République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique
Université Dr Moulay Tahar de Saida
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques
Spécialité Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

PROPRIÉTÉ SPECTRALES D'UNE MATRICE CARRÉE D'OPÉRATEURS

Présenté par : M^{elle}. MOULAY Soumia

Soutenu publiquement le : 19/06/2013

Devent le jury composé de :

Président	**Belmekki Mohamed**	**Maître de conférences -A-**	**(Univ.Saïda)**
Encadreur	**G.Djellouli**	**Maître de conférences -A-**	**(Univ.Saïda)**
Examinateurs	**Azzouz Abdel Halim**	**Maître de conférences -B-**	**(Univ.Saïda)**
	Djorfi Kouider	**Maître assistant -A-**	**(Univ.Saïda)**

Promotion 2012/2013

REMERCIEMENT

Il m'est agréable, avant de commencer la partie purement mathématique de ce mémoire, d'adresser quelques remerciements. Je demande par avance à ceux que je vais oublier de bien vouloir me le pardonner.

Mon premier ira à Monsieur **Djellouli Ghouti**, qui a accepté de diriger ce mémoire. Il m'a proposé un sujet riche et fertile et est à l'origine d'un certain nombre d'idées contenues dans ce mémoire. De plus, c'est entre autres lui, grâce à ses qualités pédagogiques et à la clarté de ses différents cours, qui m'a donné l'envie de me lancer dans l'analyse fonctionnelle et d'en faire mon métier et pour ça je l'en remercie.

Je remercie monsieur **Belmekki Mohamed**, Maître de conférence A l'université de saïda, d'avoire accepté de présider le jury.

Mes remerciements vont égallement à messieurs **Azzouz Abdel Halim** et **Djorfi Kouider** qui ont porté de l'intérêt à mon travail en accéptant de participer au jury.

Je remercie tous les professeurs que nous avons en pendant ces années d'étude.

J'adresse un vif remerciement à ma famille et mes amis.

En fin je remercie vivement tous ceux qui de prés ou de loin, ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réalisation ce travail scientifique.

Table des matières

Introduction Générale **8**

1 Définitions et Propriétés **15**

1.1 Opérateures linéaires 15

1.2 Opérateur fermé 16

1.3 Opérateur fermable 21

1.4 Opérateur non borné 23

1.4.1 Adjoint d'un opérateur non borné 23

1.5 Opérateur matriciel 32

1.6 Spectre et résolvante 33

1.6.1 Ensemble résolvant 33

1.6.2 Identité de la résolvante 35

1.6.3 Spectre 35

1.6.4 Spectre discret- spectre essentiel 36

1.6.5 Spectre et résolvante des opérateurs fermable 36

2 Etude spectrale d'un opérateur matriciel 2×2 **anti-diagonal non borné de type** $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$ **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Etude spectrale de l'opérateur $\mathcal{T} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 40

2.2.1 Contre exemple 54

3 Etude spectrale des opérateurs anti-diagonaux non bornés de type $\mathcal{T}^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{smallmatrix}\right)$ **55**

3.1 Introduction 55

3.2 Etude spectrale des opérateurs anti-diagonaux non bornés non auto-adjoint de type $\mathcal{T}^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 56

3.3 Cas de l'espace de Banach 56

3.4 Résultat principal 68
3.5 Etude spectrale des opérateurs anti-diagonaux auto-adjoints non bornés de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^* & 0 \end{pmatrix}$ dans un Hilbert 71
3.6 Exemples 74

Bibliography **81**

Index des notations

$\mathfrak{L}$: un opérateur matriciel.
$\mathcal{T}$: un opérateur matriciel anti-diagonal.
$\mathcal{T}^*$: adjoint de l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$.
$\mathcal{B}$: l'espace de Banach.
$\mathcal{H}$: l'espace de Hilbert.
$\mathcal{D}(\mathcal{T})$: le domaine de $\mathcal{T}$
ImT : l'image de T.
$\ker(T)$: le noyon de T.
$\rho(T)$: l'ensemble résolvant ou résolvante.
$\sigma(T)$ le spectre.
$\sigma_c(T)$, $\sigma_p(T)$ et $\sigma_r(T)$: le spectre continu, ponctuel et résiduel de T.
$\sigma_{nd}(T)$: le spectre non discret.
$\sigma_{ess}(T)$: le spectre essentiel.
$(T-\lambda)^{-1}$: l'inverse de $(T-\lambda)$.
E, F et H : des espaces vectorièls normés.
I_F : l'identité de F.
$\overline{T}$: la fermeture de l'opérateur T.
$\mathcal{G}(T)$: le graphe de l'opérateur T.
$\|x\|_T$ norme du graphe.
$\mathcal{C}(\mathcal{H})$: l'espace des opérateurs fermés sur $\mathcal{H}$ de domaine dense.
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$: l'espace des opérateurs lineares bornés sur $\mathcal{H}$.
P : un opérateur de projéction.
J : l'injection canonique.
$R_\lambda(T)$: l'opérateur résolvante de T.
$\mathcal{B}'$: dual de l'espace $\mathcal{B}$.
$L_2(0,1)$: l'espace de classes de fonctions mésurables de carré intégrable.

Introduction Générale

Un opérateur matriciel est une matrice dont les éléments sont des opérateurs linéaires. Chaque opérateur linéaire borné peut être écrit comme un opérateur matriciel si l'espace dans lequel il agit est décomposable en deux composants ou plus. L'analyse spectrale d'un tel opérateur est tellement vaste qu'on ne peut pas la limiter dans un mémoire, c'est pour cela qu'on va se limiter dans ce mémoire aux opérateurs matriciels anti-diagonaux de type

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

et de type $\mathcal{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$ dont les propriétés spectrales sont exhibées à partir d'une factorisation dite anti-diagonale ainsi qu'aux opérateurs matriciels qu'on peut investiguer par leurs propriétés spectrales à partir des méthodes purement algébriques.

La raison pour laquelle on considère l'opérateur de type $\mathcal{T}$ est due au fait que plusieurs problèmes physiques mathématiques peuvent être représentés par des opérateurs matriciels de la forme :

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} C & A \\ B & D \end{pmatrix}$$

où les opérateurs C, A ,B et D sont des opérateurs non bornés. Les physiciens sont en particulier intéréssés par la localisation du spectre essentiel. Une approche propre aux tels problèmes a été récemment devloppée dans [1] sous certaines conditions sur les opérateurs C, A, B et D. Les conditions principales sont le fait que C a une résolvante compacte sur leur domaine tel que $\mathcal{D}(C) \subset \mathcal{D}(B), \mathcal{D}(C^*) \subset \mathcal{D}(A^*)$. Dans [1], [27] le point clé consiste en la considération du complément de Schur Frobenius.

$$D - B(C - \lambda_0)^{-1}A$$

D'autre part Il est fort possible de décomposer l'opérateur $\mathfrak{L}$ de telle sorte que :

$$\mathfrak{L} = \mathcal{T} + \mathcal{M}$$

où $\mathcal{T}$ est un opérateur non borné de la forme :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{M}$ est un opérateur borné. Et comme application ils ont considéres A et B comme des opérateurs différentiels dans l'espace $L_2(0,1)$ et $\mathcal{M}$ est un opérateur de multiplication borné.
Dans les deux applications, le spectre non discret en dehors de zéro du produit AB est vide, donc par les formules :

$$\begin{aligned} \sigma(AB) \setminus \{0\} &= \sigma(BA) \setminus \{0\} \\ \sigma_{nd}(AB) \setminus \{0\} &= \sigma_{nd}(BA) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

le spectre non discret de $\mathcal{T}$ et AB ont les mêmes propriétés.

Dans le cas d'un espace de Hilbert avec un opérateur auto-adjoint $\mathcal{T}$ le spectre essentiel de $\mathfrak{L}$ coïncide avec le spectre essentiel de l'opérateur borné $\mathcal{M}_{11}$ défini par la décomposition :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22} \end{pmatrix} : \begin{matrix} ker(\mathcal{T}) \\ \oplus \\ ker(\mathcal{T})^{\perp} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ker(\mathcal{T}) \\ \oplus \\ ker(\mathcal{T})^{\perp} \end{matrix}$$

et donc peut être explicitement calculé.

Il est bien connu que pour les opérateurs bornés A et B dans les espaces de Banach les spectres des produits AB et BA coïncident en s'éloignant de zéro :

$$\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}. \tag{2}$$

Récemment, V. Hardt et R. Mennicken [10] ont examiné le cas plus général où les opérateurs A et B sont non bornés. Dans certaines hypothèses appropriées, ils ont prouvé la formule (2) et ont établi un lien entre $\sigma(AB)$ et le spectre de l'opérateur matriciel $2\times\ 2$ anti-diagonal,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Le but de ce travail est de montrer qu'on a

$$\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}.$$

sous l'hypothèse naturelle que les ensembles résolvantes des opérateurs AB et BA ne sont pas vides. Dans ce qui suit, nous allons supposer que les opérateurs A et B répondent aux conditions suivantes :

a) A est un opérateur linéaire fermé densément défini de $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_1$.

b) B est un opérateur linéaire fermé densément défini de $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$.
où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux espaces de Banach.

Alors l'opérateur $\mathcal{T}$ défini par (3) est un opérateur fermé densément défini dans l'espace de Banach $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, de domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T}) := \mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(A)$. Il convient de noter qu'il existe différentes définitions de l'ensemble résolvant $\rho(S)$ et le spectre $\sigma(S)$ pour les opérateurs non fermés. On peut définir (voir par exemple [8], chapitre III.6.1) $\rho(S) := \rho(\overline{S})$ et $\sigma(S) := \sigma(\overline{S})$ pour tout opérateur fermable S. Nous dirons que $\lambda \in \rho(S)$ si l'opérateur $S - \lambda$ est injectif de $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}$ et l'opérateur inverse $(S-\lambda)^{-1}$ est borné. Par conséquent, dans notre terminologie l'hypothèse $\rho(S) \neq \emptyset$ assure que S est un opérateur fermé.

On va montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma(AB)\} \setminus \{0\} \\ \sigma_{nd}(\mathcal{T}) \setminus 0 &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma_{nd}(AB)\} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

où $\sigma_{nd}(\mathcal{T})$ est le spectre non discret de l'opérateur $\mathcal{T}$.

Dans ce contexte pour la relation entre le spectre des produits d'opérateurs AB et BA on montre que :

$$\begin{aligned} \sigma(AB) \setminus \{0\} &= \sigma(BA) \setminus \{0\} \\ \sigma_{nd}(AB) \setminus \{0\} &= \sigma_{nd}(BA) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Cela est lié au relations :

$$\begin{aligned} (AB)^* &= B^* A^* \\ (BA)^* &= A^* B^* \end{aligned}$$

qui sont généralement fausses.

Notons que dans le cas des espaces de Hilbert $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $B = A^*$ (i.e, $\mathcal{T}$ est un opérateur auto-adjoint) la relation de commutation

$$\overline{A(BA-\lambda)^{-1}B} - \lambda(AB-\lambda)^{-1} = 1_{\mathcal{B}_1} \tag{4}$$

et l'égalité (2) ont été prouvé dans [22], voir aussi [7], chapitre XI.10. P. Deift [22] a également donné d'importantes applications de la formule de commutation (4) à une large classe de problèmes en physique mathématique. En particulier, il a utilisé les méthodes de commutation dans le cadre de la déformation spectrale des opérateurs de Schrödinger à une dimension, la construction de solutions de l'équation KdV et le problème de diffusion inverse. Notez enfin que le cas d'un opérateur symétrique $\mathcal{T}$ a été étudié dans [25], voir aussi [10].

Le cas où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux espaces de Hilbert et $\mathcal{T}$ un opérateur symétrique .i.e :

$$A \subseteq B^*$$

ce qui est équivalent à :

$$B \subseteq A^*$$

est recement considéré dans [25], voire aussi [15] pour le cas ou $\mathcal{T}$ est auto-adjoint i.e :

$$A = B^*.$$

Dans ce cas le spectre non-discret coïncide avec le spectre essenciel.

On considère la résolvante $(\mathcal{T}-\lambda)^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$ et on tire les conditions nécessaires sur les produits des opérateurs BA, AB, leurs adjoints et les opérateurs B^*A^*, A^*B^* pour $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$. En particulier il est montré que λ^2 appartient aux les ensembles résolvants de BA, AB, B^*A^* et A^*B^*.

Plus loin nous obtenons une représentation de $(\mathcal{T}-\lambda)^{-1}$ en fonction du produit des opérateurs AB et BA.

Ce travail présenté ce compose au trois chapitre. Le première chapitre introductif est d'introduire quelques notion de base sur les opérateurs bornés dans un espace de Hilbert.

Au deuxième chapitre, on a abordé l'étude des propriètè spectrales des opérateurs matriciels anti-diagonal non borné de type

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude du spectre discret des opérateurs auto-adjoints (resp. non auto-adjoint) des matrices d'opérateurs de la forme

$$\mathcal{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

où les opérateurs sont pas nécessairement bornés dans leurs espaces, ou entre eux, respectivement. Des déclarations générales sur le spectre discret de $\mathcal{T}^*$ et de ses points d'accumulation sont prouvés. Le point clé de la preuve, c'est l'idée d'envisager un inverse algébrique densément défini de l'opérateur linéaires $\mathcal{T} - \lambda$ et montrons qu'il a une extension bornés de l'ensemble de l'espace de Banach $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ qui est l'inverse topologique de $\mathcal{T} - \lambda$. Nous soulignons de commencer avec un inverse algébrique et de l'étendre à l'inverse topologique pour caractériser le spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint de l'opérateur $\mathcal{T}^*$. Puis conclure ce chapitre des applications sur à un système d'opérateurs différentiels ordinaires et sur l'opérateurs de Schrödinger iso-spectrale uni-dimensionnelle avec des potentiels complexes.

Chapitre 1

Définitions et Propriétés

Introduction

Ce premier chapitre constitue la partie introductive du travail, il est consacré aux opérateurs linéaires non bornés sur l'espaces de Hilbert ayant un graphe fermé.

Et on rappelle les notions fondamentales, telles que la ferméture les propriétés de l'adjoint, des opérateurs symétriques, essentiellement auto-adjoints, la densité ainsi que le spectre et la résolvante des opérateurs non bornés.

1.1 Opérateures linéaires

Définition 1.1.1. *Soient E et F deux espaces vectorièls normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaires $u \mapsto Tu \in F$ définie sur un sous-espace vectorièl $\mathcal{D}(T) \subset E$, nommé domaine de T.*

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \ x \in E, \quad T \text{ est défini en } x \ \right\}$$

Définition 1.1.2. ***(Somme de deux opérateurs)***

Soient S et T deux opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur somme $S + T$ par :

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x)$$

de domaine

$$\mathcal{D}(T + S) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(T + S)$

Définition 1.1.3. ***(Opérateur produit)***

Soient E, F et H des espaces vectorièls, et soient $T : E \to F$ et $S : F \to H$ deux opérateurs linéaires de domaine $\mathcal{D}(T) \subseteq E$ et $\mathcal{D}(S) \subseteq F$ respectivement.

On définit l'opérateur composition ST (dit opérateur produit) de T et S par :

$$(ST)(x) = S(T(x))$$

de domaine

$$\mathcal{D}(ST) = \{x \in \mathcal{D}(T); T(x) \in \mathcal{D}(S)\}$$

- *Si R est un opérateur de H dant un quatrième espace vectorièl normé G, alors* $(RS)T = R(ST)$
- *Si R est un opérateur de F dans H, alors :* $(R + S)T = RT + ST$

Définition 1.1.4. ***(Opérateur inverse)***

Soient E et F deux espaces vectorièls normés. Un opérateur $T : E \to F$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $S : F \to E$ de domaine $\mathcal{D}(S) = F$, tel que

$$TS = I_F \quad \textit{et} \quad ST = I_{\mathcal{D}(T)}$$

Théorème 1.1.1. ***(Théorème de Hahn- Banach)***
[5] Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach et $T : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ un opérateur linéaire borné de domaine $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{B}_1$, alors :

T est bijéctif si et seulement si T est inversible

Définition 1.1.5. ***(Densité)***

Soient E et F deux espace normé. Un opérateur $T : E \to F$ est dit densément défini si son domaine $\mathcal{D}(T)$ est dense dans E c'est-à-dire $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$

1.2 Opérateur fermé

Définition 1.2.1. *Soient E et F deux espaces vectorièls normés. Un opérateur $T : E \to F$ est dit fermé, si pour toute suite $(x_n) \in \mathcal{D}(T)$ et $y \in F$, on a :*

$$\begin{cases} x_n \to x \\ et \\ Tx_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}(T) \\ et \\ y = Tx \end{cases}$$

La notion du graphe d'une transformation linéaire, introduite par J. Von Neumann [10], s'avère trés utile dans l'étude des opérateurs linéaires non bornés, elle permet de définir une classe d'opérateurs non bornés appelés opérateurs fermés qui occupe une place importante dans le domaine de la théorie spectrale et de l'analyse fonctionnelle d'une manière générale car en pratique souvent les opérateurs rencontrés dans la littérature mathématique sont des opérateurs fermés à domaines denses.

Définition 1.2.2. ***(Graphe d'un opérateur)***

Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné sur $\mathcal{H}$, alors le graphe de T noté $\mathcal{G}(T)$ est le sous-espace vectorièl de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ défini par :

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx); \quad x \in \mathcal{D}(T)\} \subseteq \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert losqu'il est muni du produit scalaire naturel

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}} = \langle x_1, y_1 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle x_2, y_2 \rangle_{\mathcal{H}}, \; x_1, \; x_2, \; y_1, \; y_2 \; \in \mathcal{H} \tag{1.1}$$

En particulier, si T et S sont deux opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$ alors

$$T \subset S \Leftrightarrow \mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$$

Lorsque $\mathcal{G}(T)$ est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ pour la topologie induite par le produit scalaire (1.1), T est appelé opérateur fermé sur $\mathcal{H}$.

On note par $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs fermés sur $\mathcal{H}$.

Remarque 1.2.1. *En vertu du théorème du graphe fermé on sait que tout opérateur borné complètement défini sur $\mathcal{H}$ a un graphe fermé, d'où l'inclusion $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$. On verra par la suite que cette inclusion est stricte.*

Remarque 1.2.2. $(T, \mathcal{D}(T))$ *est fermé sur $\mathcal{H}$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $\mathcal{D}(T)$ convergente vers x dans $\mathcal{H}$ telle que $(Tx_n)_n$ converge vers y dans $\mathcal{H}$ alors $x \in \mathcal{D}(T)$ et $Tx = y$.*

En apparence, la fermeture ressemble à la continuté des opérateurs mais en réalité il s'agit de deux notions différentes. Il existe des opérateurs partiellement définis qui sont fermés sans être bornés et d'autres bornés sans être fermés, c'est-à-dire que la continuté n'implique pas nécéssairement la fermeture et inversement, tout dépend bien sûr de la structure topologique du domaine de l'opérateur car le théorème du graphe fermé affirme que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si et seulement si $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ et T est fermé.

