Les Relations Linéaires dans espace de Hilbert

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master L.M.D.

Université Dr : Tahar Moulay de Saida

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse fonctionnelle

par

Boutaleb **H**alima

Sous la direction de

Encadreur : M^r **A. Azzouz**

2012 - 2013

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon "**Dieu**" qui a donné le courage et la volonté pour réaliser ce travail.
Je tiens à exprimer notre reconnaissance a M^r **AZZOUZ Abdelhalim** pour avoir accepte l'encadreur de mon travail, pour la confiance qu'il m'accorde a réalises ce projet ainsi que pour sa grand attention et sa patience tout au long de ce travaille.

Je le remercies vivement les jurys de cette mémoire, monsieur ...., pour avoir accepté de présidé le juré, messieurs ...., pour avoir accepté d'examiner ce travaille.

Je tiens à remercier tous nos enseignants de département des mathématiques qui ont contribué dans notre formation.

Je remercie à titre individuel mon enseignants : D.Ghouti, A. Azzouz, K.Djerfi, M.Belmekki, D.Djebbouri, F.Hathout, T.Guendouzi, H.Dida, S.Abbas, S.Ouakkas, F.Mokhtari, M^{elle}.Benziadi et F.Benziadi. A toutes je me dit merçi.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participe de prés ou de loin a la rédaction de ce modeste de travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail en signe de respect et de reconnaissance aux :

-Mes prés chers parents pour les sacrifices qu'ils ont consentent en mon égard.

-Le plus important, va à mon marie "Ali Ghaout", qui est aidé et soutenu financièrement et moralement.

-Tous mes frères et soeurs "Mourad, Ahmed, Ali, Zohra, Chaimaa, Ikram".

-A ma soeur "Fatima" et leur marie "Miloud Chérifi", son oublier leurs fils "Zahra, Nour Alhoda et Mohamed".

-Tous mes oncles.

-Tous mes collègues de travaille.

- Tous mes amies "Soumia, Asma, S.Fadila, H.Fadila, Aicha, Mohamed, Ouakkas, Ibrahim, Aziz, Abdelrahmen", surtous "Sihem Chérifi et Khayra Guendouzi ".

-A la famille Boutaleb, Boukhlifa et Ghaout "au sans large".

- Tous ceux qui m'ont aidé, le pré ou de loin dans ma formation.

Le dérnier dédicace, le plus important, va à ma trés chères amies "A. Mabrac et D.
".

Table des matières

Notations

$L^2(\mathbb{R})$: est un espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable.

$C(H)$: L'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense sur H.

$B(H)$: L'algebre des opérateurs linéaire bornés sur H.

$D(A)$: Domaine de A.

$G(A)$: Graphe de A.

A^* : L'adjoint de A.

$R(A)$: Résolvante de l'opérateur A.

$\sigma(A)$: Spectre de l'opérateur A.

$\sigma_c(A)$: Spectre continu de A.

$\sigma_r(A)$: Spectre résiduel de A.

$\sigma_p(A)$:Spectre ponctuel de A.

$\sigma_{ess}(A)$: Spectre essentiel d'opérateur A.

$\widetilde{f} = \mathcal{F}f$: Transformation de Fourier de f.

$A \bullet B = F^{-1}(F(A)F(B))$: Produit MM des opérateurs non bornés dans H.

$LR(H)$: L'ensemble des relations linéaires sur H.

T : Relation linéaire .

P_E, P_F : Les projections orthogonales dans $H \oplus H$ sur E et F respectivement.

$RS(H)$:Ensemble des sous-espaces des opérateurs linéaires à image de H.

$F(H)$: Ensemble de tous les sous-espaces linéaires fermées de H.

$S(\mathbb{R}^n)$: La sphère de $\mathbb{R}^n$.

Introduction Générale

On a présenté un exemple plus simple d'opérateur linéaire à plusiers valeurs et T^{-1} est l'inverse d'une application linéaire T de X dans Y (où X et Y sont des espaces vectoriels), a défini par l'ensemble de solutions.

$$T^{-1}Y = \{x \in X, Tx = y\}$$

de l'equation $Tx = y$.

L'aplication T avec domaine $D(T)$ un sous-espace linéaire de X et rang dans $2^Y \backslash \emptyset$ (l'ensemble de sous-ensembles non vides de Y) est appelé un opérateur linéaire à plusieurs valeurs, ou relation linéaire est satisfies

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$$

pour tout x_1, x_2 dans $D(T)$ et α, β défirant de zéro.

La relation linéaire a été introduite dans analyse fonctionnelle, motivée par le besoin de considérer adjoint d'opérateurs différentiels linéaires définis non compacts.

On considère deux espaces de Hilbert H_1 et H_2, une relation linéaire T entre H_1 et H_2 est un sous espace vectoriel du produit cartésien $H_1 \times H_2$. L'ensemble de relation linéaire sera noté $LR(H)$, on peut définir l'inverse T^{-1}, fermeture $\overline{T}$, extensions et l'adjoint $T^{'}$ pour une relation linéaire T. Même pour des opérateurs linéaires non bornés, on a aussi défini son l'inverse, la fermeture, l'extension et l'adjoint, leur résolvante et les spectres.

A travers cette mémoire, on essayera de mieus connaitre les propriétés des relations linéaires tout en faisant les liens avec la bibliographie des opérateurs linéaires. une attention particulière sera donnée aus relations linéaires fermées et une comparaison avec les opérateures fermés.

Dans le premier chapitre, on fera un rappel élémentaire de la théorie des opérateurs non bornés, plus particulièrement les fermés. Si un opérateur n'est pas fermé, on essayera de voir un procédé afin de lui attribuer une extension fermée, ainsi il sera dit fermable.

En outre, ce chapitre est complété par les principales notions mathématiques liées à la théorie des perturbations des opérateurs non bornés, principalement les opérateurs auto-adjoints, essentiellement auto-adjoints et fermés. Les théorèmes fondamentaux seront énoncés ainsi que les avancées importantes de la théorie des perturbations. A la fin de ce chapitre, on discutera du produit de deux opérateurs fermés et les difficultés liées à cette opération, la trivialité de la somme et du produit reste toujours un problème dont il faut se préocuper. D'une part, le théorème spectral montre que cette situation ne peut exister pour le carré d'un opérateur auto-adjoint et par suite ses itérés naturels, d'une autre part on se demande alors si cela reste valide pour le produit quelconque des opérateurs fermés. A la suite de ce chapitre, on notera ce qu'on connait sur l'égalité de l'adjoint du produit de deux opérateurs fermés sur un espace de Hilbert, et on a défini les opérateus semi fermés puis les opérateurs presque fermés.

Au dexième chapitre, nous commençons par définir la topologies sur l'ensemble des opérateurs fermés à domaines denses noté par $C(H)$. D'une part on a défini la métrique de gap "g", d'autre part, on a défini d'autres métrique variantes à g qui sera bien défini dans la première section de cette chapitre. A la suite de ce chapitre, on a défini les relations linéaire T entre deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 comme un sous espace vectoriel cartésien $H_1 \times H_2$ puis en examinant la théorie des relations linéaires sur les ensembles. Nous avons commencés par les définition néssicaires (le graqhe, l'inverse, l'image et l'extension) et les propiétés de basse des relations linéaire, puis en a vus la norme, le module de minimum et la contenuité d'une relation linéaire. A la fin, nous avons définis les relations fermées et fermables, son oubliés l'adjoints et quelque propriétés trés importantes et nous avons parlé sur la complétude de $LR(H)$ par le métrique de gap "g".

La dernière chapitre elle défini les opérations entre deus relations linéaire, premièrement, nous avons parlés sur la difficulté de la somme et le produit dans $C(H)$.

puis on a rappeli quelque définition des base de $LR(H)$.

Chapitre 1

Opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert

Ce chapitre introduit les notions fondamentales des opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert H ayant un graphe fermé. On va définir leurs domaines comme un sous espace vectoriel, nous nous intéréssons ici par les notions de la fermeture et de l'adjoint des opérateurs symétriques, essentiellement auto-adjoint et auto-adjoint. On exposera ici les proprietés élementaires et on donnera par la suite des exemples récents d'opérateurs non bornés qui nous permettront de mieux voir l'intêret du sujet de notre étude.

1.1 Définitions des base

Soit H un espace de Hilbert. Dans la physique mathématique, les opérateurs que l'on rencontre ne sont pas définis partout dans H. En général, ils sont définis sur un sous-espace vectoriel de H qui est le plus souvent dense dans H. Par exemple dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ les fonctions de carré intégrable l'opérateur dérivation n'est pas défini partout. En outre si $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ est dérivable, en général la dérivée $\Psi' \in L^2(\mathbb{R})$.
Enfin ces opérateurs ne sons pas en général continus, on dit qu'ils sont non bornés.

Définition 1.1.1. *Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H est un couple*

$(D(A), A)$ où $D(A)$ est un sous espace vectoriel de H et A un opérateur linéaire définit de $D(A)$ dans H

$$A : D(A) \longrightarrow H$$

On dit que A est un opérateur non borné de domaine $D(A)$.

Exemple 1.1.1. – *L'opérateur A défini sur $H = L^2(\mathbb{R})$ par :*

$$(A\varphi)(x) = x\varphi(x)$$

à par domaine

$$D(A) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) : x\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Graphe d'un opérateur

La notion du graphe d'une transformation linéaire, s'avère trés utile dans l'étude des opérateurs linéaires non bornés, elle permet de définir une classe d'opérateurs non bornés appelés opérateurs fermés qui occupe une place importante dans le domaine de la théorie spectrale et de l'analyse fonctionnelle de manière générale puisqu'en pratique les opérateurs rencontrés dans la littérature mathématique sont souvent des opérateurs fermés à domaines dense.

Définition 1.1.2. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H. **Le graphe** de A noté $G(A)$ est le sous espace vectoriel de $H \times H$ défini par :*

$$G(A) = \{(x, Ax) \in H \times H / x \in D(A)\}$$

Définition 1.1.3. *On appelle **extension** d'un opérateur A tout opérateur B tel que :*

$$D(A) \subset D(B), \text{ et } \forall x \in D(A), Ax = Bx$$

On note $A \subset S$

Deux opérateurs A et B sont dits égaux et on écrit $A = B$, si et seulement si $D(A) = D(B)$ et $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$.
$\mathcal{L}(H)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés (continus) de H dans H, c'est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme naturelle ;

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \in H \setminus \{0\}} \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \\ &= \inf\{c > 0; \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in H\}, A \in \mathcal{L}(H) \end{aligned}$$

1.2 Opérateurs linéaires fermés (fermables)

Le plus souvent, nous allons travaillé avec des opérateurs dont le domaine de définition est dense dans H.

Définition 1.2.1. *Un opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H \times H$, A est dit fermable si $\overline{G(A)}$ est un graphe d'un opérateur non borné, qui l'on note par $\overline{A}$ ($D(\overline{A})$ son domaine).*

Cette définition peut être reformulée en terme de suites par :

Définition 1.2.2. *$(A, D(A))$ est fermé sur H si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(A)$ convergente vers x dans H telle que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans $x \in D(A)$ et $Ax = y$*

Remarque 1.2.1. *En apparence, la fermeture ressemble à la continuité des opérateurs mais en réalité il s'agit de deux notions différentes. Il existe des opérateurs partiellement défini s qui sont fermés sans être bornés et d'autres bornés sans être fermés, c'est à dire que la continuité n'implique pas nécessairement la fermeture et inversement, tout dépend bien sûr de la structure topologique du domaine de l'opérateur car le théorème du graphe fermé affirme que $A \in \mathcal{L}(H)$ si et seulement si $D(A) = H$ et A est fermé.*

Il vient de ce qui précède :

Proposition 1.2.1. *[16] Soit $(A, D(A))$ un opérateur borné sur H. Alors, A est fermé si et seulement si $D(A)$ est fermé dans H*

On peut donner une autre forme équivalente de la définition de la fermeture d'un opérateur non borné $(A, D(A))$ en introduisant sur $D(A)$ le produit scalaire du graphe noté $<,>_A$.

$$< x, y >_A = < x, y > \ + \ < Ax, Ay > , \qquad \forall x, \ y \in \ D(A)$$

$\|x\|_A = (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)$ est la norme du graphe qui définie une topologie sur $D(A)$ remarque que la topologie induite sur $D(A)$ par celle de H.

$D(A)$ muni du produit scalaire $<,>$ n'est pas en général un espace de Hilbert puisqu'il n'est pas complet relativement à $\|.\|_A$ sauf si A est fermé sur H.

Proposition 1.2.2. $(A, D(A))$ *est fermé sur* H *si et seulement si* $(D(A), <,>_A)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve : Soit A est fermé, soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(D(A), <,>_A)$ alors $(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont de Cauchy dans H, elles convergent donc respectivement vers x et y dans H, de plus $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

$$\|x_n - x\|_A^2 = \|x_n - x\|^2 + \|Ax_n - Ax\|^2 \longrightarrow_{n \longrightarrow +\infty} 0$$

D'où $D(A)$ est complet pour $<,>_A$.
Réciproquement, si $(D(A), <,>_A)$ est complet, si $(x_n)_n$ est une suite de $D(A)$ convergente vers x et $(Ax_n)_n$ convergente vers y dans H, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(D(A), <,>_A)$ ainsi il existe z dans $D(A)$ tel que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - z\|_A \ = \ 0$$

Or,

$$\|x_n - z\|_A^2 = \|x_n - z\|^2 + \|Ax_n - Az\|^2$$

D'où, $(x_n)_n$ convergente vers z et $(Ax_n)_n$ convergente vers Az dans H, comme H est separé alors $x = z$ et $Ax = Az = y$.

■

Remarque 1.2.2. *[16] Un opérateur fermé* A *est peut être considéré come a un opérateur borné de* $\mathcal{L}(D(A), A)$.

Proposition 1.2.3. *Si* A *est fermable alors* $\overline{A}$ *est la plus petite extention fermée de* A.

Preuve :
Soit B une extention fermée de A. On a comme B est une extention de A, $G(A) \subset G(B)$, alors $\overline{G(A)} \subset G(B)$. Puis que $G(B)$ est fermé (car B est fermé) dans $H \times H$ voir que $\overline{A}$ est une extention fermée de A.

■

1.2.1 Adjoint d'un opérateur non borné

Définition 1.2.3. *Soit un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$ dense dans H. On définit **l'adjoint** A^* de A par :*

$$\forall x \in D(A),\ \forall y \in D(A^*) \quad < Ax, y >_H = < x, A^*y >_H$$

$<, >$ il s'agit du crochet de dualité et non un produit scalaire.

1.2.2 Opérateurs symétrique et auto-adjoint

Définition 1.2.4. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$ dense dans H.*

1. *A est dit hermitien ou symétrique si :*

$$\forall x, y \in D(A) \ < Ax, y >_H = < x, Ay >_H$$

Cela signifie que A^* est une extention de A
En effet, comme $x \in D(A)$, l'application $y \in H \longmapsto < Ax, y >$ est continue, on déduit que $x \in D(A^*)$ et $D(A) \subset D(A^*)$ et par définition $A = A^*$ sur $D(A)$.

2. *A est dit auto-adjoint si*

$$A = A^*,\ D(A) = D(A^*) \text{ et } Ax = A^*x,\ x \in D(A)$$

Ou bien A est auto-adjoint si A est symétrique et $D(A^*) = D(A)$.

Remarque 1.2.3. *Dans le cas des opérateurs linéaires bornés ces deux notions sont identiques. Dans le cas des opérateurs non bornés, tout opérateur auto-adjoint est symétrique par contre un opérateur symétrique n'est pas forcement auto-adjoint.*

Exemple 1.2.1. *[16] La transformation de Fourier F est un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n_x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$, elle transforme l'opérateur de Laplace $-\triangle$ $(= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ en l'opérateur de multiplication par la fonction $\xi^2 = (\xi_1^2 + ... + \xi_n^2)$ si $\xi = (\xi_1 + ... + \xi_n) \in \mathbb{R}^n_\xi$.*

$$F(-\triangle f(x)) = \xi^2 (Ff)(\xi)$$

Notons M l'opérateur de multiplication par $\alpha(\xi) = \xi^2$ défini sur $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$. En particulier, M est auto-adjoint de domaine

$$D(M) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi), \xi^2 g(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)\}$$

Or, $-\triangle = F^{-1}MF$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$ de domaine :

$$\begin{aligned} D(-\triangle) &= F^{-1}D(M) \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n_x), \xi^2 Ff(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n_x)\} \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n_x), F(-\triangle f) \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)\} \\ &= \{f \in L^2(\mathbb{R}^n_x), -\triangle f \in L^2(\mathbb{R}_\xi)\} \\ &= H^2(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Donnons quelques propriétés de l'adjiont dans le cadre non borné (voir par exemple ref [16])

Proposition 1.2.4. *Soit A et B deus opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert H, $D(A)$ dense dans H alors :*

1. $A^* + B^* \subset (A + B)^*$
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ *avec* $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $(AB)^* = B^* A^*$
4. $A \subset B$ *alors* $B^* \subset A^*$

Ensuite, la relation de l'adjoint et orthogonalité.

Proposition 1.2.5. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H, $D(A)$ dense dans H alors :*

1. $KerA^* = (ImA)^\perp$
2. $(KerA^*)^\perp = \overline{(ImA)}$

Preuve :

1. – ($\Longrightarrow$) Soit $y \in KerA^*$ alors $A^*y = 0$ et $< x, A^*y >= 0, \forall x \in D(A)$ ou biens $< Ax, y >= 0, \forall x \in D(A)$ il existe $Ax \perp y, y \in (ImA)^\perp$ d'où

$$KerA^* \subset (ImA)^\perp$$

- ($\Longleftarrow$) Soit $y \in (KerA^*)^{\perp}$ alors $< Ax, y >= 0, \forall x \in D(A)$ ou biens $< x, A^*y >= 0, \forall x \in D(A)$ il existe $A^*y \in D(A)^{\perp}$ puis que $D(A)$ dense, alors $D(A)^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow A^*y = 0 \Longrightarrow y \in (KerA^*)$ donc

$$(ImA)^{\perp} \subset KerA^*$$

Alors

$$KerA^* = (ImA)^{\perp}$$

2. On a $(ImA)^{\perp} = KerA^*$ alors $(ImA)^{\perp\perp} = Ker(A^*)^{\perp}$ de plus $(ImA)^{\perp\perp} = \overline{(ImA)}$ d'où

$$(KerA^*)^{\perp} = \overline{(ImA)}.$$

■

Définition 1.2.5. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H et son graphe G. Si G^* désigne la graphe de l'adjoint de A on a :*

$$G^*(A) = [V(\overline{G})]^{\perp}$$

où

$$J : (x, y) \longmapsto (y, -x).$$

Théorème 1.2.1. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$ dense dans H alors :*

1. *A^* est fermé.*
2. *A est fermable si et seulement si $D(A^*)$ est dense dans H dans ce cas on a :*

$$\overline{A} = A^{**}.$$

3. *Si A est fermable alors*

$$(\overline{A})^* = A^*.$$

Preuve :

A- On munit $H \times H$ du produit scalaire

$$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >=< x_1, x_2 > + < y_1, y_2 >$$

et on définit l'opérateur V sur $H \times H$ par $V(x, y) = (y, -x)$, V est une isométrie car

$$\begin{aligned} \| V(x,y) \|_{H\times H} &= \| (y,-x) \|_{H\times H} \\ &= [\|y\|^2 + \|x\|^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|(x,y)\|_{H\times H} \end{aligned}$$

de plus V est surjectif alors V est un opérateur unitaire et $V^2 = -Id$ pour tout espace vectoriel E de $H \times H$ on a :$V(E^{\perp}) = (V(E))^{\perp}$.

En effet $V(E^{\perp}) \subset (V(E))^{\perp}$ car si $y \in V(E^{\perp})$ alors $y = V(x)$ où $x \in E^{\perp}$ il existe $y = V(x)$ où $< x, y >= 0, \forall z \in E$ or

$$\begin{aligned} < y, V(z) > &= < V(x), V(z) > \quad V\ unitaire \\ &= < x, z >= 0\ \forall z \in E \end{aligned}$$

D'où $y \in (V(E))^{\perp}$

Réciproquement, on a $(V(E))^{\perp} \subset V(E^{\perp})$ car si $y \in (V(E))^{\perp}$ alors

$$< y, V(x) >= 0, \forall x \in E.$$

De plus, il existe $z \in H \times H$ tel que $y = V(z)$ d'où

$$< V(z), V(x) >=< z, x >= 0, \forall x \in E, \exists z \in E^{\perp}\ et\ y \in V(E^{\perp}).$$

On sait que $(x, z) \in H \times H$ donc

$$\begin{aligned} (x,y) \in [V(G(A))]^{\perp} &\iff < (x,y), (-Az, z) >= 0\ \forall z \in D(A) \\ &\iff [< x, Az >=< y, z >,\ \forall z \in D(A)] \\ &\iff A^*x = y, \forall x \in D(A^*) \\ &\iff (x,y) \in G(A^*). \end{aligned}$$

D'où

$$G(A^*) = [V(G(A))]^{\perp} = V[(G(A))^{\perp}].$$

Puisque $[V(G(A))]^{\perp}$ est fermé dans $H \times H$ ceci montre que A^* est fermé.

B- Remarquons que $V^2(G(A)) = G(A)$ et

$$\begin{aligned} \overline{G(A)} &= [G(A)^\perp]^\perp \\ &= [V^2 G(A)^\perp]^\perp \\ &= V[V(G(A)^\perp)]^\perp \\ &= [V(G(A^*))]^\perp \end{aligned}$$

Par analogie, on peut définir A^{**} si $D(A^*)$ est dense dans H on a

$$\overline{G(A)} = [V(G(A^*))]^\perp = G(A^{**})$$

d'aprés (**A**), $\overline{G(A)}$ est un graphe de $A^{**} = \overline{A}$.
Réciproquement, si $D(A^*)$ n'est pas dense dans H alors $D(A^*)^\perp \neq \{0\}$. Soit $\Psi \in D(A^*)^\perp/\{0\}$ donc $(0, \Psi) \in [V(G(A^*))]^\perp$ car

$$< (0, \Psi), (-A^* f, f) >= - < 0, A^* f > + < \Psi, f >$$

d'où

$$[V(G(A^*))]^\perp = 0, \ \forall f \in D(A^*)$$

.
et puisque

$$[V(G(A^*))]^\perp = \overline{G(A)}.$$

On conclut que $\overline{G(A)}$ ne peut être le graphe d'un opérateur linéaire sur H, donc ne peut être fermable.

