MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE Dr. MOULAY TAHAR DE SAÏDA
FACULTE DES SCIENCES & TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES & INFORMATIQUE

MEMOIRE DE MASTER

Système d'études : **LMD-Master 2 Recherche**

Spécialité : **Analyse Fonctionnelle & Applications**

Intitulé

Les opérateurs de Fredholm

Présenté par

M^{eur}. Khelfaoui Abderrahmane

Dirigé par

Dr. A. Azzouz

Soutenu publiquement le : /06/2013

Devent le jury composé de :

Président		**Maître de conférences**	**(Univ.Saïda)**
Rapporteur	**A.Azzouz**	**Maître de conférences**	**(Univ.Saïda)**
Examinateurs		**Maître assistant**	**(Univ.Saïda)**
		Maître assistant	**(Univ.Saïda)**

Promotion 2012/2013

Table des matières

Table des notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

$\mathbf{B(X,Y)}$ Espace des opérateurs linéaires et bornés de X vers Y

$\mathbf{B(X)}$ Algèbre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace X

$\mathbf{B_X}$ La boule unité fermée de l'espace métrique X

$\mathbb{C}$ Les nombres complexes

$\mathbf{Co}\ker$ Conoyau

$\mathbf{co}\dim$ Codimension

$\dim$ Dimension

$\mathbf{d(.,.)}$ Application de distance

$\mathbf{D(\ f\ )}$ Domaine de définition de l'application f

[$\mathbb{F}$] Corps étant soit $\mathbb{C}$,soit $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ Ensemble des opérateurs de Fredholm de X vers Y

$\mathcal{F}(\mathbf{X})$ Ensemble des opérateurs de Fredholm de X dans X

$\mathbf{hom(X\,;Y)}$ Ensemble des applications linéaires de l'espace X dans l'espace Y

$\mathbf{I_S}$ Application identité de l'ensemble E

$\mathbf{R}$ Image d'une application

$\mathbf{ind(.)}$ Indice

$\mathbb{K}$ Corps quelconque

$\ker$ Noyau

$\mathbf{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ Ensemble des opérateurs linéaires compacts de X dans Y

$\mathbf{K(X)}$ Idéal des opérateurs linéaires compacts de l'espace X

$\mathbb{N}$ Les nombres naturels, 0 compris

$\mathbb{N}_{\mathbf{n}}$ $\{1, 2, 3, ..., n\}$

$\mathbb{R}$ Les nombres réels

$\mathbf{S_X}$ La sphère unité de l'espace métrique X

$\mathcal{T}_{\mathbf{E}}$ Topologie sur l'ensemble E

$\mathbf{T}_{\|.\|}$ Topologie engendrée par la norme $\| \, . \, \|$

$(\mathbf{X}, \| \, . \, \|_{\mathbf{X}})$ Espace normé

$\{\mathbf{x_n}\}$ Suite

$\mathbb{Z}$ Les nombres entiers

$| \, . \, |$ Module complexe/valeur absolue

$\| \, . \, \|_{\mathbf{X}})$ Application norme sur l'ensemble X

$\oplus$ La somme directe

$\sum$ Symbole de sommation

$\times$ Le produit cartésien

$\cap$ L'intersection

$\cup$ L'union

$\neq$ La non égalité

$\hookrightarrow$ Flèche injective

$\twoheadrightarrow$ Flèche surjective

$\forall$ Symbole universel "pour tout"

$\exists$ Symbole universel "il existe"

$\subset$ L'inclusion

Introduction

Lorsqu'on parle du moment exact de la naissance d'un problème mathématique, On est souvent confonté à une science approximative, car les questions et problèmes évoluent selon le rythme de la connaissace des mathématiciens et la formulation d'un probléme peut prendre une longue période avant d'attiendre sa forme finale.
Pour l'instant, il est judicieux de voir la chronologie du développement de la théorie de Fredholm initiée par le célèbre **Erick Ivan Frhedolm** (1866-1927). Il est surtout connu pour ses travaux sur les équations intégrales et la théorie spéctrale, citons les équations intégrales de **Fredholm** de premier et de seconde type posées respectivement sous la forme :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})\phi(\mathbf{t})dt \text{ et } \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{t})\phi(\mathbf{t})\mathbf{dt}.$$

Où ϕ est la fonction inconnue f et ψ sont des fonctions connues, ψ est souvent appelée le noyau de l'opérateur intégrale de la paramètre λ est un facteur inconnu, qui joue la même rôle que la valeur propre en algerbre linéaire.
Les équations intégrales sont importantes dans plusieurs domaines physiques, les équations de Maxwell sont probablement leurs plus célèbres représentantions.
Elles apparaissent dans des problèmes de transferts d'énergie radiative et des problèmes d'oscillations d'une corde, d'une membrane ou d'un axe.
Une grosse partie des recherches de **Fredholm** s'est faite en 1899, lorsqu'il est allé à Paris pour étudier le problème de **Dirichlet** en collaboration de **Poincar**, **Emile Picard** et **Hadamard** .
Un premier rapport est apparu en 1900, intitulé "sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet".
Les apports de **Fredholm** fûrent rapidement connus des mathématiciens. aprés que Holmgren exposa en 1902 à Göttingen la théorie de **Fredholm**.
Hilbert comprit rapidement l'importance des travaux de **Fredholm**. Pendant le premier quart du vingtième siècle, la théorie des équations intégrables resta un sujet de recharche essentiel. En 1903, **Fredholm** publie la vertion complet de sa théorie dans Acta Mathématica . Hilbert généralise la théorie de **Fredholm** pour y inclure la théorie des valeurs propres, ce qui va le counduire à le notion despace de Hilbert.

En 1906, **Fredholm** obtient la chaire de Mécanique et Physique Mathématique de Stockholm décède le 17 août 1927 à Danderyd.
L'étude importante dans cette théorie est la propriété de stabilité des opérateurs de **Fredholm** c'est le but du premer et du troisième chapitre de notre travail.
Ce resultat a été pouvé pour la première fois par F.V. **Atkinson** en 1951 dans [2] pour le cas borné, tout en concluant que l'ensemble des opérateurs bornés et l'indice d'un opérateur de **Fredholm** est constant sur chaque composante de l'ensemble résolvant essentiel (de **Fredholm**).
La même année, Atkison établit un autre type de stabilité pour cette classe d'opérateurs par rapport aux perturbations de type compactes et en 1952 le critère de stbilité s'élargie au cas borné par M.G. Krein et M.A. Krasnoselky dans [11] et par B.Sg. Nagy dans [15]. Plusiures formes ont été données par la suite la création des métrique (distances) sur l'espace C(H) des opérateurs fermés sur un espace de Hilbert H. Une première distance d sur C(H) a été introduite par Newburgh en 1951 dans [16]. Ceci a été réalisé en définissant d'abord, la distance entre deux sous-espaces fermés de H et ensuite la distance entre deux opérateurs fermés comme étant la distance entre leurs graphes.
M.G.**Krein** et *M.A.***Krasnoselky** ont obtenu une deuxième métrique g sur C(H) équivalente à d

D'autre auteurs ont étudié la structure topologique de $C(H)$ et donnèrent des résultats intéressants [cf.[12],[13],[14],....) En outre, en 1963 ,H .O Cordes et J.Ph. Labrousse ont consruit dans [4] une troisième métrique p, plus partique équivalente aux deux premières distances, p est définie en fonction de l'opérateur borné :

$$\mathbf{R_A = (1 + A^*A)^{-1}}$$

$\mathbf{R_{A^*}}$ et$\mathbf{AR_A}$ et par suite énoncèrent le premier théormé de stabilité des opérateurs de **Fredholm** non borné et conclurent que l'ensemble des opérateurs de fredholm est ouvert dans C(H).

L'objectif de notre travail est de présenter de façon simple la théorie du **Fredholm** et la théorie des perturbations de **Fredholm**.

Contrairement au cas borné, la stabilité dans le cas non borné devient defficile à démontrer, raison pour laquelle on va introduire des outils mathématique pour faciliter l'accés à ces résultats .
le mémoire est constitué de trois chapitres : **le premier chapitre** est consacré a la théorie des opérateurs non bornés avec un passage, en revenue de la théorie des perturbations établie principalement par **Kato** pour les opérateurs fermés, puis par **Kato** et **Rellich** pour les opérateurs auto-adjoints.et aussi **Weïst** pour les opérateurs essentiellement auto-adjoint Depuis, la théorie des opérateurs non bornés a connu des efforts sans relache pour mettre à l'oeuvre des outils permettant des dégager toutes les difficultés liées à cette classe. Les opérateurs fermés, sujets d'investigation, viennent souvent de domaines différents (mécanique quantique, analyse semi classique, EDA, EDP,...).

Le deuxième chapitre est consacré à l'introduction des opérateurs fermés à images fermées car ces opérateurs permettent de définir les opéateurs de Fredholm non bornés dans un espace de Hilbert H, c'set-à-dire si l'opérateur linéaire fermé A de domaine D(A), est tel que R(A) est fermé.

On comence par définir des consepts élementaires (les espaces quotients et aussi la projection et encor la perturbation des opérateurs à image fermé,...) et nous établiront un certain nombre de résultats concernant la fermeture de $R(A)$.

Au troisimeème chapitre, on définit les opérateurs semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite) dans le cas borné sur un espace de Hilbert H, c'est-à-dire un opérateur linéaire A borné pour lequel il existe un opérateur borné B et un opérateurs compact K de sorte que $BA = 1+k$ (respectivement $AB = 1+K$), puis on défini les opérateurs de Fredholm sur un espace de Hilbert H de sorte que le noyeau $\ker A$ contenu dans un espace de Hilbert H de sorte que le noyau $\ker A$ contenu dans un espace de Hilbert H et d'image R(A) contenue dans un espace de Hilbert H' tels que R(A) soit fermé dans H' tels que R(A) soit fermé dans H', $\dim\ker A < \infty$ et $co\dim R(A) < \infty$, on note l'espace des opérateurs de Fredholm par $\mathcal{F}(H, H')$. On peut définir les opérateurs de Fredholm d'une autre manière équivalente en utilisant les sous-espaces de codimentions finies.

On s'intéresse aussi a l'alternative de Fredholm et on achève ce chapitre par la stabilité des opérateurs de Fredholm dans le cas borné .
et on étude la stabilité des opérateurs non bornés.
Les opérateurs de Fredholm (non borné) sont invaraints par n'importe quelle faible perturbation. Cette propriété de stabilité sera traduite sous forme de théorèmes de stabilité.
On muni l'espace $C(H)$ par la métrique $g(A)$, on montre que l'ensemble des opérateurs de fredholm est ouvert dans cet espace. On donne quelque propriétés de cette métrique qui vont être utiles pour énoncer et démontrer le premier théorème de stabilité des opérateurs de Fredholm.

Semi-fredholm à gauche (respectivement à droite) dans le cas non borné borné dans un espace de Hilbert H,c'est-à-dire un opérateur linéaire A non borné pour lequele il existe un opérateur non borné B et un opérateur compact K de sorte que BA=1 + K (respectivement AB =1 + K),puis on défini les opérateurs de Fredholm sur un espace de Hilbert H de sorte que le noyau $\ker A$ contenu dans un espace de Hilbert H et d'image.

Chapitre 1

Opérateurs Linéaires Fermés

La théorie des opérateurs non bornés a connu un immense progrès, depuis un siècle déja, avec la vulgarisation de la théorie des perturbations établie principalement par Kato pour les opérateurs fermés, puis par Kato et Rellich pour les opérateurs auto-adjoints.
Les opérateurs fermés, sujets d'investigation, viennent souvent de domaines différents (mécanique quantique, analyse semi classique, EDA, EDP,...) mais rassemblent les propriètes mathématiques liées à la terminologie Théorie des opérateurs". On présente dans ce chapitre, qu'on estime introducif, la théorie élémentaire des opérateurs non bornés, en particulier celle des opérateurs fermés. Le chapitre est composé de quatre parties, la première partie est une présentation des éléments de base de la thoérie des opérateurs fermés et les principales notions qui seront nécessaires à notre travail. Dans la deuxième partie, on s'intérèssera à la structure topologique de la classe des opérateurs fermés lorsqu'elle est munie d'une métrique connue sous l'appelation "métrique du gap", on étendera les différents travaux d'actualité à propos de ce sujet. La partie trois, contient un aperçu sur la somme de deux opérateurs fermés et le Chapitre 1. Théorie des Opérateurs Linéaires Fermés,difficultés que peuvent intervenir, on étalera les travaux de base et ceux récents associés à la somme et à la relation de l'adjoint de la somme. A la fin de ce chapitre, on donnera un recueil sur le produit de deux opérateurs fermés ainsi que la relation de l'adjoint pour le produit. Ces dernières sections, nous seront utiles pour montrer nos motivations à mener ce travail et cerner les différents problèmes qu'on rencontrent dans cette classe des opérateurs.

1.1 Les opérateurs fermés sur un espace de Hilbert

Ce chapitre constitue la partie introductive du travail, il est consacré aux opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert .
Ce concept est ici largement introduit à travers les notions de la fermeture et de l'adjoint, des opérateurs symétriques, essentiellement auto-adjoints ainsi que par le procédé de la transformation de Cayley des opérateurs symétriques.

1.1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1.1. *(cf.[9]) Soient E et F deux espaces vectorièls normés. On appelle opérateur linéaire, toute application linéaire $u \mapsto Tu \in F$ définie sur un sous-espace vectorièl $\mathcal{D}(T) \subset E$, nommé domaine de T.*

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ \; x \in E, \quad T \text{ est défini en } x \; \right\}$$

Définition 1.1.2. ***(Somme de deux opérateurs)***

Soient S et T deux opérateurs de E dans F. On définit l'opérateur somme $S+T$ par :

$$(S+T)(x) = S(x) + T(x)$$

de domaine

$$\mathcal{D}(T+S) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(T+S)$

Définition 1.1.3. ***(Opérateur produit)***

Soient E, F, H et$G$ des espaces vectorièls, et soient $T : E \to F$ et $S : F \to H$ deux opérateurs linéaires de domaine $\mathcal{D}(T) \subseteq E$ et $\mathcal{D}(S) \subseteq F$ respectivement.
On définit l'opérateur composition ST (dit opérateur produit) de T et S par :

$$(ST)(x) = S(T(x))$$

de domaine

$$\mathcal{D}(ST) = \{x \in \mathcal{D}(T); T(x) \in \mathcal{D}(S)\}$$

- *Si R est un opérateur de H dans G, alors $(RS)T = R(ST)$*
- *Si R est un opérateur de F dans H, alors : $(R+S)T = RT + ST$*

Définition 1.1.4. ***(Opérateur inverse)***

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $T : E \to F$ est dit inversible s'il existe un opérateur borné $S : F \to E$ de domaine $\mathcal{D}(S) = F$, tel que

$$TS = I_F \quad et \quad ST = I_{\mathcal{D}(T)}$$

Définition 1.1.5. ***(Densité)***

Soient E et F deux espace normé. Un opérateur $T : E \to F$ est dit densément défini si son domaine $\mathcal{D}(T)$ est dense dans E c'est-à-dire $\overline{\mathcal{D}(T)} = E$

1.1.2 Opérateur fermé

La majorité des opérateurs définis sur des des espaces de Hilbert rencontrés dans littérature mathématique liée à la physique ne sont pas bornés. En effet, les opérateurs différentiels sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ ne sont jamais bornés. Dès lors, l'analyse comtemporaine essaye d'analyser les opérateurs linéaires $A : D(A) \to \mathcal{H}$ où D(A) est supposé un sous espace vectoriel de H. Si on regarde de près la nature des opérateurs interférant dans la physique moderne, on trouve des opérateurs différentiels, partiellement définis sur un espace de Hilbert H, et pour la topologie induite qui ne sont pas continus. Le théorème de Hellinger- Toeplitz (voir [53]) affirme qu'un opérateur linéaire complètement défini sur un espace de Hilbert H vérifiant :

$$< Ax, y >=< x, Ay > \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Est nécessairement borné. Cela suggère qu'un opérateur non borné A sur $\mathcal{H}$ est seulement défini sur un domaine D(A) sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ souvent supposé dense dans H. L'existence du domaine D(A) qui est un opérateur non borné consitue à lui seul une raison pour laquelle l'étude des opérateurs reste incomplète et souvent difficile.
Si on suppose A et B sont deux opérateurs non bornés à domaines respectifs D(A) et D(B). La défintion classique de la somme et de la multiplication est donnée par :

$$D(A + B) = D(A) \cap D(B) \text{ et } (A + B)(x) = A(x) + B(x)$$
$$D(AB) = \{x \in D(B) : Bx \in D(A)\} \text{ et } (AB)x = A(Bx)$$

Cette définition, aussi simple qu'elle paraît, dégage un nombre de difficultés que l'on va expliciter dans les sections suivantes de ce chapitre. Ainsi, par exemple, par passage aux puissances naturelles d'un opérateur non borné A, qu'en est il

du domaine $D(A^n)$de l'opérateur A^n ?
Le symbole $\ker A$ ou N(A) désigne le noyau d'un opérateur A tandis que ImA ou R(A) désigne son image sur H. Ils constituent evidemment des sous-espaces vectoreils de $\mathcal{H}$. Un opérateur non borné A sur un espace de Hilbert de domaine D(A) est souvent noté (A,D(A)).
La notion d'égalité entre deux opérateurs A et B notée $A = B$ est réalisée lorsque $D(A) = D(B)$ et $Ax = Bx$, $\forall x \in D(A)$. Dans le cas où $Ax = Bx$; $\forall x \in D(A) \subset D(B)$ on dit que B est **une extension** de A avec la notation $A \subset B$.

Fermeture des opérateurs linéaires :

Définition 1.1.6. ***(Graphe d'un opérateur)***
*Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H. **Le graphe** de A noté $G(A)$ est le sous espace vectoriel de $H \times H$ défini par :*

$$G(A) \;=\; \{(x, Ax) \;\in\; H \times H/x \;\in\; D(A)\}$$

Il est clair que le graphe d'une transformation linéaire représente l'un des outils puissants dans l'étude des opérateurs linéaires en particulier ceux non bornés sur des espaces de Hilbert. Introduit depuis un siècle déjà par Von neumann (voir [52], [33]), le graphe d'un opérateur permet à ce stade de caractériser une classe d'opérateurs non bornés appelés opérateurs fermés qui occupe une place importante dans le domaine de la théorie spectrale et de l'analyse fonctionnelle. On dit qu'un opérateur A de domaine D(A) est fermé s'il vérifie la propriété :

$$\forall (x_n)_n \subset D(A) \text{ et } x_n \to x \text{ dans } \mathcal{H} \text{ et } Ax_n \to y, \text{ Alors } x \in D(A) \text{ et } Ax = y$$

Les détails dans cette définition sont importants, le fait que A soit fermé n'implique pas que $x \in D(A)$ si $(x_n)_n \subset D(A)$ et $x_n \to x$. Ceci voudra dire que l'ensemble D(A)est lui même fermé, alors qu'on sait que cette situation ne peut se produire pour les opérateurs non bornés.
Le graphe d'un opérateur non borné A à domaine dense D(A) dans $\mathcal{H}$, que l'on note G(A), est le sous espace de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ défini par :

$$\text{G(A)}=\{(x, Ax) \,;\, x \in D(A)\}$$

Où $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est muni de la structure hilbertienne naturelle. Il est clair que si A et B sont deux opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$ alors $A \subset B \Leftrightarrow G(A) \subset G(B)$. En particulier, un sous espace vectoriel M de$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est **le graphe** d'un opérateur linéaire si la condition suivante est satisfaite :

$$(0.y) \in M \Rightarrow y = 0.$$

Par le théorème du graphe fermé, on sait qu'un opérateur non borné partout défini est nécessairement borné donc continu. Ainsi, la fermeture et la continuité se ressemblent de loin, mais en réalité chacun de ces concepts diffère de l'autre. Une connexion importante entre un opérateur fermé A et son graphe est donnée par :

Proposition 1.1.1. *un opérateur linéaire A à domaine D(A) est fermé dans H si et seulement si G(A) est un sous espace fermé de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Si l'on munit $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ du produit scalaire usuel :*

$$< (x_1, x_2), (y_1, x_2) >_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = < x_1, y_1 >_H + < x_2, y_2 >_H \ \forall x_i, y_i \in \mathcal{H}, i = 1, 2$$

$\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est alors un espace de Hilbert.

On peut donner une autre forme équivalente de la fermeture d'un opérateur borné A en munissant D(A) du produit scalaire du graphe noté :$<,>_A$

$$< (x, y) >_A = < (x, y) >_{\mathcal{H}} + < Ax, Ay >_H + < Ax, Ay >_H \ \forall x, y \in (DA).$$

$\| \, . \, \|_A = \sqrt{<,>_A}$ est une norme appelée norme du graphe. Elle définit une topologie sur D(A) moins fine que la topologie induite par celle de $\mathcal{H}$. On a :

Proposition 1.1.2. *Soit A un opérateur non borné à domaine dense dans $\mathcal{H}$ alors : 1.A est fermé sur $\mathcal{H}$ si et seulement si $(D(A), <,>_A)$ est un espace de Hilbert.*
2.Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, alors $\ker A$ est fermé dans $\mathcal{H}$.
3.Si A est inversible alors $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. si et seulement si $A^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.En pariculier, si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ avec $ImA = \mathcal{H}$ et A est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
4.Si R(A) est fermé dans $\mathcal{H}$ il existe $c > 0$ tel que :

$$\| Ax \| \geq c \| x \|, \forall x \in D(A)$$

Alors A est fermé dans $\mathcal{H}$.
Une première utilité de la notion du graphe est de montrer que si un opérateur A n'est pas fermé, alors on peut voir s'il possède des **extensions ferm***es grâce à la fermture de son graphe G(A) dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$*

Proposition 1.1.3. *Soit A un opérateur non borné à domaine dense D(A). On dit que A est* **fermable** *si et seulement si le sous espace $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur linéaire sur $\mathcal{H}$.*
peut être réformulée sous la forme :

Proposition 1.1.4. *(A est* **fermable***)* $\Leftrightarrow ((0, y) \in \overline{G(A)} \Rightarrow y = 0)$

Dans ce cas, on note $\overline{A}$ l'opérateur tel $\overline{G(A)} = G(\overline{A})$ et l'opérateur $\overline{A}$ est une **extension** *fermée de A. En fait, elle est la plus petite extension fermée de A.*

Définition 1.1.7. *Un opérateur linéaire est* **fermable** *si et seulement s'il admet une extension fermée.*

Remarque 1.1.1. *Il existe, néanmoins, des opérateurs qui n'admettent aucune extension fermée et par suite ils sont non fermables. Si A est fermable, on note par $D(\overline{A})$ son domaine, avec :*

$$\{D(\overline{A}) = x \in \mathcal{H} \text{ , il existe une suite } (x_n)_n \in D(A) \text{ tell que } (x)_n \text{ converge vers } x \text{ dans } \mathcal{H} \text{ et } (Ax_n)_n \text{ ait une limite dans } \mathcal{H}\}$$

et

$$\overline{A}x = \lim Ax_n \text{ pour } x \in D(A)$$

Remarque 1.1.2. *Le domaine $D(\overline{A})$ de $\overline{A}$ contient D(A) mais n'est pas égal à $\overline{D(A)}$, autrement l'opérateur sera borné.*
Bien entendu, les opérateurs bornés sont fermables, et si A est injectif et fermable, alors A^{-1} est fermable si et seulement si $\overline{A}$ est injectif et on a $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$, A^{-1} est borné et $R(\overline{A}) = \overline{R(A)}$.
La classe des opérateurs fermables contient strictement la classe des opérateurs fermés qui est, à son tour, strictement emboitée dans la classe des opérateurs non bornés.
i) Posons $\mathcal{H} = L^2(I)$ muni de la mesure de lebsegue où I =]0, 1[. On peut définir alors l'opérateurA = -i d/dx sur $\mathcal{H}$ avec plusieurs domaines différents puisque A ne peut pas être défini sur $\mathcal{H}$ tout entier. On note :
$A_1 = (A, C_0^\infty(I)$ où $C_0^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur I à support compcat dans I.
$A_1 = (A, H^1(I)) = \{f \in L^2(I); df/dx \in L^2(I)\}$.
$A_0 = (A, H_0^1(I))$ où $H_0^1(I)$ est l'adhérence de $C_0^\infty(I)$ dans H^1.
Il est clair que A_0 et A_2 sont des extensions fermées de A_1.

$$A_1 \subset A_0 \subset A_2$$

ii) On considére $\mathcal{H} = L^2([0,1])$ et $D(A) = C([0,1]) \subseteq \mathcal{H}$.
posons $T : D(T) \to \mathcal{H}$ et Tx(t)=x(0).Test non fermable. En effet, si l'on considère $(x_n)_n$ une suite dans D(T) définie par $x_n(t) = (1-t)^n$, on a :
$\| x_n \| = (\int_0^1 (1-t)^{1/2} dt)^{1/2} = \sqrt{1/2n+1} \to 0$
Mais $(Tx_n) = 1$ qui montre que T est non fermable.