On a alors directement à partir de la remarque (1.2.2) le résultat suivant :

Proposition 1.2.1. *Soit* $(T, \mathcal{D}(T))$ *un opérateur borné sur* $\mathcal{H}$*. Alors,* T *est fermé si et seulement si* $\mathcal{D}(T)$ *est fermé dans* $\mathcal{H}$*.*

On peut donner une autre forme équivalente de la définition de la fermeture d'un opérateur non borné $(T, \mathcal{D}(T))$ *en introduisant sur* $\mathcal{D}(T)$ *le produit scalaire du graphe noté* $\langle\ ,\ \rangle_T$ *:*

$$\langle x, y\rangle_T = \langle x, y\rangle + \langle Tx, Ty\rangle,\ x,\ y\ \in \mathcal{D}(T) \tag{1.2}$$

et

$$\|x\|_T = \left(\|x\|^2 + \|Tx\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

est la norme du graphe, elle définit une topologie sur $\mathcal{D}(T)$ *moins fine que la topologie induite sur* $\mathcal{D}(T)$ *par celle de* $\mathcal{H}$*.*

$\mathcal{D}(T)$ *muni du produit scalaire* $\langle\ ,\ \rangle_T$ *n'est pas en général un espace de Hilbert puisqu'il n'est pas complet relativement à* $\|\ \|_T$ *sauf si* T *est fermé sur* $\mathcal{H}$*.*

Proposition 1.2.2. $(T, \mathcal{D}(T))$ *est fermé sur* $\mathcal{H}$ *si et seulement si* $(\mathcal{D}(T), \langle\ ,\ \rangle_T)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve

Si T *est fermé, soit* $(x_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* $(\mathcal{D}(T), \langle\ ,\ \rangle_T)$ *alors* $(x_n)_n$ *et* $(Tx_n)_n$ *sont de Cauchy dans* $\mathcal{H}$*, elles convergent donc respectivement vers* x *et* y *dans* $\mathcal{H}$*, de plus* $x \in \mathcal{D}(T)$ *et* $Tx = y$

$$\|x_n - x\|_T^2 = \|x_n - x\|^2 + \|Tx_n - Tx\|^2 \to_{n\to+\infty} 0$$

D'où $\mathcal{D}(T)$ *est complet pour* $\langle\ ,\ \rangle_T$*.*

Réciproquement, si $(\mathcal{D}(T), \langle\ ,\ \rangle_T)$ *est complet,* $(x_n)_n$ *une suite de* $\mathcal{D}(T)$ *convergente vers* x *et* $(Tx_n)_n$ *converge vers* y *dans* $\mathcal{H}$*, alors* $(x_n)_n$ *est de Cauchy dans* $(\mathcal{D}(T), \langle\ ,\ \rangle_T)$ *ainsi il existe* z *dans* $\mathcal{D}(T)$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - z\|_T = 0$$

Or,

$$\|x_n - z\|_T^2 = \|x_n - z\|^2 + \|Tx_n - Tz\|^2$$

d'où $(x_n)_n$ *converge vers* z *et* $(Tx_n)_n$ *converge vers* Tz *dans* $\mathcal{H}$*, comme* $\mathcal{H}$ *est séparé alors* $x = z$ *et* $Tx = Tz = y$ ♦

Comme conséquence de la proposition (1.2.2), on peut dire qu'un opérateur fermé $(T, \mathcal{D}(T))$ est assimilable à un opérateur borné de $(\mathcal{D}(T), \langle \ , \ \rangle_T)$ dans $\mathcal{H}$.

Proposition 1.2.3. *[11]*

1. *Si* $T \in C(\mathcal{H})$, *alors* ker T *est fermé dans* $\mathcal{H}$.
2. *Si* T *est inversible alors* $T \in C(\mathcal{H})$ *si et seulement si* $T^{-1} \in C(\mathcal{H})$.
   En particulièr, si $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *avec* $Im\ T = \mathcal{H}$ *et* T *est inversible alors* $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
3. *Si* $Im\ T$ *est fermé dans* $\mathcal{H}$ *et il existe* $C > 0$ *tel que :*
   $$\|Tx\| \geq C\|x\|, \ \forall \ x \ \in \mathcal{D}(T) \tag{1.3}$$
   Alors $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Preuve

(1) *est une conséquence immédiate de la remarque (1.2.2). En effet, si* $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$ *où* $x_n \in ker\ T, \forall \ n \in \mathbb{N}$, *alors* (Tx_n) *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{H}$. *Comme* T *est fermé,* $x \in \mathcal{D}(T)$ *et* $Tx = 0$ *c'est-à-dire* $x \in ker\ T$.

(2) T *et* T^{-1} *ont simultanément des graphes fermés car*

$$\begin{cases} \mathcal{G}(T) = W(\mathcal{G}(T^{-1})) \\ \mathcal{G}(T^{-1}) = W(\mathcal{G}(T)) \end{cases}$$

où $W(x, y) = (x, y)$ *est une isométrie surjective de* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

(3) *L'inégalité (1.3), montre que* T *est injectif donc inversible de* $\mathcal{D}(T)$ *dans* $Im\ T$. $\mathcal{D}(T^{-1}) = Im\ T$ *est par hypothèse fermé dans* $\mathcal{H}$ *de plus* T^{-1} *est borné de* $Im\ T$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *car*

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{C}\|y\|, \ \forall \ y \ \in \ Im\ T$$

d'où, T^{-1} *et aussi* T *sont fermés.*

♦

Remarque 1.2.3. *Si* $T \in C(\mathcal{H})$ *tel que* $\|Tx\| \geq C\|x\|, \ \forall \ C > 0, \ \forall \ x \ \in \mathcal{D}(T)$ *; alors* $Im\ T$ *est fermée dans* $\mathcal{H}$.

En effet, si $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$ *où* $y_n = Tx_n, x_n \in \mathcal{D}(T), \forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\|y_n - y_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq C\|x_n - x_m\|.$$

Or

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|y_n - y_m\| = 0,$$

donc $(x_n)_n$ *est de Cauchy dans* $\mathcal{H}$ *est alors convergente vers* $x \in \mathcal{H}$. *Comme* T *est fermé, alors* $x \in \mathcal{D}(T)$ *et* $Tx = y \in Im\ T$.

Proposition 1.2.4. *Soient* E *et* F *deux espaces normés. Si* $S : E \to F$ *est un opérateur borné de domaine* $\mathcal{D}(S) = E$ *et* $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ *un opérateur fermé, alors* $T + S$ *est un opérateur fermé de domaine* $\mathcal{D}(T + S) = \mathcal{D}(T)$.

Preuve

Soit (x_n) *une suite dans* E *qui converge vers* x, *tel que la suite* $y_n = (T+S)(x_n)$ *converge vers* $y \in F$.

Comme S *est continu* ($S(x_n)$ *converge vers* $S(x)$), *alors la suite* $T(x_n) = y_n - S(x_n)$ *converge vers* $y - S(x)$

$$\begin{cases} x_n \to x \\ et \\ T(x_n) \to y - S(x) \end{cases}$$

Puisque T *est fermé on obtient :*

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}(T) \\ et \\ T(x) = y - S(x) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_n \in \mathcal{D}(T + S) \\ et \\ T(x) = (T + S)(x) \end{cases}$$

d'où $T + S$ *est fermé.* ♦

Remarque 1.2.4. *Dans le cas général la somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécéssairement un opérateur fermé.*

Proposition 1.2.5. *Soient* E, F *et* G *des espaces normés. si* $S : E \to F$ *est un opérateur borné de domaine* $\mathcal{D}(S) = E$ *et* $T : \mathcal{D}(T) \subseteq F \to G$ *un opérateur*

fermé, alors l'opérateur de composition TS est fermé.
Si de plus E et F sont de Banach et $S(E) \subseteq \mathcal{D}(T)$ alors TS est borné.

Preuve

soit (x_n) une suite qui converge vers x dans E, telle que la suite $z_n = TS(x_n)$ converge vers z dans G. On pose

$$y_n = S(x_n) \quad et \quad y = S(x)$$

Comme S est borné alors

$$\begin{cases} y_n \to y \\ et \\ z_n = T(y_n) \to z \end{cases}$$

Puisque T est fermé on obtient :

$$\begin{cases} y \in \mathcal{D}(T) \\ et \\ z = (T)(y) \end{cases}$$

par conséquent

$$\begin{cases} y = S(x) \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow x \in \mathcal{D}(TS) \\ et \\ z = T(y) = TS(x) \end{cases}$$

d'où TS est fermé.
Si E et G sont de Banach et $S(E) \subseteq \mathcal{D}(T)$, alors $\mathcal{D}(TS) = E$ et $TS : E \to G$ est un opérateur fermé. D'aprés le théoréme du graphe fermé, on déduit que TS est borné. ♦

Un opérateur non fermé peut ou non avoir une extension fermée.

Définition 1.2.3. *Soient E et F deux espaces vectorièls normés et $T : E \to F$ un opérateur linéaire. Si S est un autre opérateur dans $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$, alors S est appelé extension de T. Dans ce cas, on écrit $T \subset TS$. Il est clair que S est une extension de T si et seulement si $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ et $Tu = Su$ pour $u \in \mathcal{D}(T)$.*

1.3 Opérateur fermable

Définition 1.3.1. *T sera dit fermable si l'adhérence de son graphe $\mathcal{G}(T)$ dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est le graphe d'un opérateur non borné que l'on notera $\overline{T}$ de domaine $\mathcal{D}(\overline{T})$. $(\overline{T}, \mathcal{D}(\overline{T}))$ est appelé la fermeture de T.*

En particulièr, $\overline{T}$ *est la plus petite extension fermée de l'opérateur* T*. Donc si* T *est fermable alors :*

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{H};\ \textit{il existe une suite } (x_n)_n \in \mathcal{D}(T) \textit{ telle que } (x_n)_n \\ \textit{converge vers } x \textit{ et } (Tx_n)_n \textit{ a une limite dans } \mathcal{H} \end{array} \right\}.$$

et

$$\overline{T}x = \lim_{n\to+\infty} Tx_n,\ \textit{pour } x \in \mathcal{D}(\overline{T})$$

En utilisant la linéarité de T *on peut reformuler la définition de la fermeture* $\overline{T}$ *de* T *de la manière suivante :*

T *est fermable si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_n \in \mathcal{D}(T)$ *converge aussi dans* $\mathcal{H}$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} Tx_n = 0$$

On remarque alors que fermer un opérateur c'est, en quelque sorte, le prolonger au maximun par des procédés purement topologiques et que, pour aller plus loin, on doit utiliser des propriétés algébriques.

Proposition 1.3.1. *[5]*

1. *Tout opérateur* $(T, \mathcal{D}(T))$ *borné est fermable,* $\mathcal{D}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{D}(T)}$ *et* $\overline{T}$ *est borné sur* $\mathcal{D}(\overline{T})$*.*
2. *Si* $(T, \mathcal{D}(T))$ *est fermable injectif, alors* T^{-1} *est fermable si et seulement si* $\overline{T}$ *est injectif. On a dans ce cas* $\overline{T^{-1}} = \overline{T}^{-1}$*. Si de plus* $\overline{T}^{-1}$ *est borné alors* $Im\ (\overline{T}) = \overline{ImT}$

Preuve

1. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* $\mathcal{D}(T)$ *convergente vers 0 et* $(Tx_n)_n$ *convergente vers* y *dans* $\mathcal{H}$*. Alors*

$$\|Tx_n\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|x_n\| \to 0$$

d'où,

$$y = 0 = \lim_{n\to+\infty} Tx_n.$$

Ainsi T *est fermable. Par définition, on a toujours*

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\overline{T}) \subset \overline{\mathcal{D}(T)} \tag{1.4}$$

***Inversement**, si $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$ alors $x = \lim_{n\to+\infty}(x_n)_n$, $(x_n)_n \in \mathcal{D}(T)$. Comme T est borné sur $\mathcal{D}(T)$, $(Tx_n)_n$ devient de Cauchy donc convergente dans $\mathcal{H}$, alors $x \in \mathcal{D}(\overline{T})$ et $\lim_{n\to+\infty} Tx_n = \overline{T}x$. $\overline{T}$ est bien borné sur $\overline{\mathcal{D}(T)}$ en utilisant le lemme (1.3.1).*

2. *Si $\overline{T}$ est injectif, alors $\overline{T}^{-1}$ est une extension fermée de T^{-1} d'aprés la proposition(1.2.3). Si T^{-1} est fermable, alors*

$$W(\mathcal{G}(\overline{T})) = \overline{W(\mathcal{G}(T))} = \overline{\mathcal{G}(T^{-1})} = \mathcal{G}(\overline{T^{-1}}) \tag{1.5}$$

Soient $y, z \in \mathcal{D}(\overline{T})$ tels que $\overline{T}y = \overline{T}z$, alors $(\overline{T}y, y) \in \mathcal{G}(\overline{T^{-1}})$ et $(\overline{T}z, z) \in \mathcal{G}(\overline{T^{-1}})$ d'où à fortiori $y = z$. $\overline{T}$ est injectif et on a $\overline{T}^{-1} = \overline{T^{-1}}$. Si maintenant $\overline{T}^{-1}$ est borné sur son domaine, on a d'aprés 1),

$$Im(\overline{T}) = \mathcal{D}(\overline{T}^{-1}) = \mathcal{D}(\overline{T^{-1}}) = \overline{\mathcal{D}(T^{-1})} = \overline{Im(T)} \tag{1.6}$$

♦

Remarquons que tout opérateur fermable de rang fini est borné. Par conséquent, une forme linéaire non bornée n'est jamais fermable.

Lemme 1.3.1. *[21]*
Soit T un opérateur borné sur son domaine $\mathcal{D}(T)$ d'un espace de Banach $\mathcal{B}_1$ dans un autre espace de Banach $\mathcal{B}_2$. Alors il existe une unique extension bornée B de T définie sur $\mathcal{D}(B) = \overline{\mathcal{D}(T)}$ telle que $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

1.4 Opérateur non borné

Définition 1.4.1. *Un opérateur non borné sur un espace Hilbert $\mathcal{H}$ est un couple $(\mathcal{D}(T), T)$ où $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectorièl de $\mathcal{H}$ et T est un opérateur linéare défini de $\mathcal{D}(T)$ dans $\mathcal{H}$. On dit que T est un opérateur non borné de domaine $\mathcal{D}(T)$.*

1.4.1 Adjoint d'un opérateur non borné

Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur linéaire non borné sur $\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(T)$ dense dans $\mathcal{H}$. Si l'application $\mathcal{D}(T) \ni x \to \langle Tx, y\rangle$ est continue sur $\mathcal{D}(T)$ munie de la topologie induite par celle de $\mathcal{H}$, elle possède d'aprés le théorème de Hahn-Banach une extension à $\mathcal{H}$, il existe alors en vertu du théorème de représentation de Riesz un vecteur unique $a(y)$ dans $\mathcal{H}$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}(T),\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, a(y)\rangle \tag{1.7}$$

On définit l'adjoint T^* de T sur $\mathcal{H}$ par $T^*y = a(y)$ de domaine :

$$\mathcal{D}(T^*) = \left\{ \begin{array}{l} y \in \mathcal{H};\ \textit{l'application}\ \mathcal{D}(T) \ni x \to \langle Tx, y\rangle \\ \textit{admet une extension continue a}\ \mathcal{H} \end{array} \right\}.$$

$$\forall x \in \mathcal{D}(T),\ \forall y \in \mathcal{D}(T^*),\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

Notons que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$ et on a :

$$\begin{cases} (i)\ T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ \|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \\ (ii)\ T^{**} = T \\ (iii)\ (\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha}T^*\overline{\beta}S^*,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C} \\ (iv)\ (TS)^* = (S^*T^*) \\ (v)\ Si\ Test\ inversible,\ T^*\ l'est\ aussi\ et\ on\ a\ (T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \\ (vi)\ (Im\ T)^\perp = Ker\ T^*,\ \overline{(Im\ T)} = (Ker\ T^*)^\perp \end{cases}$$

Toutefois, si $\mathcal{D}(T)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$ alors T^*y n'est pas défini de façon unique par la formule précédente car si x_0 est orthogonal à $\mathcal{D}(T)$ et $x_0 \neq 0$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{D}(T),\ \langle x, T^*y + x_0\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

Afin d'éviter cet inconvenient il faut pour pouvoir définir l'adjoint T^* de T que $\mathcal{D}(T)^\perp = \{0\}$ donc $\mathcal{D}(T)$ soit dense dans $\mathcal{H}$.

Etant donnée l'importance des opérateurs adjoints dans les applications physiques, l'étude des opérateurs non bornés dont le domaine est dense dans $\mathcal{H}$ occupe une place importante dans la théorie spectrale. Le domaine $\mathcal{D}(T^*)$ de l'adjoint T^* de T n'est pas forcément dense dans $\mathcal{H}$, ce qui ne garantit pas l'existence de T^{**} contrairement aux opérateurs bornés. On perdra aussi, à cause des problèmes des domaines, presque toutes les propriétés de l'adjoint connues dans le cas continu, sauf (iii) pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ et (vi).

Définition 1.4.2. *Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(T)$ dense dans $\mathcal{H}$.*

1. *T est dit symétrique si*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \ \forall x, \ y \ \in \mathcal{D}(T)$$

Cela signifie que T^* est une extension de T car si $y \in \mathcal{D}(T)$, alors l'application

$$\overline{T}x = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

est continue sur $\mathcal{D}(T)$ et $\|\overline{T}\| \leq \|Ty\|$, elle possède alors une extension continue à $\mathcal{H}$, donc $y \in \mathcal{D}(T^*)$. D'où, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ et $T^* = T$ sur $\mathcal{D}(T)$.

2. *T est dit auto-adjoint si $T^* = T$, c'est-á-dire $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ et $Tx = T^*x$, $\forall \mathcal{D}(T)$. Par conséquent, T est auto-adjoint si et seulementn si T est symétrique et $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$.*

Remarquons que dans le cas des opérateurs linéaires bornés ces deux notions sont identiques. Dans le cas non borné un opérateur auto-adjoint est symétrique par contre un opérateur symétrique n'est pas forcément auto-adjoint.

Proposition 1.4.1. *Si $(T, \mathcal{D}(T))$ est un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et U un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$, alors $S = UTU^{-1}$ est auto-adjoint sur $\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(S) = U\mathcal{D}(T)$*

Preuve

S est symétrique car

$$\begin{aligned} \langle Sf, g\rangle &= \langle UTU^{-1}f, g\rangle = \langle TU^{-1}f, U^{-1}g\rangle \\ &= \langle U^{-1}f, TU^{-1}g\rangle = \langle f, UTU^{-1}g\rangle \\ &= \langle f, Sg\rangle, \ \forall \ f, \ g \ \in \ \mathcal{D}(S), \end{aligned}$$

donc S^* est une extension de S. Vérifions que $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(S^*)$.