C- Si A est fermable alors $D(A^*)$ est dense dans H et

$$A^* = \overline{(A^*)} = A^{***} = (\overline{A})^*.$$

Si $(D(A), A)$ est un opérateur non borné symétrique sur H, alors A^* est un extention fermée de A et puisque $D(A) \subset D(A^*)$ et $D(A)$ est dense dans H, alors $D(A^*)$ est dense dans H par conséquent A est fermable et on a $\overline{A} = A^{**}$ mais comme $\overline{A}$ et le plus petite extention fermée de A. On a aussi $A \subset A^{**} \subset A^*$. En particulier, si A est symétrique on a

$$A = A^{**} \subset A^*$$

Si de plus A est auto-adjoint, alors

$$A = A^{**} = A^* = \overline{A}$$

De ce qui précède, on déduit qu'un opérateur fermé symétrique est **auto-adjoint** si et seulement si son adjoint est **symétrique**

$$A = A^{**} \subset A^* = A^{***} \subset A^{**} = A$$

■

Définition 1.2.6. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné symétrique sur un espace de Hilbert H, A est dit* ***essentiellement auto-adjoint*** *si $\overline{A}$ est auto-adjoint ou bien*

$$(\overline{A})^* = \overline{A}$$

Remarque 1.2.4. *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais le réciproque est en général fausse.*

Exemple 1.2.2. *[16]Soit $A = -\Delta = -\Sigma_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine $D(A) = S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathbf{C}^\infty$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.*
En intégrant deux fois par parties, il est facile de voir que A est symétrique sur $S(\mathbb{R}^n)$.
Alors A est fermable et $A \subset \overline{A} = A^{**} \subset A^*$. En fait

$$D(\overline{A}) = H^2(\mathbb{R}^n)$$

Soit $\Psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$ par densité de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $H^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $S(\mathbb{R}^n)$ convergente vers Ψ pour la topologie de $H^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|D^\alpha\Psi_n - D^\alpha\Psi\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}) = 0, \forall\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 2$$

Or,

$$(\Psi_n, -\triangle\Psi_n) \in G(A), \forall n \in \mathbb{N}$$

Et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\Psi_n, -\triangle\Psi_n) = (\Psi, -\triangle\Psi)$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$*, c'est à dire*

$$(\Psi, -\triangle\Psi) \in G(\overline{A})$$

ou bien

$$\Psi \in D(\overline{A}) \text{ et } \overline{A}\Psi = -\triangle\Psi$$

Réciproquement, si $\Psi \in D(\overline{A})$ *alors*

$$(\Psi, -\triangle\Psi) \in G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$$

il existe alors une suite $(\Psi_n, -\triangle\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $G(A)$ *telle que* $(\Psi_n, -\triangle\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(\Psi, -\triangle\Psi)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ *c'est à dire* $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* Ψ *et* $(-\triangle\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $-\triangle\Psi$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, donc* Ψ *et* $\triangle\Psi$ *sont dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, par conséquent* $\Psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$.
Nous savons que $D(A^*) = H^2(\mathbb{R}^n)$*. Alors* $\overline{A} = A^*$ *et* $\overline{A}^* = A^{**} = \overline{A}$ *donc* $\overline{A}$ *est auto-adjoint ou bien* A *est essentiellement auto-adjoint à partir de* $S(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 1.2.1. *Si* A *est essentiellement auto-adjoint donc* A *a une unique extension auto-adjointe* $\overline{A}$

Preuve :
Si B un extension auto-adjointe de A, comme B est fermé alors $\overline{A} \subset B$, donc $B^* \subset (\overline{A})^*$ et $B = \overline{A}$ puisque $B^* = B$ et $(\overline{A})^* = A$.
On a : $\overline{A} \subset B$ montrer que $B \subset \overline{A}$.
B auto-adjoint implique que $B^* = B$, B est fermé implique que $B = \overline{B}$.
D'autre part, $B^* \subset (\overline{A})^*$ et comme A est essentiellement auto-adjoint alors

$$(\overline{A})^* = \overline{A}$$

Il existe

$$B^* \subset \overline{A}$$

Donc

$$B = B^* \subset \overline{A}$$

■

Remarque 1.2.5. *Si A_1 et A_2 sont deux opérateurs auto-adjoints, et si $A_1 \subset A_2$ alors $A_1 = A_2$*

Théorème 1.2.2. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné symétrique sur un espace de Hilbert H, de domaine dense dans H. Alors les assertions suivantes sont équivalantes :*

A- *A est auto-adjoint.*

B- *A est fermé et $Ker(A^* \pm i) = \{0\}$*

C- *$Im(A \pm i) = H$*

Preuve :
Montrons que (**A**) implique (**B**)

Soit

$$\begin{aligned} x \in Ker(A^* - i) &\Longrightarrow (A^* - i)x = 0 \\ &\Longrightarrow A^*x = ix \\ &\Longrightarrow Ax = ix \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < Ax, x > &= < ix, x > \\ &= i < x, x > \\ &= < x, ix > \\ &= < x, Ax > \\ &= -i < x, x > \end{aligned}$$

$$i < x, x >= -i < x, x > \Longrightarrow < x, x >= 0$$

Donc $x = 0$
Alors

$$Ker(A^* - i) = \{0\}$$

L'égalité $Ker(A^* + i) = \{0\}$ se démontre de la même manière que précédemment.
D'où

$$Ker(A^* + i) = Ker(A^* - i) = \{0\}$$

Montrons que $Im(A \pm i)$ est dense dans H. D'aprés **(B)** on a $Im(A - i)$ et $Im(A + i)$ sont fermés dans H.

Puisque $KerA^* = (ImA)^\perp$
On a donc

$$Im(A-i)^\perp = Ker(A^*+i) = \{0\}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} Im(A+i)^\perp = \{0\} &\implies Im(A+i)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp \\ &\implies \overline{Im(A+i)} = H \end{aligned}$$

Alors $\overline{Im(A+i)} = H$
$\overline{Im(A-i)} = H$ se démontre de la même manière.
Enfin on obtient lés égalités :

$$Im(A-i) = Im(A+i) = H$$

■

1.2.3 Résolvante des opérateurs non bornés

Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H, de domaine $D(A)$ dense dans H.

Définition 1.2.7. *On appele ensemble resolvant de opérateur* $(D(A), A)$ *l'ensemble* $\delta(A)$ *des* λ *complexes tels que :*

i- $Im(A-\lambda I)$ *est dense dans* H. *(*I *étant l'identité de* H*)*

ii- $(A-\lambda I)$ *est inversible de* $D(A)$ *dans* $Im(A-\lambda I)$ *d'inverse borné. (*$Im(A-\lambda I)$ *muni de la topologie induite par* H*)*

On note

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$$

pour tout $i \in \delta(A)$, $R_\lambda(A)$ *est appelé l'opérateur résolvant ou résolvente de* A.

Proposition 1.2.6. *Soit* $(D(A), A)$ *un opérateur non borné sur un espace de Hilbert* H, *de domaine* $D(A)$ *alors :*

1- *$R_\lambda(A)$ est borné sur $Im(A-\lambda I)$ dans $D(A)$ signifie.*

$$\exists c>0, \forall u \in Im(A-\lambda I), \quad \|R_\lambda(A)\|_H \leq c\|u\|_H$$

2- *Si $(D(A), A)$ est un opérateur fermé sur H alors*

$$\delta(A)=\{\lambda \in \mathbb{C}/ \ R_\lambda(A) \ existe \ et \ est \ dans \ \mathcal{L}(A)\}$$

Preuve : On a :

1- ($\supseteq$) Si $R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(A)$, alors $R_\lambda(A)$ a pour domaine H et $Im(A-\lambda I)=H$ (car si $u \in H, u=(A-\lambda I)R_\lambda(A)u)$. $Im(A-\lambda I)$ est dense dans H et $R_\lambda(A)$ est borné de $Im(A-\lambda I)=H$ dans H or $\lambda \in \delta(A)$.
($\subseteq$) Soit $\lambda \in \delta(A) \Longrightarrow \overline{Im(A-\lambda I)}=H$ et $R_\lambda(A)$ borné sur $Im(A-\lambda I) \Longrightarrow$ $\exists c>0, \forall u \in Im(A-\lambda I)$:

$$\|R_\lambda(A)\|_H \leq c\|u\|_H$$

2- On a $W \in H \Longrightarrow W=(A-\lambda I)V, V \in D(A)$. Soit $W \in H$, puis que $\overline{Im(A-\lambda I)}=H$ donc il éxiste (V_j) dans $D(A)$ tel que $(A-\lambda I)V_j$ converge vers W dans H.
La propriété précédente applique à $V=(V_j-V_k)$ donne

$$\|V_j-V_k\|<c\|(A-\lambda I)V_j-(A-\lambda I)V_k\| \longrightarrow_{j,k\longrightarrow+\infty} 0$$

Doù (V_j) est une suite de cauchy dans H donc elle converge vers V dans H.
En particulier $V_j,(A-\lambda I)V_j$ est le graphe de $(A-\lambda I)$ est converge dans $H\times H$ vers (V,W).
De même (V_j, AV_j) est dans le graphe de A est converge dans $H\times H$ vers $(V, W+\lambda V)$, puis que A est fermé on a :

$$VA=W+\lambda V$$

il éxiste

$$W=(A-\lambda I)V \in Im(A-\lambda I)$$

donc

$$H \subset Im(A-\lambda I)$$

d'où

$$Im(A - \lambda I) = H$$

Alors

$$R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(A)$$

■

1.2.4 Spectre des opérateurs non bornés

Définition 1.2.8. *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H,on désigne pour $\sigma(A)$ le complémentère de $\delta(A)$ dans G, $\sigma(A)$ le spectre de l'opérateur A.*

Remarquons que $\lambda \in \delta(A)$ si selement si les conditions **(i)** et **(ii)** de la définition de l'ensemble résolvant sont satisfaites.
Donc $\lambda \in \sigma(A)$ si seulement si **(i)** est satisfaite et pas **(ii)**, ou bien **(ii)** est satisfaite et pas **(i)**, ou bien **(i)** et **(ii)** ne sont pas satisfaites, alors :

$$\sigma(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$$

1- Spectre continu :On note $\sigma_c(A)$ est défini par
$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma / \ (A - \lambda I) \ est \ inversible \ de \ D(A) \ dans \ Im(A - \lambda I) \ et \ \overline{Im(A - \lambda I)} = H \ mais \ R_\lambda(A) \ n'est \ pas \ born\acute{e}\}$
2-Spectre résiduel : On note $\sigma_r(A)$ est défini par
$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma / \ (A - \lambda I) \ est \ inversible \ de \ D(A) \ dans \ Im(A - \lambda I) \ et \ \overline{Im(A - \lambda I)} \neq H\}$
3-Spectre ponctuel : On note $\sigma_p(A)$ est défini par
$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma / \ (A - \lambda I) \ n'est \ pas \ inversible \ de \ D(A) \ dans \ Im(A - \lambda I)\}$

Remarque 1.2.6. **1-** *$\lambda \in \sigma_p(A) \iff \exists V \neq 0, V \in H$ tel que $AV = \lambda V$ il existe $Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.*

2- *$E_\lambda = \{V / \ AV = \lambda V\}$ est le sous espace propre associé à λ.*

3- *$\delta(A)$ peut être vide, $\sigma(A)$ peut être vide, mais $\delta(A)$ et $\sigma(A)$ ne sont pas vide en même temps.*

1.2.5 Spectre discret et Spectre essentiel

La notion de spectre essentiel et de spectre discret est d'une trés grande importance. Nous verrons que le spectre de certains opérateurs s'interprète à l'aide desétats stationnaires du système.
Afin d'éviter toute confusion entre les spectres discret et ponctuel, rappelons que le spectre ponctuel est par définition l'ensemble des valeurs propres de A c'est-a-dire l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $(z - A)$ n'est pas injectif (voir [2]) .

Définition 1.2.9. *[2] On appelle **spectre discret** l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie isolées (c'est-a-dire telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\cap \sigma(A) = \{\lambda\}$).*
*On appelle **spectre essentiel** le complémentaire du spectre dixret dans $\sigma(A)$. On le note $\sigma_{ess}(A)$*

Ainsi, le spectre discret est inclus dans $\sigma_p(A)$ mais on n'a pas forcément l'égalité, une valeur propre λ de multiplicité infinie ou bien telle qu'il existe une suite injective $(\lambda_n) \subset \sigma(A)$ telle que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ est dans $\sigma_{ess}(A)$.
Nous donnons pour finir une caractérisation du spectre essentiel.

Théorème 1.2.3. *(**Théorème Spectral**) Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H séparable et de spectre $S = \sigma(T)$.*
Il existe une mesure finie μ sur $S \times \mathbb{N}$ et un opérateur unitaire $U : H \longrightarrow L^2(S \times \mathbb{N}, d\mu)$ tels que :
Si $h : S \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $h(s, n) = s$ tel que $s \in S$ et $n \in \mathbb{N}$ alors on a $f \in D(T)$ si et seulement si $h.U(f) \in L^2(S \times \mathbb{N}, d\mu)$. De plus

$$UTU^{-1}\Psi = h\Psi \text{ pour tout } \Psi \in U(D(T))$$

et

$$Uf(T)U^{-1}\Psi = f(h)\Psi \text{ pour tout } f \in C_0\mathbb{R} \text{ et}\Psi \in L^2(S \times \mathbb{N}, d\mu).$$

Pour la démanstration voir [**?**]

Définition 1.2.10. *Soit A un opérateur auto-adjoint de H. On utilise les notions du théorème et si $a, b \in \mathbb{R}$, on note :*

$$\begin{aligned} E_{a,b} &= \{(s,n) \in S \times N : a < h(s,n) < b\} \\ &= \{(s,n) \in S \times N : a < s < b\} \end{aligned}$$

$$L_{a,b} = \mathcal{L}^2(E_{a,b}, du)$$

Lemme 1.2.2. *[2] Le spectre essentiel $\sigma_{ess}(A)$ est une partie fermée de $\sigma(A)$. De plus on a :*

$$\lambda \in \sigma_{ess}(A) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, dim L_{\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon} = +\infty$$

Corollaire 1.2.1. *[2] Soit A un opérateur symétrique sur H. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est essentiellement auto-adjoint.*
2. *$N(A^* \pm i) = \{0\}$.*
3. *$\overline{Im(A \pm i)} = H$.*

1.3 Opérations sur les opérateurs fermés

Les opérations d'addition et de composition (appelée aussi opération de multiplucation) des opérateurs non bornés sont des questions délicates car il peut arriver que le domaine de la somme on du produit soient réduit à zéro.
Dans le cas où le domaine de la somme et du produit n'est pas trivial, ces opérations ne conservent pas en général le caractère fermé, adjoint, auto-adjoint, essentiellement auto-adjoint,.......
On présente dans cette section des exemples d'opérateurs non bornés dont le domaine de la somme et du produit est trivial ainsi que des exemples d'opérateurs fermés dont la somme et le produit n'est pas fermé. Signalons que de tels exemples sont trés rares ou plutôt introuvables dans toute la littérature mathématique pédagogique et de recherche.
On fournit ensuite toutes les propriétés connues relatives à la somme, au produit et au passage à l'adjoint et à la limite dans l'espace des opérateurs fermés. Certaines défaillances de ces résultats sont aussi illustées par des exemples types.

1.3.1 Opérations sur les opérateurs linéaires non bornés

Définition 1.3.1. *Soient $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ deus opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert H.*
On définit l'opérateur somme $(A+B)$ de A et B sur H par :

$$\begin{cases} (A+B)x = Ax + Bx,\ \forall\ x \in D(A+B)\ ; \\ D(A+B) = D(A) \cap D(B). \end{cases}$$

et l'opérateur produit AB de A par B sur H par :

$$\begin{cases} (AB)x = A(Bx), \forall x \in D(AB)\ ; \\ D(AB) = \{x \in D(B); Bx \in D(A)\}. \end{cases}$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} (\alpha A)x = \alpha Ax, \forall x \in D(A)\ ; \\ D(\alpha A) = D(A). \end{cases}$$

$\alpha A = 0$ si $\alpha = 0$.

1.3.2 Trivialité de la somme et du produit

1- Construction d'un opérateur linéaire symétrique fermé A tel que $D(A^2) = \{0\}$

La théorie montre que bien evidemment, si l'on se place dans le cadre auto-adjoint, on garantit la non trivialité du carré d'un opérateur (grâce au théorème spectral voir [1]) mais pas la stabilité malheureseusement. Naimark était le premier à traiter ce proplème, il donna une méthode implicite pour la construction d'un opérateur symétrique A de telle sorte à avoir $D(A^2) = \{0\}$. Chernoff plus tard, donna une approche plus explicite pour la construction de tels opérateurs qui peuvent aussi être des opérateurs semi-bornés dans ce cas (voir chapitre suivant).
On utilise ici de la transformation de cayley. Rappelons que si M et N sont deus sous-espaces vectoriels d'un espace de Hilbert H et U est une isométrie de M dans N telle que $(U-I)M = D$ est dense dans H, alors $(U-I)$ est bijectif et $A = i\,(U+I)(U-I)^{-1}$ est un opérateur symértique fermé de domaine dense $D(A) = D$.
Précisement, $D(A^2) = \{0\}$ dès que $Im(U+I) \cap Im(U-I) = \{0\}$ et à fortiori si

$M \cap N = \{0\}$ car

$$A^2 = -[2(U-I)^{-1}+I](U+I)(U-I)^{-1} = i[2(U-I)^{-1}+I]A$$

On va alors construire selon P.R.Chernoff (voir [16]) M, N et U vérifiant ces conditions.

Pour cela prenons $H = L^2(S)$, où S est le cercle unité,

$M = H^2(S) = \{f \; analytique \; sur \; le \; disque \; unité \; ouvert \; telle \; que \; \sup(\frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta)\frac{1}{2} < +\infty\}$

et U l'opérateur de multiplication, défini sur $L^2(S)$, par la fonction $\alpha(\theta)$:

$$\alpha(\theta) = \begin{cases} \exp(re^{\frac{-1}{\theta}}), \; 0 < \theta < \Pi\,; \\ -1, \Pi < \theta < 2\Pi. \end{cases}$$

Posons aussi

$$\begin{aligned} N = \quad & ImU = \quad UM \\ = \quad & \alpha H^2(S) = \quad \{\alpha\varphi; \varphi \in H^2(S).\} \end{aligned}$$

Alors

i- $|\alpha(\theta)| = 1, \forall\theta \in]0, 2\Pi] \; et \; donc \; D(U) = L^2(S).$

ii- $\alpha(\theta) = -1, sur \; un \; ensemble \; de \; mesure \; non \; nulle.$

iii- $\alpha(\theta) \neq 1, \forall\theta \in]0, 2\Pi]$

Mais

$$\int_0^{2\Pi} \log|\alpha(\theta) - 1| d\theta = -\infty$$

En effet,

$$\log|\alpha(\theta) - 1| = \begin{cases} \log|\exp(ie^{\frac{-1}{\theta}} - 1)| \; sur \;]0, \Pi[\,; \\ \log 2 \; sur \; [\Pi, 2\Pi]. \end{cases}$$

Si $\theta \in]0, \Pi[, \alpha(\theta) - 1 = \exp(ie^{\frac{-1}{\theta}}) - 1 = 2i\sin(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})e^{i}(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})$ et

$$\log|\alpha(\theta) - 1| = \log 2\left|\sin(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})\right|$$

Comme $\lim_{\theta \longrightarrow 0} \theta \log 2(\sin(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2})) = -\infty$, alors :

$$\forall C > 0, \exists\eta > 0, 0 < \theta < \eta \Longrightarrow \log 2\left(\sin\left(\frac{e^{\frac{-1}{\theta}}}{2}\right)\right) > -\frac{C}{\theta}$$

et

$$\int_0^{2\Pi} \log|\alpha(\theta)-1|d\theta = \int_0^{\eta} \log|\alpha(\theta)-1|d\theta + \int_{\eta}^{\Pi} \log|\alpha(\theta)-1|d\theta + \Pi\log 2 = -\infty$$

iv- $\forall\theta \in]0, 2\Pi], Im\alpha(\theta \geq 0)$.

Le théorème de G.Sczego [?] affirmeque si f est une fonction non nulle de $H^2(S)$, alors

$$\int_0^{2\Pi} \log|f(\theta)|d\theta > -\infty$$

En particulier, f ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesure non nulle.
Ainsi, grâce à ce résultat la propriété **ii**, on remarque que $M \cap N = \{0\}$.
En effet, si $f \in H^2(S)$ et $\alpha(\theta)f \in H^2(S)$ alors $(\alpha(\theta)+1)f \in H^2(S)$, or $(\alpha(\theta)+1)f(\theta)$ s'annule sur un ensemble de mesure non nulle, de plus f est supportée dans $[\Pi, 2\Pi]$ donc forcément f est identiquement nulle sur $]0, 2\Pi]$.
iii- montre que $(U-I)M = (\alpha(\theta)-1)H^2(S)$ est dense dans $L^2(S)$ car si $g \in ((\alpha(\theta)-1)H^2(S))^{\perp}$ alors

$$< (\overline{\alpha(\theta)}-1)g, f >_{L^2(S)} = 0, \forall f \in H^2(S)$$

d'où $(\alpha(\theta)-1)\overline{g}(\theta) \in H^2(S)$..Or, puisque l'intégrale de $\log|\alpha(\theta)-1|$ diverge vers $-\infty$ sur $]0, 2\Pi]$, on a :

$$\int_0^{2\Pi} \log|(\alpha(\theta)-1)\overline{g}(\theta)|d\theta = -\infty$$

donc en vertu du théorème de G.Szegö [?] $(\alpha(\theta)-1)\overline{g}(\theta) = 0$, et alors $g(\theta) \equiv 0$ sur $]0, 2\Pi]$.

2-Somme triviale de deux opérateurs linéaires non bornés

On se limite ici aux cas des opérateurs fermés, on considère sur $L^2(\mathbb{R})$ les opérateurs A et B de multiplication par la fonction x et x^2 de domaines respectifs $D(A) = C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ et $D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \widetilde{f} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})\}$ où $\widetilde{f} = \mathcal{F}f$ désigne la transformation de Fourier de f.
On sait que A et B deux opérateurs non bornés symétrique, essentiellement auto-adjoint, car

$$D(\overline{A}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), xf \in L^2(\mathbb{R})\}$$

et

$$D(\overline{B}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), x^2 f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

(si $f \in D(B)$, alors $\widetilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ donc $D^2\widetilde{f} = \widehat{-x^2 f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, par conséquent $x^2 f \in L^2(\mathbb{R})$). $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont auto-adjoints respectivement sur $D(\overline{A})$ et $D(\overline{B})$.

$$\begin{aligned} D(A+B) &= D(A) \cap D(B) \\ &= \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}); \widetilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

puisque le théorème de Paley-Wiener (voir [16]) affirme que l'image de Fourier d'une distribution non nulle à support compact n'est jamais à support compact.
En effet, si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\widetilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors f est prolongeable en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Or, toute fonction analytique sur $\mathbb{R}$ nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ c'est identiquement nulle $\mathbb{R}$. Donc f ne peut être à support compact à moins d'être identiquement nulle.

1.3.3 Instabilité de la somme et du produit des opérateurs fermés

Nous donnons ici des exemples d'opérateurs linéaires fermés sur $L^2(\mathbb{R})$ dont la somme et le produit n'est pas fermé sur $L^2(\mathbb{R})$. D'afin éviter la trivailété de la some et du produit des deux opérateurs, on se place dans le contexte auto-adjoint.

1- Somme non fermée sur un espace de Hilbert

Soient A et B définis sur $L^2(\mathbb{R})$ par $Af(x) = -\frac{df}{dx}(x)$ et $Bf(x) = f(x) + -\frac{df}{dx}(x)$ de domaines respectifs :

$$D(A) = D(B) = H^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

A et B sont auto-adjionts donc fermées sur $L^2(\mathbb{R})(M = \mathcal{F}^{-1}B\mathcal{F}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction réelle $(1 + x)$ il est auto-adjoint sur $D(M) = \{g \in$

$L^2(\mathbb{R}); (1+x)g(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$ donc $B = \mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F}$ est aussi auto-adjoint sur $\mathcal{F}D(M) = H^1(\mathbb{R})$).

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) = H^1(\mathbb{R})$$

Mais $(A+B)f = f$ est une restriction de l'identité à $H^1(\mathbb{R})$, donc $A+B$ ne peut être fermé

2-Produit non fermé sur un espace de Hilbert

Considérons sur $L^2(\mathbb{R})$ les opérateurs $A = -i\frac{d}{dx}$ et B l'opérateur de multiplication par la fonction $|x|$. A et B sont auto-adjoints (donc fermés) sur leur domaines respectifs :

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

et

$$D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

L'opérateur produit AB est défini sur son domaine :

$$D(AB) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R}), -i\frac{d(|x|f)}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

par

$$ABf = -i\frac{d(|x|f)}{dx}$$

$D(AB)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car il contient $C_0^\infty(\mathbb{R})$, néanmoins on montre que AB n'est certainement pas fermé.

En effet, définissons l'opérateur M sur $L^2(\mathbb{R})$ par $Mf = -i|x|\frac{df}{dx} \pm if$ de domaine

$$D(M) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); |x|\frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

où $|x|\frac{df}{dx}$ est une distribution sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Soit $(f_n, Mf_n)_n$ est une suite dont $G(M)$ est un graphe de l'opérateur M convergente dans $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ vers (f, g), alors $(f_n)_n$ converge vers f et $\left(-i|x|\frac{df_n}{dx} \right)_n$ converge

vers $g \pm if$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Ainsi $\left(\frac{df_n}{dx}\right)_n$ converge vers $\frac{df}{dx}$ au sens des distribution et à fortiori sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\left(|x|\left(\frac{df_n}{dx}\right)_n\right)$ converge aussi vers$|x|\frac{df}{dx}$. Par unicité de la limite on a $g \pm if = |x|\frac{df}{dx}$ presque pour tout x, d'où l'égalité dans $L^2(\mathbb{R})$.
Alors M est fermé sur domaine $D(M)$, de plus M est bien une extension fermée de l'opérateur AB, en fait il est montré que M est la fermeture de AB, $M = \overline{AB}$, ce qui prouve bien que M n'est pas fermé mais seulement fermable.
Le caratère auto-adjoint de deux opérateurs ne suffit pas pour garantir la fermeture du produit ou de la somme de ces opérateurs.

1.4 Différents produits de deux opérateurs fermés

Le produit usuel des opérateurs linéaires donnent lieu à les difficultés remarquons. Pour palier à ce problème, plusieurs investigations ont été lancées à travers l'introduction de nouvelles opérations de composition.

1.4.1 Produit de Dixmier

Dixmier a essayé, depuis un demi siècle, de contourner le problème de stabilité du produit usuel et celui de la formule de l'adjoint rencontrée dans la litérature mathématique en cette période. Il proposa alors une nouvelle manière de composer deux opérateurs comme suit :

Définition 1.4.1. *Le produit $A.B$ de deus opérateurs A et B est défini de la manière suivante : On dit que $f \in D(A.B)$ et $g := A.Bf$ s'il existe deus suites (f_n) dans $D(B)$ et g_n dans $R(A)$ vérifiant $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ et tel que $A^{-1}g_n - Bf_n \longrightarrow 0$ (pour $A^{-1}g_n$ et Bf_n convenablement choisis.)*

A partir de cette définition, Dixmier donna un premier résultat concernant la stabilité du produit deux opérateurs fermés.