1.1.3 Adjoint d'un opérateur non borné sur un espace de Hilbert

Définition 1.1.8. *Soit(A,D(A)) un opérateur linéaire non borné sur H de domaine D(A) dense dans H. Si l'application*

$$x \rightarrow < Ax, y > \text{ avec } x \in D(A).$$

Est continue sur D(A) muni de la topologie induite par celle de H, elle possède par le théorème de Hahn-Banach une extension continue à H.
il existe alors en vertu du théorème de représentation de Riesz un vecteur unique a(y) dans H tel que :

$$\forall x \in D(A), < Ax, y >=< x, a(y) >$$
$$\text{avec } a(y) = A^*$$

Opérateur $A^* \in L(H)$ *appelé* **adjoint** *de H, qui vérifie la relation suivante :*
pour tous $x, y \in H$,

$$< Ax, y >=< x, A^*y >.$$

On définit l'adjoint A^* *de A sur H par* $A^*y = a(y)$ *de domaine :*
$D(A^*) = \{y \in H$ *; l'application* $D(A) \ni x \rightarrow < Ax, y >$ *admet une extention continue à H.*

$$\forall x \in D(A), y \in D(A^*), < Ax, y >=< x, A^*y >$$

Définition 1.1.9. *Soit* $A, B \in L(H)$ *et* $\alpha \in K$. *Si D(A),D(A) sont denses dans H alors on a :*
1. $\| A \|_{\mathcal{L}(H)} = \| A^* \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$
2. $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$
3. $(AB) = BA$
4. $(A^*)^* = A$
5. *si A est inversible d'inverse* A^{-1}. *Alors* A^* *est inversible et* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
6. $(AB)^* = B^*A^*$
7. $R(A) = \ker A^*$; $\overline{R(A)} = (\ker A^*)^{\perp}$.

1.1.4 Opérateurs symétriques et auto-adjoint

Définition 1.1.10. *Un opérateur A dans un espace de Hilbert est dit* **symétrique** *si* $A \subset A^*$ *c'est-a-dire :*

$$D(A) \subset D(A^*).\ Au = A^*u \text{ pour } u \in D(A).$$

Il est clair que A est **symétrique** *si et seulement si $T \subset T^*$, i.e :*

$$D(T) \subset D(T^*), et Tx = T^*x; \forall x \in D(T).$$

Autrement dit :

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T) : (Tx, y) = (x, Ty).$$

Définition 1.1.11. *On dit qu'un opérateur T à domaine dense est auto-adjoint si $T^* = T$, i.e :*

$$D(T) = D(T^*) \text{ et } Tx = T^*x, \ \forall x \in D(T) \ :$$

Propriété 1.1.1.

(i) Un opérateur symétrique T est toujours fermable puisque $D(T) \subset D(T^*)$ est dense.
(ii) Si T est un opérateur symétrique alors T^* et T^{**} sont deux extensions fermées de T et :$T \subset T^* \subset T^{**}$
(iii) Si T est un opérateur symétrique fermée alors $T = T^* \subset T^{**}$.
(iv) Si T est un opérateur auto-adjoint alors : $T = T^* = T^{**}$

Théorème 1.1.1. *(cf[16]) Soit T un opérateur symétrique. Les assertions suivantes sont équivalentes ;*
(i) T est auto-adjoint
(ii) T est fermé et $\ker(T^* \pm i) = 0$.
(iii) $Ran(T \pm i) = \mathrm{H}$

1.1.5 Opérateurs essentiellement auto-adjoints

Définition 1.1.12. *Soit $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné symétrique sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec $\mathcal{D}(T)$ dense dans $\mathcal{H}$. T est dit essentiellement auto-adjoint si $\overline{T}$ est auto-adjoint ou bien $(\overline{T})^* = \overline{T} = T^*$*

Lemme 1.1.1. *Si T est essentiellement auto-adjoint, alors T possède une unique extension auto-adjointe.*

Preuve

S est une extension auto-adjointe de T, comme S est fermé alors $\overline{T} \subset S$ donc $S^* \subset (\overline{T})^*$ et $S = \overline{T}, S^* = S$ est $(\overline{T})^* = \overline{T}$, et on a $\overline{T} \subset S$. Montrons que $S \subset \overline{T}$

$$S^* \ \ est \ \ auto - adjoint \ \ \ \Rightarrow S^* = S \tag{1.1}$$

S est fermé $\Rightarrow \quad S^* = S = \overline{S}$ Dautre part :

$$S^* \subset (\overline{T})^*, \tag{1.2}$$

Et comme T est essentiellement auto-adjoint alors

$$\overline{S} = (\overline{T})^* \tag{1.3}$$

Et donc

$$\begin{aligned} (1.2)\ et\ (1.3) &\Rightarrow S^* \subset \overline{T} \\ est\ de(1.1)\ et\ (1.3) &\Rightarrow S = S^* \\ &\Rightarrow S \subset \overline{T} \end{aligned}$$

♦

Remarque 1.1.3. *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.*

Remarque 1.1.4. *Si T est essentiellement auto-adjoint, alor T^* est la plus petite extension fermé de T.*

Remarque 1.1.5. *Si T et S sont deux opérateurs auto-adjoints et $T \subset S$ alors $T = S$*

1.1.6 Opérateurs transposés

Définition 1.1.13. *Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux espaces de Banach et T un opťerateur densément défini de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}_2$; on définit la transposée de T, qui est un opérateur de $\mathcal{B}_2^*$ dans $\mathcal{B}_1^*$, de la façon suivante : le domaine de ${}^tT$ est l'ensemble des $y^* \in \mathcal{B}_2^*$ tel que la forme linèaire $x \in \mathcal{D}(T) \to y^*(T(x))$ soit continue.*

Dans le cas où $y^* \in \mathcal{D}({}^tT)$, cette forme linéaire continue, définie sur le sous-espace dense $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}_1$, se prolonge de façon unique en une forme linéaire $x^* \in \mathcal{B}_1^*$ continue sur $\mathcal{B}_1$. On pose alors ${}^tT(y^*) = x^*$. On a donc

$${}^tT(y^*)(x) = y^*(T(x))$$

pour tous $x \in \mathcal{D}(T)$ et $y^* \in \mathcal{D}({}^tT)$.

Remarque 1.1.6. *Lorsque $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert et T un opérateur densément défini de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$, on définit un opérateur T^* de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_1$ de la façon suivante : on définit $T^* = x$ si la forme linéaire l_y associée à $y \in \mathcal{H}$ est dans $\mathcal{D}({}^tT)$, et si $l_x = x^* =^t T(l_y)$.*

Remarque 1.1.7. *Le vecteur $y \in \mathcal{D}(T^*)$ si et seulement si la forme linéaire $l : u \in \mathcal{D}(T) \to \langle T(u), y\rangle$ est continue sur $\mathcal{D}(T)$ (muni de la norme de $\mathcal{H}_1$), et le couple $(y; x) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ est dans le graphe de T^* si et seulement si :*

$$\langle T(u), y\rangle = \langle u, x\rangle \tag{1.4}$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(T)$, ce qui signifie que x représente la forme linéaire l (et son prolongement continu à $\mathcal{H}_1$). On a donc

$$G(T^*) = \{f(y;x) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 : \forall z \in \mathcal{D}(T); \langle x, z\rangle = \langle y, T(z)\rangle\}$$

En effet, la forme linéaire $u \to \langle T(u), y\rangle$ est alors continue puisqu'elle est égale à $u \to \langle u, x\rangle$ et dans ce cas on a $x = T^*(y)$ par définition de l'adjoint. Il est clair que la condition (1.4) définit un ensemble fermé de couples $(y\,;\,x)$, ce qui montre que T^* est toujours un opérateur fermé.

1.1.7 Opérateur de projection

Définition 1.1.14. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, si $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $P^2 = P$, P est appellé un opérateur de projection, si P est un opérateur de projection hermitien (i.e. $P^2 = P$) alors, P est appelé un projection orthogonale.*

Définition 1.1.15. *Soit T un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On dit que :*

(i) *T est une projection (respectivement projection orthogonale) si $T^2 = T$ (respectivement $T^2 = T$ et $T = T^*$).*

(ii) *T est normal (respectivement auto-adjoint) si $TT^* = T^*T$ (respectivement $T^* = T$).*

(iii) *T est isométrique (respectivement unitaire) si $T^*T = 1_{\mathcal{H}}$ (respectivement $T^*T = TT^* = 1_{\mathcal{H}}$).*

1.1.8 Spectre et résolvante

La notion de spectre se défnit mieux pour les opérateurs fermés.

Définition 1.1.16. *Soit T un opérateur linéaire fermé. Si D(T) est muni de la* **norme** *du* **graphe** *:*
$\| u \|_T = \| Tu \| + \| u \|$ alors D(T) est un espace de Hibert, on peut considérer alors : $T : D(H) \to \mathcal{H}$ comme un opérateur borné entre deux espaces de Hilbert.

1) On dit que λ est une valeur propre de T s'il existe $x \in E$, non nul, tel que $Tx = \lambda x$; autrement dit si $T - \lambda I$ n'est pas **injectif**.
2) On dit que λ est une **valeur spectrale** *de T si $T - \lambda I$ n'est* **pas inversible** *(ou, de façon équivalente, pas bijectif).*
L'ensemble des valeurs spectrales de T est noté $\sigma(T)$ et est appelé le **spectre** *de T.*
Soit E un espace de Banach et :

$$\text{L}(E)= \ T : E \to E \textit{ linéaire continu.}$$

Définition 1.1.17. *Soit T un opérateur d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lui même. On appelle l'ensemble du spectre de T le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\sigma(T)$ ($\sigma(T) = \mathbb{C}\backslash\rho(T)$) avec*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

Où

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (T - \lambda_{\mathcal{H}}) \quad non \quad inversible\}. \tag{1.5}$$

Alors on peut trouver trois types de spectres distincts.

1. *$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad T_\lambda \quad est \quad non \quad injectif\}$ est le spectre ponctuel de T,*
2. *$\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}/T_\lambda^{-1} \quad existe, \quad de \quad domaine \quad non \quad dense \quad dans \quad \mathcal{H}\right\}$. est le spectre residuel de T,*
3. *$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda - T)^{-1} \text{ existe, et non borne}' \text{ de domaine dense dans } \mathcal{H}\}$. est le spectre continu de T.*

Définition 1.1.18. *Soit A un opérateur linéaire (non nécessairement continu) défini sur un espace de Hilbert. Pour tout nombre complexe λ tel que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et est continu, on définit la* **r***é***solvante** *de A par :*

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}.$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles la résolvante existe est appelé l'ensemble résolvant, noté $\rho(A)$. Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant : $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

1.1.9 Ensemble résolvant

Définition 1.1.19. *Soint $(T, \mathcal{D}(T))$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}(T)$ dense dant $\mathcal{H}$.*

On appelle ensemble résolvant de l'opérateur $(T, \mathcal{D}(T))$ l'ensemble $\rho(\lambda)$ des λ complexes telles que :

(i) *$Im(T - \lambda)$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

(ii) *$(T - \lambda)$ est inversible de $\mathcal{D}(T)$ dans $Im(T - \lambda)$ d'inverse borné. On note $R_\lambda(T) = (T - \lambda)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \rho(T)$. $R_\lambda(T)$ est appelé l'opérateur résolvant ou résolvante de T.*

Remarque 1.1.8. *$R_\lambda(T)$ est borné sur $Im(T - \lambda)$ dans $\mathcal{D}(T)$, signifie que :*

$$\exists\ C > 0,\ \forall u \in Im(T - \lambda);\ \|R_\lambda(T)u\|_{\mathcal{H}} \leq\ C\ \|u\|_{\mathcal{H}}\}.$$

Remarque 1.1.9. *Si $(T, \mathcal{D}(T))$ est un opérateur fermé sur $\mathcal{H}$, alors :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus R_\lambda(T) \text{ existe et est dans } \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$$

Preuve :
Montrons l'inclusion suivante : " $\subseteq$ " Soient $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow \overline{Im(T-\lambda)} = \mathcal{H}$ et $R_\lambda(T)$ bornée sur $Im(T-\lambda) \Rightarrow \exists C > 0, \forall u \in Im(T-\lambda) : \|R_\lambda(T)u\|_{\mathcal{H}} \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}$ i.e $\forall v \in \mathcal{D}(T)$

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = \|R_\lambda(T)(T-\lambda)v\|_{\mathcal{H}} \leq \ C\ \|(T-\lambda)v\|_{\mathcal{H}} \tag{1.6}$$

Montrons l'inclusion inverse : " $\supseteq$ " Soient $w \in \mathcal{H}$ puis que $\overline{Im(T-\lambda)} = \mathcal{H} \Rightarrow$ il existe $(v_j)_j$ dans $\mathcal{D}(T)$ tel que $((T-\lambda)v_j)_j$ converge vers w dans $\mathcal{H}$.

L'estimation (1.6) appliquer a $v = (v_j - v_k)$ donne

$$\|v_j - v_k\| \leq C\ \|(T-\lambda)v_j - (T-\lambda)v_k\|_{\mathcal{H}} \to_{j,k\to\infty} 0$$

D'où $(v_j)_j$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$ donc elle converge vers v dans $\mathcal{H}$. En particulier $(v_j, (T-\lambda)v_j)$ converge dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vers (v, w) de même (v_j, Tv_j) est dans le graphe de T et converge dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vers $(v, w + Iv)$ puisque T est fermé on a :

$$w + Iv = Tv$$

i.e

$$w = (T-\lambda)v \in Im(T-\lambda)$$

Donc

$$\mathcal{H} \subset Im(T-\lambda)$$

d'où

$$Im(T-\lambda) = \mathcal{H} \Rightarrow R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(T)$$

♦

1.1.10 Identité de la Résolvante

Lemme 1.1.2. *Soient $T : E \to E$ un opérateur linéaire et $\lambda, \mu \in \rho(T)$, alors*

$$(T-\mu)^{-1} = (T-\lambda)^{-1} + (\mu-\lambda)(T-\mu)^{-1}(T-\lambda)^{-1}$$

Preuve : *On a*

$$\begin{aligned}
(T-\mu)^{-1} &= (T-\mu)^{-1}(T-\lambda)(T-\lambda)^{-1} \\
&= (T-\mu)^{-1}((T-\mu) + (\mu-\lambda))(T-\lambda)^{-1} \\
&= (1 + (\mu-\lambda)(T-\mu)^{-1})(T-\lambda)^{-1} \\
&= (T-\lambda)^{-1} + (\mu-\lambda)(T-\mu)^{-1}(T-\lambda)^{-1}
\end{aligned}$$

♦

1.1.11 Spectre discret et Spectre essenciel

Soit $A : D(H) \to \mathcal{H}$ un opérateur fermé.

Définition 1.1.20. *On appelle spectre* **discret** *de H, noté $\sigma_d(A)$ l'ensemble des valeurs propres isolées de H, de multiplicité finie.*

Définition 1.1.21. *On appelle spectre* **essentiel** *de H, noté par $\sigma_{ess}(A)$ l'esnsemble $\sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$ .Dans mathématiques, spectre* **essentiel** *de a opérateur lié est un certain sous-ensemble de son spectre, défini par un état du type qui indique, en général, "mais n'est pas inversible".*

Définition 1.1.22. *Comme pour les operateurs continus, le spectre d'un opérateur non-borné fermé est défini comme le complementaire dans $\mathbb{C}$ de son ensemble resolvant. Dans tout ce qui suit on note simplement $(\lambda - A)$ l'opérateur $(\lambda Id_X - A)$. visiblement de meme domaine que A.*
Si A est un operateur linéaire fermé sur un espace de Banach X et de domaine Y = D(A), l'ensemble réolvant de A est : La reciproque d'un opérateur bijectif fermé étant fermée.
Le spectre d'un operateur fermé est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

1.1.12 Perturbation des opérateurs linéaires

On se propose dans cette section de voir, pour différents caractères des opérateurs A et B, la nature de l'opérateur A+B de domaine $D(A) \cap D(B)$ supposé dès maintenant non nul. Un premier pas dans la théorie des perturbations, consiste à étudier le caractère de l'opérateur A + B lorsqu'on perturbe A par un autre opérateur B assez petit mais non borné appelé relativement borné.

Définition 1.1.23. *B est dit relativement borné à A ou simplement A-borné si et seulement si, $D(A) \subset D(B)$ et il existe deux constantes positives a et b telles que :*

$$\| B_x \|_{\mathcal{H}} \leq a \| Ax \|_{\mathcal{H}} + b \| x \|_{\mathcal{H}}, \forall x \in D(A).$$

L'infimum de a vérifiant cette inégalité est appelé la borne relative de A. En particulier, si B est borné, la borne relative de A est égale à 0.
Cette définition est plus utilisée, dans le cadre des espaces de Hilbert, sous la forme :

Définition 1.1.24. *B est relativement borné à A de borne relative a si et seulement si*

$$\inf_{b>0} \sup_{\forall x \in D(A).} \left(\frac{\|B_x\|^2}{\|Ax\| + b\|x\|^2}\right)^{1/2} < \infty$$

L'un des premiers théorèmes de la théorie des perturbations des opérateurs fermés est donné par **Hess** *et* **Kato**.

Théorème 1.1.2. *Soit A un opérateur fermé de domaine dense $D(A)$, et B un opérateur A-borné tel que B^* est A^*-borné dont les bornes relatives sont strictement infèrieures à 1. Alors $A + B$ est fermé et $(A+B)^* = A^* + B^*$.*

Ce résultat, important dans la théorie des perturbations, ne subsiste plus si la borne relative est égale à 1. En effet, si on considère $B = -A$, la borne relative est égale à 1, mais l'opérateur nul n'est jamais fermé s'il est défini sur un sous espace non fermé de $\mathcal{H}$. Ce théorème constitue, par ailleurs, un premier résultat de la stabilité des opérateurs fermés sous des perturbations non bornées et de l'adjoint. Remarquons aussi que les hypothèses ne sont pas symétriques pour A et B. Le théorème suivant constitue une version plus intéréssante pour connaître le caractère d'un opérateur à partir d'un autre :

Théorème 1.1.3. *Supposons A,B deux opérateurs non bornés ayant le même domaine $D(A) = D(B) = D$ vérifiant :*

$$\| (A+B)x \| \leq a(\| Ax \| + \| Bx \|) + \| bx \|$$

pour certain $a > 0$. Alors :

1. *A est fermé sur D si et seulement si B l'est aussi.*

2. *A est fermable sur D si et seulement si B est fermable et on a $D(\overline{A}) = D(\overline{B})$*

Eneffet on a :
La littérature affirme que les opérateurs intérférant avec la physique ou les équations différentielles abstraites ne sont pas toujours fermés. Ils sont intéréssants et utiles lorsqu'ils sont auto-adjoint ou essentiellement auto-adjoint. On peut établir que si un opérateur est proche d'un opérateur auto-adjoint alors lui aussi sera auto-adjoint

Théorème 1.1.4. *Soit T un opérateur auto-adjoint. S'il existe $\delta > 0$ tel que : Pour chaque opérateur symétrique A vérifiant $g(A,T) < \delta$*
est nécessairement auto-adjoint,g désigne la métrique du gap.

Définition 1.1.25. *L'importance de ce théorème n'est pas à discuter, mais le calcul de l'écart entre T et A par la métrique g constitue parfois une difficulté importante. Les opérateurs auto-adjoints constituent, de leur côté, une classe importante des opérateurs linéaires non bornés. En partculier, les opérateurs de Schrödinger sont considérés comme une perturbation par un champ de potentiel de l'opérateur* *de Laplace sur l'espace de Hilbert* $L^2(\mathbb{R}^n)$. *Pour ces raisons on préfère, parfois, utiliser la stabilité du caractère auto-adjoint des opérateurs à travers le théorème de* **Kato – Rellich**

Théorème 1.1.5. *(cf.[13]) Soit* T *un opérateur auto-adjoint. Si* A *est symétrique et T-borné de borne relative strictement inferieure à 1, alors* $T + A$ *est aussi auto-adjoint. En particulier,* $T + A$ *est auto-adjoint si* A *est borné et symétrique avec* $D(T) \subset D(A)$

ou encore le théorème de **Weïst** pour les opérateurs essentiellement auto-adjoints

Théorème 1.1.6. *(cf.[13]) Si A est un opérateur auto-adjoint de domaine D(A). Si B, de domaine D(B), est un opérateur symétrique A - borné de borne relative égale à 1, alors l'opérateur A + B de domaine D(A) est essentiellement auto-adjoint sur D(A).*

On se limite dans cette section aux théorèmes (**Hess – Kato**, **Kato – Rellich** et **Wüst**) bien que d'autres résultats de stabilité sous des perturbations compactes ou d'autres existent. Pour ne pas déborder le cadre de notre travail, les lecteurs désirant s'approfondir dans ce domaine sont invités à consulter les références On a vu jusqu'à présent que la somme A + B de deux opérateurs possède le même caractère de l'opérateur A si B est convenablement A-borné. Mais qu'en est -il de la somme des opérateurs fermés ou auto-adjoints sans contrôle de la perturbation ? La réponse est en général décévante : la somme A + B de deux opérateurs fermés n'est pas en géréral fermée.

Théorème 1.1.7. (**Kato – Rellich**).
Soit T un opérateur auto-adjoint et A un opérateur T-borné par $\alpha < 1$, *L'opérateur K= T + A ou D(K)=D(T) est auto-adjoint.*

Preuve :
Si λ est assez grand. alors la série :

$$R_\lambda = (T + i\lambda)^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}} (-A(T + i\lambda)^{-1})^n.$$

converge normalement, et est définie sur tout $\mathcal{H}$ On a alors :

$$(T + A + i\lambda)R_\lambda f = (T + i\lambda)R_\lambda f + AR\lambda f$$
$$= \text{f (par télescopage)}$$

Ceci montre en particulier que $R(T + A + i\lambda) = \mathcal{H}$. En remplaçant λ par $-\lambda$ on trouve aussi que :$R(T - A - i\lambda) = \mathcal{H}$ On a donc $R((T + A/\lambda) \pm i) = \mathcal{H}$. Alors on déduit que $T + A/\lambda$ et donc T + A sont essentiellement auto-adjoints. Mais $K = T + A$ est fermé d'aprés le lemme précédent Il est donc auto-adjoint

1.2 Opérations sur les opérateurs fermés et la stabilité

1.2.1 Opérations sur les opérateurs linéaires non bornés

Dans cette section, on présente quelques travaux classiques et d'autres qui sont récémment établis à propos de la **somme** et du **produit** de deux opérateurs fermés. Supposons l'existence de deux opérateurs A et B, les domaines D(A) et D(B) représentent physiquement l'ensemble des informations sur A et B. Si on considère les opérateurs A+B et AB, les domaines $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ et $D(AB) = A^{-1}D(B)$ vont certainement se rétrécir (physiquement ceci est connu par la perte de données) ou encore se réduire à $\{0\}$. Le phénomème de trivialité du domaine de la somme (ou du produit) constitue à lui seul un problème assez délicat. Certes, cette situation peut arriver, mais la littérature ne présente que très peu d'exemples la montrant.
On définit l'opérateur **somme** (A+B) de A et B sur $\mathcal{H}$ par :

$$(A+B)x = Ax + Bx\,;\, \forall x \in D(A+B).$$
$$D(A+B) = D(A) \cap D(B)\ .$$

En définit l'opérateur **produit** AB de A par B sur H par :

$$(AB)x = A(Bx),\, \forall x \in D(AB).$$
$$\mathrm{D(AB)}=\{\forall x \in D(B)\,;\, Bx \in D(A)\}\,;\, D(AB) = A^{-1}D(B)$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(\alpha A)x = \alpha Ax,\, \forall x \in D(A)\ .$$
$$D(\alpha A) = D(A)$$

$\alpha A = 0$ si $\alpha = 0\alpha$

1.2.2 Trivialité de la somme et du produit des opérateurs fermés

1) Construction d'un opérateur linéaire symétrique fermé A, tel que $\mathbf{D(A^2) = 0}$:
On utilise ici la machinerie de la transformation de Cayley .
Rappelons que si M et N sont deux sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H et U est une isometrie de M dans N telle que (U-I)M=D est dense dans H, alors (U-I) est bijective et A=I $(U+I)(U-I)^{-1}$ est un *opérateur symétrique* de *domaine dense* D(A)=D.
Précisement, $D(A^2) = \{0\}$ dés que $Im(U+I) \cap Im(U-I) = \{0\}$ et à fortiori

$M \cap N = \{0\}$ car :
$A^2 = -[2(U-I)^{-1}+I](U+I)(U-I)^{-1} = I[2(U-I)^{-1}+I]A$.
On va alors construire selon P.R.Chernoff..M,N (cf[15]) et U vérifiant ces conditions.
Pour cela prenons $H = L^2(S)$ où S est le cercle unité,$M = L^2(S) = \{f$ analytique sur le disque unité ouvert telle que $sup_{0<r<1}(1/2\pi \int_0^{2\pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid d\theta)^{1/2} < +\infty\}$et U l'opérateur de multiplication, définit sur $L^2(S)$, par la fonction $\alpha(\theta)$:

$$\alpha(\theta) = exp(ie^{-1/\theta})\,;\, 0 < \vartheta < \pi.$$
$$=\text{-1},\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$$

Posons aussi :

$$\text{N}=Im\ \text{U}=\text{UM}.$$
$$=\alpha H^2(S) = \{\alpha\varphi; \varphi \in H^2(S)\}$$

Alors,

$$\text{i)}\mid \alpha(\theta) \mid= 1,\ \forall\theta \in]0, 2\pi] \text{ et donc } D(U) = L^2(S).$$
$$\text{ii)}\alpha(\theta) = -1, \text{ sur un ensemble de mesure non nulle .}$$
$$\text{iii)}\alpha(\theta) \neq 1,\ \forall\theta \in]0, 2\pi]$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} log \mid \alpha(\theta) - 1 \mid d\theta \in= -\infty$$

En effet,

$$log \mid \alpha(\theta) - 1 \mid= log \mid exp(ie^{-1/\theta}) - 1 \mid, \text{ sur }]0, \pi[.$$
$$=\text{log 2 sur } [0.\pi]$$

Si $\theta \in]0, \pi[$, $\alpha(\theta) - 1 = exp(ie^{-1/\theta}) - 1 = 2i \sin(\frac{e^{-1/\theta}}{2} e^{i(\frac{e^{-1/\theta}}{2})}$ et

$$log \mid \alpha(\theta) - 1 \mid= log2 \mid \sin(\frac{e^{-1/\theta}}{2} \mid$$

Comme $\lim_{\theta\to 0^+} \theta log2 \sin(\frac{e^{-1/\theta}}{2} = +\infty$, Alors :
$\forall C > 0,\ \exists\eta > 0, 0 < \theta < \eta \Rightarrow log2(\sin(\frac{e^{-1/\theta}}{2}) > \frac{-C}{\theta}$ et :
$\int_0^{2\pi} log \mid \alpha(\theta) - 1 \mid d\theta = int_0^{\eta} log \mid \alpha(\theta) - 1 \mid d\theta + int_{\pi}^{\eta} log \mid \alpha(\theta) - 1 \mid d\theta + \pi log2 = -\infty$ En particulier, f ne peut s'annuler sur un ensemble de mesure non nulle.
Ainsi, grace à ce résultat la propreiété ii) garantie que $M \cap N = \{0\}$.
En effet, Si $f \in H^2(S)$ et $(\alpha(\theta) + 1)f \in H^2(S)$,
or $(\alpha(\theta) + 1)f(\theta)$ s'annule sur un ensemble de mesure non nulle, de plus f est supportée dans $[\pi, 2\pi]$ donc forcément f est identicment nulle sur $]0, 2\pi]$.
montre que $(U - I)M = (\alpha(\theta) - 1) \in H^2(S)$ est dense dans $L^2(S)$ car si $g \in ((\alpha(\theta) - 1)H^2(S))^{\perp}$ alors

$$< (\overline{\alpha(\theta)} - 1)g, f >_{L^2(S)} = 0, \forall f \in H^2(S)$$

D'où, $(\alpha(\theta) - 1)\overline{g}(\theta) \in H^2(S)$, puisque l'intégrale de $log \mid (\alpha(\theta) - 1) \mid$ diverge vers $-\infty$ sur $]0, 2\pi]$, On a :

$$\int_0^{2\pi} log(\alpha(\theta) - 1)\overline{g}(\theta)d\theta = -\infty$$

En la vertu du téorème de G.Szego $(\alpha(\theta) - 1)\overline{g}(\theta) = 0$ et alors$g(\theta) \equiv sur]0, 2\pi]$.

