad\qquad x \in M \end{aligned}$$

En coordonnées locales, on a

$$\begin{aligned} divX &= dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j}) \end{aligned}$$

Si (e_i) est une base orthonormée locale sur M on a

$$divX = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

De même, la divergence d'une 1-forme ω sur M est définie par

$$\begin{aligned} div\omega &= tr_g(Z \longrightarrow \nabla_Z\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g^{ij}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega)(\frac{\partial}{\partial x^j}) \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 ***(Première expression de la divergence en coordonnées locales.)***

Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension m, $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ on a :

$$divX = \sum_{i,j=1}^{m} (\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j\Gamma_{ij}^i)$$

Preuve

Sur une carte locale sur M nous avons,

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

et

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},$$

alors,

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{m} dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X^j\frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + X^j\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}), \end{aligned}$$

d'où finalement, on déduit que

$$divX = \sum_{i,j=1}^{m} (\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^i)$$

Propriétés 2.2.2

Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, on a

1. $div(X + Y) = divX + divY$
2. $div(fX) = fdivX + X(f)$

Preuve :

Pour démontrer la propriété (1), on applique directement la définition de la divergence, soit (e_i) une base orthonormée locale sur M on a

$$\begin{aligned} div(X+Y) &= g(\nabla_{e_i}(X+Y), e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i}X, e_i) + g(\nabla_{e_i}Y, e_i) \\ &= divX + divY \end{aligned}$$

Pour la deuxième propriété, on a

$$div(fX) = g(\nabla_{e_i} fX, e_i)$$

Or

$$\nabla_{e_i} fX = e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X,$$

il suit que

$$div(fX) = g(e_i(f)X, e_i) + f\ g(\nabla_{e_i}X, e_i)$$

On sait que

$$divX = g(\nabla_{e_i}X, e_i)$$

et

$$g(e_i(f)X, e_i) = g(X, grad\ f) = X(f).$$

On déduit que

$$div(fX) = X(f) + f\ divX$$

Voir [2] Pour plus de détails sur ces notions.

Lemme 2.2.1 *([2]) Sur une variété riemannienne (M, g) on a*

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{det(g_{ij})}) = \sqrt{det(g_{ij})}\sum_{i=1}^{m}\Gamma_{lk}^{l},$$

où $|g| = det(g_{ij})$.

En utilisant ce lemme, nous allons donner la deuxième expression de la divergence.

Proposition 2.2.3 ***(Deuxième expression de la divergence en coordonnées locales.)***

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

$$divX = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{det(g_{ij})}X^k)$$

Preuve

Grâce à la première expression de la divergence en coordonnées locales, nous avons

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}X^j\Gamma_{ij}^{i} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m}X^j\sum_{i=1}^{m}\Gamma_{ij}^{i} \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 2.2.1, avec

$$|g| = det(g_{ij}),$$

alors un calcul direct donne,

$$\begin{aligned} divX &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sqrt{|g|}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m}X^j\sqrt{|g|}\sum_{i=1}^{m}\Gamma_{ij}^{i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sqrt{|g|}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m}X^j\frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{|g|}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}X^i) \end{aligned}$$

en utilisant la convention d'Einstein on a

$$div(X) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|}X^i).$$

2.3 L'opérateur Laplacien sur une variété riemannienne

2.3.1 Définitions et Propriétés

Définition 2.3.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien noté Δ sur M par :*

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & \Delta(f) = div(gradf) \end{array}$$

Propriétés 2.3.1
Soit (M, g) une variété riemannienne, pour toutes $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on a :

1. $\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h$
2. $\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta h + 2g(gradf, gradh)$

Preuve :
Soit $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, en utilisant les propriétés des opérateurs grad et div et le fait que

$$X(f) = g(gradf, X),$$

on obtient

1.
$$\begin{array}{rcl} \Delta(f + h) & = & div(grad(f + h)) \\ & = & div(grad\ f + grad\ h) \\ & = & div(grad\ f) + div(grad\ h) \\ & = & \Delta(f) + \Delta(h) \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcl} \Delta(f\ h) & = & div(grad(f\ h)) \\ & = & div\ f(grad\ h) + div(h\ grad\ f) \\ & = & f\ div(grad\ h) + (grad\ h)(f) + h\ div(grad\ f) + (grad\ f)(h) \\ & = & f\Delta h + h\Delta f + 2g(grad\ f, grad\ h). \end{array}$$

Définition 2.3.2 *: Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $f \in C^\infty(M)$, on dit que f est harmonique si :*

$$\Delta f = 0.$$

L'équation $\Delta f = 0$ est appelée l'équation de laplace.

2.3.2 Expressions de l'opérateur Laplacien en coordonnées locales

Soit (M, g) une variété riemannienne, et pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \tag{2.7}$$

Preuve

Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= div(grad\ f) \\ &= g^{ij} g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} grad\ f, \frac{\partial}{\partial x^j}. \right) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} grad\ f, \frac{\partial}{\partial x^j}) &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g(grad\ f, \frac{\partial}{\partial x^j}) - g(grad\ f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}. \right)$$

Remarque.

Grâce à la deuxième expression de l'opérateur divergence, il existe une deuxième écriture pour le Laplacien donnée par l'équation suivante :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\sqrt{det(g_{ij})} \right).$$

Exemple 2.3.1

Soit $\mathbb{R}^m$ *muni du produit scalaire standard* g_0, $(g_{ij} = \delta_{ij})$, *alors pour tous fonction différentiable* f *sur* $\mathbb{R}^m$ *et* $X = (X^1, ..., X^m)$ *un champ de vecteurs sur* $\mathbb{R}^m$ *on a*

1.

$$\begin{aligned} grad\ f &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} div\ X &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + ... + \frac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{aligned}$$

3.

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Exemple 2.3.2 *(**Laplacien sur la sphère** S^2)*

Soit S^2 *la sphère de dimension 2, sa métrique est donnée par*

$$g_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

et $f : S^2 \backslash \{(\pm 1, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, *on a*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Par exemple $f(\theta,\varphi) = \ln\tan(\frac{\theta}{2})$ *est harmonique. Car :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\ln(\tan\frac{\theta}{2}) \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(\tan\frac{\theta}{2})}{\tan\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})}{\tan\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{1}{2}\frac{(1+\tan^2\frac{\theta}{2})\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{4}(\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}).
\end{aligned}$$

On déduit :

$$\Delta f = \frac{1}{4}(\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} - \tan\frac{\theta}{2})(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} + \tan\frac{\theta}{2}) = 0$$

Donc f *est fonction harmonique.*

2.3.3 Quelques règles de calcul pour le Laplacien.

Proposition 2.3.1 *Soient* $x, y \in \mathbb{R}^2$, (x, y) *sont les coordonnées cartésiennes* (x, y) *et* (r, θ) *sont coordonnées polaires avec*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

et on a :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{2.8}$$

Preuve

On a $f(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$, il suit que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (EQ_1)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial x}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \cos\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r\sin\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad (EQ_2).\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\\ &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} &= -r(-r\sin\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x})+r(r\cos\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})\\ &= r^2\sin\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r^2\cos\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})\\ &= r^2((1-\cos\theta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(1-\sin\theta^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})-r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}) \quad (EQ_3)\end{aligned}$$

En remplaçant (EQ_1) et (EQ_2) dans (EQ_3), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} &= r^2(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\cos\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\sin\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})-r(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})\\ &= r^2\Delta f(x,y)-r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-r\frac{\partial f}{\partial r}\end{aligned}$$

on déduit que

$$\Delta f(x,y) = \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

Ce qui donne finalement :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Proposition 2.3.2 *Soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive de classe C^2. Alors*

$$\Delta(f^p) = pf^{p-2}(f\Delta f + (p-1)|grad\ f|^2) \tag{2.9}$$

Preuve

D'aprés la définition on a

$$\Delta(f^p) = e_i(e_i(f^p)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f^p) \qquad (E)$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ est base orthonormée sur $\mathbb{R}^m$.