Théorème 1.4.1. *Soit $A, B \in C(H)$ alors :*

i *$A.B \in C(H)$.*

ii *$A.B = AB$ si A est borné et B fermé borné ou si A^{-1} est fermé borné et B est fermé.*

iii *$A.B = \overline{AB}$ si A est fermé borné et B^{-1} fermé ou si A est fermé borné et B est fermé.*

Concernant la formule de l'adjoint du produit, le résultat de **Dixier** reste limité à la formule :

$$(AB)^* = B^*.A^*$$

Plus récemment, en 2008, **Messirdi** et **Mortad** (voir [1]) introduisent un nouveau produit d'opérateurs assez général que l'on va donner un aperçu maitenant.

1.4.2 Produit de Messirdi-Mortad

[1]Le produit propose par **Messirdi** et **Mortad** dans (ref [41] de [1]) en 1987 , que l'on note dorénavant produit MM, est inspríté de la notion du bissecteur d'un opérateur fermé dévloppée par **Labrousse** et **Mercier**.
Soit A un opérateur fermé à domaine dense $D(A)$. Alors l'opérateur $(I + A^*A)$ est fermé (puisque auto-adjoint) et à inverse borné. Son inverse, noté R_A est positif. En conséquence du lemme de la racine carrée on sait qu'il existe un opérateur (unique) C positif tel que $C^2 = R_A$. Il est alors ligitime de considérer $S_A = (I + A^*A)^{\frac{-1}{2}}$.

Proposition 1.4.1. *L'opérateur R_A vérifie :*

1- *R_A est borné.*

2- *AR_A est borné si A est fermé.*

3- *$R(R_A) = D(AA^*)$.*

4- *$A^*AR_A = I - R_A$*

On peut ajouter, pour $x \in D(A)$ on a $R_AAx = AR_Ax$ de sorte que $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$ et on a aussi $ker(AR_A) = ker(A)$.

Pour la démonstration voir [1].
Donnons à présent quelques propriétés de S_A qui seront utiles dans la suite de cette section.

Proposition 1.4.2. *Pour tout $x \in H$ on a :*

$$\|S_A x\|^2 + \|AS_A x\|^2 = \|x\|^2$$

et $R(S_A) = D(A)$.

On remarque, dans la proposition précédente que : $\|S_A\|_{B(H)} \leq 1$ *et* $\|AS_A\|_{B(H)} \leq 1$ et on a :

Proposition 1.4.3. *[1] Les assertions suivantes sont vérifiées voir :*

1- *Si $x \in D(A)$ $\quad S_{A_*}Ax = AS_A x$.*

2- $(AS_A)^* = A^* S_{A_*}$.

3- $ker(AS_A) = ker(A)$.

Exprimons maintenant le bissecteur d'un opérateur fermé.

Définition 1.4.2. *Soit $A \in C(H)$. Alors le bissecteur de A est l'opérateur $F(A)$ défini par $F(A) = AS_A(I + S_A)^{-1}$*

Il vérifie alors :

Proposition 1.4.4. *[1]Soit $A \in C(H)$ alors*

1- $F(A) \in C_0(H)$.

2- $(F(A))^* = (A^*)$.

3- $R_{F(A)} = \frac{I+S_A}{2}$.

4- $F(A)R_{F(A)} = \frac{AS_A}{2}$.

Afin de définir le produit MM, regardons d'abord un théorème dû à **Labrousse** et **Mercier**.

Théorème 1.4.2. *[1]*

(a) *Si* $A \in B(H)$ *alors*

$$\|F(A)\|_{B(H)} = \frac{\|A\|_{B(H)}}{1 + \sqrt{1 + \|A\|^2_{B(H)}}}$$

En particulier

$$\|I\|_{B(H)} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Inversement si $\|F(A)\|_{B(H)} < 1$ *alors*

$$A \in B(H) \text{ et } \|A\|_{B(H)} = \frac{2\|F(A)\|_{B(H)}}{1 - \|F(A)\|^2_{B(H)}}$$

(b) *L'application* $T \longmapsto F(A)$ *de* $(C(H), g)$ *vers* $(C_0(H), \|\|_{B(H)})$ *est bijective et est ouvert. Si* $A \in C_0(H)$ *alors,*

$$F^{-1}(A) = 2A(I - A^*A)^{-1}.$$

Donnons à présent la définition du produit MM.

Définition 1.4.3. *Soient* $A, B \in C(H)$. *Le produit* $\bullet$ *de deux opérateurs* A *et* B *est défini par :*

$$A \bullet B = F^{-1}(F(A)F(B))$$

où $F(A)F(B)$ *étant le produit usuel des opérateurs bornés dans* H.

Messirdi et **mortad** montrent, à partir des propriètés de l'application F (voir [1])

Théorème 1.4.3. *[1] Soient* $A, B \in C(H)$

1. *Si* $\|F(A)F(B)\|_{B(H)} < 1$ *alors*

$$A \bullet B = 2F(A)F(B)(1 - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B))^{-1}$$

ceci revient à dire que $A \bullet B$ *est borné sur* H *et*

$$\|A \bullet B\|_{B(H)} = \frac{2\|F(A)F(B)\|_{B(H)}}{1 - \|F(A)F(B)\|^2_{B(H)}}$$

2. *Si* $\|F(A)F(B)\|_{B(H)} = 1$ *alors* $A \bullet B$ *est un opérateur non borné, fermé et à domaine dense dans* H *avec*

$$D(A \bullet B) = R(I - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B))$$

et pour $y = [I - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B)]x \in D(A \bullet B)$ *on a*

$$(A \bullet B)y = 2F(A)F(B)x$$

Remarque 1.4.1. *[1] la loi* $\bullet$ *n'est pas commutative, elle est asociative mais n'ayant pas d'élément neutre. Son avantage est qu'elle préserve la fermabilité et l'égalité du produit des adjoints.*

Proposition 1.4.5. *Pour tout* $A, B \in C(H)$ *on a* $(A \bullet B)^* = B^* \bullet A^*$.

Démonstration : On a $(A \bullet B)^* = F^{-1}((F(A)F(B))^*)$. A partir de la remarque précédante on a

$$(A \bullet B)^* = F^{-1}(F(B^*)F(A^*)) = B^* \bullet A^*$$

■

Corollaire 1.4.1. *[1] Si l'un des opérateurs* A *et* B *est borné, alors* $A \bullet B$ *l'est aussi puisque* $\|F(A)F(B)\|_{B(H)} < 1$ *alors* $A \bullet B \in B(H)$

Ce corollaire est en fait une propriété qui n'est pas toujours vérifiée pour le produit usuel des opérateurs fermés, ce qui constitue un avantage supplémantaire du produit MM.

1.5 Perturbations linéaires des opérateurs non bornés

Étant donnés un opérateur A possédant de bonnes propriétés (auto-adjoint, propriétés du spectre . . .) à quelles conditions ces propriétés sont-elles transmises à l'opérateur $A + B$?

Nous verrons par exemple que si A est auto-adjoint et que B est un opérateur symétrique qui perturbe "peu" A, alors $A+B$ reste auto-adjoint. D'autres conditions nous permettront d'assurer que $\sigma_{ess}A = \sigma_{ess}(A+B)$. (voir **??**)
L'avantage de ces théorèmes consiste à fournir des moyens efficaces pour montrer qu'un opérateur est auto-adjoint, ou pour décrire son spectre, en se servant des opérateurs connus.

1-Perturbations linéaires des opérateurs fermés

Définition 1.5.1. *[2] Soit A un opérateur auto-adjoint de domaine dense $D(A)$ dans un espace de Hilbert H et soit B un opérateur symétrique tel que $D(A) \subset D(B)$.*
On dit que B est A-borné par $\alpha \geq 0$ s'il existe $c < \infty$ tel que :

$$\forall f \in D(A), \|Af\| \leq c\|f\| + \alpha\|Af\|$$

On dit aussi que B est borné relativement à A. Remarquons d'ores et déja que tout opérateur B de $\mathcal{B}(H)$ et symétrique est A-borné par 0.

Proposition 1.5.1. *[2] Si T est A-borné par α, posons $B = T + A$, $D(B) = D(A)$. Si $0 < \alpha < 1$, alors B est fermé et symétrique.*
De plus, si λ est assez grand, on a :

$$\|T(A - i\lambda)^{-1}\| < 1$$

Preuve :B est évidemment symétrique.
Si $(f_n) \in D(B)$ et si on suppose que $f_n \longrightarrow f$ et $f_n \longrightarrow g$, alors :

$$\begin{aligned} \|Af_n - Af_m\| &\leq \|Bf_n - Bf_m\| + \|Tf_n - Tf_m\| \\ &\leq \|Bf_n - Bf_m\| + c\|f_n - f_m\| + \alpha\|Af_n - Af_m\| \end{aligned}$$

On a donc :

$$\|Af_n - Af_m\| \leq \frac{1}{1-\alpha}(\|Bf_n - Bf_m\| + c\|f_n - f_m\|)$$

Comme (f_n) et (Bf_m) sont de cauchy, (Af_n) aussi, et $Af_n \longrightarrow h$. Comme A est fermé (car auto-adjoint), on déduit que $f \in D(A)$ et que $h = Af$ mais on a :

$$\|T(f_n - f)\| \leq c\|f_n - f\| + \alpha\|A(f_n - f)\|$$

Donc
$$Af_n \longrightarrow Af$$
Finalement, on a bien $Af_n + Tf_n = Bf_n \longrightarrow Bf$ et B est fermé.
Soit maintenant ξ tel que $\alpha^2 + \xi^2 < 1$. On considère $g \in H$ et $f = (A + i\lambda)^{-1}g$.
Comme $-i\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $(A + i\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. On a alors (pour λ suffisamment grand) :
$$\begin{aligned}
\|Tf\| &\leq (\alpha\|Af\| + c\|Bf\|)^2 \\
&\leq \alpha^2\|Af\|^2 + 2\tfrac{c}{\xi}(\alpha\xi)\|Af\|\|f\| + c^2\|f\|^2 \\
&\leq (\alpha^2 + \xi^2)\|Af\|^2 + (c^2 + \tfrac{c^2}{\xi^2})\|f\|^2 \\
&\leq (\alpha^2 + \xi^2)(\|Af\|^2 + \lambda\|f\|^2) \\
&\leq (\alpha^2 + \xi^2)\|(A + i\lambda)f\|^2 \\
&\leq (\alpha^2 + \xi^2)\|g\|^2
\end{aligned}$$
Ainsi, si λ est assez grand, on a
$$\|T(A + i\lambda)\|^2 \leq (\alpha^2 + \xi^2) < 1$$
∎

Cette définition est plus utilisée, dans le cadre des espaces de Hilbert, sous la forme :

Théorème 1.5.1. *[1] B est relativement borné à A de borne relative a si et seulement si*
$$inf_{b>0} sup_{x \in D(A)\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Bx\|^2}{\|Ax\|^2 + b\|x\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

L'un des premiers théorèmes de la théorie des perturbations des opérateurs fermés est donné par Hess et Kato.

Théorème 1.5.2. *[1] Soit A un opérateur fermé de domaine dense $D(A)$, et B un opérateur A-borné tel que B^* est A^*-borné dont les bornes relatives sont strictement infèrieures à 1. Alors $A + B$ est fermé et $(A + B)^* = A^* + B^*$.*

Ce résultat, important dans la théorie des perturbations, ne subsiste plus si la borne relative est égale à 1. En effet, si on considère $B = -A$, la borne relative est

égale à 1, mais l'opérateur nul n'est jamais fermé s'il est défini sur un sous espace non fermé de H.
Ce théorème constitue, par ailleurs, un premier résultat de la stabilité des opérateurs fermés sous des perturbations non bornées et de l'adjoint. Remarquons aussi que les hypothèses ne sont pas symétriques pour A et B.
Le théorème suivant constitue une version plus intéréssante pour connaître le caractère d'un opérateur à partir d'un autre :

Théorème 1.5.3. *[1] Supposons A, B deux opérateurs non bornés ayant le même domaine $D(A) = D(B) = D$ vérifiant :*

$$\|(A - B)x\| \leq a(\|Ax\| + \|Bx\|) + b\|x\|$$

pour certain $a > 0$. Alors :

1. *A est fermé sur D si et seulement si B l'est aussi.*
2. *A est fermable sur D si et seulement si B est fermable et on a $D(\overline{A}) = D(\overline{B})$.*

On peut établir aussi que si un opérateur est proche d'un opérateur auto-adjoint alors lui aussi sera auto-adjoint. En effet on a :

Théorème 1.5.4. *[1] Soit T un opérateur auto-adjoint. S'il existe $\delta > 0$ tel que : Pour chaque opérateur symétrique et fermé A vérifiant $g(A, T) < \delta$ est nécessairement autoadjoint, g désigne la métrique du gap.*

L'importance de ce théorème n'est pas à discuter, mais le calcul de l'écart entre T et A par la métrique g constitue parfois une difficulté importante.
Rappelons la métrique de g :

Définition 1.5.2. *[16] Soient M et N deux sous-espaces fermés de H. On pose*

$$g(M, N) = \|P_M - P_N\|_{\mathcal{L}(H)}$$

Où P_M et P_N sont respectivement les projections orthogonales de H sur M et N. Posons également :

$$\delta(M, N) = \|(I - P_N)P_M\|_{\mathcal{L}(H)}$$

Disous pour l'instant que δ est une distance alors que g ne l'est pas.

2-Perturbations linéaires des opérateurs auto-adjoints

Les opérateurs auto-adjoints constituent, de leur côté, une classe importante des opérateurs linéaires non bornés. En fait, les opérateurs rencontrès dans la physique quantique sont souvent auto-adjoints ou essentiellement auto-adjoints. En partciulier, les opérateurs de Schrödinger sont considérés comme une perturbation par un champ de potentiel de l'opérateur de Laplace sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^{\varkappa})$.Donnons le théorème de Kato- Rellich :

Théorème 1.5.5. *(**Kato-Réllich**)[2] Soit A un opérateur auto-adjoint et T un opérateur A-borné par $\alpha < 1$. L'opérateur $B = A + T$ est auto-adjoint.*

3-Perturbations linéaires des opérateurs essentielement auto-adjoints

Nous terminons notre discusions par le théorème de Wüst pour les opérateurs essentiellement auto-adjoints.

Théorème 1.5.6. *[1] Si A est un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$. Si B, de domaine $D(B)$, est un opérateur symétrique A - borné de borne relative égale à 1, alors l'opérateur $A + B$ de domaine $D(A)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(A)$.*

La démonstration on peut être trouvé dans [9].

1.6 Opérateurs linéaires semi fermés

Dans cette section, on introuduit une nouvelle classe d'opérateurs connue sous le nom d'opérateurs semi fermés. En 1973 **Caradus** introduisa la notion d'opérateurs semi fermés et montra :

Lemme 1.6.1. *Soit A un opérateur semi fermé de H_1 dans H_2, alors il existe deux opérateurs fermés $P : H_3 \longrightarrow H_2$ et $Q : H_1 \longrightarrow H_3$ vérifiant :*
- *$A = PQ$.*
- *$R(P) = R(A)$ et $P \in B(H_3, H_1)$*
- *$D(Q) = D(A)$ et A envoie injectivement $D(A)$ sur H_3*

où H_1, H_2, H_3 sont des espaces de Hilbert.

Kaufmann (voir [1]) présente, quelques années plus tard, une nouvelle définition d'un opérateur semi fermé, il montre qu'un opérateur C est semi fermé si et seulement si il existe un opérateur borné B vérifiant $R(B) \subset D(C)$ tel que CB soit borné.
Il montre aussi qu'un opérateur C est semi fermé si et seulement si C est représenté par un quotient B/A d'opérateurs bornés sur H avec la condition $kerA \subset kerB$.
Plus récemment, **S.Messirdi** , **M.Djaa** et **B.Messirdi** définissent une nouvelle classe d'opérateurs dits presque fermés en s'appuyant sur la proposition 1.2 de [1] :

1.7 Opérateurs linéaires presque fermés

Les opérateurs presque fermés sont des opérateurs non bornés sur H sur lesquels on importe une condition topologique inspirée de la proposition 1.2.1. Cette condition rend ces opérateurs à graphes fermés sur un espace de Hilbert intermédiaire H' entre le domaine de l'opérateur et l'espace initial H.

Définition 1.7.1 (2)**.** *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ définit sur un espace de Hilbert H est dite presque fermé s'il existe un espace de Hilbert auxilliaire H_A ($<,>_{H_A}$ et $\| - \|_{H_A}$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme de H_A) tel que :*

- *$D(A) \subset H_A$ et H_A s'injecte continûement dans $H(H_A \hookrightarrow H)$.*
- *Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $D(A)$ convergente dans H_A vers x et $(Ax_n)_n$ convergente dans H vers y, alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.*

Ainsi, $(A, D(A))$ est presque fermé si et seulement si il existe un espace de Hilbert H_A contenant $D(A), H_A \hookrightarrow H$, tel que le graphe $G(A)$ de A soit fermé dans $H_A \times H$. En vertu de proposition 1.2.1, tout opérateur fermé est presque fermé où $H_A = D(A)$ muni du produit scalaire et de la norme du graphe $< x, y >_A = < x, y > + < Ax, Ay >$ et $\|x\|_A = (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{\frac{1}{2}}, x, y \in D(A)$. L 'attention est portée une classe particulierement importante d'opérateurs presque fermés dérivant d'une somme ou d'un produit d'opérateurs fermés sur H [16].

Proposition 1.7.1. *Si $A, B \in C(H)$ alors $S = A+B$ et $C = BA$ sont des opérateurs presque fermés.*

Remarque 1.7.1. *Si A et B sont fermés alors $A+B$ et AB sont presque fermés. Si A et B sont fermés sur H alors en considérant $H_s = D(A) \cap D(B)$ on a $A+B$ fermé.*

Proposition 1.7.2. *Un opérateur non fermable sur H peut être presque fermé sur H.*

Exemple 1.7.1. *En effet, prenons $H = L^2([0,1]), A = \frac{d}{dx}$ de domaine $D(A) = L^1([0,1])$ et $Bf(x) = f(0)g(x)$ de domaine $D(B) = H$ si $0 \neq g$ est fixé dans H.*
A est fermé et B est borné sur H donc leur produit $Cf = BAf = \frac{d}{dx}f(0)g$ de domaine $D(C) = D(A)$ est presque fermé sur H.
Soit la suite $f_n(x) = \frac{e^{-2nx}}{n}$. Alors,

- $f_n \in D(C), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $\forall x \in [0,1], |f_n(x)|^2 = \frac{e^{-2nx}}{n^2} \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$.
- $|f_n(x)|^2 \leq 1, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Donc* $1 \in L^1([0,1])$.

En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \lim_{n\longrightarrow+\infty} |f_n(x)|^2 dx = 0$$

D'où, $(f_n)_n$ converge vers 0 dans H.

- $Cf_n = \frac{df_n}{dx}(0)g = g \neq 0$

Or, $(0,g)$ ne peut pas appartenir au graphe d'un opérateur linéaire. D'où, C ne peut pas être fermable.

La majorité des opérateurs linéaires non bornés connus dans la littérateure mathématique pure et appliquée sont presque fermés, seuls les opérateurs définis sur un domaine particulièrement "petit" s'avèrent être non presque fermés.
Donnons quelques propriétés utiles des opérateurs presque fermés :

$(A, D(A))$ est presque fermé sur H, on désignera par H_A son espace de Hilbert auxilliaire.

Proposition 1.7.3. *[16] Soit $(A, D(A))$ est un opérateur presque fermé sur un espace de Hilbert H. Alors $\{D(A)\} = D(A)$ muni de produit scalaire*

$$\{x, y\} = < x, y >_{H_A} + < Ax, Ay >$$

est un espace de Hilbert et $\{D(A)\} \hookrightarrow H_A \hookrightarrow H$. *(*$<,>_{H_A}$ *est un produit scalaire de l'espace auxilliaire* H_A*, on désigne par* $\{\|x\|\}$ *la norme de* $\{D(A)\}$ *associée à* $\{.,.\}$*). De plus,* $A \in \mathcal{L}(\{D(A)\}, H)$.

Chapitre 2

Les relations linéaires dans l'espace de Hilbert

2.1 Topologies sur $C(H)$

On sait que g est une métrique sur $C(H)$ qui coïncide avec la topologie uniforme sur $B(H)$ et que $B(H)$ est un ouvert de $C(H)$.
Cependant, pour les applications, d'autres métriques sur $C(H)$ sont plus pratiques et donnent lieu à des topologies moins fines que celle induite par g, ceci permettra de raffiner le complété de $C(H)$ par rapport à ces métriques relativement à g. Prenons le cas de la métrique p définie dans [1] :

$$p(A,B) = \sqrt{\|R_A - R_B\|^2_{B(H)} + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2_{B(H)} + 2\|AR_A - BR_B\|^2_{B(H)}}$$

p étant une métrique équivalente à g et on a :

$$g(A,B) \leq \sqrt{2p}(A,B) \leq 2g(A,B) \forall A,B \in C(H)$$

$$p(A,B) \leq 4\|A-B\| \forall A,B \in B(H)$$

2.1.1 Métrique du gap g

Soient M et N deux sous-espaces fermés de H. On pose (voir cf [2])

$$g(M,N) = \|P_M - P_N\|_{\mathcal{L}(H)}$$

Où, P_M et P_N sont respectivement les projections orthogonales de H sur M et N.
Posons également :

$$\delta(M,N) = \|(I - P_N)P_M\|_{\mathcal{L}(H)}$$

2.1.2 Métriques variantes

D'autres métriques variantes à g peuvent être définies en termes de la norme de l'opérateur $R_A = (1 + A^*A)$ et de R_{A^*}.
En effet, si $A \in C(H)$ puis $R_A = (1 + A^*A)^{-1}$ existent comme un opérateur auto-adjoint borné opérateur de domaine $D(R_A) = H$, $AR_Ax = R_{A^*}Ax$ pour tout $x \in D(A)$. il est connu (voir par exemple [7], [17]) que la fonction $A \longrightarrow F(A) = AS_A(I + SA)^{-1}$ envoie les éléments de $C(H)$ sur l'ensemble $C_0(H)$ de contractions T tel que $\|T\|_{B(H)} \leq 1$ et $N(I - T^*T) = \{0\}$ où, $S_A = \sqrt{R_A}$ est l'unique, positive auto-adjoint racine carrée de la R_A. Les propriétés fondamentales sur la R_A et S_A sont : voir [6]

$$\|AR_A\|_{B(H)} \leq 1 \ et \ \|AS_A\|_{B(H)} \leq 1.$$

$$(AR_A)^* = A^*R_{A^*} \ et \ (AS_A)^* = A^*S_{A^*}$$

$$A^*S_{A^*}AS_A = I - R_A \qquad (1)$$

Par ailleurs,

$$(F(A))^* = F(A^*)$$

$$R_{F(A)} = \frac{1}{2}(I + S_A) \qquad (2)$$

$$F(A)R_{F(A)} = \frac{1}{2}AS_A$$

La topologie induite par g sur $C(H)$ possède de bonnes propriétés concernant la stabilité de l'indice d'opérateurs d'indice.
D'autre part, les résultats sont beaucoup moins bons en ce qui concerne la stabilité du spectre d'un opérateur. Pour application, il s'avère important de disposer d'autres

mesures sur $C(H)$, qui sont plus pratiques.
La seconde métrique est définie sur $C(H)$ par

$$p(A,B)=\sqrt{\|R_A-R_B\|^2_{B(H)}+\|R_{A^*}-R_{B^*}\|^2_{B(H)}+2\|AR_A-BR_B\|^2_{B(H)}}$$

p étant une métrique équivalente à g et on a :

$$g(A,B)\leq\sqrt{2p}(A,B)\leq 2g(A,B)pour\ tout\ A,B\in C(H) \qquad (3)$$

et

$$p(A,B)\leq 4\|A-B\|pour\ tout\ A,B\in B(H)$$

En outre, nous avons pour tout $A,B\in C(H)$ voir (cf [14])

$$g(A,B)\leq 8g(F(A),F(B))\leq 8\sqrt{2P}(F(A),F(B))\leq 32\sqrt{2}\|F(A),F(B)\|_{B(H)}$$

Définition 2.1.1. *Soient $A,B\in C(H)$. Nous mettons,*

$$d_1(A,B)=\sqrt{\|R_A-R_B\|^2_{B(H)}+\|AR_A-BR_B\|^2_{B(H)}}$$

$$d_2(A,B)=\sqrt{2}min(d_1(A,B),d_1(A^*,B^*))$$

Il est évident que d_1 et d_2 métriques sur $C(H)$ et

$$d_2(A,B)\leq\sqrt{2}d_1(A,B)\leq\sqrt{2P}d_1(A,B)\leq 2g(A,B).$$

Théorème 2.1.1. *[6] La topologie induite par la métrique g sur $C(H)$ est strictement plus forte que celle induite de d_1 qui est strictement plus forte à son tour que celle induite à partir de d_2.*

Mésures strictement plus fortes que g

Pour être en mesure de préciser l'achèvement de $C(H)$ de g, nous construisons dans cette section certaines mesures strictement plus fortes que g.