1.3 Somme triviale de deux opérateurs linéaires non bornés

On considère sur $L^2(\mathbb{R})$ les opérateurs A et B de miltiplication par la fonction x et x^2 de domaine respectifs $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $D((B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$ où $\hat{f} = \mathcal{F}f$ désigne la transformation de Fourier de f .
On sait que A et B des opérateurs non bornés symétrique essencielment auto-adjoint car

$$D(\overline{A}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}),\, xf \in L^2(\mathbb{R})\}$$

et

$$D(\overline{B}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}),\, x^2 f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Si $f \in D(B)$, Alors $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ donc $D^2\hat{f} = -\hat{x^2 f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, par conséquant $x^2 f \in L^2(\mathbb{R}).\overline{A} et \overline{B}$ sont auto-adjoint respactivement sur D(A)et D(B).

$$\begin{aligned} D(A+B) &= D(A) \cap D(B) \\ &= \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})\} \,. \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

puisque le théorème de Paley-Wiener-Schwartz affirme que l'image de Fourier d'une distribution non nulle à support compact n'est jamais à support compact . En effet, Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$ alors f est prolongeable en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$. Or, tout fonction analytique sur $\mathbb{R}$ nulle sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Donc f ne peut être à support compact à moins d'être identiquement nulle.

1.3.1 Convergence d'une suite d'opérateurs linéaires

Soint A,$(A_n)_n$ dans $\mathcal{L}(H)$. Si $(A_n x, y)_n$ converge dans $\mathbb{C}$ vers $< Ax, y >$, $x, y \in H$. on dit que la suite des opérateurs $(A_n)_n$ converge faiblement vesrs l'opérateur A.
Si :

$$\text{on a } \lim_{n\to\infty} \parallel A_n x - A \parallel = 0\,;\, \forall x \in H$$

$(A_n)_n$ est dite fortement convergente vers A.
$(A_n)_n$ est uniformement convergente vers A Si :

$$\lim_{n\to\infty} \parallel A_n x - Ax \parallel_{\mathcal{L}(H)} = 0$$

Il est clair que la convergence uniforme implique la convergence forte car :

$$\forall x \in H, \parallel A_n x - Ax \parallel \leq \parallel A_n - A \parallel_{\mathcal{L}(H)} \parallel x \parallel$$

La convergence forte entrne la convergente faible puisque

$$|< (A_n x - A)x, y >| \leq \parallel (A_n x - Ax) \parallel \parallel y \parallel \text{ , } \forall x, y \in H.$$

Mais implication inverse est en générale fausse, supposons, dans $L^2(\mathbb{R})$:
$i)A_n f(x) = f(x + 2n)$ qui converge faiblement vers l'opérateur nul mais elle ne converge pas fortement car :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \parallel A_n f \parallel = \parallel f \parallel$$

n'a pas de limite.
ii)

$$A_n f(x) = f(x) si \mid x \mid < n = 0 si \mid x \mid \geq n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n^2 = A_n et \lim_{n\to\infty} \parallel A_n f - f \parallel = 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R})$.
Alors, $(A_n)_n$ converge fortement vers l'identité sur $L^2(\mathbb{R})$ sans converger uniformément car :

$$\parallel A_n - I \parallel_{\mathcal{L}(H)} = 1\,;\, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Il est utile de rappeler à ce niveau le théorème de Banach-Steinhauss (cf[9]), si $(A_n)_n$ est une suite d'opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ telle que pour tout x dans H, la suite $(A_n x)$ est converge dans H. (respactivement , $\forall x, y \in H$, $(< A_n x, y >)_n$ converge dans $\mathbb{C}$ alors il existe $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $(A_n)_n$ converge fortement (resp.faiblement) vers A.
D'autre part, toute limite forte d'une suite d'opérateurs auto-adjoints est aussi un opérateur auto-adjoint.

Consernant le produit dans $\mathcal{L}(H)$ rappelons aussi les deux résultats suivans :
Si $(A_n)_n, (B_n)_n$, et A et B sont dans $\mathcal{L}(H)$ tels que $(A_n)_n$, et $(B_n)_n$ convergente fortement dans $\mathcal{L}(H)$ respectivement vers A et B alors $(A_nB_n)_n$ converge fortement vers AB.
Néanmoins, $(A_nB_n)_n$ converge faiblement vers AB dès que l'on remplace la convergence forte de $(A_n)_n$ vers A par la convergence faible .
En conclusion, le passage à la limite dans le cas borné préserve le caractère des opérateurs de la suite .
Par contre les opérateurs non bornés les problèmes des domaines rendent la convergence forte en faible peu claire car il se peut que l'intersection des domaines de tous les opérateurs de la suite soit réduite à $\{0\}$. La convergence uniforme est évidemment exclue dans ce cas à cause de la continuté des opérateurs.
La convergence forte ne préserve pas les propriétés de la suite dans le cas non borné, par exemple la limite forte d'une suite d'opérateurs auto-adjoint non bornés n'est pas forcément un opérateur auto-adjoint.

Exemple 1.3.1. *En effet, soit (A,D(A))un opérateur auto-adjoint quelquenque sur H de domaine D(A) dense dans H, posons :*

$$A_n = \frac{1}{n}A,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $D(A_n) = D(A)$ *et* A_n *est auto-adjoint, de plus :*

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = 0,\ \forall x \in D(A)$$

Mais l'opérateur 0 est borné et ne peut être fermé et fortiori non auto-adjoint sur D(A)
Pour analysé le comportement spectral d'opérateurs fermé perturbé plusieurs auteurs on aussi introduits la notion de convergence forte généralisé des opérateurs non borné en faisant intervenir la continuté de la résoulvante et la convergence uniforme des suites de $\mathcal{L}(H)$.

1.3.2 Stabilité de la somme des opérateurs fermés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, $C_1(H)$ désigne l'ensemble de tous les espaces fermés de H alors que $C_2(H)$ est l'ensemble de tous les sous espaces fermés de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Il s'agit dans cette section, d'établir des conditions suffisantes pour que la somme de deux opérateurs A et B de domaines D(A) et D(B) respectivement soit fermés dans H et aussi pour récupérer l'égalité la formule de l'adjoint $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Proposition 1.3.1. *Soient* $M, N \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. *Alors,*

$$M + N \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \Leftrightarrow M^\perp + N^\perp = M \cap N \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$$

Démonstration. Puisque $M + N = (M^\perp + N^\perp)^\perp$, alors M + N est fermé du fait que l'orthogonal d'un sous espace de H est toujours fermé. Inversement :

$$N^\perp \supseteq M^\perp \cap N^\perp$$

et

$$N^\perp \supseteq M^\perp \cap N^\perp$$

entrainent,

$$M \subseteq (M^\perp \cap N^\perp)$$

et

$$N \subseteq (M^\perp \cap N^\perp)^\perp$$

d'où :

$$M + N \subseteq (M^\perp \cap N^\perp)^\perp.$$

De même,

$$M + N \supseteq M \Rightarrow (M + N)^\perp \subseteq M^\perp$$

et

$$M + N \supseteq N \Rightarrow (M + N)^\perp \supseteq M^\perp$$

d'où : $(M + N)^\perp \subseteq M^\perp + N^\perp$ et par conséquent :

$$M + N = (M^\perp \cap N^\perp)^\perp$$

donc,

$$(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$$

Cette égalité étant vraie pour tous M,N dans $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$, on obtient le résultat en remplaçant M par $M^\perp$ et N par $N^\perp$.

Proposition 1.3.2. *Soit* $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) $g(M, N) < 1$.
ii) $M \oplus N^\perp = \mathcal{H}$.
iii) Il existe une **projection** $\mathcal{Q}$ *de* $\mathcal{H}$ *sur* M *telle que* $(I - \mathcal{Q})$ *soit une projection sur* $N^\perp$

Dmonstration :

i)$\Rightarrow$ ii) Soit $x \in M \cap N^{\perp}$, alors :

$$(P_M - P_N)x = (I - P_N)x = P_{N^{\perp}}x = x$$

d'où,

$$\| x \| = \| (P_M - P_N)x \| \, g(M,N) \| x \| < \| x \|$$

Il suit que $x = 0$ et donc $M \cap N^{\perp} = \{0\}$.
En inversant les rôles de M,N, on obtient aussi $N \cap M^{\perp} = \{0\}$.
De ce qui précède, il vient que $(M^{\perp} \cap N)^{\perp} = \overline{M + N^{\perp}} = \mathcal{H}$ Il reste à vérifier que $M + N \perp$ est fermé montrer cette implication. En effet, si $x \in M + N^{\perp}$ alors il existe y, z dans M et $N^{\perp}$ respectivement tels que x = y +z, un simple calcul nous fournit :

$$\| y \|^2 = \frac{\|x\|^2}{(1-g^2(M,N))} \; ; \; \| z \|^2 = \frac{\|x\|^2}{(1-g^2(M,N))}$$

Ainsi, si $x \in M + N^{\perp}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n = y_n + z_n$. Les majorations précédentes montrent alors que $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont des suites convergentes de limites respectives y et z alors $x = y + z \in M + N^{\perp}$.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Si $x \in \mathcal{H}$, alors x = y +z avec $y \in M$ et $z \in N^{\perp}$. On considère l'opérateur $\mathcal{Q}$ tel que $\mathcal{Q}x = y$ et $(I - \mathcal{Q})x = z$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Il est facile de voir que $\mathcal{Q}$ $(I - \mathcal{Q})$ sont des projections sur M et $N^{\perp}$ respectivement, en plus ils sont surjectifs. La continuité de $\mathcal{Q}$ et $(I - \mathcal{Q})$ découle du théorème du graphe fermé.
iii) $\Rightarrow$ *i)* Posons $\mathbb{Q}N = \mathcal{Q}|N$, de normes égales sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{Q}_N$ est bijective de N dans M. Un simple calcul de $\| y \|$ nous fournit

$$\delta^2(M,N) = \| (I - P_N)P_{My} \|^2 \leq (1 - \frac{1}{\|\mathcal{Q}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}$$

Par iii) on a $M \cap N^{\perp} = M^{\perp} \cap N = \{0\}$, puisque si $x \in M \cap N^{\perp}$ on a : $x = \mathcal{Q}x + (1 - \mathcal{Q})x = 2x \Rightarrow x = 0$ on achève la preuve par remarquer que

$$g^2(M,N) = \delta^2(M,N) < 1 - \frac{1}{\|} \mathcal{Q} \, \|^2$$

La somme, aussi naturele qu'elle parait, présente un certain nombre dinsuffisances. En particluier, si $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ alors l'opérateur A+B peut n'avoir aucun sens ou encore peut être un opérateur non fermé (Voir [33], [41]). Si on prend la relation de l'adjoint, les résultats ne sont pas alors plus meilleurs. En effet, l'adjoint de A + B si A et B sont des opérateurs non bornés ne vaut pas exactement $A^* + B^*$. On verra dès lors, que la somme A + B peut être fermée et que $(A + B)^* = A^* + B^*$ si l'on impose des conditions adéquates sur A,B 2 C(H).

La question que l'on se propose de résoudre dans ce chapitre est de trouver des conditions suffisantes pour s'assurer que la fermeture est préservée dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ sous différentes perturbations et de garantir que l'adjoint de la somme est exactement la somme des adjoints. Nous avons vu au chapitre introductif 1 que les théorèmes de **Hesskato**, **Kato – Rellich**, et **Weïst** constituent les premières réponses des problèmes de perturbations des opérateurs fermés, auto-adjoints ou essentiellement auto-adjoints. Rappelons d'abord deux propriétés importantes de la somme de deux sous espaces de $\mathcal{C}1(\mathcal{H})$:

1.3.3 Stabilité du produit des opérateurs fermés

On a mentionné que la trivialité du domaine peut entraver toute opération algébrique sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, et malgré que la situation D(AB) = {0} existe, on ne trouve pas réellement une variété d'exemples la confirmant. Lorsque A = B, examinons de près la construction de Chernoff [5] : D'abord, il remarque que la procédure de naimark [47] est très compliquée en terme de construction, Chernoff utilise la transfomation de Cayley (voir [31]), précisement : Si M et N sont deux sous espaces fermés de $\mathcal{H}$, V une isométrie de M dans N tel que (V - I)M = D est un sous espace dense de $\mathcal{H}$. Alors, l'application V - I est injective et la relation :

$$T = i(V + I)(V - I)^{-1}$$

définit un opérateur symétrique T à domaine dense D. Si :

$$R(V + I) \cap R(V - I) = \{0\}$$

il est clair que $D(T^2) = \{0\}$ où :

$$T^2 = i(2(V - I)^{-1} + I)T$$

Il considère dans cette construction, $\mathcal{H} = L^2(S)$ où S est le cercle unité. M sera l'espace de**Hardy**.

$$H^2(S) := \{f \in hol(S) : \sup(\frac{1}{2\ pi} \int_0^{2\ pi} \mid f(re^{i\theta}) \mid^2 d\theta)^{1/2}\} < \infty$$

où hol(S) désigne l'espace des fonctions holomorphes de S dans $\mathbb{C}$. V sera la multiplication par une fonction convenable $\Omega(\theta)$ de module 1, et $N = VM = \Omega H^2$. L'idée choix de Chernoff consiste à prendre :

$$\begin{aligned} \Omega(\theta) &= exp(ie^{-1/\theta}) \text{ si } 0 < \theta < \pi. \\ &= \text{-1 si } 0 < \theta < \pi \end{aligned}$$

Les propriètés de $\Omega(\theta)$ permettent de construire aisement les ensembles M et N. Nous avons essayé de recenser, dans les études précedentes, toutes les difficultés liées au produit de deux opérateurs fermés sur $\mathcal{H}$, et les cas où la formule de l'adjoint du produit est établie. Donnons à présent un lemme qui nous sera fortement utile dans la suite de cette thèse :

Lemme 1.3.1. *Soit $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, alors*

1) $AB \subset \overline{AB} \subset (B^*A^*)^*$
2) $(I + AB) \subset \overline{(I + AB)} \subset ((I + B^*A^*))^*$

Le produit AB de deux opérateurs fermés A et B (dans cet ordre) tel qu'on l'a présenté auparavant n'est fermé que si l'on impose des conditions particulières.

1.3.4 Produit de Dixmier

Dixmier a essayé, depuis un demi siècle, de contourner le problème de stabilité du produit usuel et celui de la formule de l'adjoint rencontrée dans la littérature mathématique en cette période. Il proposa alors une nouvelle manière de composer deux opérateurs comme suit :

Définition 1.3.1. *Le produit $A.B$ de deux opérateurs A et B est défini de la manière suivante : On dit que $f \in D(A.B)$ et $g := A.Bf$ s'il existe deux suites (f_n) dans D(B) et (g_n) dans R(A) vérifiant $f_n \to f$ et $g_n \to g$ et tels que $A^{-1}g_n - Bf_n \to 0$ (Pour $A^{-1}g_n$ et Bf_n convenablement choisis. A partir de cette définition, Diximier donne un premier résultat concernant la stabilité du produit deux opérateurs fermés.*

Théorème 1.3.1. *Soit $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ Alors :*
i) $A.B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.
ii) $A.B = AB$ si A est borné et B est fermé borné ou si A^{-1} est fermé borné et B est fermé.
iii) $A.B = \overline{AB}$ si A est fermé borné et B^{-1} est fermé ou si A est fermé borné et B fermé.
Concernant la formule de l'adjoint du produit, Le résultat de Dixmier reste limité à la formule :

$$(AB)^* = B^*.A^*$$

Plus récemment, En 2008, Messirdi et Mortad introduisent un nouveau produit d'opérateurs assez général que l'on va donner un aperçu maintenant.

1.3.5 Produit de Messirdi-Mortad

Le produit proposé par Messirdi et Mortad , que l'on note dorénavant produit MM, est inspriré de la notion du bissecteur d'un opérateur fermé développé par Labrousse et mercier (cf[7]) . Soit A un opérateur fermé à domaine dense D(A). Alors l'opérateur $(I + A^*A)$ est fermé (puisque auto-adjoint) et à inverse borné.

Son inverse, noté R_A est positif. En conséquence du lemme de la racine carée on sait qu'il existe un opérateur (unique) $\mathcal{C}$ positif tel que $\mathcal{C}^2 = R_A$. Il est alors légitime de considérer $S_A = (I + A^*A)^{-1/2}$

Proposition 1.3.3. *L'opérateur R_A vérifie :*
i) R_A est borné.
ii) AR_A est borné si A est fermé.
iii) $R(R_A) = D(AA^*)$. iv) $A^*AR_A = I - R_A$. Démonstration. Si A est un opérateur linéaire fermé, il est connu que A^*A est un opérateur auto-adjoint positif. Il vient que $(I + A^*A)1 = R_A$ est un opérateur borné de norme inférieure à 1. De plus, pour tout $u \in D(A^*A) \subset D(A)$ on a,

$$\| AR_Au \|^2 = (R_Au, A^*AR_Au) \leq (R_Au, (1 + A^*A)R_Au) \leq (R_Au, u) \leq \| u \|^2$$

Plus précisement, On a aussi :

$$\forall x \in \mathcal{H} \ \| (1/2 - R_A)x \|^2 + \| AR_Ax \|^2 = 1/4 \| x \|^2$$

par conséquent $\| R_A \| \leq 1 et \| AR_A \| \leq 1/2$.
$OnA^*AR_A = A^*A(\frac{1}{I+A^*A}) = I - R_A$ On peut ajouter, pour $x \in D(A)$ on a $R_AAx = AR_Ax$ de sorte que $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$ et on a aussi $ker(AR_A) = ker(A)$. Donnons à présent quelques propriétés de S_A qui seront utiles dans la suite de ce chapitre.

Proposition 1.3.4. *Pour $toutx \in H$ on a :*

$$\| S_Ax \|^2 + \| AS_Ax \|^2 = \| x \|^2$$

$etR(S_A) = D(A)$.
Démonstration. A partir de l'équation :

$$\| R_Ax \|^2 + \| AR_Ax \|^2 = < x, R_Ax >, \forall x \in \mathcal{H}$$

on obtient :

$$\| S_AS_Ax \|^2 + \| ASASAx \|^2 = \| S_Ax \|^2 \ ; \forall x \in \mathcal{H}$$

et donc AS_A est borné sur $R(S_A)$ avec une norme inférieure à 1. Puisque $R(R_A) \subset R(S_A) \subset D(A)$ est dense dans D(A) relativement à la norme du graphe et du fait que léquation précedente montre que $R(S_A)$ est dense dans D(A) il s'en suit alors que $R(S_A) = D(A)$. On remarque, de cette proposition, que : $\| S_A \|_{\mathbf{B}(\mathcal{H}} \leq 1$ et $\| ASA \|_{\mathbf{B}(\mathcal{H}} \leq 1$ et on a :

Proposition 1.3.5. *Les assertions suivantes sont vérifiées :*
i) Si $x \in D(A)$, $S_{A^*}Ax = AS_Ax$
ii) $(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$
iii)$\ker(AS_A) = \ker(A)$
Démonstration. i) Puisque R_A *est une contraction positive, il existe alors une suite de polynômes* P_n *de degré* 2^{n-1} *vérifiant :*
- $P_n(0) = 0$ - $P_n(R_{A*})A = AP_n(R_A)$ - $\lim \| P_n(R_A) - S_A \|_{\mathbf{B}(\mathcal{H})} = 0$.
Ainsi, si $x \in D(A)$ *alors :*
$S_{A^*}As = \lim_{n\to\infty} P_n(R_{A^*})Ax = lim_{n\to\infty}AP_n(R_A)x = AS_Ax$ *ii) Soit* $x \in D(A)$ *alors :*

$$\forall y \in \mathcal{H} < AS_Ax, y >=< S_{A^*}Ax, y >=< x, A^*SA^*y >$$

de sorte que $AS_A = (A^*S_{A^*})^*$ *; sur D(A) et donc sur tout* $\mathcal{H}$ *puisque D(A) est dense dans* $\mathcal{H}$.
iii) Cette propriété est triviale. Exprimons maintenant le bissecteur d'un opérateur fermé.

Définition 1.3.2. *Soit* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. *Alors le bissecteur de* A *est l'opérateur* $F(A)$ *défini par :* $F(A) = AS_A(I + S_A)^{-1}$.

Il vérifie alors :

Soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ alors :

1) $F(A) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{H})$
2) $(F(A))^* = (A^*)$
3) $R_{F(A)} = \frac{I+S_A}{2}$
4) $F(A)R_{F(A)} = \frac{AS_A}{2}$

Démonstration :
1) :
Soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Alors :

$$\| F(A) \|_{B(\mathcal{H})} \leq \| AS_A \|_{B(\mathcal{H})} \| (I + S_A)^{-1} \|_{B(\mathcal{H})} \leq 1.$$

2) :
On a par la proposition précedente :

$$(F(A))^* = (I + S_A)^{-1}A^*S_{A^*}$$

Par ailleur, Si $x \in D(A^*)$ alors $A^*S_{A^*}x = S_AA^*x$ et parsuite :

$$(A^*S_{A^*} + A^*)x = (S_AA^* + A^*)x$$

Ainsi :

$$A^*(S_{A^*} + I)x = (S_A + I)A^*x$$

Ce qui entraine :

$$F(A)^* = A^*(I + S_{A^*})^{-1}S_{A^*} = A^*S_{A^*}(I + S_{A^*})^{-1} = F(A^*)$$

2) :
On a :

$$I + F(A)^*F(A) = I + (I + S_A)^{-1}A^*S_{A^*}AS_A(I + S_A)^{-1}$$

Puisque :
$A^*S_{A^*}AS_A = S_AA^*AS_A = S_A(I + A^*A)S_A - R_A = S_AR_A^{-1}S_A - R_A = I - R_A$.
Alors :

$$I + F(A)^*F(A) = I + (I + S_A)^{-1}(I - R_A)(I + S_A)^{-1}$$

et parsuite :

$$(I + S_A)^{-1}[(I + S_A) + (I - S_A)(I + S_A)(I + S_A)^{-1}] = 2(I + S_A)^{-1}$$

Alors :

$$R_{F(A)} = (I + F(A)^*F(A))^{-1} = \frac{I+S_A}{2}$$

4). Se calcule directement de **3**)
■

Afin de définir le produit MM ,énnonçons d'abord un théorème dû à Labrousse et Mercier (cf[7])

Théorème 1.3.2. *1. Si $A \in B(\mathcal{H})$. Alors :*

$$\| (A) \|_{B(\mathcal{H})} = \frac{\|(A)\|_{B(\mathcal{H})}}{1+\sqrt{1+\|A\|^2_{B(\mathcal{H})}}}$$

En particulier :

$$\| I \|_{B(\mathcal{H})} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Inversement si $\| F(A) \|_{B(\mathcal{H})} < 1$ *alors :*

$$A \in B(\mathcal{H}) et \| A \|_{B(\mathcal{H})} = \frac{2\|F(A)\|_{B(\mathcal{H})}}{1-\|F(A)\|^2_{B(\mathcal{H})}}$$

2. L'application $T \mapsto F(A)$ *de* $(\mathcal{C}(\mathcal{H}), g)$ *vers* $(C_0(\mathcal{H}), \|\|_{B(\mathcal{H})})$ *est bijective et est ouvert. Si* $A \in C_0(\mathcal{H})$ *alors,*

$$F^{-1}(A) = 2A(I - A^*A)^{-1}$$

Donnons à présent la définition du produit MM*.*

Définition 1.3.3. *Soient* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$*. Le produit* $\bullet$ *de deux opérateurs* A *et* B *est défini par :*

$$A \bullet B = F^{-1}(F(A)F(B))$$

où $F(A)F(B)$ *étant le produit usuel des opérateurs bornés dans* $\mathcal{H}$*. Messirdi et Mortad montrent, à partir des propriètés de l'application F.(cf[8] et [7])*

Théorème 1.3.3. *Soient* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$*.*
1)*. Si* $\| F(A)F(B) \|_{B(\mathcal{H})} < 1$ *alors :*

$$A \bullet B = 2F(A)F(B)(1 - F(B*)F(A^*)F(A)F(B))^{-1}$$

ceci revient à dire que $A \bullet B$ *est borné sur* $\mathcal{H}$ *et :*

$$\| A \bullet B \|_{B(\mathcal{H})} = \frac{2\|F(A)F(B)\|_{B(\mathcal{H})}}{1-\|F(A)F(B)\|^2 B(\mathcal{H})}$$

2)*. Si* $\| F(A)F(B) \|_{B(\mathcal{H})} = 1$ *alors* $A \bullet B$ *est un opérateur non borné, fermé et à domaine dense dans* $\mathcal{H}$ *avec :*

$$D(A \bullet B) = R(I - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B))$$

et pour $y = [I - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B)]x \in D(A \bullet B)$ *on a :*

$$(A \bullet B)y = 2F(A)F(B)x$$

Remarque 1.3.1. *La loi* $\bullet$ *n'est pas commutative, elle est asociative mais n'ayant pas d'élément neutre. Son avantage est qu'elle préserve la fermabilité et l'égalité du produit des adjoints :*

Proposition 1.3.6. *Pour tout* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *on a* $(A \bullet B)^* = B^* \bullet A^*$.