On a pour $X \in \Gamma(TM)$,

$$X(f^p) = pf^{p-1}X(f).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} X(X(f^p)) &= pX(f^{p-1}X(f)) \\ &= p(f^{p-1}X(X(f)) + X(f^{p-1})X(f)X(f) \\ &= p(f^{p-1}X(X(f)) + (p-1)f^{p-2}X(f)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} e_i(e_i(f^p)) &= p(f^{p-1}e_i(e_i(f)) + (p-1)f^{p-2}e_i(f)e_i(f) \\ &= pf^{p-2}(fe_i(e_i(f)) + (p-1)|grad\ f|^2) \qquad (E_1) \end{aligned}$$

et

$$(\nabla_{e_i}e_i)(f^p) = pf^{p-1}(\nabla_{e_i}e_i)(f). \qquad (E_2)$$

En remplaçant (E_1) et (E_2) dans (E), on obtient

$$\Delta f^p = pf^{p-2}(fe_i(e_i(f)) + (p-1)|grad\ f|^2 - f(\nabla_{e_i}e_i)(f))$$

Or :

$$\Delta f = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f),$$

il suit que

$$\Delta(f^p) = pf^{p-2}(f\Delta f + (p-1)|grad\ f|^2).$$

Comme cas particulier de la proposition 2.3.2, on a

Proposition 2.3.3 *Soit (M, g) une variété riemannienne, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ on a*

$$\Delta(|x|^p) = p(p+m-2)|x|^{p-2}. \tag{2.10}$$

Preuve

Posons $f(x) = |x|$ dans l'équation (2.9), on obtient

$$\Delta(|x|^p) = p|x|^{p-2}(|x|\Delta|x| + (p-1)|grad|x||^2),$$

où

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2},$$

et

$$\begin{aligned} grad|x| &= \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

De même

$$|grad|x||^2 = g\left(\frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 1$$

et

$$\Delta|x| = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2|x|}{\partial x_i^2}.$$

Où

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|) = \frac{x_i}{|x|},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 |x|}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|} \right) \\ &= \frac{1}{|x|}\left(m|x| - |x| \right) = \frac{(m-1)}{|x|}\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta(|x|^p) = p|x|^{p-2}\left((m-1) + p - 1 \right)$$

on déduit que :

$$\Delta(|x|^p) = p(m+p-2)|x|^{p-2}.$$

Proposition 2.3.4 *Soient $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^∞, alors*

$$\Delta(g \circ f) = (g' \circ f)\Delta f + (g'' \circ f)|grad\ f|^2 \tag{2.11}$$

Preuve

Soit

$$\begin{array}{cccc} g \circ f : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & (g \circ f)(x). \end{array}$$

Par définition du Laplacien, on a

$$\Delta(g \circ f)(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((g \circ f)(x)).$$

Un simple calcul donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}((g \circ f)(x)) = g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

il suit que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((g \circ f)(x)) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}(g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i}).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\Delta(g \circ f)(x) = g'(f(x))\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + g''(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

d'où finalement

$$\Delta(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x)\Delta f + (g'' \circ f)(x)|grad\ f|^2,$$

car

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 = |grad\ f|^2.$$

Proposition 2.3.5 *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M, g)$, on a*

$$\Delta e^f = e^f(\Delta f + |grad\ f|^2) \tag{2.12}$$

Preuve

Par définition, on a

$$\Delta e^f = e_i(e_i(e^f) - (\nabla_{e_i} e_i)(e^f).$$

Or

$$e_i(e^f) = e^f.e_i(f),$$

d'où

$$\begin{aligned} e_i(e_i(e^f) &= e_i(e^f e_i(f)) \\ &= e^f e_i(e_i(f)) + e^f e_i(f) e_i(f) \\ &= e^f(e_i(e_i(f)) + |grad\ f|^2) \end{aligned}$$

et

$$(\nabla_{e_i} e_i(e^f) = e^f(\nabla_{e_i} e_i(f),$$

donc

$$\Delta e^f = e^f(\Delta f + |grad\ f|^2)$$

Définition 2.3.3 *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m. On appelle forme volume sur (M, g), notée v^M ou v^g, la forme définie localement dans un repère par*

$$v^M = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$$

Exemple 2.3.3
On considére la variété $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y) on a

$$g_0 = dx^2 + dy^2,$$

et

$$v^{g_0} = \sqrt{det(g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy.$$

On considère la sphère S^2 muni de la métrique

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

alors

$$v^g = \sqrt{det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |\sin \theta| d\theta \wedge d\varphi.$$

Proposition 2.3.6 ***(Théorème de divergence ([3]))***

Soit D un domaine compact à bord dans une variété riemannienne (M, g). Soit ω une 1-forme et X un champ de vecteur, définis sur un voisinage inclue dans D. Alors

$$\int_D (div\omega) v^M = \int_{\partial D} \omega(\mathfrak{n}) v^{\partial D} \text{ et } \int_D (divX) v^M = \int_{\partial D} g(X, \mathfrak{n}) v^{\partial D},$$

où ∂D est le bord de D et $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(x)$ est le vecteur unitaire normal à ∂D.

Corollaire 2.3.1 *Pour tout ω une 1-forme et X un champ de vecteurs à supports compact dans un domaine D, alors*

$$\int_D (div\omega) v^M = 0 \text{ et } \int_D (divX) v^M = 0.$$

2.4 L'harmonicité des fonctions radiales

Dans le cas où la fonction $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est radiale, c'est à dire elle dépend seulement de $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}$, nous allons caractériser touts les fonctions radiales qui sont harmoniques.

Proposition 2.4.1 *Soit f une fonction de classe C^2 définie par :*

$$\begin{array}{cccll} f: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}, & m \geq 2 \\ & x = (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & f(x) = F(r) & \end{array}$$

Alors f est harmonique si et seulement si f s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rcllc} f(x) & = & A \ln r + B & si & m = 2 \\ f(x) & = & \dfrac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B & si & m > 2 \end{array}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}$ et A et B sont des constantes.

Preuve :

On a $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}$, il suit que :

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad \forall i = 1, ..., m$$

et

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \quad \forall i = 1, ..., m$$

En calculant $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = F'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} F'(r)$$

De même, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = (\frac{r - \frac{x_i}{r}}{r^2}) F'(r) + \frac{x_i}{r} F''(r) \frac{x_i}{r} = \frac{x_i^2}{r} F''(r) + (\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}) F'(r) \tag{2.13}$$

Par définition, on a

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{2.14}$$

En remplaçant (2.13) dans (2.14)

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2} \\
&= \frac{F''(x)}{r^2} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + (\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3})F'(r) \\
&= F''(r) + (\tfrac{m}{r} - \tfrac{1}{r})F'(r)
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\Delta f = F''(r) + (m-1)\frac{F'(r)}{r} \tag{2.15}$$

Grâce à l'équation (2.15), on déduit que f est harmonique si et seulement si F verifie l'équation suivante :

$$F''(r) + (m-1)\frac{F'(r)}{r} = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{F''(r)}{F'(r)} = -(m-1)\frac{1}{r}$$

En intégrant par rapport à r, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln F'(r) &= -(m-1)\ln r + c \\
\ln F'(r) &= \ln \frac{A}{r^{m-1}},
\end{aligned}$$

avec $c = \ln A$.