En effet, si $g \in \mathcal{D}(S^*)$, l'application $\mathcal{D}(S) \ni f \to \langle Sf, g\rangle = \langle TU^{-1}f, U^{-1}g\rangle$ admet une extension continue à $\mathcal{H}$ et alors $U^{-1}g \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ car lorsque f parcourt $\mathcal{D}(S)$, $U^{-1}f$ parcourt $\mathcal{D}(T)$ ♦

Pour établir les relations entre l'adjoint et la fermeture des opérateurs nous introduisons un opérateur unitaire qui pèrmet de fournir une description remarquable de la notion de l'adjoint de la façon suivante :

Lemme 1.4.1. *Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné dans $\mathcal{H}$, de domaine $\mathcal{D}(T)$ dense dans $\mathcal{H}$.*

1. *$V(x, y) = (-y, x)$ est un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, tel que $V^2 = -I_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$ et pour tout sous-espace vectorièl E de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, on a $V(E^{\perp}) = (V(E))^{\perp}$.*
2. *$\mathcal{G}(T^*) = [V(\mathcal{G}(T))]^{\perp}$.*
3. *Si $T \in C(\mathcal{H})$, alors $\mathcal{H}\times\mathcal{H} = V(\mathcal{G}(T)) \oplus \mathcal{G}(T^*)$.*

Preuve

La propriété 1) est évidente car V est une isométrie surjective.
La propriété 3) provient de 2) et du fait que $\mathcal{G}(T)$ et alors $V(\mathcal{G}(T))$ sont fermés dans $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$.
2)

$$\begin{aligned}(x, y) \in (V(\mathcal{G}(T))) \quad &\Leftrightarrow \quad [\langle (x, y), (-Tz, z)\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0,\ \forall z\ \in \mathcal{D}(T)] \\ &\Leftrightarrow \quad [\langle x, Tz\rangle = \langle y, z\rangle,\ \forall z\ \in \mathcal{D}(T)] \\ &\Leftrightarrow \quad [x \in \mathcal{D}(T^*)\ et\ T^* = y] \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathcal{G}(T^*)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{G}(T^*) = [V(\mathcal{G}(T))]^{\perp} = V(\mathcal{G}(T)^{\perp})$$

♦

Théorème 1.4.1. *[6] Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné dans $\mathcal{H}$, de domaine $\mathcal{D}(T)$ dense dans $\mathcal{H}$. Alors :*

(i) *T^* est fermé. En particulièr, tout opérateur auto-adjoint est fermé.*

(ii) *T^* est fermable si seulement si $\mathcal{D}(T^*)$ est dense dans $\mathcal{H}$, et dans ce cas $\overline{T} = T^{**}$. En particuliér, si T est fermé alors $\mathcal{D}(T^*)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et $T = T^{**}$.*

(iii) *Si T est fermable, alors $(\overline{T})^* = T^*$.*

Preuve

(i) *On définit un opérateur unitaire $V : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ par :*

$$V(u, v) = (-v, u).$$

Il est facile à vérifier que :

$$V(E^{\perp}) = V(E)^{\perp}$$

pour tout sous-espace $E \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. *La définition de l'opérateur adjoint implique que*

$$\mathcal{G}(T^*) = V\mathcal{G}(T)^{\perp} \tag{1.8}$$

Comme $V\mathcal{G}(T)^{\perp}$ *est toujours fermé, on conclut que* T^* *est fermé.*

(ii) *Supposons que* $\mathcal{D}(T^*)$ *est dense. Alors*

$$\overline{\mathcal{G}(T)} = (\mathcal{G}(T)^{\perp})^{\perp} = (V^2\mathcal{G}(T)^{\perp})^{\perp} = (V\mathcal{G}(T^*))^{\perp} = \mathcal{G}(T^{**}) \tag{1.9}$$

où on a utilisé la relation (1.8). Implique que $\overline{T} = T^{**}$.
Réciproquement, si $\mathcal{D}(T^*)$ *n'est pas dense dans* H, *alors il existe un vecteur* $w \neq 0$ *tel que* $w \in \mathcal{D}(T^*)^{\perp}$. *Dans ce cas,* $(w, 0) \in \mathcal{G}(T^*)^{\perp}$ *d'où on voit que* $(0, w) \in V\mathcal{G}(T^*)^{\perp}$. *La relation (1.9) montre maintenant que* $(0, w) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$, *et donc* T *n'est pas fermable.*

(iii) *Si* T *est fermable, alors* $\mathcal{D}(T)$ *est dense dans* $\mathcal{H}$ *et*

$$T^* = \overline{T^*} = T^{***} = (T^{**})^* = (\overline{T})^*$$

♦

Remarque 1.4.1. *1. Si* $(T, \mathcal{D}(T))$ *est symétrique sur* $\mathcal{D}(T)$ *dense dans* $\mathcal{H}$, *alors* T^* *est une extension fermée de* T *et puisque* $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ *alors* $\mathcal{D}(T^*)$ *est dense dans* $\mathcal{H}$, T *est fermable et on a* $\overline{T} = T^{**}$, *mais comme* $\overline{T}$ *est la plus petite extension fermée de* T, *on a*

$$T \subset T^{**} \subset T^*$$

2. Si T *est symétrique alors* $\overline{T}$ *est aussi symétrique,* $\forall x, y \in \mathcal{D}(\overline{T})$, *il existe deux suites* $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n$ *dans* $\mathcal{D}(T)$ *convergentes respectivement vers* x *et* y *dans* $\mathcal{H}$ *telles que les suites des images* $(Tx_n)_n$ *et* $(Ty_n)_n$ *convergent aussi dans* $\mathcal{H}$ *vers* $\overline{T}x$ *et* $\overline{T}y$ *respectivement. Comme* T *est symétrique, on a :*

$$\langle \overline{T}x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Tx_n, y_n\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, Ty_n\rangle = \langle x, \overline{T}y\rangle \tag{1.10}$$

Puisque $\mathcal{D}(\overline{T})$ *est dense dans* $\mathcal{H}$, *l'opérateur* $\overline{T}$ *est aussi symétrique*

3. *Si T est fermé symétrique, on a*

$$T = T^{**} \subset T^*$$

4. *Si T est auto-adjoint, alors*

$$T = T^{**} = T^*$$

On en déduit qu'un opérateur fermé symétrique est auto-adjoint si et seulement si son adjoint est symétrique.

5. *Si $T \subset S$ alors $S^* \subset T^*$*

Théorème 1.4.2. *[6] Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné symétrique sur $\mathcal{D}(T)$ dense dans $\mathcal{H}$. Alors :*

1. *Si $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$, T est auto-adjoint et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*
2. *Si T est auto-adjoint bijectif, alors $Im\ T$ est dense dans $\mathcal{H}$ et T^{-1} est aussi auto-adjoint.*
3. *Si $Im\ T$ est dense dans $\mathcal{H}$, alors T est bijectif.*
4. *Si $Im\ T = \mathcal{H}$, alors T est auto-adjoint et $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Preuve

1. *On a par hypothése $T \subset T^*$. Si $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ alors $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$ et $T = T^*$. De plus, T est fermé et alors borné sur $\mathcal{H}$ d'aprés le théorème du graphe fermé (voir aussi la proposition (1.2.1)).*
2. *Soit $y \in (Im\ T)^\perp$, alors l'application $\mathcal{D}(T) \ni x \to \langle Tx, y\rangle = 0$ est continue, donc*

$$y \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$$

et

$$\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0,\ \forall\ x \in \mathcal{D}(T)$$

d'où, $Ty = 0$, comme T est bijectif alors $y = 0$. Par conséquent, $(Im\ T)^\perp = \{0\}$ et alors : $Im\ T$ est dense dans $\mathcal{H}$. T^{-1} est défini sur $\mathcal{D}(T^{-1}) = Im\ T$ dense dans $\mathcal{H}$ et alors $(T^{-1})^*$ existe.
On a facilement,

$$\mathcal{G}(T^{-1}) = V(\mathcal{G}(-T)) \text{ et } \mathcal{G}(-T) = V(\mathcal{G}(T^{-1})). \tag{1.11}$$

Comme T et $(-T)$ sont auto-adjoints, on a en vertu du lemme (1.4.1),

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = V(\mathcal{G}(T^{-1})) \oplus \mathcal{G}((T^{-1})^*)$$

et

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = V(\mathcal{G}(-T)) \oplus \mathcal{G}(-T) = \mathcal{G}(T^{-1}) \oplus V(\mathcal{G}(T^{-1}))$$

Par conséquent,

$$\mathcal{G}((T^{-1})^*) = [V(\mathcal{G}(T^{-1}))]^{\perp} = \mathcal{G}(T^{-1})$$

d'où

$$(T^{-1})^* = T^{-1}$$

3. *Si $Tx = 0$, alors $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle = 0$, $\forall\ y \in \mathcal{D}(T)$. Donc $x \in (Im\ T)^{\perp}$ et alors $x = 0$. T est par conséquent inversible de $\mathcal{D}(T)$ dans $Im\ T$.*
4. *Puisque $Im\ T = \mathcal{H}$, 3) implique que T est inversible de $\mathcal{D}(T)$ dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{H}$.*
   Si $x, y \in \mathcal{H}$, alors $x = Tz$ et $y = Tw$ pour $z, w \in \mathcal{D}(T)$ et

   $$\langle T^{-1}x, y \rangle = \langle z, Tw \rangle = \langle Tz, w \rangle = \langle x, T^{-1}y \rangle$$

   d'où, T^{-1} est symétrique, 1) implique que T^{-1} est auto-adjoint borné, il en découle aussi de 2) que $T = (T^{-1})^{-1}$ est aussi auto-adjoint. ♦

Il provient notamment du résultat 3) que si T est fermé injectif et d'image dense alors il est de même pour T^{-1} et T^* et on a

$$\mathcal{D}((T^{-1})^*) = T^*(\mathcal{D}(T^*)) \quad et \quad (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$$

Théorème 1.4.3. *[6] Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur symétrique dans $\mathcal{H}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est auto-adjoint.*

(ii) *T est fermé et $Ker(T^* \pm iI) = \{0\}$.*

(iii) *$Im(T \pm iI) = \mathcal{H}$*

Preuve

$(i) \Rightarrow (ii)$ Comme l'opérateur T est auto-adjoint, il est fermé.

Si $T^*u = \pm iu$, alors $Tu = \pm iu$. Comme $\langle Tu, u \rangle$ est réel, on conclut que $u = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Montrons d'abord que Im$(T-i)$ *est dense dans* $\mathcal{H}$. *Supposons que* $v \in Im(T-i)^{\perp}$. *Alors* $\langle (T-i)u, v\rangle = 0$ *pour tout* $u \in \mathcal{D}(T)$. *Donc,*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, -iv\rangle \quad pour \quad tout \quad u \in \mathcal{D}(T),$$

d'où on voit que $v \in \mathcal{D}(T^*)$ *et* $T^*v = -iv$. *Comme Ker*$(T^*+i) = \{0\}$, *on conclut que* $v = 0$.

Montrons maintenant que Im$(T-i)$ *est fermée. Soit* $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ *une suite telle que* $(T-i)u_n \to g$. *On veut montrer que* $g \in Im(T-i)$. *Comme*

$$\|(T-i)u\|^2 = \|Tu\|^2 + \|u\|^2$$

on voit que la suite $\{u_n\}$ *converge vers un élément* u *et* Tu_n *converge* $g + iu$.

En utilisnat le fait que T *est fermé, on conclut que* $u \in \mathcal{D}(T)$ *et* $Tu = g + iu$. *Donc,* $(T-i)u = g$.

L'espace vectorièl $Im(T-i)$ *étant dense et fermé, il est confondu avec* $\mathcal{H}$. *La démonstration de la relation Im*$(T+i) = \mathcal{H}$ *est analogue.*
(iii) $\Rightarrow$ (i) Il faut montrer que $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$. *Soit* $u \in \mathcal{D}(T)$. *Alors il existe* $v \in \mathcal{D}(T)$ *tel que* $(T-i)v = (T^*-i)u$. *Comme* $A \subset T^*$, *on voit que*

$$(T^*-i)(u-v) = 0 \tag{1.12}$$

L'argument utiliés dans la démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) montre que si Im$(T+i) = \mathcal{H}$, *alors Ker*$(T^*-i) = 0$. *Il résulte de (1.12) que* $u = v \in \mathcal{D}(T)$. *Donc,* $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$, *et l'opérateur* T *est auto-adjoint.*
On rencontre aussi des opérateurs symétriques qui ne sont pas fermés et dont la fermeture est auto-adjoints. ♦

Définition 1.4.3. ***(Essentiellement auto-adjoint)***

Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ *un opérateur non borné symétrique sur l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *avec* $\mathcal{D}(T)$ *dense dans* $\mathcal{H}$. T *est dit essentiellement auto-adjoint si* $\overline{T}$ *est auto-adjoint ou bien* $(\overline{T})^* = \overline{T} = T^*$

Lemme 1.4.2. *Si* T *est essentiellement auto-adjoint, alors* T *a une unique extension auto-adjointe.*

Preuve

S *est une extension auto-adjointe de* T, *comme* S *est fermé alors* $\overline{T} \subset S$ *donc*

$S^* \subset (\overline{T})^*$ *et* $S = \overline{T}, S^* = S$ *est* $(\overline{T})^* = \overline{T}$, *et on a* $\overline{T} \subset S$. *Montrons que* $S \subset \overline{T}$

$$S^* \quad est \quad auto-adjoint \quad \Rightarrow S^* = S \tag{1.13}$$

$$S \quad est \quad ferme \quad \Rightarrow \quad S^* = S = \overline{S}$$

Dautre part :

$$S^* \subset (\overline{T})^*, \tag{1.14}$$

et comme T *est essentiellement auto-adjoint alors*

$$\overline{S} = (\overline{T})^* \tag{1.15}$$

et donc

$$\begin{aligned} (1.14) \text{ et } (1.15) \quad &\Rightarrow \quad S^* \subset \overline{T} \text{ est de} \\ (1.13) \text{ et } (1.15) \quad &\Rightarrow \quad S = S^* \\ &\Rightarrow \quad S \subset \overline{T} \end{aligned}$$

♦

Remarque 1.4.2. *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.*

Remarque 1.4.3. *Si* T *est essentiellement auto-adjoint, alor* T^* *est la plus petite extension fermé de* T.

Remarque 1.4.4. *Si* T *et* S *sont deux opérateurs auto-adjoints et* $T \subset S$ *alors* $T = S$

Définition 1.4.4. ***(Opérateur de projéction)***

Soit $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert, si* $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *et* $P^2 = P$, P *appellé un opérateur de projéction, si* P *est un opérateur de projéction hèrmitien (i.e.* $P^2 = P$*) alors,* P *est appelé un projéction orthogonal.*

Définition 1.4.5. *Soit* T *un opérateur borné sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *On dit que :*

(i) T *est une projection (respectivement projection orthogonale) si* $T^2 = T$ *(respectivement* $T^2 = T$ *et* $T = T^*$*).*

(ii) T *est normal (respectivement auto-adjoint) si* $TT^* = T^*T$ *(respectivement* $T^* = T$*).*

(iii) T *est isométrique (respectivement unitaire) si* $T^*T = 1_{\mathcal{H}}$ *(respectivement* $T^*T = TT^* = 1_{\mathcal{H}}$*).*

1.5 Opérateur matriciel

Définition 1.5.1. *Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert, C, A, B, et D des opérateurs linéaires tels que :*

$$\begin{aligned} C : \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ A : \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ B : \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ D : \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_2 \end{aligned}$$

On définit l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ (x, y) &\longmapsto \mathcal{T}(x, y) = (C(x) + A(y), B(x) + D(y)) \end{aligned} \tag{1.16}$$

On le note par :

$$\mathcal{T}(x, y) = \begin{pmatrix} C & A \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = (\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(B)) \times (\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(D))$

Proposition 1.5.1. *On suppose que $(\mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(B))$ et $(\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(D))$. Alors l'opérateur matriciel $\mathcal{T}$ est borné si et seulement si les opérateurs C, A, B et D sont bornés.*

Preuve : *Soient P_1 et P_2 deux projections canoniques tels que :*

$$\begin{aligned} P_1 : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ (x, y) &\longmapsto x \\ P_2 : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

et J_1 et J_2 les injections canoniques tels que :

$$\begin{aligned} J_1 : \mathcal{H}_1 &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ x &\longmapsto (x, 0) \\ J_2 : \mathcal{H}_2 &\longrightarrow \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ y &\longmapsto (0, y) \end{aligned}$$

alors on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x,y) &= \mathcal{T}(x,0)+\mathcal{T}(0,y)\\ &= (P_1\mathcal{T}(x,0)+P_1\mathcal{T}(0,y), P_2\mathcal{T}(x,0)+P_2\mathcal{T}(0,y))\\ &= (P_1\circ\mathcal{T}\circ J_1(x)+P_1\circ\mathcal{T}\circ J_2(y), P_2\circ\mathcal{T}\circ J_1(x)+P_2\circ\mathcal{T}\circ)J_2(y)\end{aligned}$$

par suite on déduit que :

$$\begin{aligned}C &= P_1\circ\mathcal{T}\circ J_1\\ A &= P_1\circ\mathcal{T}\circ J_2\\ B &= P_2\circ\mathcal{T}\circ J_1\\ D &= P_2\circ\mathcal{T}\circ J_2\end{aligned} \tag{1.17}$$

et

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} P_1\circ\mathcal{T}\circ J_1 & P_1\circ\mathcal{T}\circ J_2\\ P_2\circ\mathcal{T}\circ J_1 & P_2\circ\mathcal{T}\circ J_2\end{pmatrix}$$

Comme P_1, P_2, J_1 et J_2 sont des opérateur bornés, des formules (1.16) et (1.17), on déduit que $\mathcal{T}$ est borné si et seulement si C, A, B et D sont bornés. ♦

1.6 Spectre et résolvante

1.6.1 Ensemble résolvant

Définition 1.6.1. *Soint $(T,\mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(T)$ dense dant $\mathcal{H}$.*

On appelle ensemble résolvant de l'opérateur $(T,\mathcal{D}(T))$ l'ensemble $\rho(\lambda)$ des λ complexes telle que :

(i) *$Im(T-\lambda)$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

(ii) *$(T-\lambda)$ est inversible de $\mathcal{D}(T)$ dans $Im(T-\lambda)$ d'inverse borné. On note $R_\lambda(T) = (T-\lambda)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \rho(T)$. $R_\lambda(T)$ est appelé l'opérateur résolvant ou résolvante de T.*

Remarque 1.6.1. *$R_\lambda(T)$ est borné sur $Im(T-\lambda)$ dans $\mathcal{D}(T)$, signifie que :*

$$\exists\ C>0,\ \forall u\in Im(T-\lambda);\ \|R_\lambda(T)u\|_{\mathcal{H}} \le\ C\ \|u\|_{\mathcal{H}}\}.$$

Remarque 1.6.2. *Si $(T, \mathcal{D}(T))$ est un opérateur fermé sur $\mathcal{H}$, alors :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus R_\lambda(T) \text{ existe et est dans } \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$$

Preuve :
Montrons l'nclusion suivante : " $\subseteq$ " Soint $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow \overline{Im(T-\lambda)} = \mathcal{H}$ et $R_\lambda(T)$ bornée sur

$$Im(T-\lambda) \Rightarrow \exists C > 0, \forall u \in Im(T-\lambda) : \|R_\lambda(T)u\|_{\mathcal{H}} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}$$

i.e $\forall v \in \mathcal{D}(T)$

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = \|R_\lambda(T)(T-\lambda)v\|_{\mathcal{H}} \leq \; C \; \|(T-\lambda)v\|_{\mathcal{H}} \tag{1.18}$$

Montrons l'nclusion inverse : " $\supseteq$ " Soint $w \in \mathcal{H}$ puis que $\overline{Im(T-\lambda)} = \mathcal{H} \Rightarrow$ il existe $(v_j)_j$ dans $\mathcal{D}(T)$ tel que $((T-\lambda)v_j)_j$ converge vers w dans $\mathcal{H}$.

L'estimation (1.18) appliquer a $v = (v_j - v_k)$ donne

$$\|v_j - v_k\| \leq C \; \|(T-\lambda)v_j - (T-\lambda)v_k\|_{\mathcal{H}} \to_{j,k\to\infty} 0$$

d'où $(v_j)_j$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$ donc elle converge vers v dans $\mathcal{H}$. En particulier $(v_j, (T-\lambda)v_j)$ converge dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vers (v, w) de même (v_j, Tv_j) est dans le graphe de T et converge dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vers $(v, w + Iv)$ puisque T est fermé on a :

$$w + Iv = Tv$$

i.e

$$w = (T-\lambda)v \in Im(T-\lambda)$$

donc

$$\mathcal{H} \subset Im(T-\lambda)$$

d'où

$$Im(T-\lambda) = \mathcal{H} \Rightarrow R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(T)$$

♦

1.6.2 Identité de la résolvante

Lemme 1.6.1. *Soient $T : E \to E$ un opérateur linéaire et $\lambda, \mu \in \rho(T)$, alors*

$$(T-\mu)^{-1} = (T-\lambda)^{-1} + (\mu-\lambda)(T-\mu)^{-1}(T-\lambda)^{-1}$$

Preuve : *On a*

$$\begin{aligned}(T-\mu)^{-1} &= (T-\mu)^{-1}(T-\lambda)(T-\lambda)^{-1}\\ &= (T-\mu)^{-1}((T-\mu)+(\mu-\lambda))(T-\lambda)^{-1}\\ &= (1+(\mu-\lambda)(T-\mu)^{-1})(T-\lambda)^{-1}\\ &= (T-\lambda)^{-1} + (\mu-\lambda)(T-\mu)^{-1}(T-\lambda)^{-1}\end{aligned}$$

♦

1.6.3 Spectre

La notion de spectre se d'efinit bien pour les opérateurs fermés. Soit T un opérateur linèaire fermé. Alors $\mathcal{D}(T)$ muni de la norme du graphe : $\|u\|_T := \|Tu\| + \|u\|$ est un espace de Hilbert, et on peut considèrer $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ comme un opérateur non borné entre deux espaces de Hilbert.

Définition 1.6.2. *Soit T un opérateur d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même. On appelle l'ensemble du spectre de T le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\sigma(T)$*

$$\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$$

avec

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

Où

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ (T-\lambda_{\mathcal{H}})\ \ non\ \ inversible\}. \tag{1.19}$$

Alors on peut trouver trois types de spectres distincts.