Démonstration : On a $(A \bullet B)^* = F^{-1}((F(A)F(B))^*)$. A partir de la remarque pécedente on a :

$$(A \bullet B)^* = F^{-1}(F(B^*)F(A^*)) = B^* \bullet A^*$$

■

Corollaire 1.3.1. *Si l'un des opérateurs* A *et* B *est borné, alors* $A \bullet B$ *l'est aussi puisque* $\| F(A)F(B) \| B(\mathcal{H}) < 1$ *alors* $A \bullet B \in B(\mathcal{H})$.
Ce corollaire est en fait une propriété qui n'est pas toujours vérifiée pour le produit usuel des opérateurs fermés, ce qui constitue un avantage supplémantaire du produit MM.

Chapitre 2

Les opérateurs non bornés à image fermé

Nous devons connus tous d'abord que $A \in C(H)$. $D(A)$, $N(A)$ et $R(A)$ représente, respectivement, le nom de domaine, le noyau, et l'image de A. A^* est l'opérateur adjoint de $A.B(H)$ est l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés sur H. C (H) est l'ensemble de tous les fermées linéaires opérateurs densément définie sur H.
Nous rappelons que chaque opérateur $A \in C(H)$ peut être considéré comme un borné A_0 opérateur de l'espace de Hilbert D(A) dans H le cas où D(A) est équipé de le produit intérieur graphique

$$\langle x, y \rangle_A = \langle x, y \rangle + \langle Ax, Ay \rangle \ , \ x, y \in D(A).$$

Il est,en particulier, connu qu'il existe un rapport entre la fermeture de R (A), et certaines propriétés topologiques de A_0.
Il est également bien connu que la connaissance que l'image de A est fermé.
ou non est particulièrement important lorsque l'on veut résoudre l'équation de l'opérateur

$$Ax = y \text{ en } H.$$

En effet, en vertue de l'identité $R(A) = N(A^*)^{\perp}$,entre la fermeture $\overline{R(A)}$ de $R(A)$ et le sous-espace orthogonal $N(A^*)^{\perp}$ de $N(A^*)$, nous voir que la fermeture de $R(A)$ implique que l'équation $Ax = y$ est résoluble si l'espace de telle y est le complément orthogonal de la solution à l'équation homogène $A^*z = 0$. Cette dernière information est très utile car souvent $N(A^*)$ est de dimension finie.

Dans le cas de la dimension infinie l'équation peut être résolue par receding le problème à une suite de matrice finie équations (voir e.g Groetsch [3]).
La fereéture de R(A) est équivalente à un régulier dans le sens que A admete un inverse généralisé borné $A^+ \in C(H)$ pour lesquels $A = AA^\dagger A$, de sorte que si y =Ax peut être résolu alors $x = A^+y$ est une solution.
Il existe de nombreuses applications importantes de la fermeture de la plage dans la étude spectrale des opérateurs différentiels et également dans le cadre de la théorie de la perturbation . Dans ce chapitre , nous établissons un certain nombre de résultats concernant la **fermeture** de $R(A)$ si $A \in C(H)$ en utilisant différents concepts de la théorie des opérateurs de base

2.1 Notations et préliminaires

soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et T un opérateur linéaire fermé défini sur un sous-espace dense D(T)dans H1 et à valeur dans H_2
On vas démontrer les résultats suivantes :

i)L'image de T est fermé si et selement si 0 n'est pas point d'accumulation du spectre $\sigma(T^*T)$ de T^*T
en outre :si $H_1 = H_2$ et T auto-adjoint
Alors :

ii)$\inf\{\| Tx \| : x \in D(T) \cap N(T)^\perp \; \| x \| = 1\} = \inf\{| \lambda | : 0 \neq \lambda \in \sigma(T)\}$

iii)Chaque valeur isolée spectrale de T est une valeur propre de T .

iv) Si T est un opérateur auto-adjoint ,l'image de T est fermé si et seulement si 0 n'est pas point d'accumulation de spectre $\sigma(T)$ de T.

v)$\sigma(T)$ est borné implique que T est borné.
Analogique de i et ii dans le cas de T opérateur borné sont bien connus et leurs preuves peuvent être trouvées en fait, pour un opérateur borné T, contient trois preuves de l'utilisation de différents concepts en théorie des opérateurs de base. il est à noter que, tous les résultats sont particulièrement importants dans le contexte de la résolution des équations de l'opérateur de la forme Tx = y
il est bien connu que, compte tenu de tout opérateur T densément défini fermé (éventuellement non borné), l'opérateur

$$\check{T} := (I + T^*T)^{-1}$$

et

$$\hat{T} := (I + TT^*)^{-1} \text{ s}$$

ont définies sur l'ensemble de H_1 et H_2, respectivement, et sont des opérateur. L'idée est d'appliquer les résultats mentionnés ci-dessus opérateur borné sur l'opérateur $\hat{T}$ et $\check{T}$, puis en utilisant certaines relations entre T, $\check{T}$ et $\hat{T}$.
nous avons constaté que la déclaration (iv) parut dans un journal de Beutler, sans preuve. Nous donnons ici une preuve de cette affirmation pour opérateurs auto-adjoints en utilisant des techniques élémentaires qui ne nécessitent pas la même théorie spectrale. en fait, nous prouvons tous les résultats sans utiliser le théorème spectral.
Depuis que nous avons affaire à forte densité définie opérateur linéaire fermé, nous énumérons ci-dessous quelques caractéristiques de ces opérateurs avec Des opérateurs bornés distinguer.

Note :
soit $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$. densément défini. Alors il existe un unique fermé densément défini opérateur $T^\dagger$ de domaine $D(T^\dagger) = R(T) \oplus^\perp R(T)^\perp$ et codomaine C (t) vérifiant les propriétés suivantes :
1)$N(T^\dagger) = R(T^\dagger)$
2)$T^\dagger Tx = P_{\overline{R(T^\dagger)}}x$ pour tout $x \in D(T^\dagger)$
3)$TT^\dagger y = P_{\overline{R(T)}}y$ pour tout $y \in D(T^\dagger)$.
L'opérateur unique est dit l'inverse de Moore-Penrose de T (Rappelons que pour un sous-espace fermé M de l'espace de Hilbert. P_M désigner la projection orthogonale sur l'image M).

Pour tout $y \in D(T^\dagger)$.soit $L(y) := \{x \in D(T) :\| Tx - y \| \leq Tu - y, \forall u \in D(T)\}$. alors $T^\perp(y) \in L(y)$ et $\| T^\perp(y) \| \leq \| x \|$,$\forall x \in L(y)$

n traitement différent de $T^\dagger$ est décrit, où les auteurs appellent l'inverse de Tsenge maximale '
on peut voir que si $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ est injective, alors pour tout $y \in R(T)$, $T^\dagger y = T^{-1}y$.

Définition 2.1.1. *soit $T \in C(H_1, H_2)$. le minimum réduit du module de T est défini par $\gamma(T) := \inf\{\| Tx \| : x \in C(T), \| x \| = 1\}$.*

Certaines propriétés connues $\gamma(T)$ de qui sont répertoriés dans la proposition suivante sont largement utilisés en temps voulu

Proposition 2.1.1. *pour une $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ densément défini , La résultats suivante (1) à (8) sont vrais :*

1) $R(T)$ est fermé.
2)$R(T^*)$ est fermé.
3)$T_0 := T\mid_{C(T)}$ a un inverse borné.
4) $\gamma(T) > 0$.
5)$T^\dagger$ est borné.
6)$\gamma(T) = \gamma(T^*)$.
7)$R(T^*T)$ est fermé.
8)$R(TT)$ est fermé.

Maintenant, nous démontrons deux propriétés de $\gamma(T)$

Proposition 2.1.2. *soit $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ densément défini. alors nous avons ce qui suit :*
1)si R(T) est fermé , Alors $\gamma(T) = \frac{1}{\|T^\dagger\|}$.
2)$\gamma(T^*T) = \gamma(T)^2$

Preuve :
(**1**) : La preuve pour le cas des opérateurs bornés est connu. Dans le cas de l'opérateur fermé aussi, la preuve va dans le même sens. Pour le souci de l'exhaustivité [voir le livre de Messirdi], nous observons que :

$$\| T^\dagger \| = \sup\{\frac{T^\dagger y}{\|y\|} : 0 \neq y \in D(T)\}.$$
$$= \sup\{\frac{T^\dagger y}{\|y\|} : 0 \neq y \in R(T)\}.$$
$$= \sup\{\frac{\|x\|}{\|Tx\|} : 0 \neq x \in C(T)\}.$$
$$= (\inf\{\frac{T^\dagger x}{\|x\|} : 0 \neq x \in C(T)\})^{-1}.$$

(**2**) : Si $\gamma(T) = 0$, Alors en équivalence de (1), R(T) est fermé et $\gamma(T^*T) = 0$, Ensuite, nous supposons que $\gamma(T) > 0$ encore une fois, par l'équivalence de (1), (4) un (5) dans la proposition précedente , R(T) est fermé et $T^\dagger$ est borné .
de sorte que $T^{\dagger *}T^\dagger$ est également borné.donc par (1)et l'utilisation de ce que $(T^*T^\dagger)^* = T^\dagger T^{*\dagger}$. Alors nous avons :

$$\gamma(T^*T) = \tfrac{1}{\|(T^*T)^\dagger\|} = \tfrac{1}{\|T^\dagger\|^2} = \gamma(T)^2.$$

Ceci termine la preuve.
dans la proposition suivante,nous énumérons quelques propriétés élémentaires.

Proposition 2.1.3. *soit $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ densément défini, alors $I+T^*T$ et $I+TT^*$ sont bijectives, denséments définis et des opérteurs fermés, et on a*

$$\hat{T} = (I + TT^*)^{-1},\ \check{T} = (I + T^*T)^{-1}$$

nous avons les propriétés suivantes :
1)$\hat{T}$ et $\check{T}$ sont bornés est auto-adjoints.
2)$T^*\hat{T}$ et $\hat{T}\check{T}$ sont des des opérateurs bornés et positifs.
3)$\hat{T}T \subseteq T\check{T}$ et $\check{T}T^* \subseteq T^*\hat{T}$.
4)$\| (I - \check{T}) \| \leq 1$.
5)$R(I - \check{T}) = R(T^*T)$.

Théorème 2.1.1. *pour $T \in \mathcal{C}(H)$, nous avons les propriétés suivantes :*
1) Si $\mu \in \mathbb{C}$, et $\lambda \in \sigma(T)$, Alors $\lambda + \mu \in \sigma(T + \mu I)$.
2) Si $\alpha \in \mathbb{C}$, et $\lambda \in \sigma(T)$, Alors $\alpha\lambda \in \sigma(\alpha T)$.
3)$\sigma(T^2) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(T)\}$.

2.2 Espaces quotients

Commençons par rappeler la définition algébrique d'un quotient d'espaces vectoriels.

Définition 2.2.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et W un sous-espace de V. Alors le quotient de groupes abéliens V/W, dont l'ensemble sous-jacent est $\{v+W/v \in V\}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé espace* **quotient***, muni de la loi interne :*

$$+ : V/W \times V/W \to V/W$$
$$(v+W, \breve{v}+W) \to (v+W)+(\breve{v}+W) := (v+\breve{v})+W$$

et de la loi externe :

$$\cdot : \mathbb{K} \times V/W \to V/W$$
$$(\lambda, v+W) \mapsto \lambda \cdot (v+W) := (\lambda v)+W.$$

Le $\mathbb{K}$*-homomorphisme :*

$$\pi\ W : V \to V/W$$
$$v \mapsto v+W$$

est appelé **application quotient** *ou* **projection canonique**.

Rappelons aussi que si W est un sous groupe d'un groupe abélien V, on peut définir une relation d'équivalence $\sim W$ en posant $v_{\sim W}$ si et seulement si $u-v \in W$. Les classes d'équivalence sont les v + W tels que $v \in V$ et l'on note V/W l'ensemble de ces classes d'équivalence. C'est un groupe si W < V.
Il faut donc garder en mémoire que dans un espace quotient V/W deux classes v + W et u + W sont égales si et seulement si $u - v \in W$.
Considérons maintenant un espace normé $(X, \| \,.\, \|_X)$ et $M \subseteq X$ un sous-espace. Nous cherchons à savoir si la norme $\| \,.\, \|_X$ induit une norme sur le quotient X/M. Une façon naturelle de définir une distance entre deux classes (à gauche) consiste à utiliser la distance entre sous-ensmbles d'un espace métrique :

$$d(x+M, y+M) = \inf\{\| v-w \|_X \,| v \in x+M, w \in y+M\}.$$

Remarquons que :

$$d(x+M, y+M) = d(x, y+M) = \inf\{\| x-w \|_X \,| w \in y+M\}.$$

(où le deuxièment représente la distance d'un point à un sous-ensemble d'un espace métrique), étant donné que :

$$\{v - w | v \in x + M, w \in y + M\} = \{(x + m_1) - (y + m_2) | m_1, m_2 \in M\}.$$
$$= \{x - (y + m_2 - m_1) | m_1, m_2 \in M\}.$$
$$= \{x - (y + m) | m \in M\} = \{x - w | w \in y + M\}.$$
$$\forall x \in X.$$

En outre, si l'on veut que l'application d ci-dessus définisse une métrique, il est nécessaire que le sous-espace M soit fermé car si $x \in \overline{M}\ M$, on obtient que

$$d(x + M, 0 + M) = d(x, 0 + M) = d(x, M) = 0.$$

Or $x \in \overline{M}\ M$ implique que x < M et donc x + M , 0 + M. Ainsi M doit être fermé si d veut avoir une chance de satisfaire les axiomes de métrique.
Maintenant, si nous voulons que d soit la métrique engendrée par une norme, cette dernière norme doit nécessairement mesurer la distance entre une classe et le point zéro de X/M. Nous pouvons donc poser la dé ?nition suivante.

Définition 2.2.2. *Soit $M \in X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \| .k \|_X)$.*
La **norme quotient** *de l'espace X/M est l'application :*

$$\| \,.\, \|_{X/M}: X/M \to \mathbb{F}\ x + M \mapsto \| x + M \|_{X/M} := d(x + M, 0 + M).$$

Remarque 2.2.1. *pour tout x nous avons,*

d(x+M,0+M)=d(x,0+M)=d(x,M) et d(x+M,0+M)=d(0,x+M).

Vérifions que $\| \,.\, \|_{X/M}$ est bien une norme au sens de la définition précedente de l'espace quotient.

Théorème 2.2.1. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \| .k \|)$. Alors la norme quotient $\| \,.\, \|_{X/M}$ est aussi une norme.*

Proposition 2.2.1. *Soit $M \subseteq X$ un sous-espace fermé d'un espace normé $(X, \| \,.\, \|_X)$. Alors,*

(1) $\| x + M \|\ X/M \leq \| x \|_X$ pour tout $x \in X$;
(2) Pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\overline{x} \in X$ tel que $\overline{x} + M = x + M$ et $\| \overline{x} \|_X < \| x + M \|_{X/M} + \varepsilon$.

2.3 La projection

Soient $\mathcal{H}$ une espace de Hilbert etM, N deux sous-espaces fermé de $\mathcal{H}$.

Définition 2.3.1. *Notons par P_M et P_N la projection orthogonale sur M et N respectivement alors si $x \in M$ la distance $d(x, M)$ entre x et M donné par :*

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \| x - y \|$$

Donc :

$$d(x, M) = \| (I - P_M)x \| = \| x - P_M x \|$$

Définition 2.3.2. *Soient M,N deux sous-espaces fermés de H. On pose :*

$$d(N; M) = \| (I - P_M)P_N \| + \| (I - P_N)P_M \|$$

et :

$$\delta(N, M) = \| (I - P_M)P_N \|$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.1. *(cf.[15]). $d(M, N)$ définit une métrique sur tous les sous-espaces linéaires fermés de H.*

Il s'avère que la métrique $d(N, M)$ est étroitement liée a ce qu'on apelle la métrique entre deux sous-espaces linéaires fermés définie par la formule :

$$g(N, M) = \| P_M - P_N \|$$

H. O. Corde et J. Ph. Labrousse ont montrés dans [15] *que $g(M, N)$ est une métrique sur $C(H, H')$ équivalente à $d(N, M)$ de façon que :*

$$g(N, M) \leq d(N, M) \leq 2g(N, M)$$

Comme le graphe G(A) de l'opérateur fermé A est un sous-espace fermé de l'espace $H \times H$, Alors on a la définition suivante :

Définition 2.3.3. *Soient A, B deux opérateurs fermés de $C(H, H')$ de graphe G(A), G(B).*
Notons par $P_{G(A)}$, $P_{G(B)}$ la projection orthogonal dans $H \times H$ sur G(A) et G(B) respectivement .
Psons :

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \| (I - P_{G(B)})P_{G(A)} \|_{\mathcal{L}(H\times H)} = \delta(G(A), G(B)) \\ \delta(A,B) &= \| P_{G(A)}P_{G(B)} \|_{\mathcal{L}(H\times H)} = g(G(A), G(B))\end{aligned}$$

Définition 2.3.4. *On dit qu'un sous-espace fermé M d'un espace normé X admet un supplémentaire topologique s'il existe un sous-espace fermé N de X tel que X est la somme directe interne de M et N.[(Si M_1, . . . ,M_n sont des sous-espaces fermés d'un espace normé X tel que $\sum_k M_k = X$ et $M_j \cap \sum_{k\neq j} M_k = \{0\}$, alors on dit que X est la somme directe (intérieure) de M_1, . . . ,M_n)]*

Proposition 2.3.1. *Soit X, un espace vectoriel.Un opérateur linéaire $P : X \rightarrow X$ est une projection si et seulement si (I - P) est une projection.*
De plus, si X est un espace vectoriel topologique, P est une projection continue si et seulement si (I - P) est une projection continue.

Proposition 2.3.2. *Soit P, une* **projection** *dans X. Alors* $\ker P = (I - P)(X)$ *et* $P(X) = \ker(I - P)$.

Preuve :
Comme dans la preuve précédente, il suffit de démontrer queker $P = (I - P)(X)$.
L'eautre résultat est un corollaire immédiat, en remplaçant P par (I - P).
Si $x \in \ker P$, (I - P)(x) = x - 0 = x. Donc (I - P)(X) $\subseteq \ker P$.
Réciproquement, si $P((I - P)(X)) = P(X) - P^2(X) = P(X) - P(X) = \{0\}$.
Donc $\ker P \subseteq (I - P)(X)$.

Toute projection continue dans un espace de Hausdorff est à image fermée.
En particulier, les projections continues des espces de Banach sont à image fermée.

Théorème 2.3.1. *Si M et N sont des espaces supplémentaires (au sens algébrique) dans un espace vectoriel X, alors il existe une unique projection P d'***image** *M et de noyau N.*

Preuve :
La preuve se base sur la proposition (algébrique) suivante que nous ne démontrons pas ici.

2.4 Caractérisation spectrale de l'opérateur à image fermé

D'abord, nous exposons deux résultats essenciels qui seront utilisés dans la suite de cette section.
Rappelons que pour $T \in \mathcal{L}(H)$, $T_0 := T\,|_{C(T)}$.

Proposition 2.4.1. *soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur positif. Alors les assertions suivants sont vérifiées :*

(1) $T^\dagger$ est positif.
(2) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma(T_0) \setminus \{0\}$.
(3) $\sigma(T^\dagger) \setminus \{0\} = \sigma(T_0^{-1}) \setminus \{0\}$.
(4) $\sigma(T) = \sigma_\alpha(T)$.
(5) $0 \in \sigma(I+T)$, à savoir $(I+T)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$.
(6) Si $\lambda > 0$, Alors $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in (T^\dagger)$.
(7) Si $0 \in \sigma(T)$, Alors $0 \neq \lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in (T^\dagger)$.

Proposition 2.4.2. *Soit $T \in \mathcal{C}(H_1; H_2)$ densement défini. Soit $\check{T} = (I+T^*T)^{-1} et A = I - \check{T}$ alors :*
(1)$\sigma(A) = \{\frac{\lambda}{1+\lambda} : \lambda \in \sigma(T^*T)\}$.

(2) $\sigma(T^*T) = \{\frac{\mu}{1+\mu} : \mu \in \sigma(A)\}$

Preuve :
nous avons $\mu \in \sigma(A)$ si et selement si il existe $\lambda \in \sigma(T^*T)$ et motre que $\mu = 1 - \frac{\mu}{\mu+1} = \frac{\mu}{1+\mu}$. puisque $I - A = (I + T^*T)^{-1}$ est injective et $T^*T = A(I-A)^{-1}$, nous avons $\lambda \in \sigma(T^*T)$ si et selement si il existe un $\mu \in \sigma(A)$ tell que :

$$\lambda = \frac{1}{1-\mu} - 1 = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

ceci achère la preuve.

Théorème 2.4.1. *Soit $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ est densement défini, Alors R(T) est fermé dans H_2 si et seulement si il existe $r > 0$ tell que $\sigma(T^*T) \subseteq \{0\} \cup [r, \infty)$.*

Preuve :
D'aprés la proposition précedente on a R(T) est fermé si et seulement si $R(T^*T)$ est fermé.il peut être facile de voir que $R(T^*T) = R(A)$, ou $A := I - (I + T^*T)^{-1}$.Notez que A est un opérateurs auto-adjoint non borné dans H_1 . par conséquent R(A) est fermé si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(A^*A) = \sigma(A^2)$ Si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(A)$ maintenant par la proposition précedente 0 n'est pas un point d'acumulation de $\sigma(A)$ si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(T^*T)$, équivalent , il existe un $r > 0$ tell que $\sigma(T^*T) \subseteq \{0\} \cup [r, \infty)$.
dans la partie restante de cette section, nous démontrons quelques propriétés spectrales des opérateurs positifs qui seront utilisés dans la prochaine section.

Théorème 2.4.2. *soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur positif. Si $\sigma(T)$ est borné, Alors T est borné (En particulier, D(T)=H)*

Preuve :
Puisque T est posittive, On a I+T est bijective et $(I + T)^1 \in \mathcal{B}(H)$. Soit $A = T(I + T)^{-1}$ il est claire que A est un opérateur borné. En fais , A est un pérateur positive borné. pour compredre ça : Soit $x \in H$ et $y := (I + T)^{-1}x$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle T(I + T)^{-1}x, x\rangle \\ &= \langle Ty, x\rangle \\ &= \langle Ty, (I + T)y\rangle \\ &= \langle (Ty, y)(Ty + Ty)\rangle\end{aligned}$$

Ansi par la positivité de T, $\langle Ax, x\rangle$ pour tout $x \in H$ montrant qu'il est bien positif .en particulier, A est un opertaor auto-adjointe bornée.
on note T=A(I-A). maintenat puisque $\sigma(A) \neq \emptyset$, On utilisant l'argument semblable à l'utiliser à prouver la proposition précédente, Nous avons $T = A(I - A)^{-1}$ on D(T) and $\sigma(T) = \{\lambda/(1 - \lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.
maintenant on suppose que $\lambda(T)$ est non borné. Alors existe un $k > 0$ tell que $\frac{\lambda}{1-\lambda} \leq k$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$. ce ci ; $\lambda \leq \frac{k}{k+1} < 1$ pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, puisque A est un opérateur auto-adjoint borné. Nou avons $\parallel A \parallel = \sup\{\mid \lambda \mid : \lambda \in \sigma(A)\} \leq \frac{k}{1+k} < 1$. Ansi I-A est bijective et $(I - A)^{-1}$ est un opérateur borné. Maintenant, puisque T est fermé, D(T) est fermé. et par conséquant $T \in B(H)$.