Enfin, l'harmonicité de f se traduit par l'équation

$$F'(r) = \frac{A}{r^{m-1}} \tag{2.16}$$

Pour resoudre l'équation (2.16), nous allons distinguer deux cas :

1^{er} **cas** :

Pour $m = 2$, on obtient

$$F'(r) = \frac{A}{r} \Rightarrow F(r) = A \ln r + B$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= A \ln r + B \\ &= A \ln \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2} + B. \end{aligned}$$

2^{eme} **cas** :

Pour $m > 2$, l'équation (2.16) s'écrit sous la forme

$$F'(r) = Ar^{1-m}.$$

Par intégration, on obtient

$$F(r) = \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B \\ &= \frac{A}{(2-m)(x_1^2 + ... + x_m^2)^{\frac{m-2}{2}}} + B \end{aligned}$$

2.5 Etude de l'harmonicité après déformation conforme

Dans cette partie, nous allons étudier l'harmonicité d'une fonction $f \in C^\infty(M, g)$ en déformant conformément la métrique g en $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ où $\gamma \in C^\infty(M, g)$.

Proposition 2.5.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne munie de sa connexion Levi-Civita Δ, et soit $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ une déformation conforme de la métrique g.*

Notons $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique $\widetilde{g}$. On a pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\gamma)Y + Y(\gamma)X - g(X, Y) grad\gamma. \tag{2.17}$$

Preuve :

On va donner la preuve de la proposition en utilisant les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k qui sont donnés par la formule suivante :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(\partial_i(g_{jl}) + \partial_j(g_{il}) - \partial_l(g_{ij})).$$

En appliquant cette formule pour $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{ij}^k &= \tfrac{1}{2}\widetilde{g}^{kl}(\partial_i(\widetilde{g}_{jl}) + \partial_j(\widetilde{g}_{il}) - \partial_l(\widetilde{g}_{ij})) \\
&= \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma}g^{kl}(\partial_i(e^{-2\gamma}g_{jl}) + \partial_j(e^{-2\gamma}g_{il}) - \partial_l(e^{-2\gamma}g_{ij})) \\
&= \tfrac{1}{2}e^{-2\gamma}g^{kl}(e^{2\gamma}\partial_i(g_{jl}) + e^{2\gamma}\partial_j(g_{il}) - e^{2\gamma}\partial_l(g_{ij}) + 2e^{2\gamma}\partial_i(\gamma)g_{jl} + 2e^{2\gamma}\partial_j(\gamma)g_{il} - 2e^{2\gamma}\partial_l(\gamma)g_{ij}) \\
&= \Gamma_{ij}^k + \underbrace{g^{kl}\partial_i(\gamma)g_{jl}}_{T_1} + \underbrace{g^{kl}\partial_j(\gamma)g_{il}}_{T_2} - \underbrace{g^{kl}\partial_l(\gamma)g_{ij}}_{T_3}
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $g^{kl}g_{jl} = \delta_{kj}$, on déduit que

$$\begin{aligned}
T_1 &= \delta_{kj}\partial_i(\gamma) \\
T_2 &= \delta_{ki}\partial_j(\gamma)
\end{aligned}$$

et

$$T_3 = g^{kl}g_{ij}\partial_l(\gamma).$$

Où $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, on sait que par définition, on a

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k$$

En calculant $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j &= \widetilde{\Gamma}_{ij}^k\partial_k \\
&= \nabla_{\partial_i}\partial_j + \delta_{kj}\partial_i(\gamma) + \delta_{ki}\partial_j(\gamma) - g^{kl}g_{ij}\partial_l(\gamma) \\
&= \nabla_{\partial_i}\partial_j + \delta_{kj}\partial_i(\gamma)\partial_k + \delta_{ki}\partial_j(\gamma)\partial_k - g^{kl}g_{ij}\partial_l(\gamma)\partial_k
\end{aligned}$$

Ce qui entraine l'équation suivante

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(\gamma)\partial_j + \partial_j(\gamma)\partial_i - g(\partial_i, \partial_j)grad\gamma \qquad (\bullet)$$

Soient $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^i\partial_j$, un calcul simple donne

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y &= \widetilde{\nabla}_{X^i\partial_i} Y^j\partial_j \\
&= X^i(\widetilde{\nabla}_{\partial_i} Y^j\partial_j) \\
&= X^i(Y^j\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(Y^j)\partial_j) \\
&= X^i(Y^j(\nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(\gamma)\partial_j - g(\partial_i, \partial_j)grad\gamma + \partial_i(Y^j)\partial_j) \\
&= X^iY^j(\nabla_{\partial_i}\partial_j + X^i\partial_i(\gamma)\partial_j - X^i g(\partial_i, \partial_j)grad\gamma + X^i\partial_i(Y^j)\partial_j).
\end{aligned}$$

Donc

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i\partial_i} Y^j\partial_j = X^i(Y^j\nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(Y^j)\partial_j) \qquad (\bullet\bullet)$$

D'où

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\gamma)Y + Y(\gamma)X - g(X, Y)grad\gamma$$

Grâce à la formule (2.17), on va calculer le Laplacien d'une fonction $f \in C^\infty(M)$, après déformation conforme de la métrique, plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 2.5.2 *Soit (M^m, g) une variété riemannienne, et soit $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g. Alors pour toute fonction $f \in c^\infty(M)$, on a :*

$$\widetilde{\Delta} f = e^{-2\gamma}\left(\ \Delta f + (m-2)g(gradf, grad\gamma)\ \right) \qquad (2.18)$$

Preuve : Soit $(e_i)_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g). la base orthonormée pour $\widetilde{g}$ est donnée par $\widetilde{e}_i = e^{-\gamma}e_i, \quad i = 1, ..., m$,

Par définition de $\widetilde{\Delta}$, on a

$$\widetilde{\Delta} f = \widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i(f)) - (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i)(f).$$

Grâce à l'équation (2.17) on deduit que :

$$\widetilde{\nabla}_{e_i} e_i = \nabla_{e_i} e_i + e_i(\gamma)e_i + e_i(\gamma)e_i - g(e_i, e_i)grad\gamma$$

Or

$$grad\gamma = e_i(\gamma)e_i,$$

ce qui donne :

$$\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i = \nabla_{e_i}e_i + (2-m)grad\gamma \qquad (1.1).$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i &= \widetilde{\nabla}_{e^{-\gamma}e_i}e^{-\gamma}e_i \\
&= e^{-\gamma}\widetilde{\nabla}_{e_i}e^{-\gamma}e_i \\
&= e^{-\gamma}(e^{-\gamma}\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i - e^{-\gamma}e_i(\gamma)e_i) \\
&= e^{-2\gamma}(\nabla_{e_i}e_i + (2-m)grad\gamma - grad\gamma)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i = e^{-2\gamma}(\nabla_{e_i}e_i + (1-m)grad\gamma) \qquad (1.2).$$