1. $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \ (T-\lambda)\ \ est\ \ non\ \ injectif\}$ *est le spectre ponctuel de T,*
2. $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \ (T-\lambda)^{-1}\ \ existe,\ \ de\ \ domaine\ \ non\ \ dense\ \ dans\ \ \mathcal{H}\}.$ *est le spectre residuel de T,*
3. $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ (\lambda-T)^{-1}\ existe,\ et\ non\ born\ de\ domaine\ dense\ dans\ \mathcal{H}\}.$ *est le spectre continu de T.*

1.6.4 Spectre discret- spectre essentiel

La notion de spectre essentiel et de spectre discret est d'une trés grande importance. Nous verrons que le spectre de certains opérateurs s'interprète à l'aide des états stationnaires du système.

Afin d'éviter toute confusion entre les spectres discret et ponctuel, rappelons que le spectre ponctuel est par définition l'ensemble des valeurs propres de T, c'est-à-dire l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(T - \lambda)$ n'est pas injectif.

Définition 1.6.3. *On appelle spectre discret d'un opérateur* $(T, \mathcal{D}(T))$ *l'ensemble des valeurs propres de multiplicité finie qui sont isolés dans* $\sigma(T)$ *(c'est-à-dire telles qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $]\lambda - \varepsilon; \lambda + \varepsilon[\cap \sigma(T) = \{\lambda\}$*),et on le note* $\sigma_d(T)$.
On appelle spectre essentiel de T *le complémentaire du spectre discret dans* $(\sigma(T))$*, et on le note par* $\sigma_{ess}(T)$ *:*

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_d(T)$$

Le spectre discret est inclus dans le spectre ponctuel défini plus haut, mais l'inclusion inverse est fausse en général. De même, le spectre continu est inclus dans le spectre essentiel sans que la réciproque ne soit pas toujours vraie.
On voit que $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(T)$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le projecteur $P(]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[)$ est de rang fini. De même, $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(T)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, le projecteur $P(]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[)$ n'est pas de rang fini.

Remarque 1.6.3. *Il convient de noter que le spectre non discret* $\sigma_{nd}(T)$ *coïncide avec le spectre essentiel* $\sigma_{ess}(T)$ *pour les opérateurs auto-adjoints* T *dans les espaces de Hilbert.*

1.6.5 Spectre et résolvante des opérateurs fermable

Définition 1.6.4. *(voir [15] page 92)*
Soit T *un opérateur linéaire fermable sur un espace Hilbert* $\mathcal{H}$*. L'ensemble résolvant et le spectre de* T *sont définis comme suit :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \textit{ est injective}; \ (T - \lambda) \in \mathcal{L}(E)\}$$

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

et le spectre ponctuel le spectre continu et le spectre residuel :

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T-\lambda) \ n'est \ \ pas \ \ injectif\} \\
\sigma_c(T) &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T-\lambda) \ est \ \ injectif, \ \overline{Im(T-\lambda)} = \mathcal{H}, \ Im(T-\lambda) \neq \mathcal{H}\Big\} \\
\sigma_r(T) &= \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T-\lambda) \ est \ injectif \ \overline{Im(T-\lambda)} \neq \mathcal{H}\Big\}
\end{aligned}$$

Notons que ; ***si*** $\rho(T) \neq 0$ *implique que* T ***est fermé****; en fait, si* $\lambda \in \rho(T)$, *alors* $(T-\lambda)^{-1}$ *est fermé et donc aussi* $T-\lambda$ *est fermé Alors, par le théorème du graphe fermé, on a :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \ \ est \ \ bijectif\} \tag{1.20}$$

Chapitre 2

Etude spectrale d'un opérateur matriciel 2×2 anti-diagonal non borné de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$

2.1 Introduction

Dans cette partie ; on montrera que les propriétés spectrales d'un tel opérateur sont étroitement liées à celles des produits d'opérateurs AB et BA où A, B sont des opérateurs non bornés ; plus exactement on va montrer :

$$\begin{array}{l} \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \rho(AB)\} \setminus \{0\} \\ \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \rho(BA)\} \setminus \{0\} \end{array} \tag{2.1}$$

$$\begin{array}{l} \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(AB)\} \setminus \{0\} \\ \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(BA)\} \setminus \{0\} \end{array} \tag{2.2}$$

on va envisagé trois cas :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \textbf{Etape.1 :} & \begin{array}{l} \rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \lambda^2 \in \rho(BA) \cap \rho(AB)\} \\ \sigma(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(BA) \cup \sigma(AB)\} \end{array} \\ & \\ \textbf{Etape.2 :} & \begin{array}{l} (\rho(BA) \cap \rho(AB) \neq \emptyset) \Rightarrow \sigma(BA) \setminus \{0\} = \sigma(AB) \setminus \{0\} \\ \Rightarrow \rho(BA) \setminus \{0\} = \rho(AB) \setminus \{0\} \end{array} \\ & \\ \textbf{Etape.3 :} & [(\rho(BA) \neq \emptyset) \text{ et } (\rho(AB) \neq \emptyset)] \Rightarrow (\rho(BA) \cap \rho(AB) \neq \emptyset) \end{array} \right.$$

2.2 Etude spectrale de l'opérateur $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$

Première étape

Montrons les résultats suivants :

$$\rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ \lambda^2 \in \rho(BA) \cap \rho(AB)\}$$

$$\sigma(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(BA) \cup \sigma(AB)\}$$

Lemme 2.2.1. *[9] Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \neq 0$, alors*

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} - \lambda) \ est \ injectif \ &\Leftrightarrow \ (BA - \lambda^2) \ est \ injectif. \\ &\Leftrightarrow \ (AB - \lambda^2) \ est \ injectif. \end{aligned}$$

Preuve : *Montrons qu'on a :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} - \lambda) \ est \ injectif \ &\Leftrightarrow \ (BA - \lambda^2) \ est \ injectif. \\ &\Leftrightarrow \ (AB - \lambda^2) \ est \ injectif. \end{aligned}$$

Démontrons " $\Leftarrow$ " Supposons $(BA - \lambda^2)$ (ou $(AB - \lambda^2)$) est injectif.

Soit $(x, y) \in ker(\mathcal{T} - \lambda)$, on a :

$$(\mathcal{T} - \lambda)(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & A \\ B & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{T} - \lambda)(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ay = \lambda x \\ Bx = \lambda y \end{cases} \tag{2.3}$$

Comme $\lambda x \in \mathcal{D}(B)$ de la premier équation de (2.3), on déduit que $Ay \in \mathcal{D}(B)$ et donc $y \in \mathcal{D}(BA)$ de même de la deuxième l'équation de (2.3), on déduit que $Bx \in \mathcal{D}(A)$ et donc $x \in \mathcal{D}(AB)$ alors :

$$(\mathcal{T} + \lambda)(\mathcal{T} - \lambda)(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} AB - \lambda^2 & 0 \\ 0 & BA - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{T} + \lambda)(\mathcal{T} - \lambda)(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (AB - \lambda^2)(x) = 0 \\ (BA - \lambda^2)(y) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Si $(BA - \lambda^2)$ (resp $(AB - \lambda^2)$) est injectif, des équations (2.3) et (2.4), on déduit $x = 0$ et $y = 0$.

Démontrons " $\Rightarrow$ " ***Inversement***, *on suppose* $(\mathcal{T}-\lambda)$ *injectif. Soit* $x \in ker(AB-\lambda^2)$, *on a :*

$$AB(x) = \lambda^2 x$$

en posant $y = \frac{1}{\lambda}B(x)$ *on obtient* $Ay = \lambda x$, *et on a*

$$\begin{cases} x \in \mathcal{D}(AB) \subseteq \mathcal{D}(B) \\ et \\ y = \frac{1}{\lambda}B(x) \in \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

d'où $(x, y) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ *et*

$$(\mathcal{T}-\lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x + Ay \\ Bx - \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x + \lambda x \\ \lambda y - \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Comme $(\mathcal{T}-\lambda)$ *est injectif de l'équation (2.5), on déduit* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *De la même façon on peut montrer que* $ker(BA-\lambda^2) = \{0\}$. *Donc on a bien :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}-\lambda) \text{ est injectif } &\Leftrightarrow (BA-\lambda^2) \text{ est injectif.} \\ &\Leftrightarrow (AB-\lambda^2) \text{ est injectif.} \end{aligned}$$

♦

donc

$$\mathcal{T} \text{ est injectif} \Leftrightarrow BA \text{ et } AB \text{ sont injectifs.}$$

Remarque 2.2.1. *Pour* $\lambda = 0$, *on a*

$$\mathcal{T}^2 \text{ est injectif } \Leftrightarrow \mathcal{T} \text{ est injectif}$$

donc

$$BA \text{ et } AB \text{ sont injectifs } \Leftrightarrow \mathcal{T} \text{ est injectif}$$

Lemme 2.2.2. *[9] Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lambda \neq 0$, *alors*

$$(\mathcal{T}-\lambda) \text{ est surjectif } \Leftrightarrow (BA-\lambda^2) \text{ et } (AB-\lambda^2) \text{ sont surjectifs .}$$

Preuve : " $\Leftarrow$ " *On suppose que :* $(BA-\lambda^2)$ *et* $(AB-\lambda^2)$ *sont surjectifs Soit* $(z_1, z_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, *il existe* $x_1 \in \mathcal{D}(AB)$ *et* $x_2 \in \mathcal{D}(BA)$ *tels que :*

$$\begin{cases} (AB-\lambda^2)x_1 = z_1 \\ \\ (BA-\lambda^2)x_2 = z_2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathcal{T} - \lambda)(\mathcal{T} + \lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

On pose

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\mathcal{T} + \lambda) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Comme $x_1 \in \mathcal{D}(AB)$, *alors* $x_1 \in \mathcal{D}(B)$ *et* $Bx_1 \in \mathcal{D}(A)$, *de même* $x_2 \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Ax_2 \in \mathcal{D}(B)$, *d'où*

$$\begin{cases} y_1 = \lambda x_1 + Ax_2 \in \mathcal{D}(B) \\ \\ y_2 = \lambda x_2 + Bx_1 \in \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

Ainsi il existe $(y_1, y_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(A)$ *tel que*

$$(z_1, z_2) = (\mathcal{T} - \lambda)(y_1, y_2)$$

donc $(\mathcal{T} - \lambda)$ *est surjectif.*

Inversement *: " $\Rightarrow$ " Soit* $z_1 \in \mathcal{H}_1$, *comme* $(\mathcal{T} - \lambda)$ *est surjectif alors il existe* $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ *tel que*

$$(\mathcal{T} - \lambda)(x_1, x_2) = (z_1, 0)$$

du système

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + Ax_2 = z_1 \\ Bx_1 = \lambda x_2 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} x_1 \in \mathcal{D}(AB) \\ et \\ z_1 = (AB - \lambda^2)(\frac{1}{\lambda} x_1) \end{cases}$$

donc $AB - \lambda^2$ *est surjectif.*

De même soit $z_2 \in \mathcal{H}_2$, *comme* $(\mathcal{T} - \lambda)$ *est surjectif alors il existe* $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ *tel que*

$$(\mathcal{T} - \lambda)(x_1, x_2) = (0, z_2)$$

du système

$$\begin{cases} AB = \lambda x_1 \\ BA - \lambda x_2 = z_2 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} x_2 \in \mathcal{D}(BA) \\ et \\ z_2 = (BA - \lambda^2)(\frac{1}{\lambda}x_2) \end{cases}$$

donc $BA - \lambda^2$ est surjectif. ♦

Remarque 2.2.2. *De même on peut montrer que*

$$\mathcal{T}^2 est\ surjectif \Leftrightarrow \mathcal{T} est\ surjectif$$

car remarquons que $\mathcal{D}(\mathcal{T}^2) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{T})$, on déduit que si $\mathcal{T}^2$ est surjectif alors $\mathcal{T}$ est surjectif. Inversement, si $\mathcal{T}$ est surjectif, soit $z \in H$, il existe $\overline{x} \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ tel que $z = \mathcal{T}(\overline{x})$, de même il existe $x \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$ tel que $\overline{x} = \mathcal{T}(x)$, et par suite on obtient :

$$x \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^2) \texttt{ et } z = \mathcal{T}^2(x)$$

d'où $\mathcal{T}^2$ est surjectif.

Remarque 2.2.3. *Pour $\lambda = 0$, on a*

$$\mathcal{T}^2 \text{ est surjectif } \Leftrightarrow \mathcal{T} \text{ est surjectif}$$

donc

$$BA \text{ et } AB \text{ sont surjectifs } \Leftrightarrow \mathcal{T} \text{ est surjectif}$$

Des lemmes (2.2.1), (2.2.2),et la remarque (2.2.3) on obtient

Corollaire 2.2.1. *Soit $\mathcal{T}$, un opérateur de type (1)*

$$(\mathcal{T} - \lambda) \text{ est bijectif} \Leftrightarrow (BA - \lambda^2) \text{ et } (AB - \lambda^2) \text{ sont bijectifs}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve : *C'est une conséquence directe des lemmes (2.2.1), (2.2.2) et la Proposition (2.2.3).* ♦

Corollaire 2.2.2. *pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

$$(BA - \lambda^2) \text{ et } (AB - \lambda^2) \text{ sont bijectifs } \Rightarrow (\mathcal{T} - \lambda) \text{ est inversible}$$

c'est à dire $\lambda \in \rho(\mathcal{T})$

Preuve : *En effet; Si $(BA - \lambda^2)$ et $(AB - \lambda^2)$ sont bijectifs, alors du corollaire (2.2.1), on obtient que $(\mathcal{T} - \lambda)$ est bijectif de $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Comme $\mathcal{T}$ est fermé alors $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ est fermé de domaine $\mathcal{D}(\mathcal{T} - \lambda)^{-1} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. En vertu du théorème du graphe fermé, on déduit que $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ est borné.* ♦

De corollaire (2.2.2), on obtient

Proposition 2.2.1. *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on a :*

$$\lambda^2 \in \rho(BA) \cap \rho(AB) \Rightarrow \lambda \in \rho(\mathcal{T})$$

Preuve : *C'est une conséquence directe du corollaire (2.2.2).* ♦

Proposition 2.2.2. *pour tout* $\lambda \neq 0$ *complexe*

$$\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \Rightarrow \lambda^2 \in \rho(BA) \cap \rho(AB)$$

Preuve : *Soit* $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$. *Calculons* $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$. *Posons :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} - \lambda)^{-1} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 &\rightarrow \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \\ (x, y) &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{pmatrix} -\lambda & A \\ B & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{l} Ac - \lambda a = 1 \\ Ad - \lambda b = 0 \\ Ba - \lambda c = 0 \\ Bb - \lambda d = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = \dfrac{1}{\lambda} Ad \\ \\ c = \dfrac{1}{\lambda} Ba \\ \\ (AB - \lambda^2)a = \lambda \\ \\ (BA - \lambda^2)d = \lambda \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \lambda(AB - \lambda^2)^{-1} \\ \\ d = \lambda(BA - \lambda^2)^{-1} \\ \\ b = A(BA - \lambda^2)^{-1} \\ \\ c = B(AB - \lambda^2)^{-1} \end{array} \right. \tag{2.6}$$

et par suite

$$(\mathcal{T} - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(AB - \lambda^2)^{-1} & A(BA - \lambda^2)^{-1} \\ \\ B(AB - \lambda^2)^{-1} & \lambda(BA - \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

Du corollaire (2.2.1) et la proposition (1.5.1), on déduit donc que $(BA - \lambda^2)^{-1}$ *et* $(AB - \lambda^2)^{-1}$ *sont bijectifs et bornés.* ♦

Remarque 2.2.4. *Si* $0 \in \rho(\mathcal{T})$, *alors* $\mathcal{T}$ *est bijectif et* $\mathcal{T}^{-1}$ *est borné, on déduit donc que* $\mathcal{T}^2$ *est bijectif, et que*

$$(\mathcal{T}^2)^{-1} = (\mathcal{T}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} (AB)^{-1} & 0 \\ 0 & (BA)^{-1} \end{pmatrix}$$

est un opérateur borné, par suite BA *et* AB *sont bijectifs, et* $(BA)^{-1}$ *et* $(AB)^{-1}$ *sont bornés.*

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A(BA)^{-1} \\ B(AB)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T}^{-1}|_{\mathcal{D}(B)\times\mathcal{D}(A)} = \begin{pmatrix} 0 & (AB)^{-1}A \\ (BA)^{-1}B & 0 \end{pmatrix}$$

Des propositions (2.2.1), (2.2.2) et la remarque (2.2.4), on déduit le théorème suivant

Théorème 2.2.1.

$$\rho(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \rho(BA) \cap \rho(AB)\}$$

$$\sigma(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda^2 \in \sigma(BA) \cup \sigma(AB)\}.$$

d'où

$$\rho(\mathcal{T}) \subset \rho(BA) \tag{2.7}$$

Deuxième étape

Montrons que si $\rho(BA) \cap \rho(AB) \neq \emptyset$ alors $\sigma(BA) \setminus \{0\} = \sigma(AB) \setminus \{0\}$ et $\rho(BA) \setminus \{0\} = \rho(AB) \setminus \{0\}$.

Lors de l'étude de l'opérateur résolvant $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ on a besoin des confirmations suivantes, soit $\lambda \in \rho(\mathcal{T})$ alors

- $(AB - \lambda^2)^{-1}$ borné (par définition de l'inverse d'un opérateur)

- $(BA - \lambda^2)^{-1}$ borné (par définition de l'inverse d'un opérateur)

- $B(AB - \lambda^2)^{-1}$ borné (fermé partout défini)

- $A(BA - \lambda^2)^{-1}$ borné (fermé partout défini)

Soit $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$ alors l'injection canonique

$$(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}(\mathcal{T} - \lambda) : \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

est bornée sur $\mathcal{D}(\mathcal{T})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & A \\ B & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\lambda a + bB & = 1 \\ aA - \lambda b & = 0 \\ -\lambda c + dB & = 0 \\ cA - \lambda d & = 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

de systèmes (2.8), on déduit que sur $\mathcal{D}(\mathcal{T})$, on a

$$\begin{cases} a = \lambda(AB - \lambda^2)^{-1} & = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}A(BA - \lambda^2)^{-1}B \\ \\ d = \lambda(BA - \lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}B(AB - \lambda^2)^{-1}A \\ \\ b = A(BA - \lambda^2)^{-1} & = (AB - \lambda^2)^{-1}A \\ \\ c = B(AB - \lambda^2)^{-1} & = (BA - \lambda^2)^{-1}B \end{cases} \tag{2.9}$$

d'où par prolongement borné sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, on a

$$\begin{cases} a = \lambda(AB - \lambda^2)^{-1} & = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{A(BA - \lambda^2)^{-1}B} \\ \\ d = \lambda(BA - \lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{B(AB - \lambda^2)^{-1}A} \\ \\ b = A(BA - \lambda^2)^{-1} & = \overline{(AB - \lambda^2)^{-1}A} \\ \\ c = B(AB - \lambda^2)^{-1} & = \overline{(BA - \lambda^2)^{-1}B} \end{cases} \tag{2.10}$$

ainsi

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} - \lambda)^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{A(BA - \lambda^2)^{-1}B} & A(BA - \lambda^2)^{-1} \\ \\ \overline{(BA - \lambda^2)^{-1}B} & \lambda(BA - \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix} \\ \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(AB - \lambda^2)^{-1} & \overline{(AB - \lambda^2)^{-1}A} \\ \\ B(AB - \lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{B(BA - \lambda^2)^{-1}A} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où le théorème suivant

Théorème 2.2.2. *[10] Si $\rho(BA) \cap \rho(AB) \neq \emptyset$, alors*

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma(BA)\} \setminus \{0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda^2 \in \sigma(AB)\} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Preuve : *D'après le théorème (2.2.1), l'inclusion ($\subseteq$), est vérifiée.*

Soit $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda^2 \in \rho(AB)$, on a

$$\begin{cases} (AB - \lambda^2)^{-1} : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1 \\ B(AB - \lambda^2)^{-1} : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2 \end{cases}$$

On pose :

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda(AB - \lambda^2)^{-1} & (AB - \lambda^2)^{-1}A \\ B(AB - \lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}B(AB - \lambda^2)^{-1}A \end{pmatrix}$$