Théorème 2.4.3. *Soit* $T \in \mathcal{L}(H)$ *est un opérateur positive et :*

$$d(T) := \inf\{\mid \lambda \mid : \lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}\}.$$

Alors $\gamma(T) = d(T)$

Preuve :
Nous considérons les deux cas suivants : **cas1** :
$\gamma(T) > 0$. nous savons par la proposition suivante que : Si $\gamma(T) > 0$, Alors R(T) est fermé. dant cet cas T_0^{-1} et $T^{\dagger}$ est borné. Les opérateurs auto-adjoint avec $\| T_0^{-1} \| = \| T^{\dagger} \| = 1/\gamma(T)$.
Depuit la proposition précedente :

$$\gamma(T) = \frac{1}{\gamma(T)} = \frac{1}{\sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T^{\dagger})\}}.$$
$$= \frac{1}{\sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T_0^{-1})\}}.$$
$$= \frac{1}{\sup\{1/|\lambda| : \lambda \in \sigma(T_0)\}}.$$
$$= \inf\{\mid \lambda \mid : \lambda \in \sigma(T_0)\}. = \mathrm{d(T)}\ .$$

cas2 :
$\gamma(T) = 0$. D'aprés la proposition précédente, $T^{\dagger}$ est un opérateur non borné. puisque $\sigma(T^{\dagger})$ est borné. Donc pour chaque $n \in \mathbb{N}$, Alors il existe $\lambda_n \geq n$. maintenant On sais que $\frac{1}{\lambda_n} \in \sigma(T)$.Puisque $\frac{1}{\lambda_n} \to 0$ quand $n \to \infty$, il s'ensuit que d(T)=0.

2.5 La fermeture de l'image

Dans cette section, nous recueillons plusieurs résultats connus la Fermeture de l'image d'un opérateur non borné sur un Espace de Hilbert et nous comprennent d'autres nouveaux résultats équivalents liés à la R_A, et S_A.

Pour tout $A \in C(H)$, les résultats suivante sont vrais :

Proposition 2.5.1. **1)** $R(A)$ *est fermé*

2) $R(A^*)$ *est fermé*

3) $A_0 = A_{|c(A)}$ *a un inverse borné.*

4) $\| Ax \| \geq m \| x \|$. *pour tout* $x \in C(A)$

5) $\gamma(A) = \gamma(A^*)$

6) $\gamma(A) > 0$.

7) A^+ *est borné.*

8) $R(A^*A)$ *est fermé.*

9) $R(AA^*)$ *est fermé.*

10) *0 n'est pas un point d'accummulation de spectre* $\sigma(A^*A)$ *de* A^*A, *ou équivalent, il existe* $\delta > 0$ *tell que* $\sigma(A^*A) \subset \{0\} \cup [\delta, +\infty[$.

11) $R(AR_A)$ *est fermée.*

12) $R(A^*R_{A^*})$ *est fermée.*

13) $H = N(A^*) \oplus R(A)$.

14) $R(AS_A)$ *est fermée.*

15) $R(A^*S_{A^*})$ *est fermée.*

16) $0 \in \nabla\rceil\}(A)$.
où $\nabla\rceil\}(A)$ *est l'ensemble des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $(A - \lambda I)$ *admet une généralisation d'opérateur résolvant analytique dans un voisinage de 0.*

17) A *est régulière (dans le sens où* $N(A^n) \subseteq R(A)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*).*

18) $0 \in \nabla\rceil\}(A^*)$.

19) A^* *est régulier.*

2.6 Opérateurs à image fermé

Soit $\mathcal{K}, \mathcal{H}$ deux espace de Hilbert et $\mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$. l'image et le noyau noté par R_T et N_T respectivement .
Suppose que l'opérateur $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ a image fermé. Le **pseudo − inverse** de T est par la définition, L'unique opérateur déterminé $T^\dagger : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ satisfait :

$$T^\dagger Tx = x, \forall x \in N_{T^\perp} et T^\dagger y = 0, \forall y \in R_{T^\perp}$$

Il est bien connu que l'opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ a image fermé si et semlement si :

$$\gamma(T) = \tfrac{1}{T^\dagger}.$$

soit V,W est sous-espases de méme espace de Hilbert. Si $V \neq 0$, l'écart entre V et W est définit par :

$$\delta(V, W) := \sup_{x \in V, \|x\|=1} dist(x, W) = \sup_{x \in V, \|x\|=1} \inf_{y \in W} \| x - y \|.$$

Par convention, nous utilisons $\delta(0, W) = 0$. Habituellement ? est plus facilement trouvé avec la projection orthogonale P de $\mathcal{H}$ sur $\overline{W}$:

$$\delta(V; W) = \delta(V; \overline{W}) = sup_{v \in V, \|x\|=1} \| x - Px \|.$$

prenant les opétrateurs $T, U \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ nous trouvons :

$$\delta_N := \delta(N_T, N_U).$$

Théorème 2.6.1. *Soit X, Y des $\mathbb{C}-$ espaces de Banach et $T \in B(X, Y)$.*
Alors T est d'image fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que :

$$\| Tx \| \geq c \cdot d(x, \ker T),\ \forall x \in X.$$

Dmonstration :
Soit $\hat{X} := X/\ker T$. Comme X est un espace de Banach, $\hat{X}$ est aussi un espace de Banach, muni de la norme définie par : $\| \hat{x} \| := d(x, \ker A)$.
Ainsi, nous pouvons définir $\hat{T} : \hat{X} \to Y$ par $\hat{T}(\hat{x}) := T(x)$.
Comme $T \in B(X, Y), \hat{T} \in B(\hat{X}, Y)$. De plus, $\hat{T}$ est injective et $R(\hat{T}) = R(T)$.
$\Rightarrow$ Supposons que T soit un opérateur à image fermée. Alors, par linéarité (et donc continuité) de $\hat{T}$, nous pouvons affirmer que

$$\hat{T}^{-1} : imT \to \hat{X}$$

est un opérateur fermé entre espaces de Hilbert. Ainsi, par le théorème du graphe fermé,$\hat{T}^{-1}$ est un opérateur borné et

$$\| T(x) \| = \| \hat{T}(\hat{x}) \| \geq \| \hat{T}^{-1} \|^{-1} \| x \|^{-1} = \| \hat{T}^{-1} \|^{-1} d(x, \ker T)$$

ce qui donne la relation cherchée si l'on pose $c = \| \hat{T}^{-1} \|^{-1}$
(Réciproquement, supposons qu'il existe c tel que : $\| Tx \| \geq cd(x, \ker T), \forall x \in X$.
Soit (x_n), une suite telle que $T(x_n) \to Tx = y$. Ainsi, $(\hat{x}n)$ est une suite de Cauchy.
Comme nous venons d'affirmer que $\hat{X}$ est un espace de Banach, (x_n) converge vers un $\hat{x} \in \hat{X}$. Par conséquent,

$$T(x_n) = \hat{T}(\hat{x}_n) \to \hat{T}(\hat{x}) = Tx = y.$$

Ainsi, T est un opérateur à **image ferm**ée

Théorème 2.6.2. *Soit $T \in B(X, Y)$, comme précédemment.*
S'il existe un sous-espace fermé Y_0 tel que $R(T) \oplus Y_0$ est fermé, alors T est un opérateur à image fermée.

Démonstration :
Posons $T_0 : X \times Y_0 \to Y$, l'opérateur défini par $T_0(x, y_0) := Ax + y_0$.
Muni de la norme donnée par

$$\| (x, y) \| := \| x \| + \| y \|$$

$X \times Y_0$ est un espace de Banach.
Comme $T \in B(X, Y)$, T_0 est un opérateur linéaire borné d'image

$$R(T)_0 = R(T) + Y_0.$$

Par hypothèse, $R(T)_0 = R(T) + Y_0$ est fermé. De plus, $\ker T_0 = \ker T \times \{0\}$, car :

$$y_0 < R(T), \forall y_0 \in \mathcal{Y}_0.$$

On utilise le théorème précédent pour affirmer qu'il existe c $>$ 0 tel que :

$$\| Tx \| = \| T_0(x,0) \| \geq c.d((x,0), \ker T_0) = cd(x, \ker T).$$

Par le même théorème, on conclut que $R(T)$ est fermée.

Corollaire 2.6.1. *Soit $T \in B(X,Y)$, comme avant.*
Si R(T) admet un supplémentaire, alors T est un opérateur à image fermée.

Dmonstration

Il s'agit d'un résultat immédiat du théorème précédent, vu que si im T admet un supplémentaire, il existe Y_0 tel que $imT \oplus Y_0 = Y$ qui est fermé. Par le théorème, im T doit donc être fermée.

Théorème 2.6.3. *Soit $T \in B(X,Y)$, comme avant. Si T(B) est fermé dans Y pour tout sous-ensemble fermé et borné $B \subseteq X$, alors T est d'image fermée.*

DEMONSTRATION

Supposons que R(T) ne soit pas fermée.
Par la preuve du théorème des opérateurs à image fermé, on peut construire une suite (x_n) telle que $T(x_n)$ converge vers 0 avec $d(x_n, \ker T) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
Soit (z_n), une suite de $\ker T$ telle que $\| x_n - z_n \| < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
Posons à présent V, la cloture de l'ensemble $x_n - z_n | n \in \mathbb{N}$. Comme V est un sous-ensemble fermé et borné de X, T(V) est fermé dans $\mathcal{Y}$ par hypothèse du théorème.
Remarquons également que $T(x_n) = T(x_n - z_n)$, ainsi $0 \in T(V)$. Nous avons donc l'existence d'un u $\in V \cap \ker T$ tel que

$$\| u - (xn_0 - zn_0) \| < 1/2,$$

pour un certain $n_0 \in N$.

Cela implique $d(x_n, \ker T) < 1/2$, ce qui contredit $d(x_n, \ker T) = 1$.Ainsi, im T est fermé.

2.7 Perturbation des opérateurs à image fermé

dans cette section on étude la perturbation consernon les opérateurs à image fermé nous comptons tous d'abord sur la la stabilité de Hyers-Ulam et prenons : T, A sont des opérateurs avec des domaines $D(T) \subseteq D(A)$ dans un espace normé X. L'opérateur A est appelé T-bornée si : $\| Ax \| = a \| x \| + b \| Tx \|$pour certains

$a, b \geq= 0$ et tout $x \in D(T)$.
puis sous certaines hypothèses appropriées, nous montrons que les deux T et S : = A + T ont la stabilité de Hyers-Ulam. Nous discutons aussi de la meilleure constante de stabilité de Hyers-Ulam pour l'opérateur S. Ainsi, nous établissons un lien entre les opérateurs T-bornées et la stabilité de Hyers-Ulam .

prliminaires :
Soient X, Y deux espaces normés et T une application linéaire X dans Y. nous disons que T a la stabilité de Hyers-Ulam si il existe une constante K> 0 avec la propriété :

(i) Pour tout y dans l'image R (T) de T, $\varepsilon > 0$ et $x \in X$ avec $\| T(x) - y \| = \varepsilon$, il existe un $x_0 \in X$ tels que :

$$T(x_0) = y \text{ et } \| x - x_0 \| = k\varepsilon.$$

Nous appelons ces $K > 0$ une stabilité de Hyers-Ulam constante T et désignons par K_T la borne inférieure de constantes de tous stabilité de Hyers-Ulam pour T. Si K_T est une constante pour la stabilité de Hyers T-Ulam, puis K_T appelé la constante de stabilité de Hyers T-Ulam pour T.
Si T est linéaire alors la condition (i) est équivalent à : (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x_i n X$ avec $\| Tx \| = \varepsilon$, il existe un $x_0 \in X$ tel que :

$$Tx_0 = 0 \text{ et } \| x - x_0 \| = k\varepsilon.$$

S'il est mis $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$, la condition (ii) est équivalent à :
(iii) Pour tout $x \in X$, il existe un $x_0 \in \mathcal{N}(T)$ tel que $\| x - x_0 \| \leq K \| Tx \|$. Nous renvoyons le lecteur intéressé pour plus de résultats sur la stabilité des différents mappings de papiers [voir le livre deMoslehian, M.S.] et les références citées, et pour les comptes globaux de la stabilité de Hyers-Ulam-Rassias de fonctionnel équations aux monographies [voire l'article de Czerwik, S.]. Dans [voir le livre de Hirasawa, G., Miura], les auteurs ont prouvé le résultat utile suivant .

Théorème 2.7.1. *Soit T un opérateur fermé d'un sous-espace $\mathcal{D}(T)$ d'un espace de Hilbert H.*
dans un espace de Hilbert $\mathcal{K}$. Les assertions suivantes sont vraie : (i) T vérifie la stabilité de Hyers-Ulam.
(ii) T est a image fermé.

En outre, si l'une des conditions ci-dessus est vrai, alors $K_T = \gamma(T)^{-1}$, où :

$$\gamma(T) = sup\gamma > 0 :\| Tx \|\geq\| X \|, X \in \mathcal{D}(T) \cap (\mathcal{N}(t))^{\perp}.$$

(Ici $\perp$ désigne l'orthogonal dans les espaces de Hilbert.) Soit X un espace de Banach et soit M, N être sous-espaces linéaires fermé de X.nous définissons l'quantité :

$$\delta(M, N) := \inf\{\frac{dist(x,N)}{dist(x,M\cap N)} : x \in M \ ,x \in N\}(\leq 1).$$

Si $M \subseteq N$, puis nous fixons $\delta(M, N) = 1$. Évidemment $\delta(M, N) = 1$, si $M \supseteq N$. Il est bien connu que $\delta(M, N)$ n'est pas symétriques par rapport à (M, N). Si $\delta(M, N) = \delta(N, M)$, on dit que le couple (M, N) est régulier. Il est connu que tout couple (M, N) est régulière si X est un espace de Hilbert [voir le livre de Kato, T.].

Dans cette section, nous montrons que si un opérateur T-borné A a la stabilité de Hyers-Ulam puis sous certaines hypothèses appropriées à l'opérateur T et la perturbation

$$\mathrm{S} : = \mathrm{A} + \mathrm{T}$$

Avoir la stabilité de Hyers-Ulam. Nous également discuter de la meilleure constante de stabilité de Hyers-Ulam pour l'opérateur S. Ainsi, nous établissons un lien entre Les opérateurs T-bornées et la stabilité de Hyers-Ulam.

Dans cette section $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ désignent des espaces de Hilbert et A et T sont des opérateurs ayant leurs domaines en $\mathcal{H}$ et leurs images dans $\mathcal{K}$. Nous commençons notre travail avec le théorème suivant.

Théorème 2.7.2. *Supposons que A est un opérateur T-borné avec T-borné un plus petit que 1. Si T est un opérateur fermé opérateur et S : = T + A, alors les résultats suivantes sont vérifies :*

(i) S est la stabilité de Hyers-Ulam.
(ii) S a image fermé.
De plus, si A est fermé et les opérateurs A et T avoir la stabilité Hyers-Ulam et $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(T)$ alors les conditions (i) et (ii) sont équivalentes avec les affirmations suivantes :
(iii) $\delta(M, N) > 0$, où $M = R(A)$ et $N = \mathcal{R}(T)$.
(v) $\delta(M^{\perp}, N^{\perp}) > 0$, $M = R(A)$ et $N = \mathcal{R}(T)$.

Preuve :
L'opérateur S est fermé et l'opérateur A est T-borné et on a T-borné est plus petit à 1, et T est un opérateur fermé . d'aprés le théorème précedent on sais que l'opérateur S a une stabilité de Hyers-Ulam si et seulement si S à image fermé. Par conséquent $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Maintenant, si $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(T)$ et A et T ont la stabilité de Hyers-Ulam alors $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(T)$ sont fermées.[voir Kato, T.].

Remarques 2.7.1. *Si A et T sont des opérateurs fermés comme dans le théorème ci-dessus, les opérateurs A et T ont des stabilité Hyers- Ulam :*

$$S := T + A, \ \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(T)$$

et nous avons $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(T)$ ou $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(A)$, alors $\delta(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(t)) > 0$. D'où l'opérateur S a la stabilité de Hyers-Ulam et donc sa image est fermé.

Corollaire 2.7.1. *Supposons que A est un opérateur T-borné et T-borné et de borne relative strictement inférieure à 1.*
Soit A et T fermés,

$$S := A + T \text{ et } A \text{ et } T \text{ ont la stabilité de Hyers-Ulam.}$$

Supposons qu'au moins l'un des espaces $\mathcal{R}(A)$ ou $\mathcal{R}(T)$ est de dimension finie et supposent que $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(T)$.
Alors, l'opérateur S a les Stabilité Hyers-Ulam et il est a image fermé.

Preuve :
Sans perte de généralité supposons que $\mathcal{R}(A)$ est de dimension finie. On sait qu'il existe $u \in \mathcal{R}(T)$ de telle sorte que $dist(u, \mathcal{R}(A)) = \| u \|$. Par conséquent $\delta(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(T)) = \delta(\mathcal{R}(T), \mathcal{R}(A)) > 0$. Par conséquent opérateur S = T + A a la stabilité de Hyers-Ualm.

Corollaire 2.7.2. *Supposons que A est un opérateur T-bornée , Soit A et T sont supposés fermés tels que,*
S : = A + T et A, T et S ont la stabilité de Hyers-Ulam. Si $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(T) = \{0\}$, alors $\delta(\mathcal{R}(T), \mathcal{R}(A)) = 1$ et

$$K_S \leq \inf \tfrac{1}{\gamma(T)}, \tfrac{1}{\gamma(A)}$$

Preuve :
Chaque $z \in \mathcal{R}(S)$ a une expression unique que z = x+y tels que $y \in \mathcal{R}(t)$ et $x \in \mathcal{R}(A)$. Considérons la projection P de $\mathcal{R}(S)$ vers $\mathcal{R}(T)$ dans selon $\mathcal{R}(A)$, nous avons :

$$1 = \| P \| = \sup_{z\in\mathcal{R}(S)} \frac{\|Pz\|}{\|z\|} = \sup_{y\in\mathcal{R}(T),x\in\mathcal{R}(A)} \frac{\|y\|}{\|x+y\|} = \sup_{y\in R(T)} \frac{\|y\|}{dist(y,\mathcal{R}(A))} = \delta(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(T))^{-1}.$$

Par la définition de $\gamma(T)$, que nous avons $\| Tv \| = \gamma(T) \| V \|$. D'où $\| P \| Tv + AV \| = \| P(Tv + Av) \| = \gamma(T) \| V \|$. Alors $\| Sv \| = \gamma(T) \| V \|$. Depuis $\gamma(S) = \gamma(T)$, nous avons $K_S = 1/\gamma(T)$. Nous pouvons analogue montrer que $K_S = 1/\gamma(A)$. Ainsi $K_S = \inf 1/\gamma(A), 1/\gamma(T)$, une Rappelons que si x, y sont des éléments de l'espace de Hilbert H, alors l'opérateur borné $x \otimes y$ définie sur $\mathcal{H}$ par $(x \otimes y)(z) = \langle z, y\rangle$ x est l'un de rang si x, y sont pas null. Soit x_1, x_2, y des éléments de H tels que $\| x_1 \| = x_2/2$.
Si $A = x_1 \otimes y, T = x_2 \otimes y$ et S = A + T, alors $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(T)$ et $\| Ax \| = \| Tx \| /2$. Il est clair que A, T et S avoir la stabilité de Hyers-Ulam (note qu'ils ont intervalle fermé). Cela nous motive vers la suivante théorème.

2.8 Produit des opérateurs à image fermé

Théorème 2.8.1. *(1) Supposons que B est un opérateur unitaire. Soit A est un opérateur non borné à image fermé. Si B et A commutent (i.e$BA \subset AB$), alors BA est à image fermé.*
(2) Supposons que A est un opérateur unitaire. Soit B est opérateur non borné a image fermé. Si A et B commutent (i.e$AB \subset BA$), puis BA est à image fermé.

Pour obtenir des résultats portant sur produit de l'auto-adjoint, de l'opérateur non borné à image fermé voir [M. H. Mortad,]. Pour les papiers similaires sur la somme de deux opérateurs à image fermé, voir[M. H. Mortad] Un but de cet étude est d'essayer d'obtenir un analogue pour le produit et la some des opérateurs à image fremé, on a :

Théorème 2.8.2. *Soit A et B deux opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert. tels que AB et A sont des opérateurs à image fermé. B Commute avec AA^* si BA est à image fermé.*

Nous rappelons les définitions de base et les résultats sur les opérateurs non bornés. certains importante les références sont [J. B. Conway,I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek,S. Goldberg,W. Rudin].

Le théorème Fuglede-Putnam (voir [B. Fuglede,] et [C. R. Putnam]) est d'un importante capitale.

Théorème 2.8.3. *Soit A un opérateur borné. Soit N et M deux opérateurs non borné à image fermé. Si $AN \subseteq MA$, alors $AN^* \subseteq M^*A$.*
Nous nous éloignons un peu pour dire qu'une nouvelle version de ce fameux théorème a été obtenu , où tous les opérateurs concernés sont sans limites. Voir [M. H. Mortad]. Il est également pratique pour rappeler le théorème suivant qui est apparu dans [J. Stochel], mais nous énonçons dans la forme que nous devons

Théorème 2.8.4. *Si T est un opérateur fermé à image fermé et S un opérateur fermé vérifier $XT^* \subset SX$ où X est un opérateur borné, alors S etT^* sont des opérateurs fermé à image fermé une fois $\ker X = \ker X^* = 0$.*

Exemples 2.8.1. *Soit*

$$Bf(x) = \exp(x^2)f(x) \text{ et } Af(x) = \exp(-x^2)f(x)$$

ayant pour domaines :

$$D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \exp(x^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R})\} \text{ et } D(A) = L^2(\mathbb{R}).$$

Alors A est borné et auto-adjoint . B est auto-adjoint (donc il est fermé).
Maintenant AB n'est pas fermé et n'est pas à nimage fermé comme $AB \subset I$. AB est fermé comme $BA=I$ (dans $L^2(\mathbf{R})$). et on a par conséquent $AB \subset BA$ ce qui implique que :

$$AAB \subset ABA \Rightarrow AAB \Rightarrow AAB \subset ABA \subset BAA.$$

Théorème 2.8.5. *Soit B est un opérateur non borné et fermé et A un opétareur borné telle que AB(resp.BA) et A à des images fermés Alors : BA à image fermé (resp. AB) et $A^*AB \subset BA^*A$.*

2.9 Exemples

Exemples 2.9.1. *Soit $H = \ell^2$. on difinit T sur H par :*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots\dots x_n, \dots\dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots\dots\dots\dots nx_n, \dots\dots)$$

leurs domaines est :

$$D(T) = \{(x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots\dots x_n, \dots\dots) \in H : \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \mid jxj \mid^2 < \infty\}.$$

Il est claire que T est non borné et fermé puisque $T^* = T$. Et puisque $D(T)$ contient c_{00},l'espace de tout suite ayant au plus un nombre fini de termes non nuls,nous avons $\overline{D(T)} = H$ aussi $R(T)$ est fermé, Ici $\gamma(T) = 1$.Maintenant $\sigma_p(T) = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ Nous affirmons que $\sigma_p(T) = \sigma(T)$. on suppose $\lambda \neq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Alors il existe un $\eta > 0$ de telle sorte que $\mid \lambda - n \mid \geq \eta$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. on défini

$$S_\lambda : H \to H \text{ par } S_\lambda(x) = (\tfrac{x_1}{\lambda-1}, \ldots.., \tfrac{x_n}{\lambda-n}$$

Alors S_λ est non borné, $\| S_\lambda \| \leq \frac{1}{\eta}$ et $S_\lambda$est l'inverse de $\lambda I - 1$. Ici d(T)=1, De même, nous pouvons prouver que $\sigma(T^*T) = \sigma(T^2) = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemples 2.9.2. *Sur ℓ^2, On définit un opérateur par :*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots.x_n, \ldots..) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots\ldots\ldots.nx_n, \ldots..)$$

Avec

$$D(T) = \{(x_1, x_2, x_2, \ldots\ldots..,) : \textstyle\sum_{j=2}^{\infty} \mid jx_j \mid^2 < \infty\}$$

donc T=T,T est densément définit et fermé. $N(T) = \{(x_1, 0, 0, \ldots.) : x_1 \in \mathbb{C}\}$ et :

$$C(T) = \{(0, x_2, x_3, \ldots\ldots.., x_n, \ldots\ldots) \textstyle\sum_{j=2}^{\infty} \mid jx_j \mid^2 < \infty\}$$
$$\check{T}(x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \ldots.., \tfrac{x_n}{(n-1)^2+1}, \ldots.).$$

Notons que $\sigma(T) = \{n - 1 : n \in \mathbb{N}\}, \sigma(T^*T) = \{(n-1)^2 : n \in \mathbb{N}\}$ et $\gamma(T) = 1 = d(T)$.
aussi $\| Tx \| \geq \| x \|$ pour tout $x \in C(T)$.