En calculant $\widetilde{e}_i(f)$, on trouve :

$$\widetilde{e}_i(f) = e^{-\gamma}e_i(f),$$

il suit que

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i(f)) &= \widetilde{e}_i(e^{-\gamma}e_i(f)) = e^{-\gamma}e_i(e^{-\gamma}e_i(f)) \\
&= e^{-2\gamma}e_i(e_i(f)) + e^{-\gamma}e_i(e^{-\gamma})e_i(f) \\
&= e^{-2\gamma}e_i(e_i(f)) - e^{-2\gamma}e_i(\gamma)e_i(f)
\end{aligned}$$

Enfin, on conclut que :

$$\widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i(f)) = e^{-2\gamma}e_i(e_i(f)) - e^{-2\gamma}e_i(\gamma)e_i(f) \qquad (1.3)$$

En remplaçant (1.2) et (1.3) dans (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}f &= e^{-2\gamma}(e_i(e_i(f)) - e_i(\gamma)e_i(f) - (\nabla_{e_i}e_i(f) - (1-m)grad\gamma(f)) \\
&= e^{-2\gamma}(\Delta f + (m-2)(grad\gamma)(f)).
\end{aligned}$$

L'équation (2.18), montre qu'en général l'harmonicité n'est pas préservée sauf si $m = 2$ ou bien f est constante, on dit alors que le Laplacien n'est pas un invariant conforme.

La non- invariante conforme du l'opérateur Laplacien a permis de définir un nouvel operateur légèrement différent du Laplacien noté L_g et appelé le Laplacien conforme de la manière suivante :

$$L_g = \frac{2(m-1)}{m-2}\Delta_g + R_g \qquad m \neq 2$$

où R_g est la courbure scalaire sur la variété (M, g).

Pour la courbure scalaire R_g, on a le résultat suivant :

Proposition 2.5.3 *Soit* (M^m, g) *une variété riemannienne et* $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ *:*

$$R_{\widetilde{g}} = e^{-2\gamma}(R_g - (m-1)(2\Delta\gamma + (m-2)|grad\gamma|^2)). \tag{2.19}$$

Preuve :

Soit $(e_i)_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g), pour $\widetilde{g}$ la base orthonormée est donnée par

$$\widetilde{e_i} = e^{-\gamma} e_i$$

Par définition de Ricci, on obtient

$$Ricci(X) = R(X, e_i)e_i$$

Et

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ricci}(X) &= \widetilde{R}(X, \widetilde{e_i})\widetilde{e_i} \\
&= e^{-2\gamma}(\widetilde{R}(X, e_i)e_i \\
&= e^{-2\gamma}(Ricci(X) - (\Delta\gamma)X + (m-2)(d\gamma(X)grad\gamma - \nabla_X grad\gamma - |grad\gamma|^2 X))
\end{aligned}$$

où

$$R_g = g(Ricci(e_i), e_i)$$

De même

$$\begin{aligned}
R_{\widetilde{g}} &= \widetilde{g}(\widetilde{Ricci}(\widetilde{e}_i), \widetilde{e}_i) = g((\widetilde{Ricci}(e_i), e_i) \\
&= e^{-2\gamma}(g(Ric(e_i), e_i) - g((\Delta\gamma)e_i, e_i) + (m-2)g(d\gamma(e_i)grad\gamma, e_i) \\
&- (m-2)g(\nabla_{e_i}grad\gamma, e_i) - (m-2)g(|grad\gamma|^2 e_i, e_i)) \\
&= e^{-2\gamma}(R_g - m\Delta\gamma + (m-2)|grad\gamma|^2 - (m-2)\Delta\gamma - m(m-2)|grad\gamma|^2) \\
&= e^{-2\gamma}(R_g - (2m-2)\Delta\gamma + (m-2)(1-m)|grad\gamma|^2)
\end{aligned}$$

Enfin

$$R_{\widetilde{g}} = e^{-2\gamma}(R_g - (m-1)(2\Delta\gamma + (m-2)|grad\gamma|^2))$$

Pour l'opérateur L_g, on a le théorème suivant

Théorème 2.5.1 *([1])* *Soit (M^m, g) une variété riemannienne et $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$L_{\widetilde{g}}(f) = e^{-\frac{m+2}{2}\gamma} L_g(e^{\frac{m-2}{2}\gamma} f). \tag{2.20}$$

L'équation (2.18) nous permet de Construire des exemples de fonctions harmoniques en déformant conformément la métrique g.

Exemple 1 :

Soit

$$\begin{array}{llcll}
f: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} & m \neq 2 \\
& x = (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2} &
\end{array}$$

et

$$g = dx_1^2 + ... + dx_m^2.$$

Un calcul simple nous donne

$$\Delta f = \frac{1}{r},$$

d'où la fonction f n'est pas harmonique par rapport à la métrique g.

Soit $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ où γ est une fonction que dépend seulement de r.
où

$$r = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

Grâce à l'équation (2.18) on a :

$$\widetilde{\Delta} f = e^{-2\gamma}(\frac{1}{r} + (m-2)g(gradf, grad\gamma)$$

Or

$$grad\gamma = \gamma'(r)\frac{\partial}{\partial r}$$

et

$$\begin{aligned} gradf &= f'(r)\frac{\partial}{\partial r} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

donc l'équation

$$\widetilde{\Delta} f = 0,$$

nous donne

$$\begin{aligned} \gamma'(r) &= \frac{1}{m-2}\frac{-1}{r} \\ &= \frac{1}{2-m}\frac{1}{r} \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à r, on trouve

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \frac{1}{2-m}\ln r \\ &= \ln r^{\frac{1}{2-m}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\widetilde{g} &= e^{2\ln(r^{\frac{1}{2-m}})} \\ &= r^{\frac{2}{(2-m)}} g.\end{aligned}$$

Pour cette nouvelle métrique $\widetilde{g}$, notre fonction f devient harmonique.

Exemple 2 :

Soit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \qquad m \neq 2 \\ & x = (x_1, ..., x_m) \longmapsto f(x) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x_1^2 + ... + x_i^2} \end{aligned}$$

En calculant le laplacien f on trouve

$$\Delta f = \frac{4}{r^4}.$$

Donc la fonction f n'est pas harmonique.

Nous allons la rendre harmonique en déformant conformément la métrique euclidienne g sur $\mathbb{R}^m$ en $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ où γ est une fonction que dépend seulement de r.
L'équation (2.18) est traduite comme suit :

$$\widetilde{\Delta} f = e^{-2\gamma} \left(\frac{4}{r^4} - 2(m-2) \frac{\gamma'(r)}{r^3} \right)$$

et comme $\widetilde{\Delta} f = 0$ c'est-à-dire

$$\gamma'(r) = \frac{2}{m-2} \frac{1}{r}$$

Et par intégration par rapport à r, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(r) &= \tfrac{2}{m-2} \ln r \\ &= \ln r^{\frac{2}{m-2}}\end{aligned}$$

D'ou f est harmonique par rapport à la métrique $\widetilde{g} = r^{\frac{4}{m-2}} g$.

2.6 L'harmonicité sur le Produit Tordu des variétés riemanniennes

2.6.1 Produit Tordu des variétés riemanniennes

Définition 2.6.1 *: Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variété riemannienne, le produit tordu de ces deux va riété est une variété riemannienne notée $M \times_{f^2} N$ et munie de la métrique G_{f^2}, où $f \in C^\infty$ une fonction positive telle que :*

$$G_{f^2} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \eta^* h$$

où

$$\pi : M \times N \to M$$

et

$$\eta : M \times N \to N$$

désignent les projection canoniques.