Définition 2.1.2. *[6] Soient $A,B\in C(H)$. Nous mettons,*

$$s(A,B)=\sqrt{\|S_A-S_B\|^2_{B(N)}+\|AS_A-BS_B\|^2_{B(N)}+\|S_{A^*}-S_{B^*}\|^2_{B(N)}+\|A^*S_{A^*}-B^*S_{B^*}\|^2_{B(N)}}$$

$s(A,B)$ est une métrique sur $C(H)$, et il résulte de (1) on a $(A,B)=2p(F(A),F(B))$. Mettons $l(A,B)=2g(F(A),F(B))$. Ensuite, par la formule (3) on a :

$$g(A,B)\leq 4l(A,B)\leq 4\sqrt{2}s(A,B)\leq 8\sqrt{2}l(A,B) \qquad (4)$$

La topologie induite à partir de la métrique s sur $C(H)$ est strictement plus forte que qui induit de la métrique g.

Théorème 2.1.2. *[6] $B(H)$ est dense ouvert de l'espace métrique $(C(H), s)$.*

Remarque 2.1.1. *[6] $B(H)$ est ouvert et dense respectivement dans les espaces métriques $(C(H), g)$ et $(C(H), p)$.*

2.1.3 $C(H)$ est non complet

Soit H un espace de Hilbert séparable. Notons $B(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H, $C(H)$ l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense sur H et $LR(H)$ l'ensemble des relations linéaires fermées sur H (c'est à dire l'ensemble des sous-espace linéaires fermés de $H \oplus H$ de dimension et codimension infinies). On munit $LR(H)$ de la métrique g (métrique du "gap") : si $E, F \in LR(H)$ on pose $g(E, F) = \|P_E - P_F\|$ où P_E, P_F sont les projections orthogonales dans $H \oplus H$ sur E et F respectivement. Muni de cette métrique $LR(H)$ est un espace complet. Si $A \in C(H)$, notons $D(A)$ son domaine et $G(A) = \{(u, Au) | u \in D(A)\}$ son graphe. Alors $C(H)$ s'injecte naturellement dans $LR(H)$ par l'application $A \longmapsto G(A)$.
les opérateurs ne doivent pas être fermées à H et $C(H)$ n'est pas complet pour la métrique g parce que si l'on considère par exemple la séquence des opérateurs $(nI)_{n \in N^*}$ où I est l'opérateur identité sur H, puis le nI sont des opérateurs identités bornés, donc fermé le H, pour tout $n \in N^*$

$$\begin{cases} G(nI) = \{(\frac{1}{n}x, x),\ x \in H\}, \text{ pour tout } n \in N^* ; \\ \lim_{n \longrightarrow +\infty}(G(nI)), \{0\} \oplus H = 0. \end{cases}$$

Mais $\{0\} \oplus H = 0$ ne peut pas être le graphe d'un opérateur linéaire sur H, donc $(nI)_{n \in N^*}$est une suite de Cauchy sans limite dans $C(H)$. Nous pouvons remédier à ce défaut en considérant le plongement de $C(H)$ dans le ensemble $LR(H)$ de relations linéaires fermées sur H, c'est à dire l'ensemble de tous sous-espaces linéaire fermée de $H \oplus H$ de dimension infinie et codimension. Muni de la métrique g, $LR(H)$ est un espace métrique complet.
Les opérateurs linéaires fermés sont identifiés comme des relations linéaires via leurs

graphiques et donc les inclusions $B(H) \subset C(H) \subset LR(H)$.
On définit :

$$ind_2(E) = \begin{cases} dim(E \cap H_2) - dim(E^{\perp} \cap H_1), \text{ si } max\{dim(E \cap H_2), dim(E^{\perp} \cap H_1) < +\infty\}\,; \\ +\infty \text{ si } dim(E \cap H_2) = +\infty \text{ et } dim(E^{\perp} \cap H_1) < +\infty\,; \\ -\infty \text{ si } dim(E \cap H_2) < +\infty \text{ et } dim(E \cap H_1) = +\infty\,; \\ 0 \text{ si } dim(E \cap H_2) = dim(E^{\perp} \cap H_1). \end{cases}$$

Enfin on dira que E est semi-bornée si

$$E + H_2 \ est \ ferm \ et \ min\{dim(E \cap H_2), dim(E^{\perp} \cap H_1)\} < +\infty.$$

Théorème 2.1.3. *[19] Le complété de $C(H)$ dans $LR(H)$ (qui est aussi le complété de $B(H)$) est le complémentaire dans $LR(H)$ des relations linéaire semi-bornées E telles que $ind_2(E) \neq 0$.*

Théorème 2.1.4. *[19] $SB(H)$ est dense (et ouvert) dans $LR(H)$ et $B(H)$ est un ouvert dans $LR(H)$, dans lequel $ind_2(E) = 0$.*

.voir[réf mazrawi]

2.2 Relations sur les ensembles

Soit $U, V, W, ...$ des ensembles non vides arbitaraires. Une relation T de U à V est tout ensemble ayant un domaine $D(T)$ d'un sous-ensemble non vide de U, et en prenant les valeurs de $2^V \backslash \emptyset$ (La collection de sous-ensembles non vides de V).). Une telle relation T est également connue comme un ensemble d'une valeur (ou plusieurs valeurs). Si T fait correspondre les points de son domaine d'un seul valeur, alors on dit que T est un seul valeur ou une fonction.
Pour $u \in U, u \in D(T)$ on definit $Tu = \emptyset$. Avec cette convention, nous avons

$$D(T) := \{u \in U; Tu \neq \emptyset\} \tag{2.1}$$

La classe de toutes les relations de U à V sera notée $R(U;V)$. Des exemples de relations sont des fonctions inverses, de fonctions, adjoints des opérateurs linéaires, ordre partiel des relations, les relations d'équivalence et des processus convexes. Si $T \in R(U,V)$, alors le graphe de T est le sous-ensemble $G(T)$ of $U \times V$ défini par

$$G(t) = \{(u,v) \in U \times V : u \in D(T), v \in T(u)\} \tag{2.2}$$

Une relation dans $R(U;V)$ est totalement déterminée par son graphe, et inversement tout sous-ensemble non vide de $U \times V$ détermine de façon unique une relation. (Certains auteurs identifient une relation avec son graphe, mais nous ne le ferons pas ici.)
Soit $T \in LR(U,V)$. L'inverse de T est la relation T^{-1} donnée par

$$G(T^{-1}) = \{(u,v) \in U \times V : (u,v) \in G(T)\} \tag{2.3}$$

Étant donné un sous-ensemble $M \subset N$, nous écrivons

$$T(M) = \cup\{T(m), m \in M \cap D(T)\} \tag{2.4}$$

appelé l'image de M, avec

$$R(T) = T(U) = T(D(T)), \ par \ (2.4)$$

appelé le rang de T. Si $R(T) = Y$, alors T est appelé surjective. Si T^{-1} est à valeur unique, alors T est appelé injective. Si T est injective alors il est facile de voir :

$$T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2(u_1, u_2 \in D(T)) \tag{2.5}$$

Nous noterons $T(\{u\}) = T(u)$ de Tu, aucun distinction ne sera faite entre graphe d'un seul valeur et une carte en V.
Soit $\emptyset \neq N \subset V$ alors de (2.3) nous avons

$$T^{-1}(N) = \{u \in D(T) : N \cap Tu \neq \emptyset\} \tag{2.6}$$

En particulier, pour $v \in R(T)$,

$$T^{-1}v = \{u \in D(T) : v \in Tu\} \tag{2.7}$$

il est clair que $D(T^{-1}) = R(T)$ et $R(T^{-1}) = D(T)$.
La relation d'identité définie sur un sous-ensemble non vide E de U est notée par I_E ou tout simplement I quand E est compris, c'est la relation dans $R(U;U)$ dont le graphe est $G(I_E) = \{(e,e) : e \in E\}$

2.3 Produit des Relations

Soit $T \in R(U, V)$ et $S \in R(V, W)$ lorsque $R(T) \cap D(S) \neq \emptyset$;. La composition (ou produit) $ST \in R(V, W)$ est définie comme suit :

$$(ST)u = S(Tu) \tag{2.8}$$

Le domaine de la produit ST est calculée à partir (2.1) :

$$\begin{aligned} D(ST) &= \{u \in U : S(Tu) \neq \emptyset\} \\ &= \{u \in U : Tu \cap D(S) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Ainsi à partir (2.7) de 2.1.5

$$D(ST) = T^{-1}(D(S)) \tag{2.9}$$

De la définition de produit ST, il est facile de voir que

$$G(ST) = \{(u, w) \in U \times W : (u, v) \in G(T) \; and \; (u, w) \in G(S) for \; some \; v \in V\} \tag{2.10}$$

Donnons quelques propriétés élémentaires :

$$T = TIu = IvT \tag{2.11}$$

$$G(I_{D(T)}) \subset G(T^{-1}T) \tag{2.12}$$

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1} \tag{2.13}$$

$$D(ST) = T^{-1}S^{-1}(R(S)) \tag{2.14}$$

le produit est associative, c'est à dire si $R \in R(W, Z)$, donc

$$R(ST) = (RS)T \tag{2.15}$$

Nous avons également

$$T \; injective \iff T^{-1}T = I_{D(T)} \tag{2.16}$$

$$T \; single \; \grave{a} \; valeurs \; numriques \iff TT^{-1} = I_{R(T)} \tag{2.17}$$

2.3.1 Restrictions et extensions des relations.

Soit M un sous-ensemble de U tel que $M \cap D(T) \neq \emptyset$. La restriction de T à M, notée $T|_M$, est définie par

$$T|_M \in R(U,V),$$

$$D(T|_M) = D(T) \cap M,$$

$$(T|_M)m = Tm \; for \; m \in M.$$

On remarquons que

$$G(T|_M) = G(T) \cap (M \times V) = \{(u,v) \in G(T) : u \in M\}$$

On a

$$T|_M = T_{M \cap D(T)} \tag{2.18}$$

Étant donné deux relations S et T dans $R(U;V)$, on dit que S est une extension de T si

$$S|_{D(T)} = T \tag{2.19}$$

De toute évidence, si S est une extension de T alors $G(T) \subset G(S)$. (le réciproque est fausse)

Exemple 2.3.1. ***L'injection de l'opérateur*** J_E^U
Soit E un sous-ensemble de U et soit J_E^U (en abrégé J_E quand U est connu) le plan d'injection naturelle de E en U, c'est à dire $J_E \in R(E,U)$, $D(J_E) = E$ et $J_E(e) = e$ pour tout $e \in E$.
Ensuite, on a

$$T|_E = TJ_EJ_E^{-1} \tag{2.20}$$

On note que $I_E = I_U|_E$ (en particulier, les deux parties sont dans $R(U,U)$ donc à partir de (2.1) on a)

$$I_E = J_EJ_E^{-1} \tag{2.21}$$

Bien que I_E et J_E aient des graphes identiques, I_E n'est même pas une extension de J_E

2.4 Relations linéaires (opérateurs linéaires à plusieurs valeurs)

Définition et notations 2.4.1. *Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une relation $T \in R(X, Y)$ est appelée une relation linéaire (ou opérateur linéaire à plusieurs valeurs) si pour tout $x, z \in D(T)$ et scalaires non nuls α nous avons*

$$Tx + Tz = T(x + z) \tag{2.22}$$

$$\alpha Tx = T(\alpha x) \tag{2.23}$$

Évidemment, le domaine d'une relation linéaire est un sous-espace vectoriel.

La classe des relations linéaires dans $R(X, Y)$ sera notée par $LR(X, Y)$, nous écrivons $LR(X, Y) := LR(X)$.
Il est clair que si M est un sous-espace vectoriel de X et $T \in LR(X, Y)$, puis

$$T|_M \in LR(X, Y)$$

et

$$TJ_M \in LR(X, Y)$$

Exemple 2.4.1. *Soit $X = Y = \mathbb{R}^2$ on considérons l'opérateur matriciel*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrivons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vecteurs arbitraires dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$G(A) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A^{-1}(0) \tag{2.24}$$

lorsque $A^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R}^2 \right\}$ *est un sous-espace linéaire de* $\mathbb{R}^2$.
Il est simple de vérifier que A^{-1} *est une relation linéaire dont le domaine est*

$$D(A^{-1}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On considère la relation $S \in LR(X)$ *définie par*

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + A^{-1}(0)$$

Alors S *une extension de* A^{-1}. *De plus, l'écriture* $J = J_{R(A)}$, *nous avons relativement à (2.1) et à l'exemple de 2.3.1 que*

$$SI_{R(A)} = SJJ^{-1} = A^{-1}$$

et donc $A = JJ^{-1}S^{-1}$, *pour toute,* $A \neq S^{-1}$.

Proposition 2.4.1. *Soit* $T \in R(X, Y)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

i T *est une relation linéaire.*

ii $G(T)$ *est un sous-espace vectoriel de* $X \times Y$

iii T^{-1} *est une relation linéaire.*

iv $G(T^{-1})$ *est une sous espace vectoriel de* $X \times Y$

Preuve : Soit T une relation linéaire et soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G(T), 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ alors $y_1 \in Tx_1$ et $y_2 \in Tx_2$, et ainsi

$$y_1 + y_2 \in Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2)$$

donc

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in G(T) \tag{2.25}$$

Encore une fois, puisque $y_1 \in Tx_1$, d'ou $\alpha y_1 \in \alpha Tx_1$ (avec $\alpha \neq 0$), et donc

$$\alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2) \in G(T) \tag{2.26}$$

Enfin, $(0,0) \in G(T)$ par (2.25), donc (2.26) vaut aussi pour $\alpha = 0$. Par conséquent $G(T)$ est un sous-espace vectoriel.
Réciproquement, supposons que $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$. Puis $D(T)$ est sous-espace linéaire de X. Soit $x_1, x_2 \in D(T)$. Pour montrer que

$$Tx_1 + Tx_2 \subset T(x_1 + x_2) \tag{2.27}$$

choisi $y_1 \in Tx_1$ et $y_2 \in Tx_2$. puis

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in G(T)$$

Donc $y_1 + y_2 \in T(x_1 + x_2)$ et (2.27) ci-après. Ensuite, pour montrer que

$$T(x_1 + x_2) \subset Tx_1 + Tx_2$$

Soit $y \in T(x_1 + x_2)$ et choisi $y_1 \in Tx_1$ arbitrairement. puis

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y - y_1) \in G(T)$$

et donc, $(x_2, y-y_1) \in G(T)$, où $y-y_1 \in Tx_2$. Par conséquent $y \in y_1+Tx_2 \subset Tx_1+Tx_2$, comme nécessiter. Nous avons montré que $Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2)$.
Maintenant, nous allons $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in D(T)$. Si $y \in Tx$, alors $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in G(T)$, de sorte que $\alpha y \in T(\alpha x)$. D'où $\alpha T(x) \subset T(\alpha x)$. D'autre part, si $y \in T\alpha x$,, alors $((x, \alpha^{-1}y) \in G(T)$, donc $y \in T\alpha x$. Ainsi $T(\alpha x) \subset \alpha T(x)$. Par conséquent

$$\alpha T(x) = T(\alpha x)$$

Ainsi T est une relation linéaire. Les équivalences restants suivent désormais par symétrie.

■

Corollaire 2.4.1. *[5] Soit T une relation linéaire. Alors $T(0)$ avec $T(0) = \{(0, T(0))\}$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous-espaces linéaires.*

Corollaire 2.4.2. *[5] Soit $T \in R(X, Y)$. Alors T est une relation linéaire, si et seulement si l'égalité*

$$\alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

est vraie pour tous $x_1, x_2 \in D(T)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non nul.

Dans la suite, $X, Y, Z, ...$ désignera les espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et T sera toujours désigner un élément de$LR(X, Y)$, sauf indication contraire. le terme "exploitant" se réfère toujours à un opérateur unique valeur, tandis qu'un opérateur linéaire multiples valeurs seront généralement être considéré comme un "relation linéaire".

Définition 2.4.1. *Le sous-espace $T^{-1}(0)$ est appelé l'espace nul (ou noyau) de T, et est désigné par $N(T)$. Nous allons utiliser les deux $N(T)$ et $T^{-1}(0)$ dans toute la suite.*

Exemple 2.4.2. *Soit P la projection linéaire définie sur $X = M + N$ avec le rang M et N est un espace nul. On ecrire $T = P^{-1}$ puis $T \in LR(X)$, $D(T) = M, T$ est injective, et pour chaque $x \in M$. Nous avons*

$$Tx = x + N$$

Proposition 2.4.2. **1-** *Pour $x \in D(T)$ nous avons l'équivalence suivante :*

$$\textit{(i-)} \qquad y \in Tx \Longleftrightarrow Tx = y + T(0)$$

En particulier,

$$\textit{(ii-)} \qquad 0 \in Tx \Longleftrightarrow Tx = T(0)$$

2- *Pour $x_1, x_2 \in D(T)$ nous avons l'équivalence :*

$$Tx_1 \cap Tx_2 \neq \emptyset \Longleftrightarrow Tx_1 = Tx_2.$$

Preuve : (1 -) (i-) Soit $y \in Tx$. alors $y + T(0) \subset Tx + T(0) = Tx$. D'autre part pour tout $y_1 \in Tx$, on a

$$y_1 = y + (y_1 - y) \in y + Tx - Tx = y + T(0).$$

Alors $Tx = y + T(0)$. La réciproque est évidente.
(ii-) On a $0 \in Tx$ si et seulement si $Tx = 0 + T(0)$ (d'aprés 1 (i)), si et seulement si $Tx = T(0)$ puisque $0 \in T(0)$ par le corollaire 2.4.1.
(2 -) Soit $y \in Tx_1 \cap Tx_2$. Ensuite d'aprés (1 -) (i-) $Tx_1 = y + T(0) = Tx_2$. L'inverse est démontrée. ■

Corollaire 2.4.3. *[5]*

i- *T est évalué unique si seulement si $T(0) = \{0\}$.*

ii- *T est injective si et seulement si $N(T) = \{0\}$.*

Corollaire 2.4.4. *[5] $TT^{-1}(0) = T(0)$ et $T^{-1}T(0) = T^{-1}(0)$.*

Preuve : Par le corollaire 2.4.1 $0 \in TT^{-1}(0)$. Donc $T(0) = TT^{-1}(0)$ par la proposition 2.4.2. En remplaçant T^{-1} par T donne la deuxième égalité.

■

Corollaire 2.4.5. *[5] On a*

i- *$TT^{-1}y = y + T(0)(y \in R(T))$ et $T^{-1}Tx = x + T^{-1}(0)(X \in D(T))$.*

ii- *Si $G(S) \subset G(T)$, alors T est une extension de S si et seulement si $S(0) = T(0)$.*

Proposition 2.4.3. *Soit T une relation entre X et Y. Alors T est une relation linéaire, si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in D(T)$, et pour tous ; $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

$$\alpha T x_1 + \beta T x_2 \subset T(\alpha x_1 + \beta x_2) \tag{2.28}$$

Preuve : Soit T une relation linéaire. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in D(T)$. choisis $y_1 \in Tx_1, y_2 \in Tx_2$. Comme $G(T)$ est un espace vectoriel, on a $(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \in G(T)$ d'où $\alpha y_1 + \beta y_2 \in T(\alpha x_1 + \beta x_2)$ et (2.28) ci-dessous.
Réciproquement, soit T satisfait à la condition (2.28) et soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G(T)$. Alors pour $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ nous avons

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in \alpha T x_1 + \beta T x_2 \subset T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

montrant que $\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) \in G(T)$. Donc $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$. Par conséquent T est une relation linéaire.

■

2.4.1 Quelques opérations sur les relations linéaires

Les règles régissant les opérations de T sur des sous-ensembles sont énumérés dans la proposition suivante (où 0_X désigne l'opérateur zéro sur X).

Proposition 2.4.4. *[5]*

1. $T(\alpha M) = \alpha T(M) \quad (M \subset X, \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0)$.
2. $T(M) + T(N) \subset T(M + N) \quad (M, N \subset X)$.
3. $T(M) + T(N) = T(M + N) \quad (M \subset X, N \subset D(T))$.
4. $TT^{-1}(M) = M \cap R(T) + T(0) \quad (M \subset Y)$.
5. $TT^{-1}(M) = M \cap D(T) + T^{-1}(0) \quad (M \subset X)$.
6. $T^{-1}(0) \times \{0\} = G(T) \cap (X \times \{0\}) = G(T) \cap G(0_X)$.
7. $\{0\} \times T(0) = G(T) \cap (\{0\} \times Y)$.
8. $X \times R(T) = G(T) + (X \times \{0\}) = G(T) + G(0_X)$.
9. $D(T) \times Y = G(T) + (\{0\} \times Y)$.

La Proposition 2.4.4 présenter une petite preuve de la linéarité de la composition de deux relations linéaires.

Corollaire 2.4.6. *Soit $T \in LR(X, Y)$ et $S \in LR(Y, Z)$. Alors $ST \in LR(Y, Z)$.*

Preuve : Soit $x_1, x_2 \in D(ST)$ et prenons α, β des scalaires non nuls. Alors

$$\begin{aligned} \alpha(STx_1) + \beta(STx_2) &= \alpha S(Tx_1) + \beta S(Tx_2) \\ &= S(\alpha Tx_1) + S(\beta Tx_2) = S(T(\alpha x_1)) + S(T(\beta x_2)) \\ &= S(T(\alpha x_1) + T(\beta x_2)) = ST(\alpha x_1 + \beta x_2). \end{aligned}$$

D'où ST est linéaire, par corollaire 2.4.2.

■

2.5 L'algèbre des relations linéaires

Dans cette section, nous définissons les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire dans $LR(X, Y)$ et décrire les lois qui régissent ces opérations combinées avec les opérations de composition et d'inversion.

2.5.1 L'addition et la multiplication par un scalaire dans $LR(X,Y)$

Soit S et T soit relations linéaires dans $LR(X,Y)$ et choisez α être un scalaire. Les relations de $S+T$ et T sont définis comme suit :

1- $(S+T)x = Sx + Tx \quad (x \in X)$.

2- $(\alpha T)x = \alpha(Tx) \quad (x \in X, \alpha \in \mathbb{K})$.

Il s'ensuit que

3- $D(S+T) = D(S) \cap D(T)$.

4- $D(\alpha T) = D(T)$.

Pour vérifier(3), soit $x \in D(S) \cap D(T)$. Ensuite, $Sx + Tx = (S+T)x \neq \emptyset$ par 2.1.1(2.2) et si $x \in D(S+T)$. Inversement, si $x \in D(S+T)$, puis que $(S+T)x = Sx + Tx \neq \emptyset$ nous avons $Sx \neq \emptyset$ et $Tx \neq \emptyset$. Par conséquent $x \in D(S) \cap D(T)$.

Il ressort de ce qui précède que αT et $S+T$ sont des relations linéaires.

5- $G(S+T) = \{(x,y) \in X \times Y : y = s+t,\ o\ (x,s) \in G(S)\ et\ (x,t) \in G(T)\}$.

6- $G(\alpha T) = \{(x, \alpha y) \in X \times Y : (x,y) \in G(T)\}$.

Nous avons fortement

7- $\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K})$.

8- $S + T = T + S$.

et si R, S, T il est dans $LR(X,Y)$ alors

9- $R + (S+T) = (R+S) + T$.

Proposition 2.5.1. *Soit R, S, T sont des relations linéaires*

1. $TT^{-1} = I + (TT^{-1} - TT^{-1})$.
2. $\lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T) \quad$ *(avec $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$).*
3. *Si $G(S) \subset G(T)$ donc $G(SR) \subset G(TR)$.*
4. $(R+S)Tx \subset (RT + ST)x \quad (x \in X)$.
   et si T est à valeur unique, donc

$$(R+S)T = RT + ST$$

5. *$T(R+S)$ est une extention de $TR+TS$. De plus, si $D(T)$ contient les rangs des deux relations R et S (en particulier si $D(T)$ est l'espace entier), alors*

$$T(R+S) = TR + TS.$$

Preuve :

1. Pour $y \in R(T)$ on a par la proposition 2.4.2 que $TT^{-1}(y) = y + T(0)$ et $TT^{-1}(y) - TT^{-1}(y) = 0$, alors $TT^{-1} = I_{R(T)} + TT^{-1} - TT^{-1} = I + TT^{-1} - TT^{-1}$.