Exemples 2.9.3. *soit $H = \ell^2$ définit un opérateur T sur H par :*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots.) = (x_1, 2x_2, \tfrac{1}{3}x_3, 4x_4, \tfrac{1}{5}x_5, \ldots..)$$

Leur domains :

$$D(T) = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots.) : (x_1, 2x_2, \tfrac{1}{3}x_3, 4x_4, \tfrac{1}{5}x_5, \ldots..) \in H\}$$

Cet opérateur est densément défini depuis son domaine contient c_{00} par ailleurs $T^* = T$,Alors que T est fermé. Nous pouvons facilement montrer que $N(T) = N(T^*) = \{0\}$. Où C (T)=D(T).ça implique que $\overline{R(T)} = H$ nous montrons que R (T) est un sous-espace dense, maintenant on considère

$$(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots \tfrac{1}{n}, \ldots) \in H.$$

nous montrons que ça n'est pas dans R(T).on suppose :

$$(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ...\tfrac{1}{n}, ...) = (x_1, 2x_2, \tfrac{1}{3}x_3, 4x_4, \tfrac{1}{5}x_5, ...)$$

de somme

$$(x_1, x_2, x_3, ...x_n, ...) \in D(T).$$

un petit calcul nous montre que :

$$(x_1, x_2, x_3, ...x_n, ...) = (1, \tfrac{1}{4}, 1, ...\tfrac{1}{6}, 1...) \text{ n'est pas dans } H.$$

maintenant nous calculons $\sigma(T^*T)$. *puisque le spectre est fermé ,* $0 \in \sigma(T^*T)$. *Qui est un point d'accumulation de cette suite* $\{\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$.*ainsi :*

$$\sigma_p(T) = \{1, 2, \tfrac{1}{3}, 4, \tfrac{1}{5}\} \subseteq \sigma(T)$$

Chapitre 3

Opérateurs de Fredholm

Le but de ce travail dans cet chapitre est donner de quelques propriétés des opérateurs de Fredholm dans les deux cas borné et non borné et de l'application indice. Les opérateur de Fredholm sous-entendent opérateurs linéaires et espaces de Hilbert, qui sousentendent espaces vectoriel normés. Ainsi avant d'étudier les opérateurs de Fredholm à proprement parler, il est nécessaire d'étude de bonnes bases d'analyse fonctionnelle.
comme la plupart avec mon encadreur du projet de mon mémoire, dans un souci de lisibilité de notre travail, nous consacrons déja les deux premier chapitres précedentes aux bases de l'analyse fonctionnelle. Le premier constitue simplement un résumé des propriété élémentaires des opérateurs non bornés et des opérateurs linéaires. Le deuxième chapitre présente certaines notions plus spécifiques, commes les quotients, les sommes directes, les opérateurs compacts et à image fermée, Pour plus de détails ainsi que pour les preuves des résultats présentés nous recommandons vivement la lecture du cours "analyse fonctionnelle" du Prof. Stuart ou d'un quelconque livre d'introduction à cette même matière. , que nous utiliserons dans le developpement des opérateurs de Fredholm. Ces notions étant nouvelles pour nous, nous y consacrons un peu plus de temps, essentiellement dans une persepective d'élargissement de nos connaissances personnelles en analyse fonctionnelle.
.
Nous arrivons finalement aux définitions des deux objets qui sont au centre de nos intérêts et qui vont nous occuper jusquŠà la fin de ce travail : les opérateurs de Fredholm et la fonction indice.

Définition 3.0.1. *Soit X et Y deux espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire borné $T : X \to Y$ est appelé un opérateur de* **Fredholm** *si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*
(1)$R(T)$ est fermé dans Y;

(2) $\dim(\ker T)$ *est finie.*
(3) $\dim(Y/R(T)) = \dim(CokerT)$.
Nous noterons $n(T) := \dim(\ker T), d(T) := \dim(CokerT)$ *ainsi que* $\mathcal{F}(X,Y)$ *l'ensemble de tous les opérateurs de Fredholm de* X *dans* Y.

Définition 3.0.2. *L'indice d'un opérateur de Fredholm est la fonction à valeurs entières suivante :*

$$\begin{aligned} ind \ &: \ \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbb{Z}. \\ &\quad T \mapsto ind(T) := \dim(\ker T) - \dim(CokerT) \end{aligned}$$

Exemple : Considérons deux espaces de Hilbert X et Y de dimension finie. (Par exemple $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.) Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu.
Supposons que, $\dim(\ker T)$ et $\dim(Co\ker T)$ sont finies et$R(T)$ est fermée, étant de dimension finie. Alors,

$$\begin{aligned} ind(T) &= \dim(\ker T) - \dim(CokerT) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y/R(T) \\ &= \dim(\ker T) - (\dim(Y) - \dim(R(T)) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y) + \dim(R(T)) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.1 Opérateurs de Fredholm bornés

Dans cette section, On étudie les opétrateurs semi-Fredholm et les opérateurs de Fredholm dans le cas borné.
Ainsi que leur stabilité .
On s'intéresse aussi aux propriétés fondamentales de ces opérateurs, à savoir l'alternative de Frédholm et la théorie perturbation .
Dans toute ce qui suite on note $\mathcal{L}(H, H^{'})$ l'ensemble des opérateurs boenés d'un espace de Hilbert H dans un autre espace de Hilbert $H^{'}$ et $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H, H^{'})$.

Définition 3.1.1. *soit $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$.*
A est dit un opérateur **semi − Fredholm** *à* **droite** *(respectivement à gauche) s'il existe un opérateur borné $B \in \mathcal{L}(H, H^{'})$ et un opérateur K compact sur $H^{'}$ (respectivement sur H) tels que AB=1+K (respectivement BA=1+K)*

Proposition 3.1.1. *Si $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$, Alors $R(A-\lambda)$ est fermé dans $H^{'}$ et* $\dim\ker(A-\lambda) = \dim\ker(A-\lambda)^* < \infty$.

.

Preuve :
supposons que $\lambda \in \sigma(A)$.
Posons $\Delta = \sigma(A)\setminus\{\lambda\}$, $H_\lambda = E(\lambda)$, $H_\Delta = E(\Delta)H$, $A_\lambda = A\setminus H_\lambda$ et $A_\Delta = A\setminus H_\Delta$.
$\lambda \notin \sigma(A_\Delta$, Alors $A_\Delta - \lambda$ est inversible.
Mais $R(A_\Delta - \lambda) = E(\Delta)H = H_\Delta$.
Comme $R(A-\lambda) = (A-\lambda)H_\lambda + (A-\lambda)H_\Delta = R(A_{\lambda-\lambda}) + H_\Delta$,et , $\dim H_\lambda < +\infty$ alors $R(A-\lambda)$ est fermé.
Remarquons que :

$$H/R(A-\lambda) \approx H_\lambda/R(A_\lambda - \lambda)$$

Comme $\dim H_\lambda < +\infty$, alors : $\dim[H/R(A-\lambda)]$=$\dim H_\lambda$-$\dim R(A_{\lambda-\lambda})$= $\dim\ker(A-\lambda) < +\infty$ car $\ker(A-\lambda) \subseteq E(\lambda)H = H_\lambda$.
Mais $[H/R(A-\lambda)]^* = [R(A-\lambda)]^\perp = \ker(A-\lambda)^*$, par conséquent $\dim\ker(A-\lambda) = \dim(\ker(A-\lambda)^* < +\infty$.

Proposition 3.1.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$.*
A est **semi − Fredholm** *à* **gauche** *si R(A) est fermé dans $H^{'}$ et* $\dim\ker a < +\infty$

.

Preuve :
Supposons que A est semi-Fredholm à gauche c'est-à-dire il existe un opérateur B borné de $H^{'}$ dans H et un opérateur compact K sur H , tel que $BA = 1 + k, \ker BA = \{x \in H; BAx = 0\} \supset \{x \in H; Ax = 0\} = \ker A$.

Donc $\ker BA \supset \ker A \Rightarrow dim \ker A \leq \dim \ker BA$.
D'autre part $\ker BA = \ker(1 + k)$, et 1+K est le sous-espce propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$, Donc il est de dimension égale à 1 qu'elle est fini, par conséquent $\dim \ker A \neq +\infty$.
$R(BA) = \{BAx; x \in H\} = \{(1 + K)x; x \in H\} = R(1 + K)$.
D'aprés la proposition qu'elle suivre les opérateurs semi-Fredholm à droite, On a R(BA) est fermé dans H, donc il existe $c > 0$ tel que :

$$\| BAh \| \geq c \| h \|, \forall h \in H .$$

Si $h \in (\ker BA)^{\perp}$, alors $c \| h \| \leq \| Ah \| \| B \|$ ou bien $\| Ah \| \geq (c/ \| B \|) \| h \|$
Donc $A(\ker BA)^{\perp}$ est un fermé.
Mais $R(A) = A(\ker BA)^{\perp} + A(\ker BA)$ et comme $A(\ker BA)$ est de dimension fini par conséquent, R(A) est fermé dans $H^{'}$.

Proposition 3.1.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$, Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1)A est semi-Fredholm à gauche.
2)R(A) est fermé dans $H^{'}$ et $\dim \ker A < +\infty$.
3)il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(H, H^{'})$ et un opérateur F de rang fini sur H tel que BA=1+F.

.

Preuve :
1) $\Rightarrow$ 2) d'aprés la proposition précedente de les opérateurs semi-Fredolm à gauche
.
2) $\Rightarrow$ 3) .On pose $A_1 = A/(\ker A)^{\perp}$, Alors A_1 est inversible de $(\ker A)^{\perp}$ dans R(A).
En effet, Montrons que A_1 est bijective.
A_1 est surjective.
Soit $y \in R(A)$. cherchons $x \in (\ker A)^{\perp}$ tel que $A_1 x = y$.
Comme $y \in R(A)$ Alors il existe $t \in H$ tel que y=A(t).D'autre part, comme $\ker A$ est fermé, on a d'aprés le théorème de la projection orthogonale :

$$H = \ker A \oplus (\ker A)^{\perp}$$

Par conséquent :

$$t = t_1 + t_2$$

avec $t_1 \in \ker A$ et $t_2 \in (\ker A)^{\perp}$.
$t_2 = p(t)$ où p est la projection orthogonale sur $(\ker A)^{\perp}$ et q=1-p est la projection orthogonale sur $\ker A$ dans H.

posons $x = t_2 \in (\ker A)^{\perp}$, $A_1 x = A_1 t_2 = A t_2 = A t = y$.
A est injective.
$A_1 x = 0 \Rightarrow x = 0...???$
Soit $x \in (\ker A)^{\perp}$ tel que :

$$A_1 x = 0$$

Alors

$$x \in \ker A \cap (\ker A)^{\perp} = \{0\}$$

Donc

$$\mathrm{x{=}0}$$

D'ou A_1 existe.
Soit $p^{'}$ la projection sur R(A) dans $H^{'}$, et définissons B de H dans $H^{'}$ par :

$$B = A_1^{-1} p^{'}$$

Calculons BA. Soit $x \in H$, $x = x_1 + x_2$ ou :

$$x_1 \in \ker A \text{ et,}$$
$$x_2 \in (\ker A)^{\perp}$$

Alors $BA(x) = A_1^{-1} p^{'} A x = A_1^{-1} A x_2 = A_1^{-1} A x_2 = A_1^{-1} A_1 x_2 = x_2 = x - x_1$.
Si F=-q où q est la projection dans H sur $\ker A$, Alors :

$$\mathrm{BA = I + F}$$

et

$$R(F) = R(q) = \ker A$$

Or d'aprés l'assertion 2, on a$\ker A$ de dimension fini alors R(F) de rang fini et donc compact.
3) $\Rightarrow$ 1) d'aprés la définition d'opérateur semi-Fredholm à droite , avec K=F.
Si R(A) est fermé dans $H^{'}$ et dim $\ker A < +\infty$ et $codim R(A) < +\infty$ alors on a par la définition suivante :

Définition 3.1.2. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$.*
A est dit un opérateur de Frédholm si les trois conditions suivante sont verifieés :

1)$R(A)$ est fermé.

.
*2)*dim$(\ker A)$ *est finie.*
.
3)codim(R(A)) est fini.

Remarque 3.1.1. *la troisième condition est équivalent à :*

$$dim(H/R(A)) = \dim(co\ker A) < +\infty$$

Notation :
On note l'ensemble des opérateurs de Fredholm bornés de H dans H' par $\mathcal{F}(H, H')$.
On peut définir les opérateurs de Fredholm d'une autre manière équivalente en utilisant les sous-espaces de codimension fini.

Définition 3.1.3. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H')$ avec $(X. \| \,.\, \|_x)$ et $(Y. \| \,.\, \|_Y)$ des espaces de Banach.*
A est dit un presque plongement de X dans Y s'il existe un sous-espace X_1 de X de codimention finie et une constante $K > 0$ tel que :

$$\| Ax \|_Y \geq k \| x \|_X \ ; \forall x \in X_1$$

Remarque 3.1.2. *Si A est un presque plongement et $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ est assez proche de A, Alors (A+B) est presque plongement de X dans Y.*
En effet :

$$\begin{aligned} \| (A + B)x \|_Y = \| Ax + Bx \|_Y \geq \| Ax \|_Y - \| Bx \|_Y \\ . \geq k \| x \|_X - \| B \| \| x \|_X \geq (k - \| B \|) \| x \|_X \end{aligned}$$

Si $\| B \| < k$, ona le résultat.

Proposition 3.1.4. *Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un opérateur presque plongement alors le noyau de A est de dimension finie.*

Preuve :
Comme A est un presque plongement, il vérifie la condition (1) sur le sous-espace X_1 de X de codimension finie.
Cherchons maintenant $\ker(A) \cap X_1$.
Si $x \in \ker(A) \cap X_1$ alors :

$$\begin{cases} x \in \ker & \text{A} \\ x \in X_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax = & 0 \\ x \in X \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Alors A est injective sur X_1 ailleurs qu'en 0. Donc on a $\ker A \cap X_1 = \{0\}$, et alors :

$$\ker A \subset (X/X_1) \cup \{0\}.$$

D'où :

$$dim \ker A \leq codim X_1 < +\infty$$

Proposition 3.1.5. *Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est un opérateur presque plongement alors l'image par A de tout sous-espace fermé de X est fermé dans Y.*

Preuve :
Soit Z un sous-espace fermé de X, montrons que A(Z) est fermé dans Y.
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A(Z) convergente vers y dans Y ; alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Z tell que :

$$Ax_n = y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

D'aprés la relation (1) ,on a :

$$\| A(x_m - x_n) \|_Y \geq c \| x_m - x_n \|_X$$

ou bien :

$$\| x_m - x_n \|_X \leq c^{-1} \| Ax_m - Ax_n \|$$

Comme $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors :

$$\| x_m - x_n \|_X \to 0$$

c'est-à-dire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cauchy dans Z qui est complet car un fermé dans un complet est complet, par conséquent elle converge vers x dans Z.
par continuité de A :

$$y = Ax \in A(Z)$$

Alors A(Z) est fermé dans Y.

Remarque 3.1.3. *Si A est un presque plongement de X dans Y et Z est un sous-espace fermé quelconque de X, on écrit $Z = (Z \cap X_1) \oplus F$ avec F de dimension finie, alors $A(Z) = A(Z \cap X_1) + A(F)$ est fermé comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie.*

Proposition 3.1.6. *Soit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, alors A est Fredholm de X dans Y si A est presque plongement dont l'image est de codimention fini.*

La preuve découle du lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, est un presque plongement si et selement si son noyau est de dimension finie dans X et son image est fermé dans Y.*

Remarque 3.1.4. *Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est de Fredholm, Alors A est presque plongement grâce au lemme précedent.*

Définition 3.1.4. *On appelle* **indice** *de A est on la note ind(A) l'entier relatif :*

$$ind(A) = dim \ker(A) - codim R(A)$$

Proposition 3.1.7. *Soit $A \in \mathcal{L}(H,H^{'})$.*
Si A est bijectif alors A est de Fredholm d'indice est nul.

Preuve :
Comme A est bijectif, Alors $\ker A = \{0\}$, par conséquent $dim \ker A < +\infty$.
De plus $R(A) = H^{'}$ est un fermé et codimR(A)=0.
donc l'opérateur A est de Fredholm .

$$\begin{array}{c} ind(A)\text{=dim ker A-}co\text{dim R(A)} \\ \text{=0 - 0 = 0} \end{array}$$

Exemple 3.1.1. *Soient $H = H_0 + H_1 + ... + H_n$ où les $(H_i)_{0<i<n}$ sont des espaces de Hilbert, $\forall i \in \{0,1,2,....n\}$, et $\dim H_1 = \alpha$, $\forall i \in \{0,1,2,...n\}$.*
On définie l'opérateur A par :

$$\begin{array}{c} A : H \to H \\ x \to Ax = (0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \end{array}$$

avec $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$.
Calculons A^* :

$$\begin{array}{c} A^* : H \to H \\ x \to A^* x \end{array}$$

$$Ax = y \Rightarrow A(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (y_0, y_1, y_2, ..., y_n).$$
$$\Rightarrow (0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (y_0, y_1, y_2, ..., y_n)$$
$$\Rightarrow 0 = y_0, x_0 = y_1, ..., x_{n-1} = y_n, x_n = 0.$$

alors :

$$A^* : H \to H$$
$$x \to A^*(x) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0)$$

D'autre part $AA^* = A^*A = I$ *donc* A *est semi Fredholm d'indice nul.*

Proposition 3.1.8. *Si* $dimH < +\infty$, *et* $dimH^{'} < +\infty$, *alors* A *est de Fredholm. Dans ce cas*

$$ind(A) = \dim\ H - \dim\ H^{'}$$

Preuve :
Comme $\dim H < +\infty$, et $\dim H^{'} < +\infty$ alors $\dim\ker A < +\infty$,codim $R(A) < +\infty$ et R(A) est fermé donc A est de Fredholm.

$$\text{ind(A)} = \dim\ker A\text{-codim R(A)}$$
$$= \dim\ker A \text{ - } \dim\ H^{'} + \dim \text{R(A)}$$
$$= \dim H - \dim H^{'}$$

Théorème 3.1.1. *Soit* $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$.
A est de Fredholm si et selement si A^* *est Fredholm.*
Dans ce cas

$$ind(A) = -ind(A^*).$$

La pereuve du théorème décuoule directement des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1.2. *(cf.[17]) Soit M un sous espace fermé d'un espace de Banach X, alors ona :*

$$M^* \simeq X^*/M^{\perp}$$
$$(X/M) \simeq M^{\perp}$$

Lemme 3.1.3. *(cf.[17]) Soit A un opérateur borné défini de X dans Y avec X et Y deux esapces de Banach, Alors R(A) est fermé dans Y si et semlement si :*

$$R(A^*) \text{ est fermé dans } X^*$$

.

Preuve :
Si A est de Fredholm, montrons que A^* l'est aussi Comme R(A) est fermé. en vertu de lemme précedent que $R(A^*)$ est fermé.
Calculons $\dim\ker A^*$ et codim $R(A)$.
Appliquons le premier de deux lemme précedent avec M=R(A).

$$\dim \ker A^* = \dim(R(A))^{\perp} = \dim(H/R(A))^* = co\dim R(A) < +\infty$$

.

$$codimR(A^*) = \dim(H/R(A^*) = \dim(H/(\ker A)^{\perp})$$
$$= \dim(\ker A)^* = \dim \ker A < +\infty$$

par conséquent A^* est un opérateur de Fredholm.

.

$$ind(A^*) = \dim \ker A^* - codimR(A^*)$$
$$.$$
$$= codimR(A) - \dim \ker A\ .$$
$$= \text{-ind(A)}$$

L'implication est vraie en vertu de la relation $A^{**} = A$. .

3.1.1 Concepts liés aux opérateurs de Fredholm

Un opérateur de Fredholm étant un opérateur borné à image fermée dont les dimensions du noyau et du conoyau sont finies, nous aurons besoin d'approfondir les quelques notions ci-dessous avant d'étudier les opérateurs de Fredholm à proprement parler.

1) Les espaces quotients, liés au conoyau d'un opérateur.

2) Les sommes directes et projections, qui permettent d'obtenir certains opérateurs de Fredholm.

3) Les opérateurs adjoints liés à l'indice.

4) Les opérateurs compacts qui serviront à caractériser les opérateurs de Fredholm.

5) Les opérateurs à image fermée, car les opérateurs de Fredholm sont à image fermée.

3.1.2 Produit d'opérateurs de Fredholm

.

Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice d'une composition d'opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices des composants.
.

Proposition 3.1.9. *Soit* $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$.
Soient $M \subset H$ *tel que* $\operatorname{codim} M = n < +\infty$, *et* $A_0 = A/M$.
A est de Fredholm si et seulement si :

$$A_0 : M \to H^{'}.$$
$$\textit{est de Fredholm}$$

De plus :

$$ind(A)=ind(A_0)+n$$

.
Preuve :
.
La preuve se fait par récurence sur la codimension de M est fini.
pour n = 1
on pose :

$$H = M \oplus \langle x_1 \rangle$$

où $\langle x_1 \rangle$ est le sous-espace engendré par un vecteur $x_1 \neq 0$ de H.
$\forall x \in H$, $x = x_0 + \lambda x_1$ alors $Ax = Ax_0 + \lambda Ax_1$, $x_0 \in M$.
Envisageons deux cas :
1) : Si $y_1 = Ax_1 \notin R(A_0)$ Alors :

$$R(A) = R(A_0) \oplus \langle y_1 \rangle.$$

D'autre part :

$$\ker A_0 = \ker A$$

En effet,

$$\ker A_0 = \{x^{'} \in M; A_0 x^{'} = 0\}$$

.
et :

$$\ker A = \{x^{'} \in H; Ax^{'} = 0\}$$

On a $\ker A_0 \subset \ker A$. Il reste à montrer que que $\ker A \subset \ker A_0$.
Si $x \in \ker A$, Alors Ax $=$ 0.
D'autre part :

$$x = x^{'} + \lambda x_1$$

Alors :

$$Ax = Ax^{'} + \lambda x_1 = 0$$

-
Donc :

$$Ax^{'} = A_0 x^{'} = -\lambda A x_1$$

Ce qui implique que :

$$y_1 = 0 \text{ et } A_0 x^{'} = 0$$

Cela veut dire que $x^{'} \in \ker A_0$.
Alors :

$$\dim \ker A = \dim \ker A_0$$

et :

$$\text{codim}\, R(A) = \text{codim}\, R(A_0) + 1$$

Donc :

$$\begin{gathered} \text{ind(A)} = \dim \ker A_0 \text{ - codim}\, R(A_0) + 1 \\ = \text{ind}(A_0 + 1) \end{gathered}$$

2)
Si $y_1 = Ax_1 \in R(A_0)$ alors :

$$\text{R(A)=R}(A_0)$$

et il existe un $u \in M$ tell que :

$$y_1 = A_0(u)$$

De plus :

$$\ker A = \ker A_0 \oplus \langle x_1 - u \rangle$$

En effet,

$$x = x^{'} + \lambda x_1, \text{ où } x^{'} \in M \text{ et } x_1 \in H.$$

$$Ax = Ax^{'} + \lambda y_1 = A_0 x^{'} + \lambda A_0 u = A_0(x^{'} + \lambda u)$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow A_0(x^{'} + \lambda u) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{'} + \lambda u \in \ker A_0 \Leftrightarrow x^{'} \in \ker A_0 - \lambda u$$

et

$$\dim \ker A = \dim \ker A_0 + 1$$

Donc :

$$\begin{cases} ind(A) = \dim \ker A_0 + 1 - co\dim R(A_0) & . \\ = ind(A_0 +)1 & . \end{cases}$$

Il reste à montrer que $R(A_0)$ est fermé.
Comme R(A) est fermé alors il existe $c > 0$ tel que :

$$\| Ax \|_{H'} \geq c \| x \|_H, \forall x \in H.$$

A_0 vérifie aussi la même estimation, par conséquent $R(A_0)$ est fermé dans $H^{'}$.
le cas n=2 s'obtient de la même façon en décomposant H de la manière suivante :

$$H(M \oplus \langle x_1 \rangle) \oplus \langle x_2 \rangle = M^{'} + \langle x_2 \rangle.$$
où $M^{'} = M \oplus \langle x_1 \rangle$ et $A_0 = A/M^{'}$.

$$ind(A) = ind(A_0) + 2$$

Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle resre vraie à l'ordre n+1, cest-à-dire :

$$H = M \oplus X^{'}$$

avec $\dim X^{'} = n + 1$.
Quitte à enlever un vecteur a de la basse de $X^{'}$, On peut écrire

$$X^{'} = X \oplus \langle a \rangle$$

où

$$\dim X = n,\ H = M \oplus X \oplus \langle a \rangle = M^{'} \oplus \langle a \rangle = M^{''} \oplus X.$$

où :

$$M = M \oplus X, \text{ et } M^{''} = M \oplus \langle a \rangle.$$

D'aprés les deux cas précédents, On obtient le resultat :

$$ind(A) = ind(A_0) + n + 1$$

■

Définition 3.1.5. *Soit $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$ un opérateur de Fredholm .*
Alors $\ker A$ *et R(A) admettant des supplémentaires. On peut écrire* $H = \ker A \oplus H_0$ *et $H^{'} = R(A) \oplus H_0^{'}$ avec H_0 et $H_0^{'}$ sont deux espaces de Hilbert .*
Comme $H_0 \simeq R(A)$, alors on définit l'application bijective suivante :

$$\tilde{A} : H \times H_0^{'} \to H^{'}.$$
$$(x_0, y_0) \to Ax_0 + y_0$$

On appelle $\tilde{A}$ la bijection associée à A.

.