Si $X, Y \in \Gamma T(M \times N)$ on a

$$G_{f^2}(X, Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + (f \circ \pi)^2 h(d\eta(X), d\eta(Y)).$$

Remarque 2.6.1
Relativement à des cartes locales (U, x^i) sur M et (V, y^i) sur N. la matrice associée à G_{f^2} est définie par

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2 \cdot h_{lk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse est donnée par

$$\begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2} \cdot h^{lk} \end{pmatrix}$$

La connexion de Levi-Civita de $M \times_{f^2} N$ peut être maintenant rapprochée à celle de M et de N comme suit.

2.6.2 Connexion de Levi-Civita de la Variété Produit Tordu

Proposition 2.6.1 *([2]) Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variété riemannienne, Si ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la variété produit $(M \times N, G)$, alors La connexion de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ associée à la variété produit tordu $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ est définie par*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2} X_1(f^2)(0, Y_2) + \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2)(0, X_2) - \frac{1}{2} h(X_2, Y_2)(grad(f^2), 0)$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$ avec

$$X = (X_1, X_2), \quad Y = (Y_1, Y_2).$$

2.6.3 L'opérateur Laplacien sur le produit tordu

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, est notons Δ^M le laplacien sur (M, g) et Δ^N le laplacien sur (N, h).

Le laplacien sur $M \times N$ sera noté par $\widetilde{\Delta}$, notre but est de calculer l'opérateur $\widetilde{\Delta}$ en fonction de Δ^M, Δ^N et la fonction f.

Pour cela, considérons $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur (M, g), et $\{f_1, ..., f_n\}$ une base orthonormée sur (N, h), il base orthonormée sur $(M \times_f N, G_f)$ est donnée par :

$$\{(e_1, 0), (e_2, 0), ..., (e_m, 0), (0, \frac{1}{f} f_1), ..., (0, \frac{1}{f} f_n)\}.$$

Proposition 2.6.2 *Soient (M, g) et (N, h) deux variété riemannienne, Δ^M, Δ^N désignent les opérateurs Laplaciens sur M et N. Si*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M \times_{f^2} N & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

est une application de classe C^∞, alors

$$\widetilde{\Delta}\varphi = (\Delta^M \varphi, 0) + \frac{1}{f^2}(0, \Delta^N \varphi) + n(grad \ln f(\varphi), 0). \tag{2.21}$$

Preuve :

Par définition du Laplacien $\widetilde{\Delta}$ sur $(M \times_f N, G_f)$ on a

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \underbrace{(e_i,0)((e_i,0)(\varphi))}_{A_1} - \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0))(\varphi)}_{A_2} + \underbrace{(0,\frac{1}{f}f_j)((0,\frac{1}{f}f_j)(\varphi))}_{A_3} - \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_j)}(0,\frac{1}{f}f_j))(\varphi)}_{A_4} \quad (E^*)$$

Pour calculer $\widetilde{\Delta}\varphi$, on calcule tous les termes A_1, A_2, A_3 et A_4, on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= (e_i,0)((e_i,0)(\varphi)) \\ &= (e_i,0)(e_i(\varphi),0) \\ &= (e_i(e_i(\varphi)),0) \end{aligned}$$

Or, grâce à l'équation (E^*) on a

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0) &= \nabla_{(e_i,0)}(e_i,0) \\ &= (\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0),0) \end{aligned}$$

donc :

$$A_2 = ((\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0))(\varphi),0)$$

Et pour A_3, on a

$$(0,\frac{1}{f}f_j)(\varphi) = \frac{1}{f}(0,f_j(\varphi))$$

d'où

$$A_3 = \frac{1}{f}(0,f_j)(\frac{1}{f}(0,f_j(\varphi)))$$

Comme $f \in C^\infty(M)$, on déduit que

$$A_3 = \frac{1}{f^2}(0,f_j(f_j(\varphi)))$$

Enfin, pour le terme A_4, en utilisant l'équation (E^*), on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_j)}(0,\tfrac{1}{f}f_j) &= \tfrac{1}{f^2}\widetilde{\nabla}_{(0,f_j)}(0,f_j) \\
&= \tfrac{1}{f^2}(\nabla_{(0,f_j)}(0,f_j) - \tfrac{1}{2}h(f_j,f_j)(gradf^2,0) \\
&= \tfrac{1}{f^2}(0,\nabla_{f_j}f_j) - \tfrac{n}{2f^2}(gradf^2,0)
\end{aligned}$$

Comme $grad\ f^2 = 2f^2 grad \ln f$.

On déduit que

$$A_4 = \frac{1}{f^2}(0,\nabla_{f_j}f_j(\varphi)) - n(grad \ln f(\varphi),0)$$

En remplaçant les termes A_1, A_2, A_3 et A_4 dans 2.21, on obtient

$$\widetilde{\Delta}\varphi = (\Delta^M\varphi,0) + \frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi) + n(grad \ln f(\varphi),0).$$

Cas particulier

Si $\varphi(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$, on obtient donc

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \beta(\Delta^M\alpha,0) + \frac{1}{f^2}(0,\alpha\Delta^N\beta) + n\beta(g(grad \ln f, grad\alpha),0).$$

On peut distinguer le cas où $\alpha(x) = 1$ et le cas où $\beta(x) = 1$.

Pour $\alpha(x) = 1$, il suit que

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\beta),$$

on déduit que φ est harmonique si et seulement si β est harmonique.

Pour $\beta(x) = 1$, on obtient l'équation suivante

$$\widetilde{\Delta}\varphi = \beta(\Delta^M\alpha,0) + n\beta(g(grad \ln f, grad\alpha),0),$$

d'où φ est harmonique si et seulement si on a

$$\Delta^M\alpha + ng(grad \ln f, grad\alpha) = 0.$$

Chapitre 3

Théorèmes de type Liouville et problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques

3.1 Quelques théorèmes de type Liouville pour les fonctions harmoniques

Définition 3.1.1 *: Soit (M, g) une variété riemannienne, on dit $f \in C^\infty(M)$ est sur-harmonique si $\Delta f \geq 0$ et elle est dite sous-harmonique si*

$$\Delta f \leq 0.$$

Théorème 3.1.1 *Soit $f \in C^\infty(M, g)$, où (M, g) est une variété riemannienne compacte sans bord $(\partial M = \emptyset)$ connexe telle que*

$$\Delta f \geq 0.$$

Alors f est constante.

Preuve :

Comme $\Delta f \geq 0$, on a

$$\int_M \Delta f dv_g \geq 0,$$

or par définition on a

$$\Delta f = div(grad\ f)$$

on déduit que

$$\int_M div(gradf)dv_g \geq 0$$

mais on sait que

$$\begin{aligned} div(f\ grad\ f) &= f\Delta f + g(grad\ f, grad\ f) \\ &= f\Delta f + |grad\ f|^2 \end{aligned}$$

Par intégration, on a

$$\int_M div(f\ grad\ f)dv_g = \int_M f\Delta f\ dv_g + \int_M |grad\ f|^2 dv_g$$

comme ($\partial M = \emptyset$), alors

$$\int_M div(f\ grad\ f)dv_g = 0$$

d'où

$$\int_M |grad\ f|^2 dv_g = -\int_M f\Delta f\ dv_g.$$

Montrons que $\Delta f = 0$, on a

$$\Delta f = div(grad\ f)$$

le fait que

$$\Delta f \geq 0,$$

nous donne

$$\begin{aligned} \int_M \Delta f\ dv_g &= \int_M div(grad\ f)\ dv_g \\ &= \int_{\partial M} df(n) = 0 \end{aligned}$$

car

$$\partial M = \varnothing.$$

Donc

$$\int_M \Delta f\ dv_g = 0.$$

il suit que

$$\Delta f = 0,$$

on déduit que

$$\int_M |grad\ f|^2 dv_g = 0.$$

donc

$$|grad\ f|^2 = 0$$

finalement on obtient

$$grad\ f = 0.$$

Et comme M est connexe, alors f est constante.