2. Soit $\lambda \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
(x,z) \in G((\lambda S)T) &\iff (\exists y)(x,y) \in G(T), (y,z) \in G(\lambda S) \\
&\iff (\exists y)(x,y) \in G(T), (y,\lambda^{-1}z) \in G(S) \\
&\iff (x,z) \in G(\lambda(ST)) \qquad\qquad (1) \\
&\iff (x,\lambda^{-1}z) \in G(\lambda(ST)) \\
&\iff (\exists y)(x,\lambda^{-1}y) \in G(T), (\lambda^{-1}y,\lambda^{-1}z) \in G(S) \\
&\iff (\exists y)(x,y) \in G(\lambda T), (y,z) \in G(S) \\
&\iff (x,y) \in G(S(\lambda T)) \qquad\qquad (2)
\end{aligned}$$

Donc a partir (1) et (2), on a

$$(\lambda S)T = \lambda(ST) = S(\lambda T).$$

3. Soit $(z,y) \in G(SR)$. Alors $(z,x) \in G(R)$ et $(x,y) \in G(S) \subset G(T)$ pour tout $x \in D(S)$, d'où $(z,x) \in G(TR)$.

4. Soit $R, S \in LR(Y,Z), T \in LR(Y,Z)$. On a

$$\begin{aligned}
G((R+S)T) &= \{(x,z) : (x,y) \in G(T) \ et \ (y,z) \in G(R+S)\} \\
&= \{(x,z) : (x,y) \in G(T), (y,z_1) \in G(R), (y,z_2) \in G(S), z_1 + z_2 = z\} \\
&\subset \{(x,z) : (x,z_1) \in G(RT), (x,z_2) \in G(ST), z_1 + z_2 = z\} \\
&= G(RT + ST).
\end{aligned}$$

Il est évident que la $RT + ST = (R+S)T$ si T est une valeur unique.

5. Soit $T \in LR(X,Y)$ et $R, S \in LR(X,Y)$. nous vérifierons que

$$G(TR+TS) \subset G(T(R+S)) \tag{2.29}$$

On a

$$\begin{aligned} G(RT+ST) &= \{(z,y) : y = r+s \ o \ (z,r) \in G(TR) \ et \ (z,s) \in G(TS)\} \\ &= \{(z,y) : y = r+s, (z,x_1) \in G(R)(x_1,r) \in G(T), (z,x_2) \in G(S), (x_2,s) \in G(T) \\ &\subset \ , \{(z,y) : y = r+s, (z,x_1+x_2) \in G(R+S), (x_1+x_2, r+s) \in G(T)\} \\ &= \{(z,y) : (z,x) \in G(R+S), (x,y) \in G(T)\} \\ &= G(T(R+S)). \end{aligned}$$

Maintenant, on a $z \in D(TR+TS)$. Alors par (1), $z \in D(T(R+S))$. Soit $y \in T(R+S)z$. Alors $y \in Tx$, où $x \in (R+S)z$. On ecrire $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in Rx, x_1 \in Sx$.
Alors

$$y \in T(x_1+x_2) = Tx_1 + Tx_2 \subset TRz + TSz.$$

Par conséquent $T(R+S)z \subset TRz+TSz$. Donc a partire (1), $T(R+S)z = TRz+TSz$. Si les rangs de R et S sont contenu dans $D(T)$, alos $D(T(R+S)) = D(R+S) = D(R) \cap D(S) = D(TR) \cap D(TS) = D(TR+TS)$, et l'égalité énoncée suit maintenant.

■

2.6 La norme des relations linéaires

Dans cette section, nous présentons les notions topologiques lieés aux norme des relations linéaires.

2.6.1 La norme d'une relation linéaire

Dans toute la suite, on désignera que $X, Y, Z; .....$ sont des espaces vectoriels normés, et T est une relation linéaire dans $LR(X,Y)$, sauf indication contraire. On écrira $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$

Notation

L'opérateur Q_E^X est donnée dans sous-espace linéaire fermée E de X, soit Q_E^X (ou simplement, Q_E) désigner l'image de quotient naturel avec le domaine X et l'espace nul E.
Nous noterons $Q_{\frac{Y}{T(0)}}$ par Q_T, ou simplement par Q lorsque T est connue.

Proposition 2.6.1. *QT est à valeur unique .*

Preuve : Soit $x \in D(T)$ et posons $z_1 - z_2 \in QTx - QTx = QT(0) \subset Q\overline{T(0)} = 0$. Donc $z_1 = z_2$.

■

Définition 2.6.1. *[5] Nous définissons*

$$\|Tx\| = \|QTx\| \qquad (x \in D(T)). \tag{2.30}$$

$$\|T\| = \|QT\|. \tag{2.31}$$

appelé respectivement la norme de Tx et T. Si $D(T) = X$ et si $\|T\| < \infty$, alors on dit que T est borné.
Soient U et V des sous-ensembles non vides d'un espace normé. Nous définissons la distance entre U et V par la formule

$$d(U, V) := \inf\{\|u - v\| : u \in U, v \in V\} \tag{2.32}$$

Nous allons également écrire $d(x, V)$, où $d(V, x)$, la distance entre $\{x\}$ et V.

La principale justification de cette terminologie vient des propositions 2.6.3, 2.6.4 et 2.6.5, malgré le fait que $LR(X, Y)$ n'est pas un espace vectoriel, et les relations de zéro peut être norme de zéro.

Proposition 2.6.2. A- *Si $y_1, y_2 \in Tx$, alors $d(y_1, T(0)) = d(y_2, T(0))$.*

B- *Nous avons pour tout $x \in D(T)$,*

$$\inf_{x \in Tx} d(y, T(0)) = \sup_{y \in Tx} d(y, T(0)).$$

C- $\|Tx\| = d(y, T(0))$ *pour tout* $y \in T(x)$.

D- $\|Tx\| = d(Tx, T(0)) = d(Tx, 0) \qquad (x \in D(T))$.

Preuve :

A- Depuis $y_1 - y_2 \in T(0)$ on a

$$\begin{aligned} d(y, T(0)) &= \inf_{x \in T(0)} \|y_1 - z\| \\ &= \inf_{x \in T(0)} \|y_1 + y_2 - y_2 - z\| \\ &= \inf_{x \in T(0)} \|y_2 - z\| = d(y_2, T(0)) \end{aligned}$$

B- Soit $z \in Tx$. Par(A), on a

$$\begin{aligned} d(z, T(0)) &= \sup_{y \in Tx} d(y, T(0)) \\ &= \inf_{y \in Tx} d(y, T(0)) \end{aligned}$$

C- Pour tout $y \in T(x)$, nous avons $Tx = y + T(0)$ par la proposition 2.4.2 et donc

$$\|Tx\| = \|Qtx\| = \|Qy\| = d(y, \overline{T(0)}) = d(y, T(0)).$$

D- Fix $z \in Tx$. Donc

$$\begin{aligned} d(Tx, 0) &= \inf_{y \in Tx} \|y\| \\ &= \inf_{y \in Tx} \|z - (z - y)\| \\ &= \inf_{x \in T(0)} \|z - k\| = d(x, T(0)) = \|Qz\| = \|Qtx\| = \|Tx\|. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.6.3. **A-** *Pour* $S, T \in LR(X, Y)$ *on a*

$$\|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \qquad (x \in D(T + S)).$$

B- *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $x \in D(T)$ *on a*

$$\|\alpha Tx\| = |\alpha| \|Tx\|.$$

Preuve :

A- Puisque $s \in Sx$, $t \in Tx$. D'aprit la proposition 2.6.2, $s+t \in (S+T)x = Sx+Tx$, et donc

$$\begin{aligned} \|Sx+Tx\| &= d(s+t,(S+T)(0)) \\ &\leq d(s,S(0)+T(0))+d(t,S(0)+T(0)) \\ &\leq d(s,S(0))+d(t,T(0)) = \|Sx\|+\|Tx\| \end{aligned}$$

B- On a

$$\begin{aligned} \|\alpha Tx\| &= \|Q(\alpha T)(x)\| \quad (\textit{puisque } \alpha T(0)=T(0) \textit{ pour } \alpha \neq 0) \\ &= \|\alpha QTx\| = |\alpha|\|QTx\| = |\alpha|\|Tx\|. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.6.4. $\|T\| = \sup_{x\in Bx}\|Tx\|$.

Preuve :

$$\|T\| = \|QT\| = \sup_{x\in Bx}\|QTx\| = \sup_{x\in Bx}\|Tx\|.$$

■

Proposition 2.6.5. **A-** *Pour* $S,T \in LR(X,Y)$ *on a*

$$\|S+T\| \leq \|S\|+\|T\|.$$

B- $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\| \quad (\alpha \in \mathbb{K})$.

Preuve :

A- A partir proposition 2.6.3(A) et 2.6.4.

$$\begin{aligned} \|S+T\| &= \sup\{\|Sx+Tx\| : x \in B_X \cap D(S)\cap D(T)\} \\ &\leq \sup\{\|Sx\|+\|Tx\| : x \in B_X \cap D(S)\cap D(T)\} \\ &\leq \sup\{\|Sx\| : x \in B_X \cap D(S)\cap D(T)\} + \sup\{\|Tx\| : x \in B_X \cap D(S)\cap D(T)\} \\ &\leq \sup\{\|Sx\| : x \in B_{D(S)} + \sup\{\|Tx\| : x \in B_{D(T)} = \|S\|+\|T\|. \end{aligned}$$

B- Combine de propositions 2.6.3 et 2.6.4.

■

2.6.2 Le module minimum

Définition 2.6.2. *[5] Le module de T minumum est la quantité*

$$\gamma(T) := \sup\{\gamma : \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T)) \text{ pour } x \in D(T)\}$$

Une formule utile est équivalent à la proposition(2.6.6) ci-dessous.

Proposition 2.6.6. *On a*

$$\gamma T = \begin{cases} \infty, if \ D(T) \subset \overline{N(T)}\,; \\ inf\left\{\frac{\|Tx\|}{d(x,N(T))} : x \in D(T), x \notin D(T)\right\} \ \ sinon. \end{cases} \tag{2.33}$$

2.6.3 Continuité et ouverture

Définition 2.6.3. *Soit S une relation arbitraire d'un espace topologique dans un autre. Alors S est dite continue si pour chaque voisinage V dans $R(S)$, l'image inverse $S^{-1}(V)$ est un voisinage de $D(S)$. La relation S est appelée ouverte si chaque fois que U est un voisinage dans $D(S)$, l'image $S(U)$ est un voisinage de $R(S)$.*
Nous notons que

$$S \text{ est continue si et seulement si } S^{-1} \text{ est ouverte.} \tag{2.34}$$

Il est simple de vérifier que la composition des relations continues à valeur unique est continue. Les conditions pour les quelles la composition de relations linéaires est continue ou ouverte seront dérivées (voir théorème 2.6.1).
Soit U_X désigner l'unité ouverte de X i.e.

$$U_X := \{x \in X : \|x\| < 1\} \tag{2.35}$$

Soit E un fermé de X. Une simple vérification montre que

$$Q_E U_X = U_{Q_E\{X\}} \tag{2.36}$$

$$Q_E B_X = B_{Q_E\{X\}} \tag{2.37}$$

Nous notons le critère topologique simple pour la continuité

$$T \text{ est continue si et seulement si } T(\overline{\Omega}) \subset \overline{T(\Omega)} \text{ pour chaque sous espace} \Omega de D(T). \tag{2.38}$$

Proposition 2.6.7. *Soit M un sous-ensemble non vide de $R(T)$ et soit $\gamma(T) < \infty$. Alors pour $N \subset D(T)$, on a*

$$d(TN, M) \geq \gamma(T)d(N, T^{-1}M)$$

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ et on prendre $m \in M$ et $x \in N$ tel que

$$d(TN, M) > d(Tx - m, 0) - \epsilon. \tag{2.39}$$

Maintenant $Tx - m = T(x - T^{-1}m)$. Donc

$$\begin{aligned}
d(Tx - m, 0) &= d(Tx - m - T(0), 0) = d(Tx, m + T(0)) \\
&= d(Tx, TT^{-1}m) = \inf_{h \in T^{-1}m} d(Tx, Th) \\
&= \inf_{h \in T^{-1}m} d(T(x - h), 0) = \inf_{h \in T^{-1}m} \|T(x - h)\| \\
&\geq \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(x - h, T^{-1}(0)) \\
&= \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(x, h + T^{-1}(0)) \\
&= \gamma(T)d(x, T^{-1}m) \geq \gamma(T)d(x, T^{-1}M) \geq \gamma(T)d(N, T^{-1}M)
\end{aligned}$$

Alors à partir de (2.39)

$$d(TN, M) > \gamma(T)d(N, T^{-1}M) - \epsilon$$

■

Théorème 2.6.1. *Soit $S \in LR(Y, Z), T \in LR(X, Y)$. Puis on a*

$$\gamma(ST) \geq \gamma(S\backslash_{R(T)})\gamma(T) \quad (\infty.0 \textit{ exclus}) \tag{2.40}$$

avec $\gamma(ST) = \infty$ lorsque $\gamma(T) = \infty$ (même si $\gamma(S\backslash_{R(T)}) = 0$). En outre, on a l'implication

$$S^{-1}(0) \subset R(T) \Longrightarrow \gamma(ST) \geq \gamma(S)\gamma(T). \tag{2.41}$$

Preuve : Soit $x \in D(ST)$. Puisque $ST = (S\backslash R(T))T$ (voir 2.3 (2.9)), nous supposerons sans perte de généralité qui $S = S\backslash R(T)$. Supposons d'abord $\gamma(S), \gamma(T) < \infty$. On a d'après la proposition 2.6.1

$$\begin{aligned}
\|STx\| &= d(STx, ST(0)) \geq \gamma(S)d(Tx, S^{-1}ST(0)) \\
&\geq \gamma(S)\gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}ST(0))
\end{aligned}$$

(depuis $S^{-1}ST(0) = T(0) + S^{-1}(0) \subset R(T)$)

$$= \gamma(S)\gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0))$$

Donc l'inégalité (2.40) suivre.
Supposons maintenant que $S^{-1}(0) \subset R(T)$ (ici nous ne supposons que $S = S\backslash_{R(T)}$).
Dans ce cas $S^{-1}ST(0) = T(0) \cap D(S) + S^{-1}(0) \subset R(T)$ et par conséquent

$$d(Tx, S^{-1}ST(0)) \geq \gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0))$$

et donc, comme précédemment, nous obtenons

$$\|STx\| \geq \gamma(S)\gamma(T)d(x, S^{-1}T^{-1}(0))$$

À partir de laquelle l'implication (2.41) suit.
Maintenant, nous allons $\gamma(T) = \infty$. Alors $T^{-1}(0)$ est dense dans $D(T)$ (voir proposition 2.6.6). Donc $d(x, T^{-1}(0)) = 0$ pour tout x dans $D(ST)$. Mais on a $N(ST)$ est dense dans $D(ST)$ ce qui signifie que $\gamma(ST) = \infty$.
Enfin, supposons que $\gamma(S) = \infty, \gamma(T) < \infty$. Puisque $d(xT^{-1}, S^{-1}(0)) = 0$ (par la proposition 2.6.7), donc $\gamma(T)d(x, T^{-1}S^{-1}(0)) = 0$. Alors $\gamma(ST) = \infty$ if $\gamma(T) \neq 0$.
La preuve de l'implication (2.41) se fait la même façon.

■

2.7 Relations linéaires fermées et fermables

Définition 2.7.1. *La fermeture d'une relation linéaire $T \in LR(X, Y)$ est la relation T définie par*

$$G(\overline{T}) := \overline{G(T)} \tag{2.42}$$

Il est clair que $\overline{T} \in LR(X, Y)$. La relatoin T est appelée fermée si son graphe $G(T)$ est fermé dans $X \times Y$, ou de manière équivalente, si $T = \overline{T}$.

Propriétés 2.7.1. *Nous énumérons quelques propriétés simples :*

1- *T est fermé si et seulement si T^{-1} est fermé.*

2- $\overline{T}^{-1} = \overline{T^{-1}}$.

3- $G(\overline{T}J_{D(T)}) = \overline{G(\overline{T}J_{D(T)})}$.

4- *Si T est fermé, alors $T(0)$ est fermé.*

5- *Si T est continue et $D(T)$ et $T(0)$ sont fermés, alors T est fermé.*

Proposition 2.7.1.

$$Q\overline{T} = \overline{QT} \quad (\textit{où } Q = Q_T).$$

Preuve : Soit $(x, Qy) \in G(\overline{QT}) = \overline{G(QT)}$. Choisissons une suite (x_n, QTx_n) dans $G(QT)$ convergeant vers (x, Qy). Alors il existe une suite (k_n) dans $T(0)$ et une suite $\{y_n\}$, avec $y_n \in Tx_n$ telle que $y_n + k_n \longrightarrow y$. Alors $(x_n, y_n + k_n)$ est une suite dans $G(T)$ convergente vers $(x, y) \in G(\overline{T})$. Ainsi $(x, Qy) \in G(Q\overline{T})$. Donc $G(\overline{QT}) \subset G(Q\overline{T})$.
Pour l'inclusion inverse, soit $(x, Qy) \in G(Q\overline{T})$. Alors $(x, y_1) \in G(\overline{T})$ où $Qy = Qy_1$. Choisissons une suite de (x_n, y_n) dans $G(T)$ convergente vers (x, y_1). Alors

$$(x_n, Qy_n) = (x_n, QTx_n) \longrightarrow (x, Qy_1) = (x, Qy)$$

montrant que $(x, Qy) \in \overline{G(QT)}$, comme souhaite.

■

Proposition 2.7.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i- *T est fermée.*

ii- *QT est fermée et $T(0)$ est fermée.*

Preuve : Si T est fermée, on a d'aprés la proposition 2.7.1, QT est fermé, et $T(0)$ est fermé par la définition 2.7.1 (4). Inversement, supposons que (ii) considérer. On a d'aprés la proposition 2.7.1, $D(T) = D(QT) = D(Q\overline{T}) = D\overline{T}$, et pour $x \in D(T)$ on a $Q\overline{T}x = QTx$, alors $\overline{T}x = \overline{T}x + T(0) = Tx + T(0) = Tx$. Donc $T = \overline{T}$, i.e. T est fermé.

■

Définition 2.7.2. *La relation linéaire T est dite fermée si $\overline{T}$ est une extension de T i.e, si*

$$Tx = \overline{T}x \textit{ pour tout } x \in D(T). \tag{2.43}$$

Proposition 2.7.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i- *T peut être fermée.*

ii- $T(0) = \overline{T}(0)$.

iii- *$TJ_{D(T)}$ est fermée.*

Preuve : L'équivalence de (i) et (iii) est une conséquence de 2.7.1 (3), tandis que l'équivalence de (i) et (ii) résulte de 2.4.5 (ii).

■

Corollaire 2.7.1. *T^{-1} peut être fermée si et seulement si $N(T) = N\overline{T}$.*

Proposition 2.7.4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i- *T peut être fermée.*

ii- *QT peut être fermée et $T(0)$ est fermée.*

En particulier, si T est continue et $T(0)$ est fermée, alors T est fermée.

Preuve : Puisque T est fermée alors $T(0) = \overline{T}(0)$ par la proposition 2.7.3. Donc $T(0)$ est fermée. Puisque $\overline{T}x = Tx$ pour $x \in D(T)$, on a $Q\overline{T}J_{D(T)} = QTJ_{D(T)}$ et donc d'aprés la proposition 2.7.1, $\overline{QT}J_{D(T)} = QTJ_{D(T)}$. Par conséquent QT peut être fermée.
Réciproquement, soit QT fermée et $T(0)$ fermée. Alors, pour $x \in D(T)$, on a

$$\begin{aligned} \overline{QT}x &= QTx \\ &= Q\overline{T}x \qquad \textit{(par la proposition 2.7.1)} \end{aligned}$$

donc $Tx = \overline{T}x$, puisque $\overline{T(0)} = T(0)$, i.e., T peut être fermée.

■

2.8 La completude des $LR(H)$ par la métrique g

On rappelle que g désigne la métrique de gap. Nous donnons à présent la complété de $LR(H)$ pour la métrique g.

Définition 2.8.1. *[19] Soit $E \in LR(H)$. Posons :*

$$E^* = \{(x, y) | \forall s, t \text{ avec } (s, t) \in E, < x, y >=< t, x >\}$$

E^* est une relation linéaire, appelée adjoint de E, et si on pose

$$K = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}$$

on a

$$E^* = K(E^{\perp}) = K(E)^{\perp}.$$

Proposition 2.8.1. *[19] Soit E et F deux sous-espaces vectoriels de $H \oplus H$. Alors,*

$$E^* \widehat{+} F^* \subseteq (E \widehat{+} F)^*. \tag{2.44}$$

En outre si $D(E) \subseteq D(F)$ et $D\{(E \widehat{+} F)^*\} \subseteq D(F^*)$ alors $E^* \widehat{+} F^* = (E \widehat{+} F)^*$.

$$E^* F^* \subseteq (FE)^*. \tag{2.45}$$

En outre si $R(E) \subseteq D(F)$ et $D((FE)^*) \subseteq D(F^*)$ alors $E^* F^* = (FE)^*$.

Remarque 2.8.1. *Voir l'article de* ***Yahia Mezraoui*** *pour la notation $E \widehat{+} F$.*

Preuve : Soit $(x, m) \in E^*$. Alors $\forall u \in D(E + F)$, $\forall s$ tel que $(u, s) \in E$, on a

$$< u, m >=< s, x >$$

Si $(x, n) \in F^*$ alors $\forall (u, t) \in F, < u, n >=< t, x >$. Donc $< u, m+n >=< s+t, x >$ et par conséquent $(x, m+n) \in (E \widehat{+} F)^*$, d'où (2.44). Si maintenant, $D(E) \subseteq D(F)$ alors on a $E \subseteq (E \widehat{+} F) \check{+} F$ d'où $(E \widehat{+} F)^* \check{+} F^* \subseteq ((E \widehat{+} F) \check{+} F)^* \subseteq E^*$. Et si $D((E \widehat{+} F)^*) \subseteq D(F^*)$, alors $(E \widehat{+} F)^* \subseteq \{((E \widehat{+} F)^*) \check{+} F^*\} \widehat{+} F)^* \subseteq E^* \widehat{+} F^*$, d'où $(E \widehat{+} F)^* = E^* \widehat{+} F^*$.
Soit $(x, y) \in E^* F^*$. Alors $\exists z \in H$ tel que $(x, z) \in F^*$ et $(z, y) \in E^*$. En outre $\forall (s, t) \in FE, \exists u \in H$ tel que $(s, u) \in E$ et $(u, t) \in F$. Donc $< u, z >=< t, x >$ et $< u, z >=< s, y >$ et on a :

$$< s, y >=< t, x > \quad \forall (s, t) \in FE.$$

Par conséquent, $(x, y) \in (FE)^*$ ce qui entraine (2.45).
Si maintenant, $D\{(FE)^*\} \subseteq D(F^*)$. Soit $(x, y) \in (FE)^*$ alors il existe $z \in H$ tel que $(x, y) \in (F)^*$ et $(z, y) \in (FE)^* (F^*)^{-1}$. Donc $(z, y) \in (F^{-1} FE)^* \subseteq E^*$ car $R(E) \subseteq D(F)$. Doù $Ev \subseteq F^{-1} EF$ et par conséquent $(FE)^* \subseteq E^* F^*$ et $E^* F^* = (FE)^*$.

$\blacksquare$

Proposition 2.8.2. *[19] Soit $E \in LR(H)$ tel que* $\dim(E \cap H_2) = \dim(E^\perp \cap H_1)$. *On pose*

$$X = (E \cap H_2)^\perp \cap E$$

$$Y \oplus \{0\} = E^\perp \cap H_1$$

et

$$\{0\} \oplus Z = E \cap H_2$$

Si on note $Q = P_{E^\perp \cap H_1 + E \cap H_2}$ et W une isométrie partielle de noyau $Y^\perp$, qui envoie Y sur Z, alors $P_t = P_X + P_{G(W/t)}Q$ est une projection orthogonale sur le graphe d'un élément $A_t \in C(H)$.

Proposition 2.8.3. *[19] Soit $E \in LR(H)$ tel que* $\dim(E \cap H_2) = \dim(E^\perp \cap H_1)$. *Alors, il existe une application continue de* $[0, 1]$ *dans $C(H)$ ($t \longmapsto \{A_t\}$) telle que :*

$$\lim_{t \longrightarrow 1} g(G(A_t), E) = 0. \tag{2.46}$$

Proposition 2.8.4. *[19] Soit $E \in LR(H)$ à domaine dense non fermé $D(E)$ dans H. Alors $\exists \{A_n\} \subseteq C(H)$ et* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} g(G(A_n), E) = 0$.