Le théorème suivante nous donne une caractérisation importante de l'indice du produit des opérateus de Fredholm bornés.
Avant d'évaluer le théorème, il est utile de donner les deux lemmes suivants.

Lemme 3.1.4. *(cf.[9] Soit M est sous-espace véctoriel fermé de codimension finie dans un sous-espace de Hilbert H.*
i) Pour tout sous-espace vectoriel V de H, il existe un sous-espace vectoriel N de H de dimension finie inclu dans v tel que :

$$\overline{V} = \overline{V} \cap M \oplus N$$

ii) Si V est dense Dans H alors $V \cap M$ est dense dans M.

Lemme 3.1.5. *(cf.[9]) soient H un espace de Hilbert et A un opérateur fermé à image femé dans H.*
.
Si M est un sous-espace véctoriel de H (non nécessairement fermé dans H) tel que $M + \ker\ A$ est fermé dans H alors AM=R(A/M) est fermé dans H.
En particulier, Si M est fermé dans H et $\dim \ker A < +\infty$, Alors AM est fermé dans H.

Théorème 3.1.2. *Soient $H, H^{'}, H^{''}$ trois espaces de Hilbert et :*

$$A : H \rightarrow H^{'},$$
$$B : H^{'} \rightarrow H^{''}\ .$$

deux opérateurs de Fredholm bornés

Alors :

$$BA : H \rightarrow H^{''},\ \textit{est un Fredholm borné.}$$

et :

$$\textit{ind(BA)=ind(A)+ind(B).}$$

.

Preuve :
AB est évidemment borné sur H .
$\ker(AB) = B^{-1}(\ker A)$ est de dimension finie puisque $\ker A$ est de dimension finie . Ainsi en vertu du lemme précédent , R(AB) est fermé dans H.
Considérons L'application :

$$\eta : \ker(AB)/_{\ker B} \to R(B) \cap \ker A$$

$$\tilde{x} \to \eta(\tilde{x}) = Bx$$

η est bien définit car si $\tilde{x} = \tilde{y}$ alors $x, y \in \ker(AB)$ et $(x - y) \in \ker B$.donc

$$B(x - y) = B(x) - B(y) = 0 \text{ par suite } \eta(\tilde{x}) = \eta(\tilde{y})$$

D'autre part, Si $\tilde{x} \in \ker(AB/_{\ker B}$ alors $x \in \ker(AB)$ et donc $Bx \in \ker A$.
η est par la construction linéaire surjective.
η est aussi injective :

$$\eta(\tilde{x}) = Bx = 0 \Rightarrow x \in \ker B \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{0}$$

η est alors un isomorphisme d'espace vectoriel et :

$$\dim \ker(AB)/_{\ker B} = \dim(R(B) \cap \ker A$$

ou bien :

$$\dim \ker(AB) = \dim \ker B + \dim(R(B) \cap \ker A) < +\infty$$

Soit N un supplémentaire de $(R(B) \cap \ker A)$ dans $\ker A$:

$$\ker A = (R(B) \cap \ker A) \oplus N$$

Alors :

$$\dim \ker A = \dim(R(B) \cap \ker A) + n, \text{ ou } n = \dim N$$

On a aussi $R(B) \cap N = \{0\}$, car si $y = Bx \in N \subset \ker A$,
Alors $Ay = ABx = 0$ donc $y \in (R(B) \cap \ker A) \cap N = \{0\}$.
Comme R(B) est fermé dans H et $\dim N < +\infty$, alors $R(B) \oplus N$ est aussii fermé dans H.

On peut aussi trouver d'aprés le lemme précedent un sous-espace vectoriel M de H de dimension fini qui complète $R(B) \oplus N$ dans H, c'est-à-dire :

$$H = R(B) \oplus N \oplus M.$$

Par conséquend, $co\dim R(B) = \dim(N \oplus M) = n + m < \infty$, ou $m = \dim M$.
Or , $\ker A = (R(B) \cap \ker A) \oplus N \subset R(B) \oplus N$.ceci implique que A est injective sur M et puisque $AN = \{0\}$, et :

$$AH = A(R(B) \oplus AM)$$

(En général,Si $H = U \oplus V$ où $\ker A \subset U$ et Vest un sous espace vectoriel De H, alors A est injective sur V et $AH = AU \oplus AV$).
D'autre part , $R(AB) = \{ABx, x \in H\} = A(R(B)) = R(\tilde{A})$ où $\tilde{A} = A_{R(B)}$ $co\dim(R(AB)) = \dim H/_{R(AB)} = \dim H/R(\tilde{A})$.
D'aprés (4) , On a $R(A) = R(\tilde{A}) \oplus AM$ et alors : $co\dim(R(AB)) = co\dim(R(AB)) = co\dim(R(A)) + \dim AM$.
Comme A est injective sur M alors $\dim AM = \dim M = m$ et Alors :

$$co\dim(R(AB)) = co\dim(R(A)) + m < \infty$$

En utilisant (2),(3), et (5), on voit que AB est de Fredholm sur H et on a :

$$ind(AB) = \dim\ker(AB) - co\dim(R(AB)).$$

$$= \dim(\ker B) + \dim(R(B) \cap \ker A)) - co\dim(R(A)) - m.$$

$$=\dim(\ker B) + \dim(\ker A)) - n - co\dim(R(A)) - m.$$

$$=\dim(\ker B) - n - m + ind(A).$$

$$=\dim(\ker B) - co\dim(R(B)) + ind(A).$$

$$= \text{ind(B)+ind(A)}$$

■

3.1.3 Alternative de Fredholm

K(H) est l'ensemble des opérateurs copmacts de H dans lui mâme.(Ici : $H = H^{'}$).
K(H) est idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$.
Les perturbations par des opérateurs compacts n'ont pas non plus d'influence sur les opérateurs de Fredholm, dans le sens que si l'on somme un opérateur de Fredholm et un opérateur compact, le résultat reste Fredholm.

Proposition 3.1.10. *Soit A un opérateur compact sur H,Alors I-A est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

Preuve :
D'aprés la proposition précedente, on a $R(I-A)$est fermé et $dim(H/R(I-A)) = co\dim R(I-A) < \infty = \dim\ker(I-A) < \infty$, Alors (I-A) est de Fredholm.

$$ind(I-A) = dim\ker(I-A) - co\dim R(I-A) = 0$$

Théorème 3.1.3. .
Soit $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$ un opérateur semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite). Si K est un opérateur compact de H dans $H^{'}$, alors A+K est un opérateur semi-Fredholm à gauche (respectivement à droite), l'indice de A+K est l'indice de A.

Preuve :
comme A est semi-Fredholm à gauche, alors il existe un opérateur B dans $\mathcal{L}(H^{'}, H)$ et un opérateur F compact sur H de sorte que :

$$\mathrm{BA = 1 + F}$$

Comme K est compact alors BK reste compact , Par conséquent :

$$\mathrm{BA + BK = 1 + F.}$$
$$\mathrm{B(A + K\ )= 1 + (F + BK)}$$

Or l'opérateur F est compact alors , F + BK est compact , d'où A + k est semi-Fredholm à gauche.
Si A est L compact tel que :

$$AB = 1 + L$$

Or d'aprés le théorème

BA est de Fredholm de plus

$$\text{ind}(BA)=\text{ind}(B)+\text{ind}(A)$$

Et comme L est compact en vertu de la proposition précedente que 1 + L est de Fredholm et ind(1 + L)=0, Donc

$$\text{ind}(A)+\text{ind}(B)=0$$

ou bien :

$$\text{ind}(B)=-\text{ind}(A)$$

D'autre part, On a :

$$BA + BK = B(A + K) = 1+(L + Bk)$$

et (L + BK) est compact alors 1 + (L + BK) est de Fredholm, alors :

$$\text{ind}(B(A + k))=\text{ind }(B)+\text{ind}(A + k)=0$$

et :

$$\text{ind}(B)=-\text{ind}(A + K)$$

par conséquent, on a :

$$\text{ind}(A + K)= \text{ind}(A).$$

■

3.1.4 Perturbation des opérateurs de Fredholm

Le théorme suivante nous apprend que non seulement l'esemble des opérateurs de Fredholm entre deux espaces de Hilbert est ouvert dans l'ensemble des opérateurs bornés. mais aussi que l'indice se trouve être une application continue.

Autrement dit , On cherche une condition sur la norme d'un opérateur linéaire borné B pour que l'opérateur A + B soit de Fredholm, pour tout $A \in \mathcal{L}(H, H^{'}) \cap \mathcal{F}(H, H^{'})$

Théorème 3.1.4. *Soient $A \in \mathcal{L}(H, H^{'})$ un opérateur de Fredholm et $\tilde{A}$ la bijection associée.*

$$\textit{Si } B \in \mathcal{L}(H, H^{'}) \textit{ tel que :}$$

$$\| B \| < \| \tilde{A}^{-1} \|^{-1}$$

alors , on a :

1) $\dim \ker(A+B) \leq \dim \ker A$

2) $Co\dim\ R(A+B) \leq co \dim R(A)$

3) *$A+B$ est de Fredholm*

4) *$ind(A+ B) = ind\ (A)$*

Preuve :
A est Fredholm et $\tilde{A} : H_0 \to H_0^{'} \to H^{'}$ est la bijection associée :

$$\tilde{A}(x_0, y_0) = Ax_0 + y_0$$

On pose C=A+B et on considère :

$$\tilde{C} : H_0 \times H_0^{'} \to H^{'}$$
$$(x_0, y_0) \to Cx_0 + y_0$$

$\forall (x_0, y_0 \in H_0 \times H_0^{'}$:

$$\begin{array}{c} \| \tilde{A}(x_0, y_0) - \tilde{C}(x_0, y_0) \| = \| Ax_0 + y_0 A + Cx_0 + y_0 \|. \\ = \| (A - C)x_0 \| \leq \| A - C \| \| x_0 \| \end{array}$$

d'ou :

$$\| \tilde{A} - \tilde{C} \| \leq \| A - C \| = \| A - A + B \| = \| B \| < \| \tilde{A}^{-1} \|^{-1}$$

$\tilde{C}$ est un opérateur borné inversible puisque :
$\tilde{C} = \tilde{C} - \tilde{A} + \tilde{A} = \tilde{A}[I + \tilde{A}^{-1}(\tilde{C} - \tilde{A})]$ et $\| \tilde{A}^{-1}(\tilde{C} - \tilde{A}) \| < 1$, donc :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{C}^{-1} & = & [I + \tilde{A}^{-1}(\tilde{C} - \tilde{A})]^{-1} \\ 1 & = & \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{A}^{-1}(\tilde{C} - \tilde{A}))^n \tilde{A}^{-1} \in L(H^{'}, H_0 \times H_0^{'}) \end{array}$$

Soit l'opérateur :

$$\begin{array}{c} C_0 : H_0 \times \{0\} \to H^{'}. \\ (x_0, 0) \to Cx_0 \end{array}$$

C_0 est la restrivtion commune de C et $\tilde{C}$ sur $H_0 \times \{0\}$.
Comme $H_0 \simeq R(A)$ et A est de Fredholm , Alors $co\dim R(A) < +\infty$ et $co\dim H_0 < +\infty$ donc $co\dim[H_0 \times \{0\}] < +\infty$. Par conséquent , D'aprés la proposition

C et $\tilde{C}$ sont aussi de Fredholm, et on a :

$$ind(C) = ind(C_0 + co\dim H_0$$

Mais :

$$ind(C_0) = ind(\tilde{C}) - \dim H_0^{'}$$

car $\ker C_0 = \{(x, 0) \in H_0 \times \{0\}; Cx = 0\} \subset \ker \tilde{C}$.
D'où :

$$ind(C) = ind(\tilde{C}) - \dim H_0^{'} + co\dim H_0$$

Or $\tilde{C}$ est bijective donc $ind(\tilde{C})$=0, ce qui montre que $ind(C_0) = -\dim(H_0^{'})$.
Alors :

$$\begin{aligned} ind(C) &= ind(C_0) + co\dim H_0 \\ &= \dim\ker A - co\dim R(A) \\ &= ind(A) \end{aligned}$$

Car $co\dim H_0 = \dim\ker A$ et $\dim H_0^{'} = co\dim R(A)$.
Ce qui montre que A est un opérateur de Fredholm d'indice égal à l'indice de l'opérateur A.

2) : Comme H $=$ $\ker A \oplus H_0$ et $\tilde{C}$ est inversible, alors :

$$\dim\ker C \leq \dim H/H_0 = \dim\ker A.$$

3) :

$$\begin{aligned} co\dim R(C) &= -indC + \dim\ker C \\ &\leq -indA \\ &\leq co\dim R(A) \end{aligned}$$

Remarque 3.1.5. *Ce théorème montre que l'ensemble des opérateurs de Fredholm est un ouvert dans* $\mathcal{L}(H, H^{'})$.

Corollaire 3.1.1. *L'application ind :* $\mathcal{F}(H, H^{'}) \to \mathbb{Z}$ *est constante sur toutes les composantes connexes de* $\mathcal{F}(H, H^{'})$.

Preuve :
Soit $A \in \mathcal{L}(H, H^{'}) \cap \mathcal{F}(H, H^{'})$. On sait que $\mathcal{F}(H, H^{'})$ est ouvert dans $\mathcal{L}(H, H^{'})$, De plus l'espace $\mathbb{Z}$ est discret et l'indice est une application continue.
En vertu de théorème précedent , On a :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \forall B \in \mathcal{L}(H, H') \text{ tel que } \| A - B \| < \delta \Rightarrow | ind(A) - ind(B) | < \varepsilon$$

ce qui implique que l'indice de deux opérateurs de Fredholm A_1 et A_2 est nécessement égal s'il existe un chemim reliant A_1 et A_2. Autrement dit, L'indice est une application constante sur les composantes connexe de $\mathcal{F}(H, H')$.
La réciproque de ce théorème est aussi vraie : Si les deux opérateurs de Fredholm A_1 et A_2 sont égaux. alors A_1 et A_2 appartiennent à la même composante connexe de $\mathcal{F}(H, H')$ voir le livre de .
■

3.2 Opérateurs de Fredholm non bornés

Dans cette section l'opérateur A sera considéré non partout définit sur H.
Notons D(A) son domaine, on donne dans la suite la théorie élémentaire des Fredholm non bornés, Avant cela Donnons bref aperçu sur les opérateurs à image fermé.

Pour cela il est nécessaire de connaitre les opérateurs fermés à image fermées et d'exprimer quelque propriétés qui seront utiles plus tard.

Ainsi, On entame notre travail par définir la conorme $c(A)$ d'un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans un espace de Hilbert H, et on revient à cette dernière plus précisement.

3.2.1 Concepts liés aux opérateurs de Fredholm non borné

Notation :
1) On note par $C(H, H')$ l'sepace des opérateurs linéaires fermés de H ver H' et de domaine dense dans H.

2) Si $A \in C(H, H')$,G(A) désigne le graphe de A tel que :

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$$

Proposition 3.2.1. *soient H un espace de Hilbert et A un opérateur fermé*

Si

$$B'_{H'}(r) \subset \overline{AB_H(1)} \text{ alors } B'_{H'}(r) \subset AB_H(1)$$

Preuve :
Il suffit de montrer que $B'_{H'}(r) \subset AB_H(\frac{1}{1-\varepsilon})$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$.
Soit

$$y \in B'_{H'}(r) \Rightarrow \| y \|_{H'} < r$$

Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\| y \|_{H'} < r(1 - \varepsilon_0)$$

ou bien :

$$\tfrac{y}{1-\varepsilon_0} \in B'_{H'}(r)$$

D'autre part, On a

$$B'_{H'}(r\varepsilon_0^n) \subset AB_H(\varepsilon_0^n), \forall n \in \mathbb{N}$$

En effet :

$$\text{Si } z \in B'_{H'}(r\varepsilon_0^n) \Rightarrow \| z \| < r\varepsilon_0^n$$

ou bien :

$$\tfrac{z}{\varepsilon_0^n} < r \Rightarrow \tfrac{z}{\varepsilon_0^n} \in B'_{H'}(r) \subset \overline{AB'_H(1)} \Rightarrow z \in \varepsilon_0^n AB_H(1) = z \in \overline{\varepsilon_0^n AB_H(r)}$$

Pour$n = 0$, on a :

$$B'_{H'}(r) \subset \overline{AB_H(1)}.$$

Comme $y \in B'_{H'}(r)$ il existe $x_0 \in B_H(1)$ tel que $\| y - Ax_0 \|_{H'} < r\varepsilon_0$.
ou bien :

$$(y - Ax_0) \in B'_{H'}(r\varepsilon_{0)}.$$

pour$n = 1$, Comme $(y - Ax_0) \in B'_{H'}(r)$, il existe $x_1 \in B_H(\varepsilon_0)$ tel que :

$$\| y - Ax_0 - Ax_1 \|_< r\varepsilon_0^2.$$

ou bien :

$$(y - Ax_0) \in B'_{H'}(r\varepsilon_0^2)$$

En réitérant ce procédé, On obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_H(r\varepsilon_0^n)$ telle que :

$$\| y - \sum_{i=0}^{n} Ax_i \| < r\varepsilon^{n+1} \tag{3.1}$$

ou bien :

$$(y - \sum_{i=0}^{n} Ax_i) \in B' H'(r\varepsilon_0^{n+1}).$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\| x_n \| \leq \varepsilon_0^n$.
par conséquent :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \| x_n \| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_0^n = \frac{1}{1-\varepsilon_0}, (\varepsilon_0^n).$$

Ainsi la suite :

$$z_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \text{ est de Cauchy}$$

car Si $n < m$:

$$\| z_n - z_m \| = \| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \|$$

$\sum_{i=n+1}^{m} \| x_i \|_{n,m\to+\infty} \to 0$, Alors $(z_n)_n$ converge vers x dans H et :

$$\| x \| \leq \frac{1}{1-\varepsilon_0}.$$

D'aprés (6) on a $(AZ_n)_n$ converge vers y dans H', et comme A est fermé alors :

$$x \in D(A) \text{ et } Ax = y, \text{ alors } y \in AB_H(\frac{1}{1-\varepsilon}).$$

■

Théorème 3.2.1. *Soit H un espace de Hilbert . Si A est fermé et $R(A) = H'$ alors A est application ouverte.(voire livre de H.Brezis)*

3.2.2 Translations dans $l^2_{\mathbb{F}}$

Considérons le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $l^2_{\mathbb{F}}$, l'espace des suites $\xi = x_{n n\in\mathbb{N}}$ à coefficient dans $\mathbb{F}$ telles que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mid x_i \mid^2 < \infty \ .$$

Muni de la norme :

$$\begin{aligned} \| \, . \, \| \quad : \quad & l^2_{\mathbb{F}} \to \mathbb{R}_+ \\ & \{x_n\} \mapsto \| \, \{x_n\} \, \|_2 := \{\sum_{i=0}^{\infty} \mid x_i \mid^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

il s'agit d'un espace de Hilbert .

Nous allons montrer que cet espace possède deux familles infinies dénombrables d'opérateurs de Fredholm, les translations à droite et les translations à gauche.

3.2.3 Translation à droite

Posons :

$$\begin{aligned} T^1_d : \quad & l^2_f \to l^2_f \\ & (x_0, x_1, x_2, ...) \mapsto (x_0, x_1, x_2, ...) \end{aligned}$$

la translation d'un cran à droite.
Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice -1. En effet, T^1_d est clairement linéair et on a :

ůLe noyau de T^1_dest constitué uniquement de la suite identiquement nulle.
Ainsi :

$$\dim(\ker T_d^1) = 0 < \infty.$$

Le conoyau :

$$Co\ker(T_d^1) = l_{\mathbb{F}}^2 / R(T_d^1)$$

Où une classe d'équivalence contient toutes les suites de $l_{\mathbb{F}}^2$ de même premier coefficient $x_0 \in \mathbb{F}$. La suite $(1, x_1, x_2, ...)$ constitue donc une base de $Co\ker(T_d^1)$. Ainsi :

$$\dim(Co\ker(T_d^1)) = 1 < \infty.$$

Il reste à voir que $R(T_d^1)$ est un fermé de $l_{\mathbb{F}}^2$.
Soit donc $x_n \subset l_{\mathbb{F}}^2$ une suite qui converge vers un certain :

$$\xi = \{\xi_n\} \in l_{\mathbb{F}}^2.$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in N$ tel que pour tout $n \geq m$ on ait :

$$\| x_n - \xi \| = \{\textstyle\sum_{i=0}^{1} \mid x_{ni} - \xi_i \mid^2\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq m$ et pour tout i fixé, on a :

$$\mid x_{ni} - \xi_i \mid^2 \leq \| x_n - \xi \| < \varepsilon$$

et donc $x_{ni} \to \xi_i$ pour tout i et en particulier $0 = x_{n0} \to \xi_0$. Or la suite identiquement nulle convergevers 0.
Donc par unicité de la limite nous obtenons $\xi_1 = 0$ et $\xi \in R(T_d^1)$ qui est de ce fait fermé dans $l_{\mathbb{F}}^2$.

Nous obtenons en outre que l'indice de T_d^1 est :

$$ind(T_d^1) = \dim(\ker T_d^1) - \dim(Co\ker T_d^1) = 0 - 1 = -1$$

3.2.4 Translation à gauche

Posons :

$$\begin{aligned} T_g^1 : \quad & l_f^2 \to l_f^2 \\ & (x_0, x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1, x_2, ...) \end{aligned}$$

la translation d'un cran à gauche.
Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice 1. En effet, T_g^1 est clairement linéair et on a :

✓ Le noyau est :

$$\ker T_g^1 = \{\{x_n\} \in l_{\mathbb{F}}^2 / x_0 \in \mathbb{F} arbitraire, x_i = 0 \forall i \geq 1\}$$

Ainsi :

$$\dim(\ker T_g^1) = 1 \neq \infty.$$

✓ Le conoyau est :

$$Co\ker(T_g^1) = l_{\mathbb{F}}^2 / R(T^1) = l_{\mathbb{F}}^2 / l_{\mathbb{F}}^2 = \{0_{l_{\mathbb{F}}^2}\}$$

Ainsi :

$$\dim(Co\ker(T_d^1 = 0 < \infty.$$

✓ L'image de T_g^1 et $l_{\mathbb{F}}^2$ tout entier qui est fermé en tant qu'espace topologique.
Nous obtenons en outre que l'indice de T_d^1 est :

$$ind(T_g^1) = \dim(\ker T_g^1) - \dim(Co\ker T_g^1) = 1 - 0 = 1$$

3.2.5 Conorme d'un opérateur fermé et opérateurs de Fredholm non bornés

Avant de donner la définition de la conorme. il est utile de rappeler quelques propiétés de l'espace quotient. En effet, pour tout opérateur A fermé , le sous espace vectoriel ker A est un sous-espace vectoriel de Hilbert de norme définie par :

$$\| \tilde{u} \| = \inf_{u \in \tilde{u}} \| u \| = d(u, \ker A) \tag{3.2}$$

$\tilde{u}$ est la classe d'équivalent de u

Sur cet espace l'opérateur de $D(A)/\ker A \to H$ défini par $\tilde{A}\tilde{u} = Au$, $\forall u \in \tilde{u}$ est linéaire, fermé et inversible et son inverse $\tilde{A}^{-1}$ et de domaine R(A) :

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{-1} : \quad & R(A) \to D(A)/\ker A \\ & \tilde{A}\tilde{u} \mapsto \tilde{A}^{-1}[\tilde{A}\tilde{u}] = \tilde{u} \end{aligned}$$

De norme :

$$\| \tilde{A}^{-1} \| = \sup_{\tilde{u} \in D(\tilde{A})} \frac{\| \tilde{u} \|}{\tilde{A}\tilde{u}}, avec : u \notin \ker A \tag{3.3}$$

De plus si $y \in \tilde{u}$ alors $(u - y) \ker A$ c'set à dire que $y = u - z$où $z \in \ker A$, Alors :

$$\| \tilde{u} \| = \inf_{y \in \tilde{u}} \| u \| = \inf_{z \in \ker A} \| u - z \| = d((u, \ker A) telque : u \notin \ker A \tag{3.4}$$

Les relation enter et nous donnent :

$$\| \tilde{A}^{-1} \| = \sup_{\tilde{u} \in D(\tilde{A})} \frac{\|\tilde{u}\|}{\tilde{A}\tilde{u}} = \sup_{u \in D(A)} \frac{d(u, \ker A)}{\|Au\|}$$

avec $u \notin \ker A$

Définition 3.2.1. *Soit (A,D(A)) un opérateur non borné .*
On appelle conorme ou module minimal réduit d'un opétrateur A non borné, notée par c(A), la quantité :

$$c(A) = \inf_{x \in D(A) \cap \ker A^{\perp}} \frac{\|Ax\|_{H'}}{\|x\|_{H'}}$$

Remarque 3.2.1. *Comme* $\ker A$ *est fermé de H, alors* $H = \ker A \oplus (\ker A)^{\perp}$ *et puisque* $u \notin \ker A$ *alors* $u \in (\ker A)^{\perp}$ *et par suite la conorme est donné par :*

$$c(A) = \inf_{u \in D(A) \cap (\ker A)^{\perp}} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|u\|_{H}} = \frac{1}{\tilde{A}^{-1}}$$

$c(A) = 0$, *si* $\tilde{A}^{-1}$ *est non borné et* $c(A) = +\infty$ *si* $\tilde{A}^{-1} = 0$

Proposition 3.2.2. *Soit* $A \in C(H, H')$ *un opérateur non borné sur* H *et* F *un sous-espace de* H *contenant* $\ker A$. *Alors on définit :*

$$c_F(A) = \inf_{u \in D(A) \cap F^{\perp}} \frac{\|Au\|}{u}$$

c_F *est appelée la conorme de* A *suivant* F.