Théorème 3.1.2 *Soient (M, g) une variété riemannienne compacte, connexe sans bord $(\partial M = \varnothing)$ et $f \in C^\infty(M)$ telle que*

$$\Delta f = k \frac{|grad\ f|^2}{f}, \qquad k \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Alors f est constante.

Preuve.
Pour la preuve de ce théorème, nous allons distinguer deux cas :

Premier cas
Pour $k = -1$, on obtient

$$f\Delta f = -|grad\ f|^2$$

on sait que

$$\Delta f^2 = 2(f\Delta f + |grad\ f|^2) = 0$$

Alors f^2 est harmonique, donc d'aprés le théorème (3.1.1) f^2 est constante.

On déduit que f est constante.

Deuxième cas
Pour $k \neq -1$, on a

$$div(f\ grad\ f) = f\Delta f + |grad\ f|^2$$

or d'aprés l'équation (3.1), on remarque que

$$f\Delta f = k|grad\ f|^2$$

il suit que

$$div(f\ grad\ f) = (k+1)|grad\ f|^2$$

En intégrant cette dernière équation sur M, on obtient

$$\int_M div(f\ grad\ f) = (k+1)\int_M |grad\ f|^2 = 0$$

comme

$$(\partial M = \emptyset),$$

on déduit que

$$\int_M div(f\ grad\ f)dv_g = 0$$

ce qui nous donne

$$\int_M |grad\ f|^2 dv_g = 0$$

donc

$$|grad\ f|^2 = 0$$

et par suit

$$grad\ f = 0.$$

Le fait que M est connexe implique que f est constante.

Théorème 3.1.3 *Soit (M,g) une variété riemannienne complète non compacte dont la courbure de Ricci est positive , et soit $f : (M,g) \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique telle que*

$$\int_M |df|^2 dv_g < \infty,$$

Alors f est constante.

Pour la preuve de ce théorème, nous allons utiliser trois lemmes.

Lemme 3.1.1 *([7])*

Soit (M, g) une variété riemannienne complète non-compacte dont la courbure de Ricci et soit f une fonction positive sur-harmonique ($\Delta f \geq 0$), alors on a

soit $\int f^2 = \infty$, *soit f est constante.*

Lemme 3.1.2 *([6])*

Toute variété riemannienne complète non-compacte dont la courbure de Ricci est positive a un volume infini.

Lemme 3.1.3 ***(Formule de Bochner)***

Soit $f \in C^\infty(M, g)$, alors :

$$\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) = |\Delta df|^2 + g(grad\Delta f, gradf) + Ric(gradf, gradf).$$

Cette équation est appelée la formule de Bochner.

Preuve du lemme 3.1.3 :

Soit $f \in C^\infty(M, g)$, on définit la troisième forme fondamentale de f notée $\nabla^2 df$ par :

$$\nabla^2 df(X, Y, Z) = \nabla_X(\nabla df(Y, Z)) - \nabla df(\nabla_X Y, Z) - \nabla df(Y, \nabla_X Z)$$

Cette troisième forme fondamentale possède la propriété suivante.

$$\nabla^2 df(X, Y, Z) = \nabla^2 df(Z, Y, X) + df(R(Z, X)Y).$$

Soit $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur M qui vérifie en un point $x \in M$ la condition suivante :

$$\nabla_{e_i} e_i = 0.$$

Calculons en ce point $x \in M$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|df|^2 &= \frac{1}{2}\Delta(g(grad\ f, grad\ f)) \\
&= \frac{1}{2}e_i(e_i(g(grad\ f, grad\ f))) \\
&= \frac{1}{2}e_i(g(\nabla_{e_i} grad\ f, grad\ f) + g(grad\ f, \nabla_{e_i} grad\ f)) \\
&= e_i(g(\nabla_{e_i} grad\ f, grad\ f))
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}\Delta|df|^2 = g(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\ f, grad\ f) + g(\nabla_{e_i} grad\ f, \nabla_{e_i} grad\ f) \quad (1.1),$$

où

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} grad\ f &= \nabla_{e_i} e_j(f) e_j \\ &= e_i(e_j(f)e_j) + e_j(f)\nabla_{e_i} e_j. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \nabla df(e_i, e_j) &= \nabla_{e_i} df(e_j) \\ &= e_i(df(e_j)) - df(\nabla_{e_i} e_j)\ , \\ &= e_i(e_j(f)) \end{aligned}$$

on déduit que

$$\nabla_{e_i} grad\ f = \nabla df(e_i, e_j) e_j$$

d'où

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_i} grad\ f, \nabla_{e_i} grad\ f) &= g(\nabla df(e_i, e_j)e_j, \nabla df(e_i, e_j)e_j) \\ &= |\nabla df|^2 \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Calculant

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\ f &= \nabla_{e_i}(\nabla df(e_i, e_j)e_j) \\ &= \nabla^2 df(e_i, e_i, e_j)e_j \\ &= \nabla^2 df(e_j, e_i, e_i)e_j + df(R(e_j, e_i)e_i)e_j \\ &= \nabla_{e_j}(\nabla df(e_i, e_i)e_j + df(Ricci(e_i))e_j \\ &= e_j(\Delta f)e_j + df(Ricci(e_j))e_j \end{aligned}$$

donc

$$g(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\ f, grad\ f) = g(grad(\Delta f), grad\ f) + g(df(Ricci(e_j))e_j, grad\ f).$$

Or

$$\begin{aligned} df(Ricci(e_j))e_j &= g(grad\ f, Ricci(e_j))e_j \\ &= Ric(grad\ f, e_j)e_j \\ &= Ricci(grad\ f) \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} g(df(Ricci(e_j))e_j, grad\ f) &= g(Ricci(grad\ f), grad\ f) \\ &= Ric(grad\ f, grad\ f) \end{aligned}$$

d'où

$$g(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} grad\ f, grad\ f) = g(grad(\Delta f), grad\ f) + Ric(grad\ f, grad\ f) \tag{1.3}$$

En remplaçant (1.2) et (1.3) dans (1.1), on obtient la formule de Bochner.

$$\frac{1}{2}\Delta(|df|^2) = |\Delta df|^2 + g(grad\Delta f, gradf) + Ric(gradf, gradf).$$

Preuve du Théorème 3.1.3 :

h est fonction positive sur M, on sait que

$$\Delta h^p = h^{p-2}(ph\Delta h + p(p-1)|dh|^2)$$

en posant $p = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\Delta h^{\frac{1}{2}} = h^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}h\Delta h - \frac{1}{4}|dh|^2)$$

Pour $h = (|df|^2 + \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$ on a

$$\Delta(|df|^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = (|df|^2 + \varepsilon)^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}(|df|^2 + \varepsilon)\Delta|df|^2 - \frac{1}{4}|d|df|^2|^2)$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz nous donne

$$\begin{aligned} |\nabla|df|^2| &\leq 4|\nabla df|^2|df|^2 \\ &\leq 4(|df|^2 + \varepsilon)|\nabla df|^2 \end{aligned}$$