Preuve : $D(E)$ admet un complément algébrique de dimension infinie. En effet, $D(E) \oplus \{0\} = R(P_1(E))$ et donc $D(E)$ est un espace paracomplet (cf. la définition 2.1.1 de [10]) ou "espace image" si l'on adopte la terminologie de [8]. Supposons que $D(E)$ admette un complément algébrique D^* de dimension $m < +\infty$. Alors $D(E)$ et D^* étant paracomplets, $D(E) \cap D^* = 0$ et $D(E) + D^* = H$ étant fermés, $D(E)$ serait fermé d'aprés le lemme de **Neubauer**, (cf. [20] et [10]). Contradiction.
1^{er}*cas* : $dim(E \cap H2) = n = dim(Y) < +\infty$ où $\{0\} \oplus Y = E \cap H_2$. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un système orthonormé et D^* l'espace vectoriel engendré par les $e_i, i = 1, ..., n$ tel que $D^* \cap D(E) = \{0\}$. Posons $X = E \cap (E \cap H_2)^\perp$. Alors X est le graphe d'un opérateur A fermé de domaine dense $D(A) = D(E)$. On définit la suite des opérateurs $\{A_m\}$ *sur* $D(A) + D^*$ par : pour $x \in D(A)$ *et* $y \in D^*, A_m\{x + y\} = Ax + mUy$ où U est une matrice unitaire qui envoie D^* sur Y . Il est clair que A_m est fermé car $G(A_m) = G(A) + G(U)$ et $dimY = dimD^* < +\infty$, d'où $dim(G(U)) < +\infty$.

La suite $\{G(A_m)\}$ converge vers E. En effet, posons $t = 1/m$. Si $(x, Ax) + (ty, Uy) \in G(A_m)$ et $(x, Ax) + (0, Uy) \in E$, alors :

$$\|((x, Ax) + (ty, Uy)) - ((x, Ax) + (0, Uy))\|^2 = \|ty\|^2 \leq t^2 \|U^{-1}\|^2 \|Uy\|^2.$$

Comme $\|Uy\|^2 \leq \|(x, Ax)+(ty, Uy)\|^2$, alors $\delta(G(A_m), E) \leq t\|U^{-1}\|$. Par conséquent :

$$lim_{m \longrightarrow +\infty} \delta(G(A_m), E) = 0.$$

De même on montre que :

$$lim_{m \longrightarrow +\infty} \delta(E, G(Am)) = 0,$$

ce qui entraîne que

$$lim_{m \longrightarrow +\infty} g(E, G(A_m)) = 0.$$

$2^{eme} cas$: $dim(E \cap H_2) = +\infty$. Posons $\{0\} \oplus Y = E \cap H_2 \Longrightarrow dimY = +\infty$. $D(E)$ est dense non fermé et paracomplet. Il existe donc un sous-espace vectoriel dense non fermé D^* tel que $D(E) \cap D^* = \{0\}$ (cf. l'introduction de [18] et [21]). D^* est le domaine d'un opérateur fermé non borné B. On peut donc construire un opérateur borné bijectif de Y sur D^*, puisque $dim(Y) = +\infty$ et H est séparable. Soit T cet opérateur et $C = T^{-1}$. C est alors un opérateur fermé à domaine dense égale à D^*. En fait $D^* = R(S_B)$ où $S_B = \sqrt{(1 + B^* B)^{-1}}$ (cf. la proposition 1.2 de [19]) et on a $\|T\| < +\infty$. On définit comme précédement une suite d'opérateurs $\{A_m\}$ de domaine $D(E) + D^*$ de la façon suivante :
Pour $x \in D, y \in D^*, A_m(x + y) = Ax + mCy$.
On montre dans un premier temps que les A_m sont des opérateurs fermés.
Soient $\{x_n\}, \{y_n\}$ telles que :

$$\begin{cases} x_n + y_n \longrightarrow x\,; \\ A_m(x_n + y_n) \longrightarrow y. \end{cases}$$

$A_m(x_n + y_n) = A(x_n) + mCy_n \; et \; Ax_n \perp Cy_n$ donc $\{Ax_n\}$ et $\{mCy_n\}$ sont deux suites convergentes. T est borné donc $\{T(mC_{y_n})\} = \{my_n\}$ est convergente, d'où $\{y_n\}$ est convergente. Par conséquent x_n converge vers un élément $u \in H$. A est fermé donc Ax_n converge vers un élément $v = Au \in H$. D'où $u \in D(A) = D(E)$ et $v = Au$ et

y_n converge vers un élément $r \in H$ et Cy_n converge vers un élément $s \in H$. Comme l'opérateur C est fermé, $r \in D^*$ et $s = Cr$.
Par conséquent, $x = u + r \in D(E) + D^* \; et \; y = A_m x$.
Enfin de la même manière que dans le premier cas, on montre que :

$$\delta(G(Am), E) \leq \frac{1}{m}\|T\|,$$

$$\delta(E, G(Am)) \leq \frac{1}{m}\|T\|.$$

Donc $lim_{m \longrightarrow +\infty} g(E, G(A_m)) = 0$.

■

Chapitre 3

Opérations dans $LR(H)$

Dans ce chapitre, nous allons donner des conditions topologiques suffisantes sur les graphes des deux relations linéaires E et F sur un espace de Hilbert H, dont l'un est afin à suffisant assurer la fermeture du produit EF et la somme $E + F$.
Notons que ces conditions ne sont pas nécessaires et en particulier n'inclut pas les cas E et F sont continus partout des opérateurs continus partout définis.

3.1 Difficulté de la somme et du produit dans $C(H)$

3.1.1 Sur la somme des opérateurs fermés

Dans cette section, on rappelle quelques travaux récémment établis à propos de la somme et du produit de deux opérateurs fermés.

Suposons l'existence de deux opérateurs A et B, les domaines $D(A)$ et $D(B)$ représentent physiquement l'ensemble des informations sur A et B. Si on considère les opérateurs $A+B$ et AB, les domaines $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ et $D(AB) = A^{-1}D(B)$ vont probablement se réduire à $\{0\}$. Le phénomème de trivialité du domaine de la somme (ou du produit) constitue à lui seul un problème assez délicat. Certes, cette situation peut arriver, mais la littérature ne présente que trés peu d'exemples la montrant.

Pour ce qui est la trivialité de la somme de deux opérateurs A et B, de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$, le domaine $D(A) \cap D(B)$ peut être réduit à zéro. L'introduit par **Messirdi** et **Mortad** dans [1] l'exemple suivant :
Sur $L^2(\mathbb{R})$, considèrons A l'opérateur de multiplication par x et B l'opérateur de multiplication par x^2.
A et B sont essentiellement auto-adjoints sur $D(A)$ et $D(B)$ respectivement avec

$$D(A) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \ et \ D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \hat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\}$$

$\hat{f} = \mathfrak{T} f$ étant la transformation de Fourier de f.
On a

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) = \{f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}); \hat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\} = \{0\}$$

puisque la transformée de Fourier d'une distribution à support compact n'est jamais à support compact sauf si elle est identiquement nulle en s'appuyant sur le théorème de Paley-Wiener-Schwartz qui affirme bien le résultat suivant :

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{T}(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) = \{0\}$$

Pour la somme non fermée de deux opérateurs fermés un exemple à été déttaille à la première chapitre.

3.1.2 Sur le produit des opérateurs fermés et son adjoint

Comme nous l'avons mentionné auparavant, la trivialité d'une opération algébrique sur $C(H)$ constitue un problème sans remède et les conditions mathématiques réunies ne peuvent changer cette situation. C'est au tour de Dixmier à la fin de son papier [1] qu'il donna une approche plus explicite, cette fois sur la constructier d'un opérateur A symétrique à domaine dense tels que $D(A^2) = D(A^{*2}) = \{0\}$. On a déja discuter dans la première chapitre de la constructier de Chernoff d'un opérateur symétrique à carré trivial , hormis ces deux travaux, on n'a pas connaissance de travaux ou d'exemples qui montrent la trivalité du produit.

Supposons dés à présent que le domaine du produit est non réduit au vecteur nul, le produit de deux opérateurs fèrmés n'est pas en général fermé. Considérons en effet sur $L^2(\mathbb{R})$, les opérateurs

$$A = -i\frac{d}{dx}, \quad B = |x|$$

A et B sont clairement auto-adjoint (par suite fermés) sur leurs domaines respectifs

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

et

$$D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Alors l'opérateur défini par

$$ABx = -i(|x|f)^{'}$$

de domaine

$$D(AB) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R}), -i(|x|f)^{'} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Où la dérivée est considérée au sens des distributions [1]. $D(AB)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ mais AB ne peut être fermé. On voit que le caractère auto- adjoint des deux opérateurs n'est pas suffitsant pour garantir la ferméture du produit. Par ailleurs, le produit AB est par exemple fermé si A est fermé et B est borné. Par contre, si A est borné et B est fermé on se retrouvera avec un opérateur AB semi fermé qui n'est pas nécéssairement fermé voir [1]. La littérature montre aussi la fermeture de AB, dans cet ordre, si A est un opérateur inversible à inverse borné sur H (voir [1]).
Les opérateurs de Fredholm, qui sont des opérateurs fermés vérifiant des conditions supplémentaires (voir[1]) permettent de montrer que le produit AB est Fredhlom si A et B le sont aussi.

Définition 3.1.1. *[1] Si H est un espace de Hilbert, K sera dit un sous-espace paracomplet de H si K est un sous-espace hilbertisable de H tel que l'injection de K, muni de sa topologie propre, dans H est continue.*

Par cette définition, Labrousse [10] présente les opérateurs paracomplets dont les graphes associés sont paracomplets dans $H \times H$. Il remarque alors que la famille des opérateurs paracomplets est la plus petite famille d'opérateurs fermés pour la somme et le produit d'opérateurs et contenant les opérateurs fermés, en d'autre termes, il montre.

Proposition 3.1.1. *AB est paracomplet si A et B sont paracomplets tels que $N(AB)$ et $R(AB)$ sont fermés dans H.*

Il montre aussi dans le même travail [1]

Théorème 3.1.1. *Si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

1. *A et B sont des opérateurs de Fredholm.*
2. *A et B sont des opérateurs quasi-Fredholm et AB est quasi-Fredholm à indice égal à 0.*
3. *B est un inverse généralisé de A et $R(A)$ est fermé dans H, et inversement.*
4. *B est un inverse généralisé de A tel que $R(A) \oplus R(B) = H$*

Alors AB est fermé dans H.

En ce qui concerne la relation de l'adjoint du produit de deux opérateurs fermés, il est connu que si A et B sont deux opérateurs fermés à domaines denses sur un espace de Hilbert H, alors $(AB)^* \supseteq B^*A^*$ avec qui peut être stricte. La question "Sous quelles conditions à t-on l'égalité ?" s'avère trés importante.
Von Neumann commence par montre cette égalité pour $B = A^*$. Concernant les opérateurs fermés, Holland montre (voir [1])

Théorème 3.1.2. *[1] Si A est un opérateur fermé à domaine dense sur un espace de Hilbert H, et B est un opérateur borné partout défini dans H tels que $R(B)$ est fermé et de codimension finie dans H, alors $(AB)^* = B^*A^*$.*

Les conditions $R(B)$ est fermé et de codimension finie dans H sont liés par la suite à la terminolgie des opérateurs semi Fredholm inférieurs (voir [1]).

Schechter montre, un peu plus tard, que si A, B sont fermés sur un espace de Banach tel que $R(B)$ est de codimension finie, alors $(AB)^* = B^*A^*$, Gustafson (voir [1]) la montre en s'inspirant du travail de Van Castaren et Goldberg , qui montrent que la formule de l'adjoint donnée par Schecheter peut être meilleure sous la forme qui

Proposition 3.1.2. *Soit A un opérateur fermé, à domaine dense dans un espace de Hilbert H. L'adjoint $(AB)^* = B^*A^*$ pour tout opérateur fermé B à domaine dense si et seulement si $R(A)$ est de codimension finie.*

Van Castaren et Goldberg montrent par ailleurs

Théorème 3.1.3. *L'égalité $(AB)^* = B^*A^*$ a lieu si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

i *B est fermé sur $R(B) \oplus N$ (N étant un sous espace fermé quelconque de $D(A)$) et $codim(R(B)) < \infty$, ici A n'est pas nécéssairement fermé.*

ii *A, B sont fermés sur H avec $N = N(B^*) \cap D(A)$ est fermé, $N^{\perp} \cap N(B^*)$ est de dimension finie et $R(B)$ est fermé ($N(B^*) \subset D(A)$ et $R(B)$ est fermé ou $codim(R(B)) < \infty$).*

iii *$D(AB)$ est dense, A injectif à inverse borné.*

Ils donnent aussi, un résultat concernant les opérateurs auto-adjoints :

Théorème 3.1.4. *Si A, B sont des opérateurs auto-adjoints, tels que*

- *$D(AB)$ est dense.*
- *$D(A) \subset R(B)$.*
- *$R(B) \subset D(B)$.*

Alors, $(AB)^* = B^*A^*$.

Nous avons présenté dans cette section nos motivations à découvrir cet apport dans la théorie des opérateurs. On a vu les opérateurs algébriques, élémentaires dans le cadre borné, deviennent ambigues et souvent difficiles à manier.

3.2 Définitions de base

Dans cette section on étilise les notations citées dans [7]. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ sur laquel on définit $\|.\|$ une norme et le produit scalaire $< .,. >$ et posons $H = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ la somme directe de H avec lui même. En outre, nous noterons $\mathcal{H} \oplus \{0\}$ par H_1 et $\{0\} \oplus \mathcal{H}$ par H_2 et laisser P_1 désigner la projection orthogonale de H sur H_1 et P_2 la projection orthogonale de H sur H_2. Nous dénoterons l'identité l'opérateur sur $\mathcal{H}$ considérant que nous dénoterons l'opérateur de l'identité sur H. $RS(H)$ désignera l'ensemble des sous-espaces de le rang opérateur linéaire de H et $F(H)$ l'ensemble de tous les sous-espaces linéaires fermés de H. Si $X \in RS(H)$ et $\overline{X} \in F(H)$ désignera son fermeture et $M^{\perp}$ son complément orthogonal. Si $X, Y \in RS(H), X \dot{+} Y$ désignera leur somme comme espaces vectoriels et $X \cap Y$ leur intersection. Notons que $RS(H)$ est fermé au dessous de $\perp$, au dessous de $\cap$ et dans $\dot{+}$. En fait $RS(H)$ est le plus petit ensemble de sous-espaces linéaires de H contenant $F(H)$ et fermé en vertu de ces opérations.

Proposition 3.2.1. *Soit $X, Y \in RS(H)$. Si $X \dot{+} Y$ est fermé alors $X^{\perp} \dot{+} Y^{\perp}$ est fermé.*

Preuve : Remarquons que si $X \dot{+} Y$ est fermé , $\overline{X} \dot{+} \overline{Y}$ l'est aussi ce qui implique, par un résultat connu (voir par exemple Corollaire 1.3.1 de [10]) que $X^{\perp} \dot{+} Y^{\perp}$ est fermé. La proposition suit du fait qui $\overline{X}^{\perp} = X^{\perp}$ et $\overline{Y}^{\perp} = Y^{\perp}$.

■

Proposition 3.2.2.

Soit $X, Y \in RS(H)$. On a

$$(X \dot{+} Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp} \tag{3.1}$$

Preuve : Remarquons que $\overline{X \dot{+} Y} = \overline{\overline{X} \dot{+} \overline{Y}}$. Alors la proposition suit du bien fait savoir que $[\overline{X} \dot{+} \overline{Y}]^{\perp} = \overline{X}^{\perp} \cap \overline{Y}^{\perp}$

■

Proposition 3.2.3. *Soit $X, Y \in RS(H)$. Puis*

$$X \dot{+} Y \text{ fermée implique que } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}.$$

Preuve : C'est la proposition 2.3.3 de [10].

■

Soit I l'identité sur $\mathcal{H}$ et soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix};\ K = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}$$

Clairement J, K sont des opérateurs unitaires auto-adjoints sur H.

Les relations linéaires M sur H peuvent identifié, via leurs graphes (notée $G(M)$) avec l'ensemble de tous les sous-espaces linéaires de H. lorsque $G(M) \in RS(H)$ nous écrirons $M \in Lr(H)$ et lorsque $G(M) \in F(H)$ nous écrirons $M \in LR(H)$. Évidemment $LR(H) \subset Lr(H)$ et $LR(H)$ contient $C(H)$. La fermeture $\overline{M}$ de M sera la relation linéaire avec le graphe $G(M)$. On a les ensemble suivantes :
$dom(M) = \{x \in \mathcal{H} \backslash \exists y \in \mathcal{H}\ avec\ \{x, y\} \in G(M)\}$.
$ron(M) = \{y \in \mathcal{H} \backslash \exists x \in \mathcal{H}\ avec\ \{x, y\} \in G(M)\}$.
$nul(M) = \{x \in \mathcal{H} \backslash\ de\ telle\ sorte\ que\ \{x; 0\} \in G(M)\}$.
$mul(M) = \{y \in \mathcal{H} \backslash\ de\ telle\ sorte\ que\ \{0; y\} \in G(M)\}$.
Notons que si $mul(M) = \{0\}$ alors M est un opérateur.
Des informations supplémentaires sur les relations linéaires peuvent être trouvés dans [5], [11] et [4].

Proposition 3.2.4. *Si on a $M \in LR(\mathcal{H})$ telle que $ran(M)$ et $nul(M)$ sont fermés. Alors $M \in LR(H)$*

Preuve : $H_1 \dot{+} G(M) = H \oplus ran(M)$ et $G(M) \cap H_1 = nul(M) \oplus \{0\}$ sont fermées. D'où de Proposition 2.1.1 de [10] il conclu que $G(M)$ est fermé.

■

Définition 3.2.1. *Soit $M \in LR(\mathcal{H})$, alors*

$$G(M^*) = \{\{x, y\} / \forall s, \forall t\ avec\ \{s, t\} \in G(M), (s, y) = (t, x)\}$$

est une graphe d'une relation linéaire fermée, il est noté par M^*, l'adjoint de M.

$$G(M^{-1}) = \{\{x, y\} / \{x, y\} \in G(M)\}$$

est un graphe d'une relation linéaire fermée, il est notée par M^{-1}, L'inverse de M.

Remarque 3.2.1. *Ces définitions peuvent aussi être écrites plus facilement comme suit*

$$G(M^*) = K(G(M)^\perp) = [K(G(M))]^\perp \tag{3.2}$$

$$G(M^{-1}) = j(G(M)) \tag{3.3}$$

Proposition 3.2.5.

$$\overline{M} = (M^*)^* \tag{3.4}$$

$$(ran(\overline{M}))^\perp = nul(M^*) \tag{3.5}$$

$$(dom(\overline{M}))^\perp = mul(M^*) \tag{3.6}$$

$$\overline{ran(M^*)} = nul(\overline{M})^\perp \tag{3.7}$$

$$\overline{dom(M^*)} = mul(\overline{M})^\perp \tag{3.8}$$

Preuve : Nous allons utilisé de (3.2).

$$\begin{aligned}
(3.4) \Longrightarrow G(\overline{M}) &= \overline{G(M)} \\
&= [G(M)^\perp]^\perp \\
&= [KK(G(M)^\perp)]^\perp \\
&= [K(G(M^*))]^* \\
&= G((M)^*)^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.5) \Longrightarrow u \in ran(\overline{M})^\perp &\Longleftrightarrow \{0, u\} \perp G(M) \\
&\Longleftrightarrow \{0, u\} \in K[(G(M))^\perp] \\
&\Longleftrightarrow u \in nul(M^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.6) \Longrightarrow u \in dom(\overline{M})^\perp &\Longleftrightarrow \{v, 0\} \perp G(M) \\
&\Longleftrightarrow \{v, 0\} \in K[(G(M))^\perp] \\
&\Longleftrightarrow v \in mul(M^*)
\end{aligned}$$

Pour vérifié (3.7), (3.8) il suffit de prendre $M = M^*$ dans (1.5), (1.6) resp et prenons leurs compléments orthogonaux.

$\blacksquare$

Proposition 3.2.6. *Soit $M \in LR(\mathcal{H})$. On a*

$$\overline{I+M} = I + \overline{M} \tag{3.9}$$

$$(I+M)^* = I + M^* \tag{3.10}$$

$$G(I+M) = G(I+N) \Longleftrightarrow G(M) = G(N) \tag{3.11}$$

Preuve : (3.9) est évidente.

(3.10) est une conséquence immédiate du corollaire 5.6 de [10].

(3.11) est évidente.

$\blacksquare$

Proposition 3.2.7. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors $EF \in Lr$.*

Preuve : Pour la démonstration voir la proposition 3.18 de [11] .

$\blacksquare$

Proposition 3.2.8. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors $E + F \in LR(H)$.*

Preuve : Pour la démonstration voir la proposition 3.15 de [11].

$\blacksquare$

Proposition 3.2.9. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(E+F) \subseteq G(\overline{E+F}) \subseteq G((E^* + F^*)^*) \tag{3.12}$$

$$G(EF) \subseteq G(\overline{EF}) \subseteq G((E^*F^*)^*) \tag{3.13}$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.5 de [11].

$\blacksquare$

Corollaire 3.2.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(I+EF) \subseteq G(\overline{I+EF}) \subseteq G(\overline{I+F^*E^*})^* \tag{3.14}$$

Preuve : La démonstration est une conséquence immédiate de (3.13), (3.9) et (3.10).

$\blacksquare$

3.3 Relations fermables

Définition 3.3.1. *Soit $M \in LR(\mathcal{H})$. On dit que M est fermable supérieurement (noté $f-s$) si $mul(\overline{M}) = \overline{mul(M)}$.*
De même, On dit que M est fermable inférieurement (noté $f-i$) si $nul(\overline{M}) = \overline{nul(M)}$. Nous dirons que M est semi-fermable si elle est soit $f-s$ ou $f-i$ et nous dirons que elle peut être fermable si elle est à la fois $f-s$ et $f-i$.

Remarque 3.3.1. *Pour les opérateurs, la notion de fermabilité supérieure coïncide avec la notion usuelle de ferméture.*

Proposition 3.3.1. *Soit $M \in Lr(\mathcal{H})$. Alors*

$$M \text{ est } f-i \Longleftrightarrow \overline{nul(M)} = (ran(M^*))^{\perp}. \tag{3.15}$$

$$M \text{ est } f-s \Longleftrightarrow \overline{mul(M)} = (dom(M^*))^{\perp}. \tag{3.16}$$

Preuve : La démonstration est conséquence évident de (3.7) et (3.8).

■

Proposition 3.3.2. *Soit $M \in LR(\mathcal{H})$. On a*

(i) *M est fermée $\Longrightarrow$ M est fermable.*

(ii) *$ran(M)$ est fermé $\Longrightarrow$ M est $f-s$.*

(iii) *$dom(M)$ est fermé $\Longrightarrow$ M est $f-i$.*

Preuve :

(i) est évident.

(ii) Si $ran(M)$ est fermé alors $H_1 \dot{+} G(M) = \mathcal{H} \oplus ran(M)$ est fermé, en utilisant proposition 3.2.3, il suit ce que

$$\begin{aligned} \overline{nul(M)} \oplus \{0\} &= \overline{G(M) \cap H_1} \\ &= \overline{G(M)} \cap H_1 \\ &= nul(\overline{M}) \oplus \{0\} \end{aligned}$$

Par conséquent M est la $f-s$.

(iii) il est prouvé de la même manière.

■

3.4 Produits des relations linéaires fermées

Définition 3.4.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ et soit $S_{E,F}, C_{E,F} \in LR(\mathcal{H})$ sont définis par*

$$G(S_{E,F}) = G(E)\dot{+}K(G(F))$$

$$G(C_{E,F}) = G(E) \cap K(G(F))$$

Proposition 3.4.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(S^*_{E,F}) = G(E^*)\dot{+}K(G(F^*)) = C_{E^*,F^*} \tag{3.17}$$

Preuve : Conséquence évidente de la proposition 3.2.1 et (3.2).

■

Proposition 3.4.2. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors si $S_{E,F}$ est fermée, donc S_{E^*,F^*} est fermée.*

Preuve : La démonstration est une conséquence évidente de (3.3) et (3.2) puisque K est unitaire.

■

Proposition 3.4.3. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$dom(S_{E,F}) = dom(E)\dot{+}ran(F) \tag{3.18}$$

$$ran(S_{E,F}) = ran(E)\dot{+}dom(F) \tag{3.19}$$

Preuve : (3.18) Soit $u \in dom(E)\dot{+}ran(F)$.
Si il $\exists \in domE$ et $y \in ran(F)$ tel que $u = r - y$. De plus $\exists s, x \in \mathcal{H}$ tel que

$$\{r, s\} \in G(E) \ et \ \{x, y\} \in G(E) \Longleftrightarrow \{-y, x\} \in K(G(F))$$

En soppose que $v = s + x$ il est clair que

$$\{u, v\} = \{r, s\} + \{-y, x\} \in S_{E,F}.$$

Alors

$$dom(E)\dot{+}ran(F) \subseteq dom(S_{E,F}).$$

Inversement, si $u \in dom(S_{E,F}), \exists v \in \mathcal{H}$ tel que $\{u, v\} \in G(S_{E,F})$ avec $u = r - y,\ v = s + x, \{r, s\} \in G(E)$ et $\{x, y\} \in G(F)$.
Donc $u \in dom(E)\dot{+}ran(F)$ et par conséquent

$$dom(S_{E,F}) \subseteq dom(E)\dot{+}ran(F).$$

(3.19) est démontré par le même façon.