Si $z \in \mathcal{H}_1$, alors $(AB - \lambda^2)^{-1}(z) \in \mathcal{D}(AB)$ et donc $B(AB - \lambda^2)^{-1}(z) \in \mathcal{D}(A)$, d'où

$$R(\lambda) : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(\mathcal{T}) = \mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

Soit $\mu^2 \in \rho(BA) \cap \rho(AB)$ ($\mu \neq 0$), alors $\mu \in \rho(\mathcal{T})$ et on a

$$(\mathcal{T} - \mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu(AB - \mu^2)^{-1} & \overline{(AB - \mu^2)^{-1}A} \\ B(AB - \mu^2)^{-1} & -\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\overline{B(AB - \mu^2)^{-1}A} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} (AB - \mu^2)^{-1} \text{et } B(AB - \mu^2)^{-1} \text{ sont borné sur } \mathcal{H}_1 \\ \text{et} \\ (AB - \mu^2)^{-1}A \text{ et } B(AB - \mu^2)^{-1}A \text{ sont bornés sur } \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

D'après l'identité de la résolvante (lemme 1.6.1), on a

$$(AB - \lambda^2)^{-1}A = (AB - \mu^2)^{-1}A + (\lambda - \mu)(AB - \lambda^2)^{-1}(AB - \mu^2)^{-1}A$$

et

$$B(AB - \lambda^2)^{-1}A = B(AB - \mu^2)^{-1}A + (\lambda - \mu)B(AB - \lambda^2)^{-1}(AB - \mu^2)^{-1}A$$

Ce qui montre que $(AB-\lambda^2)^{-1}A$ *et* $B(AB-\lambda^2)^{-1}A$ *sont bornés sur* $\mathcal{D}(A)$. *Par suite* $R(\lambda):\mathcal{H}_1\times\mathcal{D}(A)\to\mathcal{D}(\mathcal{T})$, *est un opérateur défini et borné sur* $\mathcal{H}_1\times\mathcal{D}(A)$. *Comme* $\mathcal{H}_1\times\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$, *alors* $R(\lambda)$ *possède un prolongement borné sur* $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$ *que l'on note par* $\overline{R(\lambda)}$:

$$\overline{R(\lambda)}=\begin{pmatrix} \lambda(AB-\lambda^2)^{-1} & \overline{(AB-\lambda^2)^{-1}A} \\ \\ B(AB-\lambda^2)^{-1} & -\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}\overline{B(AB-\lambda^2)^{-1}A}\end{pmatrix}$$

Puisque $(AB-\lambda^2)$ *est injectif, alors d'après le lemme (2.2.1), on a* $\mathcal{T}-\lambda$ *et* $(AB-\lambda^2)$ *injectifs. On peut vérifier facilement que*

$$(\mathcal{T}-\lambda)R(\lambda)=I_{\mathcal{H}_1\times\mathcal{D}(A)}$$

Donc

$$\forall(x,y)\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{D}(A)\Rightarrow(\mathcal{T}-\lambda)R(\lambda)(x,y)=(x,y).$$

Soit $(x,y)\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$, *de la densité de* $\mathcal{D}(A)$ *dans* $\mathcal{H}_2$, *il existe dans* $\mathcal{D}(A)$, *une suite* $(y_n)_n$ *qui converge vers* y *dans* $\mathcal{H}_2$. *On pose*

$$(a_n,b_n)=\overline{R(\lambda)}(x,y_n)=R(\lambda)(x,y_n)\in\mathcal{D}(\mathcal{T})$$

Soit $(a,b)=\overline{R(\lambda)}(x,y)\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$, *de la continuité de* $\overline{R(\lambda)}$, *on a*

$$(a,b)=\overline{R(\lambda)}(x,y)=\lim_n\overline{R(\lambda)}(x,y_n)=\lim_n(a_n,b_n)$$

D'autre part on a

$$\begin{cases}\mathcal{D}(\mathcal{T})\ni(a_n,b_n)\to(a,b)\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2\\ \\ (\mathcal{T}-\lambda)(a_n,b_n)=(x,y_n)\to(x,y)\end{cases}$$

comme $(\mathcal{T}-\lambda)$ *est un opérateur fermé, on déduit que*

$$\begin{cases}(a,b)\in\mathcal{D}(\mathcal{T})\\ et\\ (\mathcal{T}-\lambda)(a,b)=(x,y)\end{cases}$$

Par suite $(\mathcal{T}-\lambda)$ *est surjectif (donc bijectif), et on a*

$$\begin{cases}\overline{R(\lambda)}(\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2)\subseteq\mathcal{D}(\mathcal{T})\\ \\ (\mathcal{T}-\lambda)\overline{R(\lambda)}=I_{\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2}\\ \\ (\mathcal{T}-\lambda)^{-1}=\overline{R(\lambda)}\end{cases}$$

d'où $(\mathcal{T} - \lambda)$ *est inversible* $(\lambda \in \rho(\mathcal{T}))$*, du théorème (2.2.1), on déduit que* $\lambda^2 \in \rho(BA)$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(AB)\} \setminus \{0\} \subseteq \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(BA)\} \setminus \{0\}$$

De la même façon, on démontre

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(BA)\} \setminus \{0\} \subseteq \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(AB)\} \setminus \{0\}$$

d'où

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(BA)\} \setminus \{0\} = \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \rho(AB)\} \setminus \{0\}$$

Ainsi

$$\{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \sigma(BA)\} \setminus \{0\} = \sigma(\mathcal{T}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; \quad \lambda^2 \in \sigma(AB)\} \setminus \{0\}$$

♦

Lemme 2.2.3. *Si* $\mu \in \rho(BA) \setminus \{0\}$. *Alors* $(AB - \mu) : \mathcal{D}(AB) \to \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ *admet un inverse algébrique* $(AB - \mu)^{-1}$*, et les opérateurs* $(AB - \mu)^{-1}A$ *et* $B(AB - \mu)^{-1}A$ *sont bornés sur* $\mathcal{D}(A)$ *tels que leurs extensions bornées sont données par*

$$\overline{(AB - \mu)^{-1}A} = A(BA - \mu)^{-1} \tag{2.11}$$

$$\overline{B(AB - \mu)^{-1}A} = 1_{\mathcal{H}_2} + \mu(BA - \mu)^{-1} \tag{2.12}$$

Preuve :

Du lemme (2.2.1), on déduit que $(AB-\mu)$ *est injectif, donc bijectif son image* $Im(AB - \mu)$*, soit alors*

$$(AB - \mu)^{-1} : Im(AB - \mu) \to \mathcal{H}_1$$

de plus si $x \in \mathcal{D}(A)$ *il existe* $y \in \mathcal{D}(BA)$ *tel que* $x = BAy - \mu y$ *donc*

$$Ax = ABAy - \mu Ay = (AB - \mu)Ay$$

on déduit que $Ax \in Im(AB - \mu)$*, et donc* $Im(A) \subseteq \mathcal{D}((AB - \mu)^{-1})$. *On a*

$$A(BA - \mu) = (AB - \mu)A$$

en composant à droite par $(BA-\mu)^{-1}$, on obtient

$$A = (AB-\mu)A(BA-\mu)^{-1}|_{\mathcal{D}(A)}$$

et en composant à gauche par $(AB-\mu)^{-1}$, on obtient

$$(AB-\mu)^{-1}A = A(BA-\mu)^{-1}|_{\mathcal{D}(A)} \tag{2.13}$$

Par composition à gauche par B, on obtient

$$B(AB-\mu)^{-1}A = BA(BA-\mu)^{-1}|_{\mathcal{D}(A)} = (1_{\mathcal{H}_2} + \mu(BA-\mu)^{-1})|_{\mathcal{D}(A)} \tag{2.14}$$

des équations (2.2.3) et (2.14), se déduit le lemme (2.2.3). ♦

Troisième étape

Lemme 2.2.4. *[10] Supposons que $\lambda \in \rho(\mathcal{T})\backslash\{0\}$. Alors les opérateurs BA et AB sont fermés et λ^2 appartient à leurs résolvante. De plus les opérateurs.*

$$(BA-\lambda^2)^{-1}B, \qquad A(BA-\lambda^2)^{-1}B \tag{2.15}$$

sont bornés sur $\mathcal{D}(B)$ et les opérateurs

$$(AB-\lambda^2)^{-1}A, \qquad B(AB-\lambda^2)^{-1}A \tag{2.16}$$

sont bornés sur $\mathcal{D}(A)$.

Preuve :

i *Nous définissons l'opérateur $R^0(\lambda)$ sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ par*

$$R^0(\lambda) := \begin{pmatrix} R^0_{11}(\lambda) & R_{12}(\lambda) \\ R^0_{21}(\lambda) & R_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

et donc,

$$R^0(\lambda) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}A(BA-\lambda^2)^{-1}B & A(BA-\lambda^2)^{-1} \\ (BA-\lambda^2)^{-1}B & \lambda(BA-\lambda^2)^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

alors $\mathcal{D}(R^0(\lambda)) = \mathcal{D}(B)\times\mathcal{H}_2$

On sait que $\lambda^2 \in \rho(BA)\backslash\{0\}$, par conséquent, l'opérateur $R^0(\lambda)$ est bien *défini et $R_{12}(\lambda)$ et $R_{22}(\lambda)$ sont des opérateurs bornés. Soit $(x, y) \in \mathcal{D}(B) \times \mathcal{H}_2$, nous fixons*

$$\begin{pmatrix} f \\ \mathrm{g} \end{pmatrix} := R^0(\lambda) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda}A(BA-\lambda^2)^{-1}Bx + A(BA-\lambda^2)^{-1}y \\ \\ (BA-\lambda^2)^{-1}Bx + \lambda(BA-\lambda^2)^{-1}y \end{pmatrix}$$

Puisque $Im((BA-\lambda^2)^{-1}) = \mathcal{D}(BA) \subset \mathcal{D}(A)$, où Im désigne l'image d'un opérateur, et $x \in \mathcal{D}(B)$, il est evident que $(f, \mathrm{g}) \in \mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{T})$. Donc nous pouvons appliquer $\mathcal{T} - \lambda$ à $R^0(\lambda)(x, y)$ et obtient

$$(\mathcal{T} - \lambda)R^0(\lambda)(x, y) = (x, y)$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}(B) \times \mathcal{H}_2$ et $\lambda \in \rho(\mathcal{T})\backslash\{0\}$ on a :

$$R^0(\lambda) = (\mathcal{T} - \lambda)^{-1}|_{\mathcal{D}(B)\times\mathcal{H}_2}$$

Parce que B est densément défini nous concluons que l'opérateur $R^0(\lambda)$ a une extension unique bornée sur l'espace $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ qui est donnée par $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$. Nous noterons cette extension par $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) := \begin{pmatrix} R_{11}(\lambda) & R_{12}(\lambda) \\ R_{21}(\lambda) & R_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \overline{R^0(\lambda)} = (\mathcal{T} - \lambda)^{-1} \tag{2.18}$$

Particulièrement les opérateurs

$$R^0_{11}(\lambda) = -\lambda^{-1} + \lambda^{-1}A(BA-\lambda^2)^{-1}B$$

$$R^0_{21}(\lambda) = (BA-\lambda^2)^{-1}B$$

sont bornée sur le domaine $\mathcal{D}(B)$ et ont une extension bornée sur l'espace tout entièr $\mathcal{H}_1$.

ii *Si on définit l'opérateur $S^0(\lambda) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ par*

$$S^0(\lambda) := \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S^0_{12}(\lambda) \\ \\ S_{21}(\lambda) & S^0_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

et

$$S^0(\lambda) := \left(\begin{array}{cc} \lambda(AB-\lambda^2)^{-1} & (AB-\lambda^2)^{-1}A \\ \\ B(AB-\lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}B(AB-\lambda^2)^{-1}A \end{array} \right) \tag{2.19}$$

alors $\mathcal{D}(S^0(\lambda)) = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{D}(A)$.

Il en résulte que $S^0(\lambda)$ *est borné sur son domaine et possède une unique extension bornée sur l'espace* $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2$ *qui est donnée par* $(\mathcal{T}-\lambda)^{-1}$. *Nous noterons cette extension par* $S(\lambda)$,

$$S(\lambda) := \overline{S^0(\lambda)} = (\mathcal{T}-\lambda)^{-1}$$

En particulier les opérateurs

$$S^0_{22}(\lambda) = -\lambda^{-1} + \lambda^{-1}B(AB-\lambda^2)^{-1}A$$

$$S^0_{12}(\lambda) = (AB-\lambda^2)^{-1}A$$

et donc également l'opérateur

$$B(AB-\lambda^2)^{-1}A$$

sont bornés sur le domaine $\mathcal{D}(A)$ *et ont ainsi des extensions bornées sur l'espace tout entièr* $\mathcal{H}_2$ *qui complète la preuve de lemme (2.2.4).* ♦

Lemme 2.2.5. *[9] Si* $\rho(BA) \neq \emptyset$ *et* $\rho(AB) \neq \emptyset$ *alors* $\rho(BA) \cap \rho(AB) \neq \emptyset$

Preuve : *Soient* $\lambda \in \rho(AB) \setminus \{0\}$ *et* $\mu \in \rho(BA) \setminus \{0\}$, *de l'identité de la résolvante on obtient*

$$(AB-\lambda)^{-1}A = (AB-\mu)^{-1}A + (\lambda-\mu)(AB-\lambda)^{-1})(AB-\mu)^{-1})A$$

et

$$B(AB-\lambda)^{-1}A = B(AB-\mu)^{-1}A + (\lambda-\mu)B(AB-\lambda)^{-1})(AB-\mu)^{-1})A$$

du Lemme (2.2.4), $(AB-\lambda)^{-1}A$ *et* $B(AB-\lambda)^{-1}A$ *sont bornés sur* $\mathcal{D}(A)$ *par conséquent si* $\lambda^2 \in \rho(AB) \setminus \{0\}$, *alors*

$$R(\lambda) = \left(\begin{array}{cc} \lambda(AB-\lambda^2)^{-1} & (AB-\lambda^2)^{-1}A \\ \\ B(AB-\lambda^2)^{-1} & -\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}B(AB-\lambda^2)^{-1}A \end{array} \right)$$

est un opérateur matriciel borné sur $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{D}(A)$, qui a pour extension bornée

$$\overline{R(\lambda)} = \begin{pmatrix} \lambda(AB-\lambda^2)^{-1} & \overline{(AB-\lambda^2)^{-1}A} \\ B(AB-\lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{B(AB-\lambda^2)^{-1}A} \end{pmatrix}$$

Par un raisonnement analogue à la démonstration faite du Théorème (2.2.2), on déduit que $\lambda \in \rho(\mathcal{T})$ et $\lambda^2 \in \rho(BA)$. ♦

Remarque 2.2.5. *Si $0 \in \rho(AB)$ on considère alors*

$$R(0) = \begin{pmatrix} 0 & (AB)^{-1}A \\ (BA)^{-1}B & 0 \end{pmatrix}$$

défini sur $\mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(A)$. On a

$$B(AB) = (BA)B \Rightarrow (BA)^{-1}B = B(AB)^{-1}|_{\mathcal{D}(B)}$$

donc $(BA)^{-1}B$ borné sur $\mathcal{D}(B)$. De l'équation de la résolvante et du lemme (2.2.3), on obtient

$$(AB)^{-1}A = (AB-\mu)^{-1}A - \mu(AB)^{-1})(AB-\mu)^{-1})A$$

borné sur $\mathcal{D}(A)$. Ce ci montre que $R(0)$ est borné sur $\mathcal{D}(B) \times \mathcal{D}(A)$, et par suite admet un prolongement borné

$$\overline{R(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{(AB)^{-1}A} \\ \overline{(BA)^{-1}B} & 0 \end{pmatrix}$$

Le même raisonnement du Théorème (2.2.2), donne $0 \in \rho(\mathcal{T})$ et $0 \in \rho(BA)$.

Corollaire 2.2.3. *Soient les hypothèses a) et b) satisfaites ; Alors :*

$$\rho(\mathcal{T}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(AB) \cap \rho(BA)\}.$$

De plus on a :

$$0 \in \rho(\mathcal{T}) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \rho(AB) \cap \rho(BA)\}.$$

Preuve : *A partir du lemme (2.2.4) on sait que :*

$$\rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(AB) \cap \rho(BA)\} \setminus \{0\}.$$

de plus les propriétés concernant le point 0 *proviennent directement de la remarque (2.2.3) et le fait que :*

$$\mathcal{T} \text{ est inversible} \Leftrightarrow \mathcal{T}^2 \text{est inversible}$$

2.2.1 Contre exemple

Soient $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit S un opérateur fermé non borné et densément défini, tel que $0 \in \rho(S)$. On pose

$$B = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & S \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}$$

Il est ciair que B est un opérateur fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ avec $\mathcal{D}(B) = \mathcal{H} \times \mathcal{D}(S)$ et A est un opérateur borné sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

$$BA = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad et \quad AB = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Il est evident que BA est borné sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ et AB est fermé non borné sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ avec $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(B) = \mathcal{H} \times \mathcal{D}(S)$. Il est facile de vérifier

$$\sigma(BA) = \{1\} \quad et \quad \sigma(AB) = \mathbb{C}$$

En effet $(AB - 1)$ n'est pas injectif et pour $\lambda \neq 1$ l'opérateur $(AB - \lambda)$ est bijectif et on a

$$(AB - \lambda)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda} \begin{pmatrix} I & -(1-\lambda)^{-1} S \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donc $(AB - \lambda)^{-1}$ est non borné et $\sigma(AB) = \mathbb{C}$.

Remarque 2.2.6. *Notons qu'on peut construire facilement l'exemple suivant. Soit $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est un espace de Banach de dimension infinie.*

Soit A un certain opérateur fermé non borné et $B = 0$. Alors $AB = 0$ et $\sigma(AB) = \{0\}$.

D'autre part $BA = 0|_{\mathcal{D}(A)}$. Il en résulte que BA est un opérateur non fermé et $\sigma(BA) = \mathbb{C}$. Néanmoins, cet exemple n'est pas très intéressant parce que

$$\overline{BA} = 0 = AB \quad et \quad \sigma(\overline{BA}) = \sigma(AB)$$

.

Chapitre 3

Etude spectrale des opérateurs anti-diagonaux non bornés de type $\mathcal{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du spectre discret des opérateurs auto-adjoints (resp. non auto-adjoint) des matrices d'opérateurs de la forme

$$\mathcal{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

où les opérateurs sont pas nécessairement bornés dans leurs espaces, ou entre eux, respectivement. Des déclarations générales sur le spectre discret de $\mathcal{T}^*$ et de ses points d'accumulation sont prouvés. Le point clé de la preuve, c'est l'idée d'envisager un inverse algébrique densément défini de l'opérateur linéaires $\mathcal{T} - \lambda$ et montrons qu'il a une extension bornés de l'ensemble de l'espace de Banach $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ qui est l'inverse topologique de $\mathcal{T} - \lambda$. Nous discutons les propriétes spéctrale $\mathcal{T}^*$ dans le :

1- Cas non auto-adjoint dans un espace de Banach et sur certains hypothèses nous montrons l'inclusion inverse du deuxième chapitre i.e

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(BA)\} \backslash \{0\} \subset \rho(\mathcal{T}) \backslash \{0\}$$

2- Cas auto-adjoint sur un espace un Hilbert et sur certains hypothèses nous montrons qu'on a :

$$\sigma_{ess}(\overline{\mathcal{T}}) \backslash \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma_{ess}(BA)\} \backslash \{0\};$$

de plus si AB est essentiellement auto-adjoint et $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$; alors on a :

$$\sigma_{ess}(BA)\backslash\{0\} = \sigma_{ess}(\overline{AB})\backslash\{0\} = \sigma_{ess}(\overline{A}\ \overline{B})\backslash\{0\}.$$

Puis conclure ce chapitre des applications sur à un système d'opérateurs différentiels ordinaires et sur l'opérateurs de Schrödinger iso-spectrale uni-dimensionnelle avec des potentiels complexes

3.2 Etude spectrale des opérateurs anti-diagonaux non bornés non auto-adjoint de type $\mathcal{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$

3.3 Cas de l'espace de Banach

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach, l'opérateur $\mathcal{T}$ et est densément défini alors l'opérateur adjoint $\mathcal{T}^*$ est bien définit sur l'espace dual $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1' \times \mathcal{B}_2'$ et est donné par :

$$\mathcal{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 3.3.1. *[10]*

Soient A, B deux opérateurs linéaires fermés densément définis. Supposons que $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$. Alors les opérateurs A^*B^* et B^*A^* sont fermés et $\lambda^2 \in \rho(A^*B^*) \cap \rho(B^*A^*)$.