Donc
$$-\frac{1}{4}|\nabla|df|^2| \geq -(|df|^2+\varepsilon)|\nabla df|^2.$$
et
$$\Delta(|df|^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \geq (|df|^2+\varepsilon)^{-\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{2}(|df|^2+\varepsilon)\Delta|df|^2-(|df|^2+\varepsilon)|\nabla df|^2\right\}.$$
D'où
$$\Delta(|df|^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \geq (|df|^2+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\Delta|df|^2-|\nabla df|^2).$$

D'après la formule de Bochner, et comme f est harmonique, on a
$$\frac{1}{2}\Delta|df|^2-|\Delta df|^2 = Ric(grad\ f, grad\ f) \geq 0$$
donc
$$\Delta(|df|^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Faisons tende $\varepsilon \to 0$, on déduit que :
$$\Delta|df| \geq 0$$

$|df|$ est une fonction positive sur-harmonique alors d'aprés le lemme 3.1.1, on a soit $\displaystyle\int |df|^2 = \infty$, soit $|df|$ est constante comme par hypothèse
$$\int |df|^2 < \infty.$$

Alors $|df|$ est constante.

On sait d'après lemme 3.1.2, que le volume de (M,g) est infini
$$Vol((M,g)) = \int_M dv_g = \infty$$

Alors on déduit que
$$df = 0$$

Donc f est constante.

Proposition 3.1.1 ***(Formule de Green)***

Soit D un domaine compact d'une variété riemannienne (M,g) et soient u,v deux fonctions de classe C^2 sur (M,g).

Alors

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)v^D = \int_{\partial D}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})v^{\partial D}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ est le vecteur normal.

Preuve

On sait que :

$$div(u\ grad\ v) = u\Delta v + g(grad\ u, grad\ v).$$

De même, on a

$$div(v\ grad\ u) = v\Delta u + g(grad\ u, grad\ v),$$

ces deux équations nous donnent

$$u\Delta v - v\Delta u = div(u\ grad\ v) - div(v\ grad\ u)$$

Par une integration, on obtient

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)v^D = \int_D [div(u\ grad\ v) - div(v\ grad\ u)]v^{\partial D} \qquad (I)$$

Or, en utilisant le théorème de la divergence

$$\begin{aligned}\int_D div(u\ grad\ v)v^D &= \int_{\partial D} g(u\ grad\ v, \frac{\partial}{\partial n})v^{\partial D}\\ &= \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}v^{\partial D} \qquad (II)\end{aligned}$$

De même

$$\int_D div(v\ grad\ u)v^D = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}v^{\partial D} \qquad (III).$$

En remplaçant (II) et (III) dans (I), on déduit que :

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)v^D = \int_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})v^{\partial D}$$

Grâce à la formule de Green, on a le résultat suivant.

Proposition 3.1.2 *Soient (M, g) une variété riemannienne et $f : D \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur-harmonique tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial D} = 0.$$

Alors f est harmonique.

Preuve :

Posons $u = f$ et $v = 1$ dans la formule de Green, on a

$$\int_D \Delta f v^D = \int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} v^{\partial D} = 0$$

Or :

$$\int_D \Delta f v^D = 0.$$

Comme D est compact et

$$\Delta f \geq 0,$$

alors il suit que

$$\Delta f = 0,$$

d'où f est harmonique.

3.2 Problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques

Définition 3.2.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $f \in C^\infty(M)$.*

Posons

$$e(f) = \frac{1}{2}|df|^2,$$

où

$$|df|^2 = \sum_{i=1}^{m} [e_i(f)]^2 = |grad\ f|^2,$$

avec $(e_i)_{i=1}^m$ *une base orthonormée sur* M.

On définit un champ de tenseur de type $(0,2)$ *associé à la fonction* f *et à la métrique* g*, noté* $S(f)$ *par :*

$$S(f) = e(f)g - df \otimes df \tag{3.2}$$

tel que

$$S(f)(X,Y) = e(f)g(X,Y) - X(f)Y(f),$$

où

$$df(X) = X(f)$$

$S(f)$ *est un champ de tenseur symétrique. Dans un premier lieu, on va calculer la divergence et la trace de* $S(f)$

Proposition 3.2.1 *Soit* (M^m, g) *une variété riemannienne.*

1.

$$div\ S(f) = -(\Delta f)df \tag{3.3}$$

2.

$$tr_g S(f) = (m-2)e(f) \tag{3.4}$$

Preuve

1. Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, la divergence d'un champ de tenseur symétrique T de type $(0,2)$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} (divT)(X) &= (\nabla_{e_i} T)(e_i, X) \\ &= e_i(T(e_i,X)) - T(\nabla_{e_i} e_i, X) - T(e_i, \nabla_{e_i} X) \end{aligned}$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée, on a donc

$$\begin{aligned} (divS(f))(X) &= (\nabla_{e_i} S(f))(e_i, X) \\ &= e_i(S(f)(e_i,X)) - S(f)(\nabla_{e_i} e_i, X) - S(f)(e_i, \nabla_{e_i} X) \end{aligned}$$

En utilisant la définition de $S(f)$, on obtient

$$\begin{aligned}(divS(f))(X) &= e_i(e(f)g(e_i,X)) - e_i(e_i(f)X(f)) - e(f)g(\nabla_{e_i}e_i, X)) \\ &+ (\nabla_{e_i}e_i)(f)X(f) - e(f)g(e_i, \nabla_{e_i}X) + e_i(f)(\nabla_{e_i}X)(f)\end{aligned}.$$

Mais

$$e_i(e(f)g(e_i,X)) = e(f)g(\nabla_{e_i}e_i, X) + e(f)g(e_i, \nabla_{e_i}X) + X(e(f))$$

et

$$e_i(e_i(f)X(f)) = e_i(e_i(f))X(f) + g(grad\ f, \nabla_{grad\ f}X) + g(X, \nabla_{grad\ f}grad\ f).$$

D'où

$$\begin{aligned}(divS(f))(X) &= X(e(f)) - e_i(e_i(f))X(f) - g(grad\ f, \nabla_{grad\ f}X) \\ &- g(X, \nabla_{grad\ f}grad\ f) + (\nabla_{e_i}e_i)(f)X(f) + g(grad\ f, \nabla_{grad\ f}X)\end{aligned}.$$

il suit que

$$(divS(f))(X) = -(\Delta f)df(X) + X(e(f)) - g(X, \nabla_{grad\ f}grad\ f).$$

Enfin comme

$$g(X, \nabla_{grad\ f}grad\ f) = \frac{1}{2}g(X, grad(|grad\ f|^2)) = \frac{1}{2}X(|grad\ f|^2) = X(e(f)),$$

on obtient donc finalement la relation suivante :

$$divS(f) = -(\Delta f)df$$

2. Soit $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée sur M par définition de la trace, on a :

$$\begin{aligned}tr_gS(f) &= S(f)(e_i, e_i) \\ &= e(f)g(e_i,e_i) - e_i(f)e_i(f) \\ &= me(f) - |df|^2,\end{aligned}$$

or

$$|df|^2 = 2e(f),$$

il suit que

$$tr_g S(f) = (m-2)e(f)$$

Remarques

1. De l'équation (3.3), on déduit le résultat suivant :

$$f \text{ est harmonique} \Leftrightarrow divS(f) = 0$$

2. De l'équation (3.4), on conclut que

$$tr_g S(f) = 0 \Leftrightarrow m = 2, \text{ ou bien } f \text{ constante}.$$

Définition 3.2.2 *: Soit (M, g) une variété riemannienne. Pour $X \in \Gamma(TM)$, on définit la 1-forme notée $S(f)(., X)$, par*

$$(S(f)(., X)(Y) = S(f)(X, Y)$$

Proposition 3.2.2 *: Pour $X \in \Gamma(TM)$, on a*

$$div(S(f)(., X)) = (divS(f))(X) + \left\langle\ S(f), \nabla X\ \right\rangle. \tag{3.5}$$

où

$$\left\langle\ S(f), \nabla X\ \right\rangle = S(f)(e_i, e_i)g(\nabla_{e_i} X, e_j).$$

$(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur M.