■

Proposition 3.4.4. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(S_{E,F}) \cap H_1 = ran(I + FE) \oplus \{0\} \tag{3.20}$$

$$G(S_{E,F}) \cap H_1 = \{0\} \oplus ran(I + FE) \tag{3.21}$$

Preuve : Soit $\{u, v\} \in [G(E)\dot{+}K(G(F))] \cap H_1$. Alors $u = x - t$ et $v = s + y = 0$ avec $\{x, y\} \in G(E)$ et $\{s, t\} \in G(E)$.
Par conséquent $\{-y, t\}G(F)$ de sorte que $\{x, -t\}G(FE)$ et donc

$$\{x, x - t\} \in G(I + FE)$$

ce qui montre que

$$u = x - t \in ran(I + FE).$$

Réciproquement, soit $u \in ran(I + FE)$. Alors $\exists w \in \mathcal{H}$ tel que $\{w, u\} \in G(I + FE)$ ce que $\{w, u - w\} \in G(FE)$ et par conséquent $\exists r \in \mathcal{H}$ tel que $\{w, r\} \in G(E)$ et

$$\{r, u - w\} \in G(F) \Longleftrightarrow \{w - u, -r\} \in K(G(F)).$$

Donc

$$\{u, 0\} = \{w, r\} + \{u - w, -r\} \in G(F)\dot{+}K(G(F))$$

et (3.20) est démontrée.
(3.21) se démontre de la même façon.

■

Corollaire 3.4.1. *Soit* $E, F \in LR(\mathcal{H})$*. Alors*

$$nul(S_{E,F}) = ran(I + FE) \tag{3.22}$$

$$mul(S_{E,F}) = ran(I + FE) \tag{3.23}$$

Proposition 3.4.5. *Soit* $E, F \in LR(\mathcal{H})$*. Alors*

$$dom(C_{E,F}) = nul(I + FE) \tag{3.24}$$

$$ran(C_{E,F}) = nul(I + FE) \tag{3.25}$$

Preuve : Soit $u \in nul(I + FE)$.
Puis que

$$\{u, 0\} \in G(I + FE) \Longleftrightarrow \{u, -u\} \in G(FE)$$

ce que $\exists v \in \mathcal{H}$ tel que

$$\{u, v\} \in G(E) \ et \ \{v, -u\} \in G(F) \Longleftrightarrow \{u, v\} \in K(G(E)).$$

D'où

$$\{u, v\} \in G(E) \cap K(G(E)) = G(C_{E,F})$$

et par conséquent

$$nul(I + FE) \subseteq dom(C_{E,F}).$$

Inversement, si $u \in dom(C_{E,F})$ alors $\exists v \in \mathcal{H}$ tel que $\{u, v\} \in G(E) \cap K(G(F))$, et par conséquent

$$\{u, v\} \in G(E) \ et \ \{v, -u\} \in G(F)$$

Donc

$$\{u, -u\} \in G(EF)$$

qui implique que

$$u \in nul(I + FE).$$

L'égalité (3.25) se démontre de la même façon.

■

Proposition 3.4.6. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(C_{E,F}) \cap H_1 = nul(E) \cap mul(F) \tag{3.26}$$

$$G(C_{E,F}) \cap H_2 = mul(E) \cap nul(F) \tag{3.27}$$

Preuve : Soit $\{u, v\} \in G(E) \cap K(G(F)) \cap H_1$. On a $v = 0$ et donc $\{u, 0\} \in G(E)$ et $\{0, -u\} \in G(F)$ ce qui montre que

$$G(E) \cap K(G(F)) \subseteq nul(E) \cap mul(F)$$

Inversement $u \in nul(E) \cap mul(F)$ implique que

$$\{u, 0\} \in G(E) \ et \ \{0, -u\} \in G(F) \Longleftrightarrow \{u, 0\} \in K(G(F)).$$

On établit (3.27) de la même façon.

■

Corollaire 3.4.2. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$nul(C_{E,F}) = nul(E) \cap mul(F) \tag{3.28}$$

$$mul(C_{E,F}) = mul(E) \cap nul(F) \tag{3.29}$$

Proposition 3.4.7. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$nul(I + E^*F^*)^{\perp} = \overline{ran(I + FE)} \Longleftrightarrow S_{E,F} est f.i. \tag{3.30}$$

$$\overline{nul(I + EF)} = ran(I + F^*E^*)^{\perp} \Longleftrightarrow S_{E^*,F^*} est f.s. \tag{3.31}$$

Preuve :

Pour montrer (1.30) on prend $M = S_{E,F}$ dans (1.15), à l'aide (1.22) et (1.25). Et pour (3.31)On prend $M = S_{E^*,F^*}$ dans (1.16), à l'aide (1.23) et (1.24).

■

Corollaire 3.4.3. *Soit* $E, F \in Lr(\mathcal{H})$*. Alors*

$$\overline{ran(I+EF)} \;=\; [nul(I+F^*E^*)]^{\perp}$$

et

$$\overline{ran(I+FE)} \;=\; [nul(I+E^*F^*)]^{\perp}$$

est equivalante à $S_{E,F}$ *est fermable.*

Théorème 3.4.1. *Soit* $E, F \in LR(\mathcal{H})$ *et soit* $S_{E,F}$ *fermée Alors*

$$\overline{FE} = (E^*F^*)^*$$

Preuve : D'aprés la Proposition 3.4.2 il suit que $S_{E,F}$ est fermée et S_{E^*,F^*} est aussi fermée. Maintenant, puisque $S_{E,F}$ est fermé nous avons

$$ran(I+FE) = nul(S_{E,F}) \ est \ fermé \tag{3.32}$$

de sorte que $I + FE$ est f-i. et par conséquent

$$\overline{nul(I+FE)} = nul(\overline{I+FE}) \tag{3.33}$$

De même

$$ran(I+E^*F^*) + mul(S_{E^*,F^*}) \ est \ fermé.$$

tel que $I + E^*F^*$ est f-i. et par conséquent

$$\overline{nul(I+E^*F^*)} = nul\overline{(I+E^*F^*)} \tag{3.34}$$

Alors, à partir (3.7) et (3.34) il suit que

$$\begin{aligned} ran((I+E^*F^*)^*) \;&\subseteq\; \overline{ran((I+E^*F^*)^*)} \\ &=\; [nul\overline{(I+E^*F^*)}]^{\perp} \\ &=\; [nul(I+E^*F^*)]^{\perp} \end{aligned}$$

et en utilisant (3.30) et (3.32), on obtiene

$$\begin{aligned} ran((I+E^*F^*)^*) \;&\subseteq\; \overline{ran(I+FE)} \\ &=\; ran(I+FE) \end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de (3.14)

$$ran(I + FE) \subseteq ran((I + E^*F^*)^*)$$

il résulte que

$$ran(I + FE) = ran((I + E^*F^*)^*)$$

Soit maintenant $\{u, v\} = G((I + E^*F^*)^*)$.
Alors à partir de ce que nous avons vu, nous avons $v \in ran(I + FE)$ tel que $\exists w \in dom(I + FE) \subseteq dom(\overline{I + FE})$ tel que

$$\{w, v\} \in G(I + FE) \subseteq G((I + E^*F^*)^*)$$

et, par conséquent, en utilisant (3.6),

$$u - v \in nul((I + E^*F^*)^*) = ran(I + E^*F^*)^{\perp}.$$

Mais $ran(I + E^*F^*) \subseteq ran(\overline{I + E^*F^*})$ de sorte que $u - w \in (ran(I + E^*F^*)^{\perp})$ et maintenant en utilisant (3.31) et (3.33)

$$u - w \in \overline{nul(I + FE)} = nul(\overline{I + FE}).$$

Donc

$$u = u - w + w \in dom(\overline{I + FE})$$

d'où il suit que

$$G((I + E^*F^*)) \subset G(\overline{I + FE})$$

finalement en utilisant (3.14),

$$G((I + E^*F^*)^*) = G(\overline{I + FE})$$

Le théorème résulte alors du (3.9), (3.10) et (3.11).

■

Corollaire 3.4.4. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ et $S_{E,F}$ sont fermés. Alors*

$$\overline{EF} = (F^*E^*)^*$$

Preuve : Puisque $S_{E,F}$ est fermé, donc est

$$\begin{aligned} S_{E,F} &= K(G(S_{E,F})) \\ &= K(G(E)+G(F)) \end{aligned}$$

Par conséquent dans le théorème précédent, nous pouvons intervertir E et F.

■

Corollaire 3.4.5. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ et $S_{E,F}$ sont fermées. Alors*

$$nul(I+FE) \iff I+FE \ est \ fermé \iff FE \ est \ fermé$$

$$nul(I+EF) \ fermé \iff I+EF \ est \ fermé \iff EF \ est \ fermé$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et de la proposition 3.2.4.

■

3.5 Sommes des relations linéaires fermées

Définition 3.5.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ et soit $T_{E,F}, D_{E,F} \in LR(\mathcal{H})$ sont définis par*

$$G(T_{E,F}) = G(E)\dot{+}G(-F)$$

$$G(D_{E,F}) = G(E) \cap G(-F)$$

Proposition 3.5.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(T^*_{E,F}) = G(E^*) \cap G(-F^*) = D_{E^*F^*} \tag{3.35}$$

Preuve : Conséquence évidente de (3.1).

■

Proposition 3.5.2. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors si $T_{E,F}$ est fermé, donc $T_{E^\star,F^*}$ est fermé .*

Preuve : Conséquence évidente de la proposition 3.2.1 et (3.2) puis que K est unitaire.

■

Proposition 3.5.3. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$dom(T_{E,F}) = dom(E) + dom(F) \tag{3.36}$$

$$ran(T_{E,F}) = ran(E) + ran(F) \tag{3.37}$$

Preuve : Soit$u \in dom(E) + dom(F)$. Alors $\exists r \in dom(E)$ et $x \in dom(F)$ tel que $u = r + x$. De plus $\exists s, y \in \mathcal{H}$ tel que

$$\{r, s\} \in G(E) \; et \; \{x, y\} \in G(F) \Longleftrightarrow \{x, -y\} \in G(-F).$$

Alors on pose $v = s - y$ c'est clair que

$$\{u, v\} = \{r, s\} + \{x, -y\} \in T_{E,F}$$

Inversement, si $u \in dom(T_{E,F})$ alors $\exists \; v \in \mathcal{H}$ tel que $\{u, v\} \in G(T_{E,F})$ donc $\exists r, s, x, y \in \mathcal{H}$ tel que

$$u = r + x, v = s - y, \{r, s\} \in G(E) \; et \; \{x, y\} \in G(E)$$

ce qui implique

$$u \in dom(E) + dom(F)$$

L'égalité (3.37) est démontré de la même façon.

■

Proposition 3.5.4. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(T_{E,F}) \cap H_1 = ran(E^{-1} + F^{-1}) \oplus \{0\} \tag{3.38}$$

$$G(T_{E,F}) \cap H_2 = \{0\} \oplus ran(E + F) \tag{3.39}$$

Preuve : Soit $\{u, v\} \in [G(E) + G(-F)] \cap H_1$. Alors $u = x + s$ et $v = y - t = 0$ avec $x, y \in G(E)$ et $\{s, t\} \in G(F)$.
Par conséquent $\{s, y\} \in G(F)$ de sorte que $\{y, s\} \in G(F^{-1})$ et $\{y, x\} \in G(E^{-1})$. Donc

$$\{y, x + s\} \in G(E^{-1} + F^{-1})$$

ce qui montre que $u = x + s \in ran(E^{-1} + F^{-1})$.
Réciproquement, soit $v \in ran(E^{-1} + F^{-1})$. Alors $\exists u \in \mathcal{H}$ tel que $\{u, v\} \in G(E^{-1} + F^{-1})$ et par conséquent $\exists r, s \in \mathcal{H}$ tel que $v = r + s$ avec

$$\{u, r\} \in G(E^{-1}) \Longleftrightarrow \{r, u\} \in G(E)$$

et

$$\{u, s\} \in G(F^{-1}) \Longleftrightarrow \{s, -u\} \in G(-F).$$

Par conséquent

$$\{v, 0\} = \{r, u\} + \{s, -u\} \in G(E) + G(-F)$$

et (3.38) est démontré.
L'égalité (3.39) se démontre de la même manière.

■

Corollaire 3.5.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$nul(T_{E,F}) = ran(E^{-1} + F^{-1}) \tag{3.40}$$

$$mul(T_{E,F}) = ran(E + F) \tag{3.41}$$

Proposition 3.5.5. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$dom(D_{E,F}) = nul(E + F) \tag{3.42}$$

$$ran(D_{E,F}) = nul(E^{-1} + F^{-1}) \tag{3.43}$$

Preuve : Soit $u \in nul(E + F)$.
On a $\{u, 0\} \in G(E, F)$ et $\exists v \in \mathcal{H}$ tel que $\{u, v\} \in G(E)$ et $\{u, -v\} \in G(F) \Longleftrightarrow \{u, v\} \in G(-F)$ alors $u \in dom(D_{E,F})$.

Inversement, si $u \in dom(D_{E,F})$ alors $\exists v \in \mathcal{H}$ tel que $\{u, v\} \in G(E)$ et $\{u, -v\} \in G(F)$.
Donc

$$\{u, 0\} \in G(E) \cap G(-F) = G(D_{E,F})$$

(3.43) se démontre de la même manière.

Proposition 3.5.6. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$G(D_{E,F}) \cap H_1 = nul(E) \cap nul(F) \tag{3.44}$$

$$G(D_{E,F}) \cap H_2 = mul(E) \cap mul(F) \tag{3.45}$$

Preuve : (3.44)Soit $\{u, v\} \in G(E) \cap G(-F) \cap H_1$. On prendre $v = 0$ et donc $\{u, 0\} \in G(E)$ et $\{u, 0\} \in G(F)$ de sorte que $\{u, 0\} \in nul(E) \cap nul(F)$ et donc $G(E) \cap G(-F) \cap H_1 \subseteq nul(E) \cap nul(F)$
Inversement, si $u \in mul(E) \cap mul(F)$ implique que $\{u, 0\} \in G(E)$ et

$$\{u, 0\} \in G(F) \Longleftrightarrow \{u, 0\} \in G(-F)$$

et (3.44) est démontré.
L'égalité (3.45) est démantré de la même façon.

■

Corollaire 3.5.2. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$nul(D_{E,F}) = nul(E) \cap nul(F) \tag{3.46}$$

$$mul(D_{E,F}) = mul(E) \cap mul(F) \tag{3.47}$$

Proposition 3.5.7. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$(nul(E + F))^{\perp} = \overline{ran(E + F)} \Longleftrightarrow T_{E,F} est f.i. \tag{3.48}$$

$$\overline{nul(E + F)} = (ran(E + F))^{\perp} \Longleftrightarrow T_{E,F} est f.i. \tag{3.49}$$

Preuve : Pour l'égalité (3.48) on Prend $M = T_{E,F}$ dans (3.16), en utilisant (3.41) et (3.42).
Pour l'égalité (3.49) on Prendre $M = T_{E^*,F^*}$ dans (1.16), en utilisant (1.41) et (1.42).

■

Théorème 3.5.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ telle que $T_{E,F}$ est fermé. Alors*

$$\overline{E+F} = (E^* + F^*)^{*.}$$

Preuve : En utilisant la Proposition 3.5.2 puisque $T_{E,F}$ est fermé, T_{E^*,F^*} est aussi fermé. Maintenent, puisque $T_{E,F}$ est fermé, nous-mêmes voir que

$$ran(E+F) = mul(F_{E,F}) \ est \ fermé \tag{3.50}$$

de sorte que $E+F$ est f.s. et par conséquent

$$\overline{nul(E+F)} = nul(\overline{E+F}) \tag{3.51}$$

De même

$$ran(E^* + F^*) = mul(F_{E^*,F^*}) \ est \ ferm$$

de sorte que $E^* + F^*$ est f.s. et par conséquent

$$\overline{nul(E^* + F^*)} = nul(\overline{E^* + F^*}) \tag{3.52}$$

Utiliser (3.7) et (3.52), on obtient

$$\begin{aligned} (ran(E^* + F^*))^* &\subseteq \overline{(ran(E^* + F^*))^*} \\ &= [nul(\overline{E^* + F^*})]^\perp \\ &= [nul(E^* + F^*)]^\perp \end{aligned}$$

et on utilise (3.48) et (3.50), on embtiènes

$$ran((E^* + F^*))^* \subseteq \overline{(ran(E+F))} = ran(E+F)$$

D'autre part, à partir (3.12), il suit que

$$ran(E+F) \subseteq ran((E^* + F^*))^*$$

et il résulte

$$ran(E+F) = ran((E^* + F^*))^*$$

Soit maintenant $\{u, v\} \in G((E^* + F^*)^*)$.
Ensuite, à partir de ce que nous avons de voir $v \in ran(E + F)$, telle que

$$\exists w \in dom(E + F) \subseteq dom(\overline{E + F}) \subseteq dom(E^* + F^*)$$

de telle sorte que

$$\{w, v\} \in G(E + F) \subseteq G((E^* + F^*)^*).$$

Par conséquent

$$u - w \in nul((E^* + F^*)^*) = ran(E^* + F^*)^\perp \ utilisant\ (3.5).$$

Mais

$$ran(E^* + F^*) \subseteq ran(\overline{E^* + F^*})$$

tel que

$$ran(E^* + F^*)^\perp \subseteq (ran(\overline{E^* + F^*}))^\perp$$

et donc

$$u - w \in (ran(\overline{E^* + F^*}))^\perp = \overline{nul(E + F)} \ utilisant\ (3.49).$$

Maintenant, en utilisant (3.51) $u - w \in nul(\overline{E + F})$.
Par conséquent $u = u - w \in dom(\overline{E + F})$ d'où il suit que

$$G((E^* + F^*)^*) \subseteq G(\overline{E + F})$$

En utilisant (3.12) finalement, on obtient

$$G((E^* + F^*)^*) = G(\overline{E + F})$$

■

Corollaire 3.5.3. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ être telle que $T_{E,F}$ est fermée. Alors*

$$\overline{E^{-1} + F^{-1}} = ((F^{-1})^* + (E^{-1})^*)^*.$$

Preuve : Puis que $T_{E,F}$ est fermée, on a

$$\begin{aligned} j(G(T_{E,F})) &= j(G(E)) + j(G(F)) \\ &= G(E^{-1}) + G(-F^{-1}) \\ &= T_{E^{-1},F^{-1}} \end{aligned}$$

Ainsi, dans le théorème précédent, on change E par E^{-1} et F par F^{-1} .

■

Corollaire 3.5.4. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ être telle que $T_{E,F}$ est fermée. Alors*

$$nul(E+F)\ ferm \implies E+F\ est\ fermée.$$

$$nul(E^{-1}+F^{-1})\ ferm \implies E^{-1}+F^{-1}\ est\ fermée.$$

Preuve : Ceci est une conséquence immédiate du théorème précédent et de la proposition 3.2.4.

■

3.6 Applications

Pour tout $X \in F(H)$ on note P_X la projection orthogonale dans H sur X.

Définition 3.6.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors on dit que E et F sont sont équivalent compacts, [14] notée par $E \sim_c F$, si $P_{(\overline{E})} - P_{G(\overline{F})}$ est compact.*

Proposition 3.6.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$E \sim_c F \implies E^* \sim_c F^*$$

Preuve : Cela découle immédiatement de la proposition 2.1 de [14].

■

Lemme 3.6.1. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$. Alors*

$$nul(I - P_X + P_Y) = X + Y^{\perp} \tag{3.53}$$

Preuve : Il est évident que $X + Y^{\perp} \subseteq nul(\mathcal{I} - P_X + P_Y)$
Inversement, si $u \in nul(\mathcal{I} - P_X + P_Y)$ alors $(\mathcal{I} + P_Y)u = P_X u$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + 3\|P_Y u\|^2 &= \|(\mathcal{I} + P_Y)u\|^2 + 4\|P_Y u\|^2 \\ &= \|(\mathcal{I} + P_Y)u + 2P_Y)u\|^2 \\ &= \|(\mathcal{I} + P_Y)u\|^2 \\ &= \|P_X u\|^2 \leq \|u\|^2 \end{aligned}$$

Donc $P_Y u = 0$ de sorte que $(I - P_X) = 0$ et donc

$$u \in X \cap Y^{\perp}.$$

■

Proposition 3.6.2. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ avec $E \sim_c F$. Alors*

i- $G(E) + G(F)^{\perp}$ *est fermé.*

ii- $dim G(E) \cap G(F)^{\perp} < \infty$ *et* $dim G(E)^{\perp} \cap G(F) < \infty$.

Preuve : (i)$\|P_{G(E)} - P_{G(F)}\| \leq 1$. (Une conséquence immédiate, par exemple, de Proposition 1.2.3 [10]) Par conséquent, on se limite à l'opérateur auto-adjoint compact $P_{G(E)} - P_{G(F)}$ pour le complément orthogonal de la somme de ses deux sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres 1 et -1 ensuite sa norme est égale à la plus grande valeur absolue de ses valeurs propres restantes et est donc inférieur à 1. En conséquence, on pose (comme dans [11]).

$$\epsilon(E, F) = \|(P_{G(E)} - P_{G(F)})(\mathcal{I} - P_{G(E) \cap G(F)^{\perp}} - P_{G(E)^{\perp} \cap G(F)})\|$$

Nous remarquons que $\epsilon(E, F) < 1$ de sorte que, compte tenu de la proposition 2.14 de [11],

$$G(E) \dot{+} G(F)^{\perp} \ est \ fermé.$$

(ii)comme une perturbation compacte de l'opérateur d'identité $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} - P_{G(E)} + P_{G(F)}$ est un opérateur de Fredholm de sorte que son noyau, qui est $G(E) \cap G(F)^{\perp}$ d'après le proposition précédent, est dimension fini.
La deuxième inégalité résulte de la symétrie du hypothèse dans E et F.

■

Proposition 3.6.3. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ avec $E \sim_c F^*$. Alors*

$$EF \in LR(\mathcal{H}) \ et \ FE \in LR(\mathcal{H}); (EF)^* = F^*E^* \ et \ (FE)^* = E^*F^*.$$

Preuve : De la proposition précédente, on voir que l'hypothèse implique que

$$S_{E,F} = G(E) + K(G(F)) = G(E) + (G(F^*))^{\perp} \ est \ fermé.$$

De plus $G(C_{E,F}) = G(E) \cap (G(F^*))^\perp$ est dimensions finies. Par conséquent

$$\begin{aligned} dim(nul(I+FE)) &= dim(dom(C_{E,F})) \\ &\leq dim(G(C_{E,F})) \\ &= \infty \end{aligned}$$

et donc $nul(I+FE)$ est fermé.
De même

$$\begin{aligned} dim(nul(I+EF)) &= dim(ran(C_{E,F})) \\ &\leq dim(G(C_{E,F})) \\ &= \infty \end{aligned}$$

est fermé. Alors pour la preuve on utilise le théorème 3.4.1, Corollaire 3.4.4 et le corollaire 3.4.5.

■

Définition 3.6.2. *[14] Soit $E \in LR(\mathcal{H})$. On dit que E est essentiellement auto-adjoint si $P_{G(E)} - P_{G(E^*)}$ est un opérateur compact dans H.*

Corollaire 3.6.1. *Soit $E \in LR(\mathcal{H})$. Alors $I + EE^*$ et $I + E^*E$ sont relations auto-adjoints fermées.*

Preuve : On prend $F = E^*$ dans la proposition précédente. Notons que dans ce cas

$$nul(I + E^*E) = nul(I + EE^*) = \{0\}.$$

■

Corollaire 3.6.2. *Soit $E \in LR(\mathcal{H})$. Alors si E est essentiellement auto-adjoint*

$$E^2 \in LR(\mathcal{H}) \text{ et } (E^2)^* = (E^*)^2.$$

Preuve : On prend $F = E$ dans la proposition 3.6.3.