De plus les opérateurs :

$$(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*, \qquad B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*$$

ont des extensions bornées à l'espace $\mathcal{B}_1'$ tout entier si A^* est densement défini ;

sous ces conditions additionelles on a :

$$(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*} & B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \\ \overline{(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*} & \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

De manière analogue, les opérateurs :

$$(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*, \qquad A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*$$

ont des extensions bornées à l'espace $\mathcal{B}_2'$ *tout entier si* B^* *est densément défini ; sous ces conditions additionelles on a :*

$$(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & \overline{(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*} \\ A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*} \end{pmatrix}$$

Preuve : *La preuve de ce lemme est completement analogue à ce lui du lemme (2.2.4) en prenant en compte le fait que* $\rho(\mathcal{T}^*) = \rho(\mathcal{T})$

(i) *Soit* $\lambda \in \rho(\mathcal{T}) \setminus \{0\}$ *alors l'injection canonique*

$$(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1}(\mathcal{T}^* - \lambda) : \mathcal{D}(\mathcal{T}^*) = \mathcal{D}(B^*) \times \mathcal{D}(A^*) \to \mathcal{B}_2' \times \mathcal{B}_1'$$

est bornée sur $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda & B^* \\ A^* & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\lambda a + bA^* & = 1 \\ aB^* - \lambda b & = 0 \\ -\lambda c + dA^* & = 0 \\ cB^* - \lambda d & = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Des systèmes (3.1), on déduit que sur $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$, *et on a*

$$\begin{cases} a = \lambda(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* \\ d = \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} & = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^* \\ b = B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} & = (B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^* \\ c = A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & = (A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* \end{cases} \tag{3.2}$$

Alors

$$(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* & B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \\ (A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* & \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

d'où par prolongement borné sur $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_2' \times \mathcal{B}_1'$, *on a*

$$\begin{cases} a = \lambda(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*} \\ d = \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*} \\ b = B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} & = \overline{(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*} \\ c = A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & = \overline{(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*} \end{cases} \tag{3.3}$$

ainsi, si A^* est densément défini on a les extensions bornées à tout l'espace $\mathcal{B}_2'$. Dans cette hypothèse supplémentaire on a :

$$(\mathcal{T}^*-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\overline{B^*(A^*B^*-\lambda^2)^{-1}A^*} & B^*(A^*B^*-\lambda^2)^{-1} \\ \overline{(A^*B^*-\lambda^2)^{-1}A^*} & \lambda(A^*B^*-\lambda^2)^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Et si B^* est densément défini on a les extensions bornées à l'espace $\mathcal{B}_1'$. Dans cette hypothèse supplémentaire on a :

$$(\mathcal{T}^*-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(B^*A^*-\lambda^2)^{-1} & \overline{(B^*A^*-\lambda^2)^{-1}B^*} \\ A^*(B^*A^*-\lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\overline{A^*(B^*A^*-\lambda^2)^{-1}B^*} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

(ii) *Pour $\lambda \in \rho(\mathcal{T}^*)$, alors :*

Montrons qu'on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^*-\lambda)\ est\ injectif &\Leftrightarrow (A^*B^*-\lambda^2)\ est\ injectif. \\ &\Leftrightarrow (B^*A^*-\lambda^2)\ est\ injectif. \end{aligned}$$

$\diamond$ *Supposant $(A^*B^*-\lambda^2)$ (ou $(B^*A^*-\lambda^2)$) est injectif.*

Soit $(x,y) \in ker(\mathcal{T}^*-\lambda)$, on a :

$$(\mathcal{T}^*-\lambda)(x,y)=0 \ \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & B^* \\ A^* & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{T}^*-\lambda)(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} B^*y=\lambda x \\ A^*x=\lambda y \end{cases} \quad (3.6)$$

Comme $\lambda x \in \mathcal{D}(A^*)$ de la première équation de (3.6), on déduit que $B^*y \in \mathcal{D}(A^*)$ et donc $y \in \mathcal{D}(A^*B^*)$ de même de la deuxième équation de (3.6), on déduit que $A^*x \in \mathcal{D}(B^*)$ et donc $x \in \mathcal{D}(B^*A^*)$ alors :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^*+\lambda)(\mathcal{T}^*-\lambda)(x,y)=0 \ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & B^* \\ A^* & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda & B^* \\ A^* & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} B^*A^*-\lambda^2 & 0 \\ 0 & A^*B^*-\lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{T}^*+\lambda)(\mathcal{T}^*-\lambda)(x,y)=0 \Rightarrow \begin{cases} (B^*A^*-\lambda^2)(x)=0 \\ (A^*B^*-\lambda^2)(y)=0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Si $(A^*B^* - \lambda^2)$ *(resp* $(B^*A^* - \lambda^2)$*) est injectif, des équations (3.6) et (3.7), on déduit* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Inversement, *on suppose* $(\mathcal{T}^* - \lambda)$ *injectif. Soit* $y \in ker(A^*B^* - \lambda^2)$, *on a :*

$$A^*B^*(y) = \lambda^2 y$$

en posant $x = \dfrac{1}{\lambda}B^*(y)$ *on obtient* $B^*y = \lambda x$, *et on a*

$$\begin{cases} y \in \mathcal{D}(B^*A^*) \subseteq \mathcal{D}(A^*) \\ et \\ x = \dfrac{1}{\lambda}B^*(y) \in \mathcal{D}(B^*) \end{cases}$$

d'où $(x, y) \in \mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$ *et*

$$(\mathcal{T}^* - \lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x + B^*y \\ A^*x - \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x + \lambda x \\ \lambda y - \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Comme $(\mathcal{T}^* - \lambda) =$ *et l'équation (3.8), est injectif, on déduit que* $x = 0$ *et* $y = 0$. *Donc* $ker(A^*B^*) = \{0\}$

Montrons qu'on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}^* - \lambda) \ est \ surjectif \ &\Leftrightarrow \ (A^*B^* - \lambda^2) \ est \ surjectif. \\ &\Leftrightarrow \ (B^*A^* - \lambda^2) \ est \ surjectif. \end{aligned}$$

supposons que $(\mathcal{T}^* - \lambda)$ *est surjectif i.e*

$$\left\{(g_1, g_2) \in \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_1 \backslash (\mathcal{T}^* - \lambda)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, (f_1 f_2) \in \mathcal{D}(A^*) \times \mathcal{D}(B^*)\right\}$$

alors

$$(\mathcal{T}^* - \lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & B^* \\ A^* & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} B^*f_2 - \lambda f_1 = \mathrm{g}_1 \\ A^*f_1 - \lambda f_2 = \mathrm{g}_2 \end{matrix} \tag{3.9}$$

où $(f_1, f_2) \in \mathcal{D}(A^*) \times \mathcal{D}(B^*)$ *est un solution unique pour n'importe quel vecteur donné* $(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$. *Particulièrement, pour* $\mathrm{g}_1 = 0$ *nous obtenons*

$$\begin{matrix} B^*f_2 - \lambda f_1 = 0 \\ A^*f_1 - \lambda f_2 = \mathrm{g}_2 \end{matrix} \tag{3.10}$$

Pour $\lambda \neq 0$ et $f_1 \in \mathcal{D}(A^*)$, la première équation dans (3.10) montre que $f_2 \in \mathcal{D}(A^*B^*)$. Supposons que $f_1 = \lambda^{-1}B^*f_2$ alors

$$\frac{1}{\lambda}(A^*B^* - \lambda^2)f_2 = \mathrm{g}_2 \tag{3.11}$$

a pour n'importe quel $\mathrm{g}_2 \in \mathcal{B}_1$ la résolution est unique pour un certain $f_2 \in \mathcal{D}(A^*B^*)$ d'où

$$f_2 = \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}\mathrm{g}_2 \tag{3.12}$$

L'inverse algébrique dans (3.12) peut être réprésenté par la résolvante de $\mathcal{T}$ à λ, c'est-à-dire

$$(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} = \frac{1}{\lambda}P_2(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1}J_2 \tag{3.13}$$

où J_1 est la fixation canonique de $\mathcal{B}_l$ dans $\mathcal{B}$ et P_1 désigne la projection de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}_l$ $(l = 1, 2)$. Il résulte que l'inverse algébrique $(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}$ est un opérateur borné d'où A^*B^* est fermé et $\lambda^2 \in \rho(A^*B^*)$.

(iii) *De Façon analogue nous concluons que B^*A^* est un opérateur fermé, $\lambda^2 \in \rho(B^*A^*)$ et*

$$(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} = \frac{1}{\lambda}P_1(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1}J_1 \tag{3.14}$$

(iv) *Nous définissons l'opérateur $R^0(\lambda)$ sur $\mathcal{B}_2' \times \mathcal{B}_1'$ par*

$$R^0(\lambda) := \begin{pmatrix} R_{11}^0(\lambda) & R_{12}(\lambda) \\ R_{21}^0(\lambda) & R_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

et

$$R^0(\lambda) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* & B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \\ (A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* & \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Alors $\mathcal{D}(R^0(\lambda)) = \mathcal{D}(A^*) \times \mathcal{B}_1'$
On sait par ii) que $\lambda^2 \in \rho(A^*B^*)\backslash\{0\}$, par conséquent, l'opérateur matriciel $R^0(\lambda)$ est bien défini et $R_{12}(\lambda)$ et $R_{22}(\lambda)$ sont des opérateurs bornés. Soit

$(x,y) \in \mathcal{D}(A^*) \times \mathcal{B}_1'$. *Nous fixons*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f \\ \mathrm{g} \end{pmatrix} &:= R^0(\lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda}B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*x + B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}y \\ \\ (A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*x + \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Puisque $Im((A^*B^* - \lambda^2)^{-1}) = \mathcal{D}(A^*B^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$, *où* Im *désigne l'image d'un opérateur, et* $x \in \mathcal{D}(A^*)$, *il est evident que* $(f, \mathrm{g}) \in \mathcal{D}(A^*) \times \mathcal{D}(B^*) = \mathcal{D}(\mathcal{T}^*)$. *Donc nous pouvons appliquer* $\mathcal{T}^* - \lambda$ *à* $R^0(\lambda)(x,y)$ *et obtenir*

$$(\mathcal{T}^* - \lambda)R^0(\lambda)(x,y) = (x,y)$$

Pour $(x,y) \in \mathcal{D}(A^*) \times \mathcal{B}_1'$ *et* $\lambda \in \rho(\mathcal{T}^*)\backslash\{0\}$ *il résulte que :*

$$R^0(\lambda) = (\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1}|_{\mathcal{D}(A^*)\times\mathcal{B}_1'}$$

puiceque A^* *est densément défini nous concluons que l'opérateur* $R^0(\lambda)$ *a une extension unique bornée sur l'espace* $\mathcal{B}_2' \times \mathcal{B}_1'$ *qui est donnée par* $(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1}$. *Nous noterons cette extension par* $R(\lambda)$ *:*

$$R(\lambda) := \begin{pmatrix} R_{11}(\lambda) & R_{12}(\lambda) \\ R_{21}(\lambda) & R_{22}(\lambda) \end{pmatrix} := \overline{R^0(\lambda)} = (\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1} \tag{3.16}$$

Particulièrement les opérateurs

$$R_{11}^0(\lambda) = -\lambda^{-1} + \lambda^{-1}B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*$$

$$R_{21}^0(\lambda) = (A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^*$$

sont bornés sur le domaine $\mathcal{D}(A^*)$ *et ont une extension bornée à l'espace* $\mathcal{B}_1'$.

(v) *Si on définit l'opérateur* $S^0(\lambda) \in \mathcal{B}_2' \times \mathcal{B}_2'$ *par*

$$S^0(\lambda) := \begin{pmatrix} S_{11}(\lambda) & S_{12}^0(\lambda) \\ S_{21}(\lambda) & S_{22}^0(\lambda) \end{pmatrix}$$

et

$$S^0(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & (B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^* \\ \\ A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1} & -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^* \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Alors $\mathcal{D}(S^0(\lambda)) = \mathcal{D}(B^*) \times \mathcal{B}_1'$
il résulte que $S^0(\lambda)$ *est borné sur son domaine et possède une extension uniques bornée sur l'espace* $\mathcal{B}_1' \times \mathcal{B}_2'$ *qui est donnée par* $(\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1}$*. Nous noterons cette extension par* $S(\lambda)$ *c'est à dire*

$$S(\lambda) := \overline{S^0(\lambda)} = (\mathcal{T}^* - \lambda)^{-1}$$

En particulier les opérateurs

$$S^0_{22}(\lambda) = -\lambda^{-1} + \lambda^{-1}A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*$$

$$S^0_{12}(\lambda) = (B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*$$

et donc également l'opérateur

$$A^*(B^*A^* - \lambda^2)^{-1}B^*$$

sont bornés sur le domaine $\mathcal{D}(B^*)$ *et ont ainsi des extensions bornées à l'espace* $\mathcal{B}_2'$ *qui complete la preuve de lemme (3.3.1).* ♦

Remarque 3.3.1. *Soient* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux espaces de Banach réflexives, alors les opérateurs* A^* *et* B^* *sont densément définis.*

Corollaire 3.3.1. *Supposons que les hypothèses a) et b) sont satisfaites si de plus* $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$*, et si* BA *est densément définit, alors* $(BA)^* = A^*B^*$*.*

Preuve : *Soint* $\lambda \in \rho(\mathcal{T})\backslash\{0\}$ *et supposons que* BA *est densément défini ; et à partir du lemme (2.2.4),* $\lambda^2 \in \rho(BA)$ *et donc aussi pour* $\lambda^2 \in \rho((BA)^*)$*.*
a partir du lemme (3.3.1) on sait que :

$$\lambda^2 \in \rho(A^*B^*).$$

ainsi :

$$\lambda^2 \in \rho((BA)^*) \cap \rho(A^*B^*)$$

qui implique immédiatement que :

$$(BA)^* = A^*B^*.$$

♦

l'inclusion inverse $\supseteq$

On a déjà montré dans la section précédente l.inclusion $\subseteq$ (voire théorèm(2.2.1) l'equation (2.7)). Montrons que :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(BA)\}\backslash\{0\} \subset \rho(\mathcal{T})\backslash\{0\}$$

Pour ce la introduisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

a) $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1$ un opérateur linéaire fermé densément défini.

b) $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ un opérateur linéaire fermé densément défini.

c) BA est densément défini dans $\mathcal{B}_2$.

d) L'opérateur $A(BA-\mu)^{-1}B$ est borné sur son domaine $\mathcal{D}(B)$ pour certain $\mu \in \rho(BA)$.

e) $(BA)^* = A^*B^*$.

f) A^* est densément défini dans l'espace dual $\mathcal{B}'_1$.

Notons que, sous les hypothèses a) ,b) et c) les conditions d) et e) sont satisfaites si $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ (voire le corollaire (3.3.2))

Lemme 3.3.2. *[10]*
Si les hypothèses a),..., f) sont satisfaites alors :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(BA)\}\backslash\{0\} \subset \rho(\mathcal{T})$$

Si en plus AB et B^* sont densément définis ,alors on a aussi :

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(AB)\}\backslash\{0\} \subset \rho(\mathcal{T})$$

Preuve : *Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $\lambda^2 \in \rho(BA)$. Nous considérons l'inverse algébrique de $(\mathcal{T}-\lambda)^{-1}$, autrement dit, nous définissons l'opérateur $R^0(\lambda)$ comme dans (2.17). Par l'hypothèse e) on a :*

$$Im(((BA-\lambda^2)^{-1})^*) = \mathcal{D}((BA)^*) = \mathcal{D}(A^*B^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$$

Donc, il s'ensuit que l'opérateur $R^0_{21}(\lambda) = (BA-\lambda^2)^{-1}B$ est bornée sur $\mathcal{D}(B)$. et puisque B est densément défini, cet opérateur a une unique extension bornée dans l'éspace $\mathcal{B}_1$ tout entier que le notée par :

$$R_{21}(\lambda) := \overline{R^0_{21}(\lambda)} = \overline{(BA-\lambda^2)^{-1}B}$$

En outre on choisit $\mu \in \rho(BA)$, *qui vérifie l'hypothèse d) et à partir de l'égalité :*

$$A(BA-\lambda^2)^{-1}B = A(BA-\mu)^{-1}B + (\lambda^2-\mu)A(BA-\mu)^{-1}R_{21}(\lambda) \tag{3.18}$$

On conclut que $A(BA-\lambda^2)^{-1}B$ *et donc* $R^0_{11}(\lambda)$ *sont des opérateurs bornés sur* $\mathcal{D}(B)$. *Comme dans la section précédente nous désignons son extension bornée à l'éspace tout entier* $\mathcal{B}_1$ *par* $R_{11}(\lambda)$ *c'est-à-dire*

$$R_{11}(\lambda) := \overline{R^0_{11}(\lambda)} = -\lambda^{-1} + \lambda^{-1}\overline{A(BA-\lambda^2)^{-1}B}$$

Il s'ensuit que $R^0(\lambda)$ *a une extension bornée à l'espace* $\mathcal{B}$ *tout entier que l'on note* $R(\lambda)$. *De la même manière et par un calcul simple que la section précédente on obtient la relation :*

$$(\mathcal{T}-\lambda)R(\lambda)|_{\mathcal{D}(B)\times\mathcal{B}_2} = (\mathcal{T}-\lambda)R^0(\lambda) = id_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{D}(B)\times\mathcal{B}_2} \tag{3.19}$$

Comme B *est densément défini dans* $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{T}$ *est fermé et* $R(\lambda)$ *est borné, alors il est facile de voir que*

$$(\mathcal{T}-\lambda)R(\lambda) = id_{\mathcal{B}}$$

c'est-à-dire, $T-\lambda$ *est surjective et ouvèrte.*

Il reste à montrer que $\mathcal{T}-\lambda$ *est injéctif.*

Par l'identité

$$ker(\mathcal{T}-\lambda)^{\perp} = Im(\mathcal{T}^*-\lambda)$$

où le complément orthogonal est estime en respectant la paire dual $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$, *l'injectivité de* $(\mathcal{T}-\lambda)$ *est équivalente à la surjectivité de* $(\mathcal{T}^*-\lambda)$.

On sait que $\mathcal{T}^*$ *est un opérateur fermé dans l'espace de Banach* $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \times \mathcal{B}'_2$ *avec* $\mathcal{D}(\mathcal{T}^*) = \mathcal{D}(A^*)\times\mathcal{D}(B^*)$ *et possède la représentation matricielle suivante :*

$$\begin{pmatrix} 0 & B^* \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\lambda^2 \in \rho(BA)$ *et à partir de e), c'est-à-dire,* $(BA)^* = A^*B^*$, $\lambda^2 \in \rho((BA)^*) = \rho(A^*B^*)$.