Preuve

Pour une 1-forme ω, on définit sa divergence par

$$\begin{array}{rcl} div\omega & = & (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ & = & e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i} e_i) \end{array}.$$

Par définition on a

$$S(f) = e(f)g - df \otimes df$$

et

$$S(f)(.,X)(Y) = S(f)(X,Y),$$

on obtient

$$\begin{aligned}(div\ S(f))(X) &= (\nabla_{e_i} S(f))(e_i, X) \\ &= e_i(S(f)(e_i,X)) - S(f)(\nabla_{e_i} e_i, X) - S(f)(e_i, \nabla_{e_i} X).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}div(S(f)(.,X)) &= (\nabla_{e_i} S(f))(X, e_i) \\ &= e_i(S(f)(X,e_i)) - S(f)(\nabla_{e_i} e_i, X)\end{aligned}.$$

donc

$$div(S(f)(.,X)) = (divS(f))(X) + S(f)(e_i, \nabla_{e_i} X)$$

or

$$\begin{aligned}S(f)(e_i, \nabla_{e_i} X) &= S(f)(e_i, g(\nabla_{e_i} X, e_j)e_j) \\ &= S(f)(e_i, e_j) \cdot g(\nabla_{e_i} X, e_j) \\ &= \left\langle\ S(f), \nabla X\ \right\rangle\end{aligned}$$

on déduit que

$$div(S(f)(.,X)) = (divS(f))(X) + \left\langle\ S(f), \nabla X\ \right\rangle.$$

Théorème 3.2.1 *Soient $f : \mathbb{B}_R^m \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction harmonique, où $\mathbb{B}_R^m$ est la boule euclidienne de dimension m et de rayon R.*

Si f est constante sur le bord $\partial\mathbb{B}_r^m = S_r^{m-1}$, $\quad r < R$
Alors f est constante.

Preuve :
Comme f est harmonique, alors

$$divS(f) = 0,$$

d'où

$$div(S(f)(.,X) = \left\langle\ S(f), \nabla X\ \right\rangle.$$

Pour $X = r\frac{\partial}{\partial r}$ où $\frac{\partial}{\partial r}$ le vecteur normal à S_r^{m-1}, calculons le deuxième terme de cette équation, on a

$$\begin{aligned}\left\langle\ S(f), \nabla X\ \right\rangle &= S(f)(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r})g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X, \frac{\partial}{\partial r}) + S(f)(\frac{\partial}{\partial r}, e_i)g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X, e_i)\\ &+ S(f)(\frac{\partial}{\partial r}, e_i)g(\nabla_{e_i}X, \frac{\partial}{\partial r}) + S(f)(e_i, e_j)g(\nabla_{e_i}X, e_j).\end{aligned}$$

où $i, j = 1, ..., m-1$.

Comme $X = r\dfrac{\partial}{\partial r}$, alors :

$$g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X, \frac{\partial}{\partial r}) = 1,$$

de même

$$g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X, e_i) = g(\nabla_{e_i}X, \frac{\partial}{\partial r}) = 0$$

et

$$g(\nabla_{e_i}X, e_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Il suit que pour $X = r\dfrac{\partial}{\partial r}$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle\ S(f), \nabla X\ \right\rangle &= S(f)(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) + S(f)(e_i, e_i)\\ &= trS(f).\end{aligned}$$

Donc pour $X = r\dfrac{\partial}{\partial r}$, on déduit que

$$div(S(f)(., X) = trS(f) = (m-2)e(f).$$

Par une integration sur $\mathbb{B}_r^m$, on obtient

$$\int_{\mathbb{B}_r^m} div(S(f)(., r\frac{\partial}{\partial r})dx = (m-2)\int_{\mathbb{B}_r^m} e(f)dx.$$

Or d'aprés le théorème de la divergence, on a

$$\int_{\mathbb{B}_r^m} div(S(f)(.,r\frac{\partial}{\partial r})dx = \int_{S_r^{m-1}} rS(f)(\frac{\partial}{\partial r},r\frac{\partial}{\partial r})d\sigma.$$

où

$$S(f)(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}) = e(f) - |\frac{\partial f}{\partial r}|^2,$$

on a donc

$$\int_{S_r^{m-1}} r(e(f) - |\frac{\partial f}{\partial r}|^2)d\sigma = (m-2)\int_{\mathbb{B}_r^m} e(f)dx,$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} e(f) &= \frac{1}{2}|f|^2 \\ &= \frac{1}{2}(|e_i(f)|^2 + |\frac{\partial f}{\partial r}|^2 \end{aligned}$$

Sur la sphère S_r^{m-1}, on sait que par hypothèse que f est constante, donc

$$e(f)/_{S_r^{m-1}} = \frac{1}{2}|\frac{\partial f}{\partial r}|^2,$$

il suit que

$$(m-2)\int_{\mathbb{B}_r^m} e(f)dx = -\frac{1}{2}\int_{S_r^{m-1}} r|\frac{\partial f}{\partial r}|^2 d\sigma,$$

or

$$\int_{S_r^{m-1}} r|\frac{\partial f}{\partial r}|^2 d\sigma \geq 0,$$

ce qui implique

$$(m-2)\int_{\mathbb{B}_r^m} e(f)dx \leq 0,$$

mais

$$e(f) = \frac{1}{2}|df|^2 \geq 0,$$

donc
$$\int_{\mathbb{B}_r^m} e(f)dx \geq 0.$$
Enfin comme $m > 2$, on a
$$\int_{\mathbb{B}_r^m} e(f)dx \leq 0.$$
on déduit que
$$\int_{\mathbb{B}_r^m} e(f)dx = 0.$$
Cela implique que
$$e(f) = 0.$$
C'est à dire
$$df = 0,$$

Alors f est constante.

Bibliographie

[1] P. Baird et J. C. Wood, Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds, Oxford Sciences Publications (2003).

[2] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic maps between warped product manifolds. Journal of Geometry and Physics. Volume 57, Issue 2, January 2007, Pages 449-466 .

[3] M. Berger et P. Gauduchon et E. Mazet, Le spectre d'une variété Riemannienne, Lecture Notes in Mathematics. 194, Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. 1971.

[4] Y. C. Bruhat, Géométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs, Dunod (1968).

[5] R. Hamilton, Harmonic maps of Manifolds with boundary, Lecture Notes in Math. 471, Springer-Verlag, 1975.

[6] R. Schoen et S.T.Yau, Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with nonnegative Ricci curvature, Comment. Math. Helvitici 51 (1976), 333-341.

[7] S.T. Yau, harmonic Function on Complete Riemannian Manifold, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 201-228.

[8] S.T. Yau, Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifold and Their Application to Geometry, Indiana University Mathematics Journal, vol.25, No.7 (1976).