■

Proposition 3.6.4. *Soit $E, F \in LR(\mathcal{H})$ avec $E \sim_c (F^{-1})^*$. Alors*

$$E + F \in LR(\mathcal{H}) \ et \ \overline{E+F} = (E^* + F^*)^*.$$

et

$$E^{-1} + F^{-1} \in LR(\mathcal{H}) \ et \ \overline{E^{-1} + F^{-1}} = ((E^*)^{-1} + (F^*)^*)^{-1}.$$

Preuve : La preuve de cette proposition suit de très près la preuve de la proposition 3.6.3. D'abord, on a vu que

$$G((F^{-1})^*) = J(G(F^*)) = JKG(F) = (G(-F))^{\perp}$$

et, par conséquent, dans l'hypothèse, $T_{E,F} = G(E) + G(-F)$ est fermé. De même, puis que $nul(E+F) = dom(D_{E,F})$ et $nul(E^{-1} + F^{-1}) = ran(D_{E,F})$ on voir que les deux espaces sont de dimensions finies et donc fermée de sorte que la proposition suit du théorème 3.5.1, Corollaire 3.5.3 et le corollaire 3.5.4.

■

3.7 Adjoint des relations linéaires

Si X est un espace linéaire normé, on note $X^{'}$ la norme dual de X ; c.-à-d. l'espace des fonctions linéaires continus tel que x a défini sur X, avec la norme

$$\|x^{'}\| = inf\{\lambda : |x^{'}x| \leq \|x\| \ pour \ tout \ x \in X\}$$

Nous avons les notations suivantes si $K \subset X$et $L \subset X^{'}$, alors

$$K^{\perp} = \{x^{'} \in X^{'} : x^{'}x = 0 \ pour \ tout \ x \in K\}$$

$$L^{\perp} = \{x \in X : x^{'}x = 0 \ pour \ tout \ x^{'} \in L\}$$

tel que $K^{\perp}$ et $L^{\perp}$ sont respectivement sous-espaces linéaire fermés de $X^{'}$ et X. De plus, si M est un sous-espace linéaire de X, alors $M^{\perp\intercal} = \overline{M}$. Si N est un sous-espace linéaire de $X^{'}$, alors $N^{\perp\intercal}$ est la fermeture de N est $\sigma(X^{'}, X)$ la topologie (ou la topologie faible) de $X^{'}$.

L'adjoint

Définition 3.7.1. *L'adjoint $T^{'}$ de T est défini par*

$$G(T^{'}) = G(-T^{-1}) \subset Y^{'} \times X^{'} \tag{3.54}$$

où

$$< (y,x),(y^{'},x^{'}) >=< x,x^{'} > + < y,y^{'} > \tag{3.55}$$

C'est a dire

$$(y^{'},x^{'}) \in G(T^{'}) \text{ si et selement si } y^{'}y - x^{'}x = 0 \text{ pour tout } (x,y) \in G(T). \tag{3.56}$$

Dans (3.56) on a $y^{'}y = x^{'}x$ pour tout $y \in D(T)$. Alors

$$x^{'} \in T^{'}y^{'} \Longleftrightarrow y^{'}Tx = x^{'}x \text{ pour tout } x \in D(T). \tag{3.57}$$

Par conséquent $x^{'}$ est un extension de $y^{'}T$. Nous pouvons donc caractérisons l'adjoint comme la suit

$$G(T^{'}) = \{(y^{'},x^{'}) \in Y^{'} \times X^{'} : x^{'} \text{ est un extension de } y^{'}T\} \tag{3.58}$$

De (3.58) on dit que T est défini compact, alors $T^{'}$ sera à valuer unique (puisque dans ce cas, $y^{'}T$ est une extension unique de X).

Proposition 3.7.1. *Soit $T^{'}$ est une relation linéaire fermée dans $LR(Y^{'},X^{'})$, et on a*

$$D(T^{'}) = \{y^{'} \in Y^{'} : y^{'}T \text{ est continue et valeur unique.}\}$$

En outre, donné $y^{'} \in D(T^{'}), x \in D(T)$, on a $T^{'}y^{'}x = y^{'}Tx \in \mathbb{K}$.

Preuve : On prend (3.58) de définition précidante, $y^{'}T = x^{'}|_{D(T)}$ est continue dans $D(T)$, et

$$y^{'}D(0) = x^{'}(0) = 0$$

∎

Proposition 3.7.2. **1-** $(\overline{T})^{'} = T^{'}$.

2- $(T^{'})^{-1} = (T^{-1})^{'}$.

3- $(\lambda T)^{'} = \lambda T^{'}$.

Preuve : (1-) et (2-) sont consequences immédiate de la définition précidante.
(3-) Pour $\lambda \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} G((\lambda T)^{'}) &= \{(y^{'}, x^{'}) : y^{'}y = x^{'}x \; pour \; (x,y) \in G(\lambda T)\} \\ &= \{(y^{'}, x^{'}) : y^{'}(\lambda y) = x^{'}(\lambda x) \; pour \; (x,y) \in G(T)\} \\ &= G(\lambda T^{'}) \end{aligned}$$

■

Proposition 3.7.3. 1- $N(T^{'}) = R(T)^{\perp}$.

2- $T^{'}(0) = D(T)^{\perp}$.

3- $N(\overline{T}) = R(T^{'})^{\intercal}$.

4- $\overline{T}(0) = D(T^{'})^{\intercal}$.

Preuve :

$$\begin{aligned} y^{'} \in (T^{'})^{-1}(0) &= (0, y^{'}) \in G((T^{'})^{-1}) \\ &= (y^{'}, 0) \in G(T^{'}) \\ &= y^{'}y = 0 pourtouty \in R(T) \\ &= y^{'} \in R(T)^{\perp} \end{aligned}$$

On suit à partir (1) on remplaçons T par T^{-1}, puis on utilisons la proposition 3.7.2 (2).
On a

$$\begin{aligned} x \in N(\overline{T}) &= (x,0) \in G(\overline{T}) = G(-(T^{'})^{-1})^{\intercal} \\ &= x^{'}x = y^{'}(0) \; pour \; tout \; (y^{'}, x^{'}) \in G(T^{'}) \\ &= x^{'}x = 0 \; pour \; tout \; (y^{'}, x^{'}) \in G(T^{'}) \\ &= x^{'}x = 0 \; pour \; toutx^{'} \in R(T^{'}) \\ &= x \in R(T^{'})^{\intercal} \end{aligned}$$

(4-)Rempaceons T par T^{-1} dans (3-), puis on étulisons 3.7.2.

Proposition 3.7.4. *Soient $S, T \in LR(X,Y)$*

1- $G(S^{'}+T^{'}) \subset G((S+T)^{'})$.

2- *Si $D(T) \subset D(S)$, et si S est contenue (par exemple, si $D(S^{'}) = Y^{'}$), alors*

$$S^{'}+T^{'} = (S+T)^{'}$$

3- $(S+T)^{'}$ *est une extension de $S^{'}+T^{'}$ si et selement si($D(S) \cap D(T)^{\perp} = D(S)^{\perp} + D(T)^{\perp}$).*

Preuve : Soit $(y^{'}, x^{'}) \in G(S^{'}+T^{'})$. Alors $(y^{'}, x_1^{'}) \in G(S^{'})$ et $(y^{'}, x_2^{'}) \in G(T^{'})$ où $x^{'} = x_1^{'} + x_2^{'}$. Soit $(x, s+t) \in G(S+T)$ où $(x,s) \in G(S)$ et $(x,t) \in G(T)$. Alors

$$y^{'}(s+t) - x^{'}x = y^{'}(s) + y^{'}(t) - x_1^{'}x - x_2^{'}x = 0.$$

Donc

$$(y^{'}, x^{'}) \in G((S+T)^{'})$$

A par partir (1), $D(S^{'}+T^{'}) \subset D((S+T)^{'})$. Si $y^{'} \in D((S+T)^{'})$, alors $0 = y^{'}(S+T)(0) = y^{'}S(0) + y^{'}T(0)$, il peut être l'unique cas si $0 = y^{'}S(0) = y^{'}T(0)$, c.-à-d. $y^{'}T$ sont à valuer unique. Puisque S est contenue alors $y^{'}S$ est contenue et donc $y^{'}T$ l'aussi, comme $y^{'}Tx = y^{'}(S+T)x - y^{'}Sx$ *pour* $x \in D(T) = D(S+T) \subset D(S)$. Donc par la proposition 3.7.2, $y^{'} \in D(T^{'}) \cap D(S^{'}) = D(S^{'}+T^{'})$. Par conséquent $D(S^{'}+T^{'}) = D((S+T)^{'})$. Donc par proposition 3.7.1 (4), $S^{'}+T^{'} = (S+T)^{'}$.
(3-) Par le corolaire(2.4.5)(ii), $(S+T)^{'}$ est une extension de $S^{'}+T^{'}$ si et selement si $(S+T)^{'}(0) = S^{'}(0) + T^{'}(0)$.
D'aprit cette conclusion on a démontré l'égaliti (2) de la proposition 3.7.4 (2).

■

Nous donnons la condition Suffisant de $(ST)^{'} = T^{'}S^{'}$ dans la partie (A) de théorème suivante.

Théorème 3.7.1. A- *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors $G(T^{'}S^{'}) \subset G((ST)^{'})$. Par conséquense, si l'un ou l'autre*

1. *$R(T^{'}) = X^{'}$ et $D(S) \subset R(T)$, ou*

2. $D(S^{'}) = Z^{'}$ et $R(T) \subset D(S)$;

Alors

$$(ST)^{'} = T^{'}S^{'}. \tag{3.59}$$

B- *Soit M est un sous espace fermé dans $D(T)$ à dimension fini, donc*

$$(TJ_M^X)^{'} = (J_M^X)^{'}T^{'}. \tag{3.60}$$

Preuve :(A-) Si $(z^{'}, x^{'}) \in G(T^{'}S^{'})$ et $y^{'} \in Y^{'}$ alors $(x^{'}, y^{'}) \in G(S^{'})$ et $(y^{'}, x^{'}) \in G(T^{'})$. Alors $z^{'}z = y^{'}y = x^{'}x$ pour tout $(z, x) \in G(ST)$. Donc $(z^{'}, x^{'}) \in G((ST)^{'})$. Nous montrons que

$$G(T^{'}S^{'}) \subset G((ST)^{'}). \tag{3.61}$$

Supposons que (1) est existe. Soit $(z^{'}, x^{'}) \in G((ST)^{'})$. Puisque $x^{'} \in X^{'} = R(T^{'})$, il existe $y^{'} \in Y^{'}$ tel que $(y^{'}, x^{'}) \in G(T^{'})$. Soit $(y, z) \in G(S)$. Alors $y \in D(S) \subset R(T)$, et il existe $x \in D(T)$ tel que $(x, y) \in G(T)$. Par conséquence $x^{'}x = y^{'}y$. Aussi $(x, z) \in G(ST)$. Donc $x^{'}x = zz$, et donc $y^{'}y = z^{'}z = x^{'}x$.
Par conséquense $(z^{'}, y^{'}) \in G(S^{'})$. Nous montrons que $(z^{'}, x^{'}) \in G(T^{'}S^{'})$. Donc

$$G((ST)^{'}) \subset G(T^{'}S^{'}). \tag{3.62}$$

D'apré (3.61) et (3.62) on trouve l'égalétie suivante

$$(ST)^{'} = T^{'}S^{'}.$$

Supposez que (2) existe. Puisque $(S^{-1})^{'} = (S^{'})^{-1}$ par la proposition 3.7.3 (2), on a $R((S^{-1})^{'}) = Z^{'}$, et $D(T^{-1}) \subset R(S^{-1})$. Donc, par le cas précédant, on a

$$(T^{-1}S^{-1})^{'} = (S^{-1})^{'}(T^{-1})^{'}$$

l'égaliti est le même comme (3.59) par la proposition 3.7.3 (2).
On prandre $J = J_M^X$. Il est évident que $D(T^{'}) \subset D((TJ)^{'})$. On a aussi $D(J^{'}T^{'}) = D(T^{'})$ comme $J^{'}$ est défini partout. Par conséquence $(TJ)^{'}$ est à valeur unique. Nous vérifierons maintenant que

$$D((TJ)^{'}) \subset D(T^{'})$$

Soit $y^{'} \in D((TJ)^{'})$, alors $y^{'}T$ est continue et à valeur unique sur M (par la proposition 3.7.2) et donc $y^{'}T$ est continue et à valeur unique sur $D(T)$, par la proposition (2.3.19) de [5]. Par conséquent $y^{'} \in D(T^{'})$. Donc $(TJ)^{'}$ et $J^{'}T^{'}$ sont le même domaine.
Dupant (3.61), il reste seulement montrer que $G(J^{'}T^{'}) \supset G((TJ)^{'})$. Soit $(y^{'}, m^{'}) \in G((TJ)^{'})$, puisque $x^{'} = y^{'}T$ est une extension cntinue à valeur unique de $m^{'} = y^{'}TJ$, on a maintenant $(y^{'}, x^{'}) \in G(J^{'})$. Par conséquent $(y^{'}, m^{'}) \in G(J^{'}T^{'})$.

■

Exemple 3.7.1. *Nous posons une paire S, T pour que $D(S)$ est l'espace entier, et encore $(ST)^{'} \neq T^{'}S^{'}$.*
Soit X est un espace de Hilbert, M est un sous espace fermé de demonsion infinie de X. Soit P défini un projection orthogonale dans X et soit $T_1 = P^{-1}P$. Notons le complément orthogonale de M par N. Soit S_1 est injectife et un opérateur linéaire continu à domaine N et non fermé portée dans X (par exemple, un opérateur compact injectif).
Nous vérifierons en premier que S_1T_1 est non fermé. Soit $x \in \overline{R(S_1)} \backslash R(S_1)$ et (z_n) est une suite dans $R(S_1)$ converge vers z. Soit $y_n = S_1^{-1}(x_n)$. Alors (y_n) n'est pas converge (puis que $z \notin R(S_1)$).
Cependant, $y_n \in D(S_1) \subset N(T_1)$. alors $T_1 = T_1^{-1}, (0, y_n) \in G(T_1)$. Aors $(y_n, z_n) \in G(S_1)$, on a $(0, z_n) \in G(S_1T_1)$. Maintenant $z \notin R(S_1T_1) \subset R(S_1)$, et alors $(0, z) \notin G(S_1T_1)$. Puis que $(0, z_n) \longrightarrow (0, z)$, cela montre que S_1T_1 est non fermé.
Mais $S = T_1^{'}$ et $T = S_1^{'}$. Puis que T_1 et S_1 sont fermé, on a $T_1 = T_1^{''}$ et $S_1 = S_1^{''}$ (par le reflexivity d'espace de Hilbert). Donc $T^{'}S^{'} = S_1^{''}T_1^{''} = S_1T_1$, lequel nous avons montré que n'être pas fermé, pendant que $(ST)^{'}$ est fermé. Par conséquence $(ST)^{'} \neq T^{'}S^{'}$.

La prochaine proposition est un résultat ordinaire dans la théorie des espaces normés. La preuve peut être trouvée dans [5].

Proposition 3.7.5. *Soit M est un sous espace linéaire de X.*

1- *$X^{'}/M^{\perp}$ est isomorphisme de M au dessous de la norme qui conserve isomorphisme U défini par*
$$U(Q_{M^{\perp}}x^{'}) = x^{'}|_M \qquad (x^{'} \in X^{'}).$$

2- *Si M est fermé , alors $(X/M)^{'}$ est isomorphisme de $M^{\perp}$ au dessous de la norme qui conserve isomorphisme V défini par*

$$(Vx^{'}) = z^{'}(Q_M x) \qquad\qquad (z^{'} \in (X/M)^{'}).$$

Par conséquense on prendre $X^{'}/M^{\perp} = M^{'}$ et $(X/M)^{'}) = M^{\perp}$, cettes égalities sont être interprété quant aux isométries naturelles U et V a décrit en 3.7.5 .

Proposition 3.7.6. *Soit E un sous espace de X. On a*

$$(Q_E^X)^{'} = J_{E^{\perp}}^{x^{'}} \qquad\qquad (si\ E\ est\ fermé) \tag{3.63}$$

$$(J_E^X)^{'} = Q_{E^{\perp}}^{x^{'}} \tag{3.64}$$

Preuve : Utiliser l'isométrie canonique qui identifie $(X/\overline{E})^{'}$ avec $E^{\perp}$ (proposition 3.7.5), on a (supposer E est fermée)

$$(Q_E^X)^{'} : E^{\perp} \longrightarrow X^{'}$$

et

$$(Q_E^X)^{'}x^{'}(x) = x^{'}(Q_E^X x) = x^{'}(x) \qquad\qquad pour\ x \in X, x^{'} \in E^{\perp}. \tag{3.65}$$

On a aussi

$$J_{E^{\perp}}^{x^{'}} : E^{\perp} \longrightarrow X^{'}$$

et

$$(J_{E^{\perp}}^{x^{'}} x^{'})(x) = x^{'}(x) \qquad\qquad pour\ x \in X, x^{'} \in E^{\perp}. \tag{3.66}$$

Comparer (3.65) et (3.66) on trouve (3.63).
Par l'application semblable de proposition 3.7.8, nous avons

$$Q_{E^{\perp}}^{x^{'}} : X^{'} \longrightarrow E^{'}$$

et

$$Q_{E^{\perp}}^{x^{'}} x^{'}(e) = x^{'}e. \qquad\qquad pourx^{'} \in X^{'}, e \in E. \tag{3.67}$$

On a aussi

$$(J_E^X)^{'} : X^{'} \longrightarrow E^{'}$$

et

$$(J_E^X)^{'}x^{'}(e) = x^{'}(J_E^X e) = x^{'}e \qquad\qquad pourx^{'} \in X^{'}, e \in E. \tag{3.68}$$

L'égalité (3.64) maintenant suit de (3.67) et (3.68).

■

Théorème 3.7.2. *On a*

A- $(QT)^{'} = T^{'}J_{T(0)^{\perp}}$.

B- $(TJ_{D(T)})^{'} = Q_{T'}T^{'}$.

C- $(QTJ_{D(T)})^{'} = Q_{T'}T^{'}J_{T(0)^{\perp}}$.

Preuve : La démonstration est combiné de théorème 3.7.1 et la proposition 3.7.6.

■

Corollaire 3.7.1. *On a*

$$D(T^{'}) = D((QT)^{'}) \tag{3.69}$$

et

$$T^{'}y^{'} = (QT)^{'}y^{'} \qquad (y^{'} \in D(T^{'})) \tag{3.70}$$

Preuve : La démonstration est combinée le théorème 3.7.2 avec la proposition 3.7.3.

■

Remarque 3.7.1. *[5] Le corollaire précédant montre que les adjoints des relations T et QT sont le même graphe. Dans le cas quand T est fermée et à valeur unique, alors $D(T^{'})^{\top\perp} = Y^{'}$ et les deux adjoints sont identiques.*

Corollaire 3.7.2. *Soit T est une relation linéaire, alors*

$$\|T^{'}\| \leq \|T\|.$$

Preuve : Supposez que $\|T\| < \infty$. On a d'aprit de théorème 3.7.2 que

$$(QTJ)^{'} = Q_{T'}T^{'}J_{T(0)^{\perp}} \qquad (ouJ = J_{D(T)}) \tag{3.71}$$

il est par la proposition 3.7.3, a le domaine $D(T)$ et de plus on a :

$$(QTJ)^{'}(y^{'}) = Q_{T'}T^{'}J_{T(0)^{\perp}}(y^{'}) \qquad (y^{'} \in D(T^{'})). \tag{3.72}$$

Puisque QTJ est défini partout, $(QTJ)'$ est à valeur unique. Donc

$$\begin{aligned}\|T'\| = \|Q_{T'}T'J_{T(0)^\perp}\| &= sup\{\|(QTJ)'y'\| : y' \in B_{D(T')}\} \\ &= sup\{|y'(QTJx)| : y' \in B_{D(T')}, x \in B_{D(T)}\} \qquad (piusque\ D(T') \subset T(0)^\perp)) \\ &\leq sup\{\|y'\|\|QTJ\|\|x\| : y' \in B_{D(T')}, x \in B_{D(T)}\} \\ &\leq \|QTJ\| \\ &= \|T\|\end{aligned}$$

■

Proposition 3.7.7. *Soit P est une projection bornée définie sur X. Alors*

$$N(P)^\perp + R(P)^\perp = X' \ et\ N(P)^\perp \cap R(P)^\perp = \{0\}.$$

Prouve : C'est simple de vérifier que P est projection borné définie sur X. Et par la proposition 3.7.3 (1)

$$\begin{aligned} R(P)^\perp &= N(P') \\ N(P)^\perp &= R(I-P)^\perp = N((I-P)') = R(P'). \end{aligned}$$

Donc

$$X' = N(P') + R(P') = N(P)^\perp + R(P)^\perp,$$

et

$$N(P') \cap R(P') = \{0\} = N(P)^\perp \cap R(P)^\perp.$$

■

Proposition 3.7.8. *Si $\overline{R(T)} + M = Y$ où $dim M < \infty$, alors*

$$R((Q_M^Y T)') = R(T')$$

Preuve : Possons $Q = Q_M^Y$. Puis que $dim M < \infty$ il existe un projection borné P de Y sur $\overline{R(T)}$ avec noyau M (par la proposition (2.4.7) de [5]). Par la proposition 3.7.7 on a

$$R(T)^\perp = M^\perp = Y',\ R(T)^\perp \cap M^\perp = \{0\}.$$

Par le théorème 3.7.1 (1)

$$(QT)^{'} = T^{'}Q^{'} = T^{'}J^{Y^{'}}_{M^{\perp}}.$$

Donc

$$R((QT)^{'}) = T^{'}(M^{\perp}) = T^{'}(M^{\perp} + N(T^{'})) = T^{'}(M^{\perp} + R(T^{\perp})) = R(T^{'}).$$

■

Perspectives

Bibliographie

[1] A. Azzouz : "Sur la Somme, le Produit et Passage à l'adjoint dans la Classe des Opérateurs Fermés sur un espace de Hilbert." Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université d'Oran pour l'obtention du grade de Docteur des sciences.

[2] Benjamin GRAILLE ET Mathieu LEWIN : "Introduction a la Théorie Spectrale des Opérateurs de Schrödinger Mémoire de Première Année. Université de Cergy-Pontoise.

[3] N. Boccara, Analyse Fonctionnelle, une introduction pour physiciens, Ellipses, Imprimerie Aubin,86240 Ligugé, D.L., août-Impr., L 16929. Imrimé en France.

[4] Z. Boulmaarouf and J-Ph Labrousse The Cayley transform of linear relations, J. of the Egyptian Math. Soc. 2, (1994) 53-65.

[5] Cross, Ronald : "Multivalued Linear Operators". University of Cape Town Rondebosch, Marcel Dekker Inc., New York (1998), ISBN : 0-8247-0219-0.

[6] G. Djellouli, S. Messirdi, B. Messirdi : "Some Stronger Topologies for Closed Operators in Hilbert Spaces". Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 5, 2010, no. 25, 1223- 1232.

[7] M. Fernandez Miranda, J.-PH. Labrousse : "On The CloSsure Of The Product And Sum Of Lineairs Relations". Date : November 30, 2010. MSC 2000 : 47A06.

[8] P. Fillmore, J. Williams, On operators ranges, Adv. Math. 7(1971), 254−282.

[9] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer (1980), 2nd Edition.

[10] J-Ph Labrousse Les opérateurs quasi-Fredholm : une généralisation des opérateurs semi-Fredholm, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. XXIX, (1980) 161-258.

[11] J-Ph Labrousse Idempotent linear Relations, Spectral Theory and its Applications, The Theta Foundation, Bucharest, (2003) 121-141.

[12] J.P. Labrousse, Opérateurs unitaires tempérés, Bull. Sci. Math. (2) 96(1972),209−223.

[13] J.P. Labrousse, Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert et leurs application. I, Faculté des Sciences de Nice (Math.), 1970.

[14] J.P. Labrousse, B. Mercier, Equivalence compacte entre deux opérateurs fermés sur un espace de Hilbert, Math. Nachr. 133(1987), 91-105.

[15] J.P. Labrousse, M. Mbekhta, Les opérateurs points de continuité pour la conorme et l'inverse de Moore-Penrose, Houston J. Math. 18(1992), 723

[16] S. Messirdi : "Opérations sur les Opérateurs Fermés dans un espace de Hilbert". Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique, Universitaire Tahar Moulay de Sada, Institut des Sciences et Technologie.

[17] B. Messirdi, M.H. Mortad, A. Azzouz, G. Djellouli, A Topological Characterization of the Product of Two Closed Operators, Colloquium Mathematicum, 112, N.2 (2008), 269-278.

[18] B. Messirdi, M.H. Mortad, On Different Products of Closed Operators, Banach J. Math. Anal. 2 (2008), N.1, p40-47.

[19] Y.Mezroui : "La Complété des Opérateurs Fermés à Domaine Dense pour la Métrique du Gap". J.Operator Theory 41, 69-92 Copytight by Theta, 1999.

[20] G. Neubauer, Espaces paracomplets, Conférence à Nice, juin 1974.

[21] J.V. Neumann, Zur Theorie der unbeschr¨ankten Matrizen, J. Reine Angew. Math. 161(1929), 208-236.