Il résulte que l'inverse algébrique de $\mathcal{T}^* - \lambda$ est bien défini est donné par :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}^0(\lambda) &= \begin{pmatrix} \tilde{R}^0_{11}(\lambda) & \tilde{R}^0_{12}(\lambda) \\ \tilde{R}^0_{21}(\lambda) & \tilde{R}^0_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \\
&:= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} B^*((BA)^* - \lambda^2)^{-1}A^* & B^*((BA)^* - \lambda^2)^{-1} \\ & \\ ((BA)^* - \lambda^2)^{-1}A^* & \lambda((BA)^* - \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{R}}^0(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* & B^*(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \\ & \\ (A^*B^* - \lambda^2)^{-1}A^* & \lambda(A^*B^* - \lambda^2)^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Dans l'étape suivante on montre que :

$$R(\lambda)^*|_{\mathcal{D}(A^*)\times B'_2} = R^0(\lambda) \tag{3.21}$$

avec $R(\lambda)$ et aussi $R(\lambda)^*$ opérateur borné et possédant la représentation matricielle suivante :

$$R(\lambda)^* = \begin{pmatrix} R_{11}(\lambda)^* & R_{21}(\lambda)^* \\ & \\ R_{12}(\lambda)^* & R_{22}(\lambda)^* \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

à partir des équations (2.17), (2.18), (3.20) et (3.22),et par un calcul simple en utilisant les regles, bien connues, pour les opérateurs adjoints on obtient

$$R_{22}(\lambda)^* = (\lambda(BA - \lambda^2)^{-1})^* = \lambda((BA)^* - \lambda^2)^{-1} = R_{22}(\lambda)$$

et, puisque $(BA - \lambda^2)^{-1}$ est borné, alors

$$\begin{aligned}
R_{21}(\lambda)^* &= R^0_{21}(\lambda)^* \\
&= ((BA - \lambda^2)^{-1}B)^* \\
&= B^*((BA)^* - \lambda^2)^{-1} \\
&= \tilde{R}_{12}(\lambda)
\end{aligned}$$

D'autre par, $x \in \mathcal{B}_2$ et $x' \in \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{B}'_1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle x, R_{12}(\lambda)^* x' \rangle &= \langle R_{12}(\lambda)x, x' \rangle \\
&= \langle A(BA - \lambda^2)^{-1}x, x' \rangle \\
&= \langle (BA - \lambda^2)^{-1}x, A^*x' \rangle \\
&= \langle x, ((BA)^* - \lambda^2)^{-1}A^*x' \rangle \\
&= \langle x, \tilde{R}^0_{21}(\lambda)x' \rangle
\end{aligned}$$

et, par conséquent, $R_{12}(\lambda)^*|_{\mathcal{D}(A^*)} = \tilde{R}^0_{21}(\lambda)$.

Et par le même argument, pour $x \in \mathcal{D}(B)$ *et* $x' \in \mathcal{D}(A^*)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\langle x, R_{11}(\lambda)^* x'\rangle &= \langle R_{11}(\lambda)x, x'\rangle \\
&= \langle (-\lambda^{-1} + \lambda^{-1}A(BA - \lambda^2)^{-1}B)x, x'\rangle \\
&= \langle x, (-\lambda^{-1} + \lambda^{-1}B^*((BA)^* - \lambda^2)^{-1}A^*)x'\rangle \\
&= \langle x, \tilde{R}^0_{11}(\lambda)x'\rangle
\end{aligned}$$

et puisque $Im(((BA)^* - \lambda)^{-1}A^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$, *alors* $R_{11}(\lambda)^* \mid_{\mathcal{D}(T_1^*)} = \tilde{R}^0_{11}(\lambda)$, *ceci achève la preuve de la relation (3.21). Et comme* $R(\lambda)^*$ *est bornée et* A^* *est densément défini dans* $\mathcal{B}'_1$ *par hypothèse f), on conclut de façon analogue à celle de* $\mathcal{T}-\lambda$, *que* $\mathcal{T}^*-\lambda$ *est surjective ce qui achève la preuve de la première inclusion du lemme (3.3.2).*

Pour la preuve de la deuxième inclusion du lemme (2.2.4) on peut montrer que les hypothèses $\bullet c) - \bullet f)$ *restent vraies si on interchange les rôles de* A *et* B *; Les opérateurs* AB *et* B^* *sont densément définis par hypothèse ; Puisque* $\rho(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ *par la première inclusion : il s'ensuit par le lemme (2.2.4) que :* $\rho(AB) \neq \emptyset$, $(AB)^* = B^*A^*$ *et l'opérateur* $B(AB - \lambda^2)^{-1}A$ *est borné sur son domaine* $\mathcal{D}(A)$. ♦

Remarque 3.3.2. *Dans la démonstration du lemme (3.3.2) nous avons vu que l'hypothèse e) entraine la bornitude de l'opérateur*

$$R^0_{21}(\lambda) = (BA - \lambda^2)^{-1}B \quad \textit{sur } \mathcal{D}(B) \;\; \forall \lambda^2 \in \rho(BA)$$

et que l'hypothèse d) est vérifiée $\forall \lambda \in \rho(BA)$

Corollaire 3.3.2. *Sous les condutions a), ..., f) on a :*

$$\rho(\mathcal{T})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(BA)\} \setminus \{0\}$$

Si de plus AB *et* B^* *sont densément définis, alors on a aussi*

$$\rho(\mathcal{T})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \rho(AB)\} \setminus \{0\}$$

et ainsi

$$\rho(BA) \setminus \{0\} = \rho(AB) \setminus \{0\}$$

D'autre par, pour tout $\lambda \in \rho(BA) \setminus \{0\} = \rho(AB) \setminus \{0\}$*, on a les relations suivantes :*

$$-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{A(BA-\lambda)^{-1}B} = (AB-\lambda)^{-1} \tag{3.23}$$

et

$$-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\overline{B(AB-\lambda)^{-1}A} = (BA-\lambda)^{-1} \tag{3.24}$$

possède.

Preuve : *Les relations (3.23) et (3.24) découlent directement de la représentation matricielle de* $(\mathcal{T}-\lambda)^{-1}$ *dans le lemme (2.2.4).* ♦

Notre prochain objectif est de donner une condition suffisante pour la condition d). Soit S un opérateur dans un espace de Banach $\mathcal{B}$.

Nous disons que la résolvante de l'opérateur S a un rayon de croissance minimal s'il existe un certain $\theta \in [0, 2\pi)$ et une $t_0 \geq 0$ tel que

$$\gamma_\theta := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = te^{i\theta}, t \geq t_0\} \subset \rho(S) \tag{3.25}$$

et il ya une constante M telle que

$$\|(S-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|} \tag{3.26}$$

est valable pour tous $\lambda \in \gamma_\theta$

L'opérateur S est dit de type positif si l'estimation (3.26) est valable pour tous $\lambda \in \mathbb{R}^-$.

L'opérateur $e^{i(\pi-\theta)}(S-\mu_0)$ est de type positif si γ_θ est un rayon de croissance minimal de la résolvante de S. Pour les opérateurs de type positif puissances fractionnaires sont définis.

Par conséquent les puissances fractionnaires peuvent également être définis pour les opérateurs dont résolvante ont des rayons de croissance minimale.

Lemme 3.3.3. *Sous hypothèses a), b) et c) nous Supposons que la résolvante de l'opérateur* BA *a un rayon* γ_θ *de croissance minimale.*

Soit $0 < \tau < 1$ *et supposons que le inclusions*

$$\mathcal{D}(B^*) \supset \mathcal{D}(((BA-\mu_0)^*)^\tau) = \mathcal{D}(((BA-\mu_0)^\tau)^*) \tag{3.27}$$

et

$$\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}((BA-\mu_0)^{1-\tau}) \tag{3.28}$$

possède, où $\mu_0 = t_0 e^{i\theta}$ est choisi parmi le rayon γ_θ. Alors la condition d) est satisfaite.

Preuve : *D'abord notez que $\mu_0 \in \rho(BA)$. Il résulte que les possibilités*

$$A(BA-\mu_0)^{-1}B = [A(BA-\mu_0)^{-(1-\tau)}][(BA-\mu_0)^{-\tau}B] \tag{3.29}$$

Les efficacités de l'inclusion (3.28)

$$A(BA-\mu_0)^{-(1-\tau)}$$

est un opérateur borné sur $\mathcal{B}_2$, nous concluons de (3.27) que

$$(BA-\mu_0)^{-\tau}B$$

est un opérateur borné sur $\mathcal{D}(B)$. Ainsi l'opérateur $A(BA-\mu_0)^{-1}B$ est borné sur $\mathcal{D}(B)$ et son extension bornée à l'espace entier $\mathcal{B}_1$ est donnée par :

$$\overline{A(BA-\mu_0)^{-1}B} = A(BA-\mu_0)^{-(1-\tau)}\overline{(BA-\mu_0)^{-\tau}B} \tag{3.30}$$

i.e, l'hypothèse d) est réalisé. ♦

3.4 Résultat principal

$\lambda \in \sigma(\mathcal{T})$ est une valeur propre de $\mathcal{T}$ s'il existe un vecteur $f \neq 0$ dans $\mathcal{D}(T)$ tel que $(\mathcal{T}-\lambda)f = 0$. f est appelé vecteur propre de $\mathcal{T}$ corréspondant à λ.

L'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{T}$ est appelé le spectre ponctuel de $\mathcal{T}$ et est désigné par $\sigma_p(\mathcal{T})$. Si $\lambda \in \sigma_p(\mathcal{T})$,

$$\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{T}) := \{x \in \mathcal{B} : \exists n \in ker(\mathcal{T}-\lambda)^n x = 0\}$$

est appelé le sous-espace principal de $\mathcal{T}$ correspondant à λ et dim $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{T})$ est appelé le multiplicité algébrique de λ.

On désigne l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{T}$ qui sont isolées dans $\sigma(\mathcal{T})$ et ont fini par multiplicité algébrique $\sigma_d(\mathcal{T})$ et d'appeler cet ensemble le spectre discret de $\mathcal{T}$. De plus nous avons.

$$\sigma_{nd}(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}) \backslash \sigma_d(\mathcal{T})$$

Enfin, un $\mathcal{L}(\mathcal{B})$-fonction à valeur de G est appelé mésomorphe à λ_0 si G a un pôle à λ_0 et les coefficients de la partie principale de son developpement de Laurent λ_0 sont les opérateurs de rang fini.

C'est-à-dire, dans un voisinage de perforation λ_0, nous avons un développement.

$$G(\lambda) = \sum_{v=-q}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^v G_v$$

qui converge dans la norme opérateur sur $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, de telle sorte que $G_{-1}, ..., G_{-q}$ est un opérateur de rang fini.

Il est bien connu qu'une valeur propre λ_0 de $\mathcal{T}$ appartient à l'ensemble $\sigma_d(\mathcal{T})$ si et seulement si $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ est finiment méromorphe à λ_0.

Théorème 3.4.1. *[20]*
Supposons que les hypothèses • a)-• f) sont vérifiées ; alors on a les relations :

(i) $\sigma(\mathcal{T})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma(BA)\}\backslash\{0\}$

(ii) $\sigma_{nd}(\mathcal{T})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma_{nd}(BA)\}\backslash\{0\}$.

Si de plus, AB et B^* sont deux opérateurs densément définis, alors on a aussi les égalités suivantes :

(iii) $\sigma(\mathcal{T})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma(AB)\}\backslash\{0\}$

(iv) $\sigma_{nd}(\mathcal{T})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma_{nd}(AB)\}\backslash\{0\}$

Preuve :
Les relations (i) et (iii) sont des conséquences directes de corollaire (3.3.2).

Soit $\mu \in \sigma_d(\mathcal{T})\backslash\{0\}$. Alors $(\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ est finiment méromorphe en μ.

De la représentation de $R(\lambda) = (\mathcal{T} - \lambda)^{-1}$ (voir (2.17) et (2.18)) on obtient :

$$(BA - \lambda^2)^{-1} = \lambda^{-1} P_2 (\mathcal{T} - \lambda)^{-1} J_2$$

Par conséquent $(BA - \lambda^2)^{-1}$ est également finiment méromorphe en μ^2, c'est-à-dire, $\mu^2 \in \sigma_d(BA)$. Inversement :
Soit $\mu^2 \in \sigma_d(BA)\backslash\{0\}$. Alors $(BA - \lambda^2)^{-1}$ (et donc $R_{22}(\lambda) = \lambda(BA - \lambda^2)^{-1}$) est finiment méromorphe en μ.

Pour $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{T})\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda) &= A(BA - \lambda^2)^{-1} \\ &= A(BA - \lambda_0^2)^{-1} + (\lambda^2 - \lambda_0^2) A (BA - \lambda_0^2)^{-1} (BA - \lambda^2)^{-1} \\ &= R_{12}(\lambda_0) + (\lambda^2 - \lambda_0^2) R_{12}(\lambda_0)(BA - \lambda^2)^{-1} \end{aligned}$$

Comme $(BA-\lambda^2)^{-1}$ *est finiment méromorphe en* μ*, alors aussi la fonction d'opérateur* $R_{12}(\lambda)$ *est finiment méromorphe en* μ *de plus, pour* $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{T})\backslash\{0\}$ *on a ;*

$$\begin{aligned} R^0_{21}(\lambda) &= (BA-\lambda^2)^{-1}B \\ &= (BA-\lambda_0^2)^{-1}B + (\lambda^2-\lambda_0^2)(BA-\lambda^2)^{-1}(BA-\lambda_0^2)^{-1}B \\ &= R^0_{21}(\lambda_0) + (\lambda^2-\lambda_0^2)(\lambda_0)(BA-\lambda^2)^{-1}R^0_{21} \end{aligned}$$

comme $R^0_{21}(\lambda_0)$ *est borné sur* $\mathcal{D}(B)$*, alors on a :*

$$R_{21}(\lambda) = R_{21}(\lambda_0) + (\lambda^2-\lambda_0^2)(BA-\lambda^2)^{-1}R_{21}(\lambda_0) \tag{3.31}$$

et on conclut que $R_{21}(\lambda)$ *est finiment meromorphique en* μ *.*

Et d'une manière analogue, on obtient que :

$$\begin{aligned} R^0_{11}(\lambda) &= -\lambda^{-1} + \lambda^{-1}A(BA-\lambda_0^2)^{-1}B \\ &\quad +\lambda^{-1}(\lambda^2-\lambda_0^2)A(BA-\lambda^2)^{-1}(BA-\lambda_0^2)^{-1}B \\ &= -\lambda^{-1} + \lambda^{-1}A(BA-\lambda_0^2)^{-1}B \\ &\quad +\lambda^{-1}(\lambda^2-\lambda_0^2)A(BA-\lambda_0^2)^{-1}(BA-\lambda_0^2)^{-1}B \\ &\quad +\lambda^{-1}(\lambda^2-\lambda_0^2)^2A(BA-\lambda_0^2)^{-1}(BA-\lambda^2)^{-1}(BA-\lambda_0^2)^{-1}B \end{aligned}$$

Comme $A(BA-\lambda_0^2)^{-1}B$ *et* $(BA-\lambda_0^2)^{-1}B$ *sont bornés sur leur domaine* $\mathcal{D}(B)$*, et* $A(BA-\lambda_0^2)^{-1}$ *est un opérateur borné sur* $\mathcal{B}_2$*, on obtient la réprésentation suivante :*

$$\begin{aligned} R_{11}(\lambda) &= \lambda^{-1}[\lambda_0 R_{11}(\lambda_0) + (\lambda^2-\lambda_0^2)R_{12}(\lambda_0)R_{21}(\lambda_0) \\ &\quad +(\lambda^2-\lambda_0^2)^2 R_{12}(\lambda_0)(BA-\lambda^2)^{-1}R_{21}(\lambda_0)] \end{aligned}$$

Ce qui montre que $R_{11}(\lambda)$ *est également finiment méromorphe à* μ*. D'après le lemme (2.2.4), on conclut que* $(\mathcal{T}-\lambda)^{-1}$ *est alors finiment méromorphe en* μ*, c'est-à-dire* $\mu \in \sigma_d(\mathcal{T})$ *ainsi, la formule ii) est prouvée. La formule iv) du théoreme peut être prouvée de la même manière.* ♦

3.5 Etude spectrale des opérateurs anti-diagonaux auto-adjoints non bornés de type $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^* & 0 \end{pmatrix}$ dans un Hilbert

Dans cette section on donne une démonstration de version d'un résultat récent de de M. Möller [25]. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espace de Hilbert. Supposons que A un opérateur fermable densément défini avec $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}_2$ vers $\mathcal{H}_1$, et B un opérateur fermable densément défini avec $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}_1$ vers $\mathcal{H}_2$.

Théorème 3.5.1. *[20] Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert tels que :*
$\mathcal{T} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ un opérateur linéaire fermé densément défini. Alors $\mathcal{S}^*\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}\mathcal{S}^*$ sont deux opérateurs auto-adjoints.

Preuve : *L'opérateur $\mathcal{T}$ pour $A = \mathcal{S}$ et $B = \mathcal{S}^*$ défini par la formule (1) est auto-adjoint et, par conséquent, $\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}$. Le Lemme (2.2.4) montre que $\mathcal{S}^*\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}\mathcal{S}^*$ sont des opérateurs symétriques fermés et donc auto-adjoints.* ♦

Théorème 3.5.2. *[20]*
Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert tels que : $A : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ et $B : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ deux opérateurs linéaires fermés densément définis. Supposons que $A \subset B^*$ et que BA est auto-adjoint. Alors les relations suivantes sont satisfaites :

(i) $\overline{B}\,\overline{A} = BA$;

(ii) *L'opérateur* $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ *est essentiellement auto-adjoint, c'est-à-dire* $\overline{\mathcal{T}}$ *est auto-adjoint ;*

(iii) $\sigma(\overline{\mathcal{T}})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma(BA)\}\backslash\{0\}$;

(iv) $\sigma_{ess}(\overline{\mathcal{T}})\backslash\{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^2 \in \sigma_{ess}(BA)\}\backslash\{0\}$;
Si on a de plus, AB densément défini, alors les propriétés suivantes sont aussi satisfaites :

(v) *AB est essentiellement auto-adjoint et* $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$;

(vi) $\sigma(BA)\backslash\{0\} = \sigma(\overline{A}\,\overline{B})\backslash\{0\} = \sigma(\overline{AB})\backslash\{0\}$;

(vii) $\sigma_{ess}(BA)\backslash\{0\} = \sigma_{ess}(\overline{A}\,\overline{B})\backslash\{0\} = \sigma_{ess}(\overline{AB})\backslash\{0\}$.

Preuve : *A partir de l'hypothèse $A \subset B^*$, il résulte que les opérateurs A, B peuvent être fermables et $\overline{A} \subset B^*$, $\overline{B} \subset A^*$. Donc $\mathcal{T}$ est fermable et $\overline{\mathcal{T}}$ est* *symétrique. Alors,*

$$\overline{\mathcal{T}}^2 = \begin{pmatrix} \overline{A}\,\overline{B} & 0 \\ 0 & \overline{B}\,\overline{A} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

est aussi symétrique ce qui donne que $\overline{A}\ \overline{B}$ *et* $\overline{B}\ \overline{A}$ *sont deux opérateurs symétriques. Nous concluons que :*

$$BA \subset \overline{B}\ \overline{A} \subset (\overline{B}\ \overline{A})^* \subset (BA)^*$$

Puisque BA *est auto-adjoint, on peut remplacer les inclusions ci-dessus partout par l'égalité ce qui prouve l'assertion i).*

Clairement, les opérateurs $\overline{A}$, $\overline{B}$ *vérifient les hypothèses a), b), c) et f). En outre*

$$(BA)^* = BA \subset A^*B^* \subset (BA)^* \tag{3.33}$$

qui, par l'assertion i), donne la relation

$$(\overline{B}\ \overline{A})^* = \overline{A}^*\overline{B}^*$$

et donc la propriété e) pour $\overline{A}$, $\overline{B}$, *Finalement nous montrons que l'opérateur*

$$\overline{A}(\overline{B}\ \overline{A} - \mu)^{-1}\overline{B} = \overline{A}(BA - \mu)^{-1}\overline{B} \tag{3.34}$$

est borné sur le domaine $\mathcal{D}(\overline{B})$ *pour* $\mu \in \rho(BA)$ *ce qui signifie que la propriété d) est vérifiée relativement à* $\overline{A}$, $\overline{B}$. *Puisque* BA *est auto-adjoint et est la restriction de l'opérateur* A^*A, *il résulte que* $BA \geq 0$ *et donc* $(BA)^{\frac{1}{2}}$ *est bien défini.*

On considére la forme sesquilinéaire par :

$$h[u, v] = \ (\overline{A}u, \overline{A}v) \quad (u, v \in \mathcal{D}(\overline{A}))$$

Il est évident que h *est densément définie non négative fermée symétrique dans l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}_2$. *Nous concluons que, pour* $u \in \mathcal{D}(BA)$ *et* $v \in \mathcal{D}(\overline{A})$ *la relation :*

$$h[u, v] = (\overline{A}^*\overline{A}u, v) = (BAu, v)$$

est vérifiée ce qui montre que BA *est l'unique opérateur auto-adjoint associé à la forme* h. *Par [25] la relation*

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathcal{D}((BA)^{\frac{1}{2}})$$

s'ensuit ce qui implique que

$$\mathcal{D}(B^*) \supset \mathcal{D}((BA)^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}(((BA)^*)^{\frac{1}{2}})$$

Selon la démonstration du lemme (3.3.3) avec $\mu_0 = 0$ *et* $\tau = \frac{1}{2}$ *on obtient la bornitude de l'opérateur (3.34) sur le domaine* $\mathcal{D}(\overline{B})$. *(Notez que nous avons besoin du rayon de croissance minimale de la résolvante de* BA *du lemme (3.3.3) seulement pour la définition des puissances fractionnaires de* $BA - \mu_0$ *et de son opérateur adjoint).*

Nous avons montré que les opérateurs $\overline{A}$, $\overline{B}$ *réalisent les hypothèses a), ..., f). Du lemme (3.3.1) nous concluons en tenant compte de la propriété auto-adjoint de* BA *et la relation i) que l'opérateur symétrique* $\overline{T}$ *a indices de défaut (0,0) et est donc auto-adjoint ce qui prouve l'assertion ii). Les assertions iii), iv) et les premières égalités dans vi), vii) s'ensuivent immédiatement du théorème (3.4.1). La relation* $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$ *reste à prouver : Puisque* $\mathcal{T}$ *est symétrique,* $\mathcal{T}^2$ *est symétrique et donc de même*

$$\overline{\mathcal{T}}^2 = \begin{pmatrix} \overline{AB} & 0 \\ 0 & \overline{BA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{AB} & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$$

Donc $\overline{AB}$ *est symétrique. Soit* $\lambda \in \rho(\overline{T})\backslash\{0\}$ *; d'aprés le lemme (2.2.4)* $\lambda^2 \in \rho(BA)$. *Il est facile de montrer que pour* $\mu = \lambda^2$ *l'opérateur (3.34) qui applique* $\mathcal{D}(\overline{A}\ \overline{B})$ *dans lui même et la relation*

$$(AB - \lambda^2)^{-1} R_{11}^0(\lambda)|_{\mathcal{D}(AB)} = 1|_{\mathcal{D}(AB)}$$

est vérifiée où $R_{11}^0(\lambda)$ *désigne l'opérateur défini dans (2.17) avec* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$, *au lieu de* A *et* B, *observons que*

$$R_{11}^0(\lambda)|_{\mathcal{D}(B)} = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} A(BA - \lambda^2)^{-1} B$$

comme dans (2.18) désigne l'extension bornée de $R_{11}^0(\lambda)$ *par* $R_{11}(\lambda)$. *Puisque* $\mathcal{D}(AB)$ *est dense dans* $\mathcal{H}_1$, *on obtient la relation*

$$(\overline{AB} - \lambda^2) R_{11}(\lambda) = 1$$

qui montre que $\overline{AB} - \lambda^2$ *est surjectif. Il en résulte que* $\overline{AB}$ *possède des indices de défaut (0,0) et est donc auto-adjoint ce qui implique que* $\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$ ♦

3.6 Exemples

Exemple 3.6.1. *Voir ([10])*
Soit $L_2(0,1)$ un espace de Hilbert, on considère les opérateurs non borné A et B definis par :

$$A = \frac{d}{dx},\ \mathcal{D}(A) \ = \ \{f \in C^1(0,1) \backslash f(0) = 0\},$$

$$B \ = -\frac{d}{dx},\ \mathcal{D}(B) \ = \ \{f \in C^1(0,1) \backslash f(1) = f'(\frac{2}{5}) = 0\}$$

On note par $H_k(0,1)$ est l'espace de Sobolev d'ordre k tel que :

$$H_k(0,1) \ := \{f \in L_2(0,1) \backslash \ f^{(j)} \in L_2(0,1),\ j = 0, 1,\ \ldots,\ k\}$$

Alors A et B sont fermables.

En effet :

Supposons que $(f;g) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$; il existe une suite $(f_n)_n \in C^1_{comp}$ telle que $f_n \to f$ dans $L_2(0,1)$ et $f'_n \to g$ dans $L_2(0,1)$. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer qu'il existe $E \subset [0,1]$ tel que $[0,1] \backslash E$ soit négligeable et tel que $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout $t \in E$. En particulier, E est non vide, et il est même dense dans $[0,1]$. Fixons $a \in E$, et soit $t \in E$; pour tout n on a

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f'_n(s)ds,$$

et la convergence dans $L_2(0,1)$ implique la convergence des intégrales sur les segments bornés, donc compte tenu de tout

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s)ds$$

Il en résulte que f est continue, et qu'il existe une fonction $g \in L_2(0,1)$ telle que

$$\forall t < u,\ f(u) = f(t) + \int_a^u g(s)ds$$

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{G}_A = \left\{(f,\ g) \in L_2(0,1) \times L_2(0,1) : \forall t < u,\ f(u) = f(t) + \int_a^u g(s)ds\right\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des couples $(f,\ g)$ *tels que la classe* f *admette un représentant pour lequel. On vient de montrer que l'adhérence de* $\mathcal{G}(T)$ *est contenue dans* $\mathcal{G}_A$*, pour savoir que* A *est fermable, il suffit de voir que* $\mathcal{G}_A$ *est un graphe : c'est clairement un espace vectoriel, et si* $(0,\ g) \in \mathcal{G}_A$*, on aura* $\int_t^u g = 0$ *pour tous* $t < u$*, ce qui signifie que* g *est orthogonale à toutes les fonctions en escalier, qui sont denses dans* $L_2(0,1)$*, donc* $g = 0$*, ce qu'il fallait démontrer. De la même façon on montre que* B *est fermable. Alors* B *admet une extention fermé* $\overline{B}$

$$\overline{B} = -\frac{d}{dx},\ \mathcal{D}(\overline{B}) = \{f \in H_1(0,1)\backslash f(1) = 0\}$$

B *est essentiellement auto-adjoint si et seulement si* $\overline{B}$ *est auto-adjoint. Montrons que* $\overline{B}$ *est auto-adjoint (i.e.* $\overline{B}$ *fermé symétrique).* $\overline{B}$ *est fermé, on montre que* $\overline{B}$ *est symétrique.* $\overline{B}$ *est symétrique :* $\forall f,\ g \in \mathcal{D}(\overline{B})$

$$\begin{aligned} \langle \overline{B}f,\ g\rangle &= \int_0^1 (\overline{B}f)(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^1 \frac{-df(x)}{dx}\overline{g(x)}dx, \end{aligned}$$

intégrons par partie :

$$\begin{aligned} U = \overline{g(x)} \quad &\Rightarrow \quad U' = \frac{d\overline{g(x)}}{dx} \\ V' = \frac{-df(x)}{dx} \quad &\Rightarrow \quad V = -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{B}f,\ g\rangle &= [-f(x)\overline{g(x)}]_0^1 + \int_0^1 f(x)\frac{d\overline{g(x)}}{dx}dx \\ &= \int_0^1 f(x)\frac{d\overline{g(x)}}{dx}dx \\ &= \int_0^1 f(x)\frac{\overline{dg(x)}dx}{d}x \\ &= \langle f,\ \overline{B}g\rangle \end{aligned}$$

Puisque $f,\ g$ *s'annulent en* 0 *et* 1*.* $(\overline{B},\ \mathcal{D}(\overline{B}))$ *est symétrique fermé donc* $\overline{B}$ *est auto-adjoint c'est-à-dire* B *est essentiellement auto-adjoint,* $\mathcal{D}(\overline{B})$ *étant dense* *dans* $L^2(0,1)$ *danc* $(\overline{B})^*$ *est bien defini et est une extension de* B. *Le calcul précédent montre que*

$$\overline{B}^* = -\frac{d}{dx} g(x),$$

où g' *est la dérivée* g *au sense des distrubution, alors on a*

$$\mathcal{T}_2^* = (\overline{B})^* = \frac{d}{dx},\ \mathcal{D}(B^*) = \{f \in H_1(0,1) \backslash f(0) = 0\}.$$

Ainsi, $A \subset \overline{A} = B^*$ *il est clair que*

$$\begin{aligned} BA = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(BA) &= \{f \in C^2(0,1) \backslash f(0) = f'(1) = f'(\frac{2}{5}) = 0\}, \\ AB = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(AB) &= \{f \in C^2(0,1) \backslash f(1) = f'(0) = f'(\frac{2}{5}) = 0\} \end{aligned}$$

BA *et* AB *sont fermables. Alors admets des extensions fermés.*

$$\begin{aligned} \overline{BA} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(\overline{BA}) &= \{f \in H_2(0,1) \backslash f(0) = f'(1) = 0\}, \\ \overline{AB} = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(\overline{AB}) &= \{f \in H_2(0,1) \backslash f(1) = f'(0) = f'(\frac{2}{5}) = 0\} \end{aligned}$$

Montrons que BA *et* AB *est essentiellement auto-adjoint.* $\overline{BA}$ *est fermé, on montre que* $\overline{BA}$ *est symétrique.* $\overline{BA}$ *est symétrique :* $\forall f,\ g \in \mathcal{D}(\overline{BA})$

$$\begin{aligned} \langle \overline{BA} f,\ g \rangle &= \int_0^1 (\overline{BA} f)(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{-d^2 f(x)}{dx^2} \overline{g(x)} dx, \end{aligned}$$

intégrons par partie :

$$U = \overline{g(x)} \ \Rightarrow \ U' = \frac{d\overline{g(x)}}{dx}$$

$$V' = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \ \Rightarrow \ V = -\frac{d}{dx} f(x)$$

$$\begin{aligned} \langle \overline{BA} f,\ g \rangle &= [-\frac{d}{dx} f(x) \overline{g(x)}]_0^1 + \int_0^1 \frac{d}{dx} f(x) \frac{d\overline{g(x)}}{dx} dx \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dx} f(x) \frac{d\overline{g(x)}}{dx} dx \end{aligned}$$

intégrons par partie :

$$U = \frac{d}{dx}\overline{g(x)} \quad \Rightarrow \quad U' = \frac{d^2\overline{g(x)}}{dx^2}$$

$$V' = \frac{df(x)}{dx} \quad \Rightarrow \quad V = f(x)$$

$$\begin{aligned}
\langle \overline{BA}f,\ g\rangle &= [f(x)\frac{d}{dx}\overline{g(x)}]_0^1 + \int_0^1 f(x)\frac{d^2\overline{g(x)}}{dx^2}dx \\
&= \int_0^1 f(x)\frac{d^2\overline{g(x)}}{dx^2}dx \\
&= \int_0^1 f(x)\overline{\frac{d^2 g(x)}{dx^2}}dx \\
&= \langle f,\ \overline{BA}g\rangle
\end{aligned}$$

Puisque $f,\ g$ *s'annulent en* 0 *et* 1. $(\overline{BA},\ \mathcal{D}(\overline{BA}))$ *est symétrique fermé donc* $\overline{BA}$ *est auto-adjoint c'est-à-dire* BA *est essentiellement auto-adjoint.*

De même façon on montre que AB *est essentiellement auto-adjoint.*

Calculons maintenant $\sigma(\overline{AB})$

Soit

$$\begin{aligned}
\sigma(\overline{AB}) &\Rightarrow \overline{AB}f = \lambda f \\
&\Rightarrow -\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \lambda f(x) \\
&\Rightarrow -f'(x) = \lambda f(x) \\
&\Rightarrow -f'(x) - \lambda f(x) = 0 \\
&\Rightarrow r^2 + \lambda = 0
\end{aligned}$$

Alors

$$r = \mp i\sqrt{\lambda}$$

La solution de l'équation différentielle est donné par :

$$f(x) \;=\; C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x,\ C_1,\quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(0) \;=\; C_1 = 0 \Rightarrow f(x) \;=\; C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

$$f'(x) \;=\; \sqrt{\lambda}C_2\cos\sqrt{\lambda}x,\ C_1,\quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \sqrt{\lambda} C_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0\ ,\ C_2 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow\ C_2 = 0 \vee \cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Si $C_2 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ $(carC_1 = 0)$ *solution triviale. Si*

$$C_2 \neq 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda} = 0$$

alors

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad &\Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \\ &\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\pi^2}{4}(1+2k)^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\sigma(\overline{AB}) = \left\{ \frac{(2k+1)^2}{4}\pi^2 \backslash k \in \mathbb{N} \right\}$$

Calculons maintenant $\sigma(\overline{BA})$ *Soit*

$$\begin{aligned} \sigma(\overline{BA}) \ &\Rightarrow\ \overline{BA}f = \lambda f \\ &\Rightarrow\ -\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lambda f(x) \\ &\Rightarrow\ -f'(x) = \lambda f(x) \\ &\Rightarrow\ -f'(x) - \lambda f(x) = 0 \\ &\Rightarrow\ r^2 + \lambda = 0 \end{aligned}$$

Alors

$$r = \mp i\sqrt{\lambda}$$

La solution de l'équation différentielle est donné par :

$$f(x) \ = \ C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(1) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x = 0 \\ f'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0 \\ f'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\frac{2}{5}\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\frac{2}{5}\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(1) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \\ f'(\frac{2}{5}) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\frac{2}{5}\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases} \quad &\Rightarrow \quad \sin\frac{2}{5}\sqrt{\lambda} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{5}\sqrt{\lambda} = \pi + 2k\pi \\ &\Rightarrow \quad \lambda = 25\pi^2\left(\frac{1+2\pi k}{4}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\sigma(\overline{BA}) = \left\{25\frac{(2k-1)^2}{4}\pi^2 \backslash k \in \mathbb{N}\right\}$$

Notons par :

$$\overline{AB} = \frac{-d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(\overline{AB}) = \{f \in H_2(0,1) \backslash f(1) = f'(0) = 0\}$$

et

$$\sigma(\overline{BA}) = \sigma(\overline{A}\ \overline{B})$$

Exemple 3.6.2. Opérateurs de Schrödinger à une dimension iso-spectrales avec potentiels complexes

Après ([12]), nous donnons un exemple des opérateurs de Schrödinger iso-spectrale uni-dimensionnelle avec des potentiels complexes. Définir P un opérateur auto-adjoint dans $L_2(0,1)$ par

$$P = i\frac{d}{dx}, \quad \mathcal{D}(P) = \{f \in H_1(0,1) \backslash f(0) = f(1)\}.$$

Considérons la fonction complexe $b \in C^2[0,1]$ telle que

$$b(0) = b(1), \quad b'(0) = b'(1)$$

et

$$b(x) \neq 0, \quad x \in [0,1].$$

Définissons des opérateurs fermés A et B dans $L_2(0,1)$ par

$$A = b^{-1}Pb, \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(P),$$

$$B = bPb^{-1}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(P).$$

Il est cleair que AB et BA sont des opérateurs fermés

$$\begin{aligned} AB &= -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{b''}{b}, \quad \mathcal{D}(AB) = \{f \in H_2(0,1) \backslash f(0) = f(1), \quad f'(0) = f'(1)\} \\ BA &= -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(b^{-1})''}{b^{-1}}, \quad \mathcal{D}(BA) = \mathcal{D}(AB). \end{aligned}$$

Comme les opérateurs (AB) *et* (BA) *sont des perturbations de l'opérateur auto-adjoint* $-\frac{d^2}{dx^2}$ *avec des conditions aux limites périodiques par potentiels bornés fixe la resolvante de ces opérateurs ne sont pas vides. De toute évidence*

$$ABb = 0 \quad et \quad BAb^{-1} = 0,$$

et $0 \in \sigma_p(AB) \cap \sigma_p(BA)$*. En outre, comme les résolvantes des opérateurs* (AB) *et* (BA) *sont compactes, nous avons*

$$\sigma_p(AB) = \sigma(AB) = \sigma(BA) = \sigma_p(BA)$$

Notez que cette approche peut également être appliquée à l'étude sur les opérateurs de Schrödinger la ligne.

Bibliographie

[1] F. V. Atkinson, H. Langer, R.Mennicken, et A. A. Shkalikov. "The essential spectrum of some matrix operators". Math. Nachr., 167 :5-20, 1994.

[2] V. Adamyan, H. Langer, R. Mennicken, et J. Saurer. "Spectral components of selfadjoint block operator matrices with unbounded entries". Math. Nachr., 178 :43-80, 1996.

[3] E. B. Davies. "Spectral Theory and Differential Operators". Cambridge University Press, 1995

[4] J. Dereziński. "Bounded operators". Department of Mathematical Methods in Physics Warsaw University Hoza 74. 00-682. Warszawa, Poland Lecture notes. version of Jan. January 31, 2007

[5] H. Brezis. "Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications". Dunod, Paris. 1999.

[6] J.Dixmier. "L'adjoint du produit de deux opérateurs fermés". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 4^{me} Série. P101-106. 1974.

[7] M. Reed, B. Simon. "Methods of Modern Mathematical Physics, III : Scattering Theory". Academic Press, New York - San Francisco - London, 1979

[8] T. Kato. "Perturbation Theory for linear Operators". Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, corrected printing of the second edition, 1980

[9] V. Hardt. A. Konstantinov et R. Mennicken. "On the spectrum of the product of closed operators". Math. Nachr.215 (2000), 91-101

[10] V. Hardt, R. Mennicken."On the spectrum of unbounded off-diagonal 2×2 operator matrices in Banach spaces. Operator Theory". Advances and applications. vol 124. 2001 Birkhauser verlag Basel Switzerland.

[11] M. G. Krein, M. A. Krasnoselski. Théorème fondamentaux sur l'extension d'opérateurs hermitiens. Usp. Math. Nauk. P60-106. 2\3 . 19. 1947.

[12] B. Messirdi, M. H. Mortad, A. Azzouz, G. Djellouli. "A topological characterization of the praduct of two closed operators". Colloquium Mathematicum.112. P296-278. 2008.

[13] B. Messirdi, M. H. Mortad. "On different products of closed operators". Banach Journal of Mathematical Analysis. Vol. 2. N°1. P40-47. 2008.

[14] Reed, M, et Simoun, B. "Methods of Modern Mathematical Physics, IV : Analysis of Operators", Academic Press, New York - San Francisco- London, 1978

[15] C. Tretter." Spectral theory of block operator matrices and application". Imperial college Press. 2008

[16] M. Winklmeier. "A variational principle for Block operator matrices and its applications to the angular part of the Dirac operator in curved spacetime". Mathematisches institut, universitat Bern, Sidlerstrasse 5, CH-3012 Bern.

[17] M. Winklmeier. "The Angular Part of the Dirac Equation in the Kerr-Newman Metric : Estimates for the Eigenvalues Vorgelegt im Fachbereich 3" (Mathematik, Informatik) der Universität Bremenim August 2005.

[18] M. Winklmeier. "Off-Diagonalisation of a certain class of block operator matrices". Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24-28, 2006 ; ThA13. 1 pp 1926-1934

[19] S. Messirdi. M. Djaa, B. Messirdi. "Stability of almost closed operators in Hilbert space". Accepted for publication in Sara-jevo Journal of Mathematics (Radovi Mathematicki). August. 2008.

[20] Dijksma, A. Kaashoek, C.M.Ran. "Ecent advances in operator theory". Israel Gohberg Anniversary volume.

[21] J. Weidmann, linear operators in Hilbert space, springer, vol 1. 1980.

[22] Deift,P. "Applications of a commutation formula". Duke Math. J. 45 (1978), 267-310.

[23] M. H. Mortad." An application of the putnam-Fuglede theorem to normal products of self-adjoint operators". Proc. Amer. Math. Soc. P 3135-3141. 131/10. 2003.

[24] R.E. Edwads. "functional analysis, theory and application". dover publication. INC. New York. 1995.

[25] M. Möller. "On the Essential Spectrum of a class of Operator in Hilbert space", Math. Nachr. 194(1998), 185-196.

[26] Gohberg, I. C, Goldberg, S, et Kaashoek, M. A. "Classes of Linear Operator", Vol. I, Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1990.

[27] A. Boudaoud. Mémoire de Magister. "Analyse spectrale des opérateurs matriciels sur un espace de Hilbert", université Dr Tahar Moulay Saïda. 2012.