Proposition 3.2.3. *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur non borné de* H *dans* H'.
A *a un inverse borné si et seulement si* A *est injectif et à image fermé dans* H'

Preuve :
Supposons que A a un inverse borné et montrons que $R(A)$ est fermé dans H'.
Soit $\overline{R(A)}$ alors il existe une suite $(x_n)_n)$ dans $R(A)$ tel que $x_n \to y$, quand $n \to \infty$ dans H'.
Or $(x_n)_n) \in R(A)$ alors il existe une suite $(t_n)_n) \in D(A)$ tell que $x_n = At_n$. D'ou $At_n \to y$, quand $n \to \infty$ dans H'.
Comme A a un inverse borné alors il existe $k > 0$ tal que :

$$\| At_n - At_m \|_{H'} \geq k \| t_n - t_m \|_H$$

Comme $At_n \to y$ alors la suite $(t_n)_n$ est une suite de Chauchy dans H.
D'où $(t_n)_n)$ est convergente vert t, puisque A est fermé, Alors $t \in D(A)$ et :

$$At = y, \text{ avec } y \in R(A)$$

Par onséquent $R(A)$ est fermé dans $H^{'}$.

Inversement , puisque A est bijectif de $D(A)$ dans $R(A)$ et $R(A)$ est un espace de Banach, Alors A^{-1} est fermé de $R(A)$ dans H, par conséquent A^{-1} est borné de $R(A)$ dans H d'aprés le théorème graphe fermé. ■

Proposition 3.2.4. *Soit* $(A, D(A))$ *est un opérateur non borné de* H *dans* $H^{'}$*.*

i) $R(A)$ *est fermé si et seulement si* $c(A) > 0$

ii) $c(A^*) = c(A)$

Preuve :
i) d'aprés la définition de l'opérateur $\tilde{A}^{-1}$, la conorme $c(A) > 0$ si et selemnt si $\tilde{A}^{-1}$ est borné donc fermé (d'aprés le théoréme de graphe fermé), et puisque $D(\tilde{A}^{-1}) = R(A)$ il résulte que $\tilde{A}^{-1}$ est borné si et selement si $R(A)$ est fermé, par conséquent $c(A) > 0$ si et selement si R(A) est fermé dans $H^{'}$.

ii) 1) Soit $Z = R(A)$ et A_1 l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} A_1 \ \ : \ \ & D(A) \to Z \\ & u \mapsto A_1 u = Au \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur $\tilde{A}$ induite par A_1 et exprimé par :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 \ \ : \ \ & D(A)/\ker A \to Z \\ & [u] \mapsto \tilde{A}_1([u]) = A_1 u \end{aligned}$$

$\tilde{A}_1$ est injectif on a aussi :

$$c(A_1) = \inf_{u\in D(A_1)\cap(\ker A_1)^\perp} \frac{\|A_1 u\|H^{'}}{\|u\|_H} = \inf_{u\in D(A_1)\cap(\ker A_1)^\perp} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|u\|_H} = c(A) > 0$$

D'aprés i) de la proposition précedente on a $R(\tilde{A})$ est fermé et on a aussi $\tilde{A}^{-1}$ est borné et par suite $\tilde{A}_1^*$ est aussi inversible d'inverse borné tel que :

$$(\tilde{A}_1^*)^{-1} = (\tilde{A}_1^{-1})^*$$

Comme $\ker A^* = R(A)$ alors $H/\ker A^* = H/R(A^\perp)$.
En sais que $H/R(A^\perp)$ est isomorphe au dual de $R(A)$ par l'application $[y^*] = y_r^*$, où y_r^* est la restriction de y^* à Z, en particulier :

$$\| y_r^* \|_{R(A)^*} = \| [y^*] \|_{H/R(A)}$$

2) on a :

$$\| \tilde{A}^* y^* \|_{D(A)/\ker A} = \| \tilde{A}_1^* y_r^* \|_{D(A)/\ker A}$$

Donc puisque $R(A)$ est fermé dans $H^{'}$ et A_1 est l'opérateur induit par A. alors on a pour tout $y^* \in D(A^*)$,

$$\| \tilde{A}^* y^* \| = \| \tilde{A}_1^* y_r^* \| = \| A^* y^* \|$$

3) Comme $(\tilde{A}_1^*)^{-1} = (\tilde{A}_1^{-1})^*$ et $\tilde{A}_1^{-1}$ est borné alors :

$$\| (\tilde{A}_1^*)^{-1} \| = \| (\tilde{A}_1^{-1})^* \| = \| \tilde{A}_1^{-1} \|$$

Il est résulte d'aprés les trois étapes 1) ,2) et 3) que :

$$c(A^*) = \inf_{y^*\in D(A^*)} \frac{\|A^* y^*\|}{\|y^*\|} = \inf_{y^*\in D(A^*)} \frac{\|\tilde{A}_1^* y_r^*\|}{\|y_r^*\|} = \frac{1}{\|(\tilde{A}_1^*)^{-1}\|} = \frac{1}{\|\tilde{A}_1{}^{-1}\|} = c(A_1) =$$

c(A)

avec $y^* \notin \ker A^*$

Remarque 3.2.2. *Soit (A,D(A)) un opérateur non borné de domaine dense dans H.Alors on a :*

i) $\dim(\ker A^*) = co\dim R(A)$.

ii) *Si* A *est fermé et* $R(A)$ *est fermé alors* $\dim\ker A = co\dim R(A^*)$

■

Preuve :

i) :

On sais que :

$$\begin{aligned}(\overline{R(A)})^\perp &= R(A)^\perp = \ker A^* \\ \overline{R(A)} &= (\ker A^*)^\perp\end{aligned}$$

On a :

$$\dim \frac{H}{\overline{R(A)}} = \dim(\frac{H}{\overline{R(A)}})^* = \dim(R(A))^\perp = \dim\ker A^*.$$

ii) :

On a aussi :

$$\begin{aligned}\overline{R(A^*)} &= (\ker A)^\perp \\ R(A)^\perp &= (\ker A^*)\end{aligned}$$

On a :

$$co\dim R(A^*) = \dim \frac{H}{R(A^*)} = \dim \frac{H}{(\ker A)^\perp} = \dim\ker A^* = \dim\ker A$$

Un opérateur fermé à image fermé est appelé un opérateur solvable normal.

Définition 3.2.2. *Soit (A, D(A)) un opérateur solvable normal non borné A est dit de* **Fredholm** *Si :*

1) *$R(A)$ est fermé dans* $H^{'}$

2) $\dim\ker A$ *est finie.*

3) $co\dim R(A)$ *est finie.*

L'indice dans ce cas est la quantité définie par :

$$ind(A) = \dim\ker A - co\dim R(A) \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des opérateurs de Fredholm défini de H dans $H^{'}$ est noté par $\mathcal{F}(H, H^{'})$

Remarque 3.2.3. $\mathcal{F}(H, H^{'}) \subset \mathcal{C}(H, H^{'})$

Proposition 3.2.5. *Soit (A,D(A)) un opérateur non borné solvable normale. Si $A \in \mathcal{F}(H, H^{'})$ alors $A^* \in \mathcal{F}(H, H^{'})$, et dans ce cas on a :*

$$ind(A^*) = -ind(A)$$

.

Preuve :
Comme A est de Fredholm, R(A) est fermé dans $H^{'}$ donc $c(A) > 0$ Or on a déjâ $c(A) = c(A^*)$ alors $c(A^*) > 0$ par conséquent $R(A^*)$ est fermé dans $H^{'}$.
Comme $\dim\ker A^* = \dim(R(A))^{\perp}$ et en sais d'apérs des résultats précedents que $(H/R(A))^*$ est isomorphe à $(R(A))^{\perp}$.

$$\dim\ker A^* = \dim(H/R(A))^* = \dim(R(A))^{\perp} = co\dim(R(A)) \tag{3.5}$$

Nous avons aussi :

$$co\dim(R(A^*)) = \dim(H/R(A^*)) = \dim(H/(\ker A)^{\perp})$$

et Comme $H/(\ker A)^{\perp}$ est isomorphe à $(\ker A)^*$ par conséquent on a :

$$co\dim(R(A^*)) = \dim(\ker A)^* = \dim\ker A \tag{3.6}$$

Ainsi l'opérateur A^* est de Fredholm.
D'aprés Les deux équations précédentes numérotés on trouve :

$$\begin{aligned} ind(A^{*)} &= \dim\ker(R(A^*)) \\ &= co\dim(R(A)) - \dim\ker A \\ &= -ind(A) \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2. *Soient H, $H^{'}$ et $H^{''}$ trois espaces de Hilbert et $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ deux opérateurs non bornés solvables normales définis de H dans $H^{'}$ et de $H^{'}$ dans $H^{''}$ respectivement.*

Si $A \in \mathcal{F}(H, H^{'})$ et $B \in \mathcal{F}(H^{'}, H^{''})$, Alors $BA \in \mathcal{F}(H, H^{''})$.
Dans ce cas on a :

$$ind(BA) = ind(A) + ind(B).$$

Preuve :
La démonstration est analogue à celle dans le cas de la composition des opérateurs de Fredholm borné.
■

3.3 Stabilité des opérateurs de Fredholm non bornés

Dans cette section Nous allons exposer **la stabilit**é des oprérateurs Fredhom dans le cas non borné.

Dans cette étude s'appuyer sur une bonne connaissance des propriétés topologique de base sur $C(H, H^{'})$. et sirtous la stabilité des espaces non bornés,que Nous avons étudié dans le premièr chapitre.
Dans tous ce qui suit, On considère H et $H^{'}$ deux espace de Hilbert et A un opérateur linéaire défini de H dans $H^{'}$.

S.Z.Nagy [4] voir que certains propriétés de Perturbation restent vrais si la perturbation est non bornée. vérifier des condition appropriées.
Parmis ces conditions si la perturbation utilisé est bornée ou bien compacte.
Avant d'itudier les théorème de stabilité, on Vous devez d'abord savoir une métrique g et celle-ci peut nous avons fait au premier chapitre en détail.

Proposition 3.3.1. *([8]) $\mathcal{L}(H,H')$ est un sous-espace de $C(H,H')$, c'est -à dire que si $A \in \mathcal{L}(H,H')$ et si $B \in C(H,H')$ avec $p(A,B) < \frac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}$ alors $B \in \mathcal{L}(H,H')$ et $\| A - B \| \leq \sqrt{1- \| A \|^2}\sqrt{1+ \| B \|^2}\ p(A,B)$.*

Preuve :
Soit $x \in D(B)$, alors :

$$\| Bx \| \leq \| Ax \| + \| (B-A)x \|$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+ \| A^2 \|}} \| (B-A)x \| &\leq \| R_{A^*}(B-A)x \| \\ &\leq \| R_{A^*} - R_{B^*} \| \| Bx \| + \| (R_{B^*}B - R_{A^*}A)x \| \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \| (B-A)x \| &\leq \sqrt{1+ \| A \|^2}[\| R_{A^*} - R_{B^*} \| \| Bx \| + \| R_{B^*}B - R_{A^*}A \| \| x \|] \\ &\leq \sqrt{1+ \| A \|^2} p(A,B)[\| Bx \| + \| x \|] \end{aligned}$$

Puisque $p(A,B) < \frac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}$ ceci implique $\exists \varepsilon > 0$ tel que :

$$\sqrt{1+ \| A \|^2} p(A,B) \leq (1-\varepsilon)$$

Ce qui donne :

$$\| Bx \| \leq \| A \| \| x \| +(1-\varepsilon) \| Bx \| +(1+\varepsilon) \| x \|$$

Ce qui montre que B est borné et on a :

$$\| Bx \| \leq \frac{1}{\varepsilon}(1+ \| A \|) \| x \|$$

Mais puisque B est borné alors B^*l'est ausii et $\| B^* - A^* \| = \| B - A \|$ Nous avons :

$$\| B - A \| \leq \sqrt{1 + \| A \|^2} [\| R_{A^*} - R_{B^*} \| \| B \| + \| R_{B^*} B - R_{A^*} A \|]$$

De même :

$$\| B^* - A^* \| \leq \sqrt{1 + \| A \|^2} [\| R_A - R_B \| \| B \| + \| B^* R_{B^*} B - A^* R_{A^*} \|]$$

Par sommation des deux équations , on obtient :

$$\begin{aligned} \| B - A \| &\leq \sqrt{1 + \| A \|^2} p(A,B)(1 + \| B \|) \\ &\leq \sqrt{1 + \| A \|^2} p(A,B) \sqrt{2} \sqrt{(1 + \| B \|^2)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\| B - A \| \leq \sqrt{1 + \| A \|^2} \sqrt{1 + \| B \|^2} p(A,B)$$

■

Corollaire 3.3.1. *(cf.[13]) Si on pose $v = R_A u + B^* R_A u$ on obtient $v \in D(B)$ et*

$$\| v - u \| \leq \| R_A - R_B \| \| u \| + \| A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*} \| \| Au \| \tag{3.7}$$

$$\| Au - Bu \| \leq \| AR_A - BR_B \| \| u \| + \| A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*} \| \| Au \| \tag{3.8}$$

Théorème 3.3.1. *(***Premier th***é***or***è***me de stabilit***é)*
$\forall A, B \in C(H, H')$ tel que :

$$p(A,B) < \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c(A)^2}}$$

alors :

$$B \in \mathcal{F}(H, H') \text{ et } ind(A) = ind(B)$$

Avant de démontrer ce théorème en nonçons les deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.1. *(cf.[13]) Si B est appartient à l'ensemble des opérateurs à image fermé et $A \in C(H, H')$ et F est un sous-espace fermé de H contenant* $\ker A$ *tel que :*

$$\lambda = \delta(\ker B, F) < 1$$

alors :

$$\sqrt{1-\lambda^2}c(B) - c_F(A) \leq \sqrt{1+c_F^2(A)}\sqrt{1+c^2(B)}p(A,B)$$

Lemme 3.3.2. *(cf.[7]) Si B est aappartient à l'ensemble des opérateurs à image fermés tel que* $\dim \ker B = 0$*. alors si $A \in C(H, H')$ est tel que :*

$$p(A,B) < \frac{c(B)}{\sqrt{1+c(B)^2}}$$

on obtient :

$$\mid c(A) - c(B) \mid \leq \sqrt{1+c^2(A)}\sqrt{1+c^2(B)}p(A,B)$$

Preuve : de théorème
Supposons que $\dim \ker A < +\infty$. Donc puisque :

$$\delta(\ker B, \ker A) \leq \frac{\sqrt{1+c^2(A)}}{c(A)}p(A,B) < 1$$

on doit avoir aussi que $\dim \ker B < +\infty$.
Maintenant soit F un sous-espace de dimension finie de H engendré par $\ker B$ et $\ker A$ alors F un sous-espace fermé contenant $\ker A$, par conséquent :

$$\lambda = (\ker A, F) = 0$$

et en applique le lemme précédent, On obtient :

$$c(A) - c_F(B) \leq \sqrt{1+c^2(A)}\sqrt{1+c_F^2(B)}p(A,B)$$

Ceci signifie que $c_F(B) > 0$ sinon :

$$c(A) \leq \sqrt{1+c_F^2(A)}p(A,B)$$

Qui donne une contraction. Mais $c_F(B) > 0$ signifie que l'image de B_F, La restiction de B à $F^{|}$, est fermé puisque F est de dimension finie. ceci signifi que $R(B)$ est fermé, donc $\dim R(B)/R(B_F) < +\infty$ D'ou le résultét.

Si $\dim\ker B = +\infty$ alors :

$$co\dim R(B) = \dim\ker A^* < \infty$$

par conséquent, :

$$p(A^*, B^*) < \frac{c(A^*)}{\sqrt{1+c(A^*)^2}}$$

Puisque :

$$\begin{array}{rcl} p(A,B) & = & p(A^*, B^*) \\ c(A) & = & c(A^*) \end{array}$$

et Alors $B^* \in \mathcal{F}(H, H^{'})$ ainsi $B \in \mathcal{F}(H, H^{'})$.

Montrons que $ind(A) = ind(B)$

D'aprés ce qui précéde B et B^* ont une image fermé. En outre :

$$\delta(\ker B, \ker A) < 1$$

et :

$$\delta(\ker B^*, \ker A^*) < 1$$

c'est-à-dire que :

$$\dim\ker A^* \geq \dim\ker B^*$$

et :

$$co\dim\ker R(A) \geq co\dim R(B)$$

Supposons que

$$\dim \ker A < +\infty$$

soit :

$$\dim \ker A \geq \dim \ker B + n$$

où $n \in \mathbb{N}$ avec :

$$n \geq \dim \ker A - \dim \ker B.$$

Alors :

$$R(B^*) \cap \ker A = (\ker H)^{\perp} \cap \ker A$$

Contient un sou-espace M de dimension n.
Soit $N = \{u \in D(B^*); u \perp \ker B^*, B^*u \in M\}$, alors $\dim N = n$ Finalement soit

$$T = N \oplus \ker B^*$$

alors :

$$\dim T = n + \dim \ker B^*$$

On veut montrer que

$$\dim T \leq \dim \ker A^*$$

T ne contient aucun élément différent de zéro $u+w$, $u \in \mathbb{N}$, $w \in \ker B^*$, orthogonal à $\ker A^*$. Supposons qu'il existe un élément u+w et soit

$$v = R_{A^*}(u+w) = R_{A^*}(u+w) + AR_A B^*(u+w)$$

et puisque

$$B^*(u+w) = B^*u \in \ker A$$

Alors comme

$$\langle A^*u, B^*(u+w)\rangle = 0$$

on a :

$$\| A^*v - B^*(u+w) \|^2 = \| A^*v \|^2 + \| B^*(u+w) \|^2$$

$$\| v-(u+w) \|^2 = \| (I-R_{A^*})(u-w) \|^2 = \| u+v \|^2 - \langle u-w, v\rangle - \| A^*v \|^2$$

La sommation des deux égalités donne :

$$\| u+w \|^2 + \| B^*(u+w) \|^2 = \| u-(u+w)) \|^2 + \| A^*v - B^*(u+w) \|^2 + \langle u+w, v\rangle$$

puisque u+v est orthogonal à $\ker A^*$ et en utilisant :

$$\| R_A u \|^2 + \| AR_A u \|^2 = \langle u, R_A u\rangle$$

On obtient :

$$(1+c^2(A)) \| v \|^2 \leq \| v \|^2 + \| A^*v \|^2 = \langle u+w, v\rangle \leq \| v \| \| u+v \|$$

Donc :

$$\| v \| \leq \frac{1}{1+c^2(A)} \| u+w \|$$

et Donc :

$$| \langle u+w, v\rangle | \leq \frac{\|u+w\|^2}{1+c^2(A)}$$

en utilisant les deux equations précedentes , On obtient :

$$\begin{aligned}
\| u+w \|^2 + \| B^*(u+w) \|^2 &\leq [\| A^* R_{A^*-B^*R_{B^*}} \| \| u+w \| + \| R_A - A_B \| \| B^*(u+w) \|]^2 + [\| R_A \\
&\leq p^2(A,B)[\| u+w \|^2 + \| B^*(u+w) \|] + \frac{\| u+w \|^2}{1+c^2(A)} \\
&< [\frac{c^2(A)}{1+c^2(A)} + \frac{1}{1+c^2(A)}][\| u+w \|^2 + \| B^*(u+w) \|]
\end{aligned}$$

Contraction . Donc $\dim\ker A = \dim\ker B^* + n$.
Si :

$$\dim\ker B^* = +\infty$$

on a

$$\dim\ker A^* = +\infty$$

et :

$$ind(A) = ind(B)$$

Avant de donner le deuxième théorème de stabilité donnons le lemme suivant :

Lemme 3.3.3. *(cf.[2]) Soient $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ deux opérateurs tel que B est A-borné de borne relative inferieur à 1. Alors, $S = A + B$ est fermable si et selement si A est fermable, en particulier S est fermé si et selement si A est fermé.*

Théorème 3.3.2. *Soient $A \in \mathcal{F}(H, H')$ et B est A-borné relative a inférieur à 1.*

Si $D(A) \subset D(B)$ et $0 < a < 1$, $b \geq 0$ tel que a<(1-b)c(A). Alors $(A + B) \in \mathcal{F}(H, H')$ et $ind(A + B) = ind(A)$.

Preuve :
Comme l'opérateur B est A-borné de borné relative a inférieur à 1 alors

S = A + B $\in C(H, H')$ est un opérateur fermé d'aprés le lemme pécedent .
Introduisons une nouvelle norme définie sur $D(A)$ à partir l'hypothèse :

$$\| u \|_{D(A)} = (a + \varepsilon) \| u \|_H + (b + \varepsilon) \| Au \|_{H'}, \forall \in D(A), \forall \varepsilon > 0 \tag{3.9}$$

Alors $(D(A), \| \,.\, \|)_{D(A)}$ est un espace de Banach .
Appellons $(D(A), \| \,.\, \|)_{D(A)} = \hat{H}$.
On définit les opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ de $\hat{H}$ dans H'. Alors puisque B est A-borné on a :

$$\hat{A} \in \mathcal{L}(\hat{H}, H') et H \in \mathcal{L}(\hat{H}, H')$$

Puisque $R(A) = R(\hat{A})$, donc $\hat{A}$ est un fermé car A est un opérateur de Fredholm,

Donc on a :

$$Co \dim R(\hat{A}) = co \dim R(A) et \dim \ker A = \dim \ker \hat{A}$$

Alors :

$$co\dim R(S) = co\dim R(\hat{S})$$

et

$$\dim\ker S = \dim\ker\hat{S}, \text{ Si } \hat{S} = \hat{A} + \hat{B}.$$

L'indice de la preuve est de comparée $c(\hat{A})$ et $c(A)$.

$$c(A) = \inf_{u\in D(\hat{A})} \frac{\|\hat{A}u\|_{H'}}{\tilde{u}} = \inf_{u\in D(\hat{A})} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|\tilde{u}\|}$$

avec $u \notin \ker\hat{A}$ et $\tilde{u} \in \hat{H}/\ker A$ Or on a :

$$\|\tilde{u}\|_{D(A)} = \inf_{z\in\ker A} \|u - z\| \tag{3.10}$$

On applique la relation entre les deus equation précédentes et on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{D(A)} &= \inf_{z\in\ker A}[(a+\varepsilon)\|u-z\|_H + (b+\varepsilon)\|A(u-z)\|_{H'}] \\ &= (a+\varepsilon)\|\tilde{u}\| + (b+\varepsilon)\|Au\| \end{aligned}$$

car Az=0, donc :

$$\begin{aligned} c(\hat{A}) &= \inf_{u\in D(\hat{A})} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|\tilde{u}\|} = \inf_{u\in D(\hat{A})} \frac{\|Au\|_{H'}}{(a+\varepsilon)\|\tilde{u}\| + (b+\varepsilon)\|Au\|} \\ &= \inf \frac{\|Au\|_{H'} / \|\tilde{u}\|}{(a+\varepsilon) + (b+\varepsilon)\|Au\| / \|\tilde{u}\|} = \frac{c(A)}{(a+\varepsilon)+(b+\varepsilon)c(A)} \end{aligned}$$

Le fais que $a < (1-b)c(A)$ donc on a $c(\hat{A}) > 1$ avec ε suffisament petit.
Comme $\|\hat{B}\| \leq 1$ alors $\|\hat{B}\| \leq c(\hat{A})$ et puisque $\hat{B}$ est borné dans $\hat{H}$, alors on :

$$R(A+B) = R(\hat{A}+\hat{B})$$

et :

$$\ker(A+B) = \ker(\hat{A}+\hat{B})$$

alors :

$$\begin{aligned} \dim\ker(A+B) &\leq \dim\ker A \\ co\dim R(A+B) &\leq co\dim R(A) \end{aligned}$$

et puisque A est de Fredholm alors (A+B) l'est aussi.
Si a=0 le théorème reste vraie.On effet dans ce cas on a

$$\varepsilon + bc(A) < c(A)$$

par la dernière équation précedente on a $\| Bu \|_{H'} \leq \varepsilon \| u \|_H + b \| Au \|_{H'}$
■

Conclusion

Les opérateurs de Fredholm sont traités au travers des notions d'analyse fonctionnelle qu'ils sous-entendent, d'exemples et de propriétés élémentaires pour finir avec l'énoncé du théorème d'Atiyah-Jänich qui lie les opérateurs de Fredholm, K-théorie et la topologie algébrique.
Les opérateurs de Fredholm (non borné) sont invaraints par n'importe quelle faible perturbation. Cette propriété de stabilité est traduite par les théorèmes de stabilité.
Et l'objet essentiel de notre travail est de réécrire d'une manière simple et aisée les théorèmes de stabilités des opérateurs de Fredholm ainsi que leurs démonstrations.
Contrairement au cas borné, la stabilité dans le cas non borné devient difficile à démontrer,raison pour lequelle on a été contrait d'introduire des outils mathématique pour facilité l'accés à ces opérateurs.

Bibliographie

[1] Abdelhalim azzouz, "Sur la Somme, le Produit et Passage à l'adjoint dans la Classe des Opérateurs Fermés sur ukan espace de Hilbert" Thèse de Doctora"

[2] Djellouli Goutti, " Résonances des systèmes à plusieurs corps et théorie de Fredholm ", Thèse de Doctorat ,Unversité Djillali Liabes, Sidi Bel-Abbès,2007.

[3] j.w Calkin, " Two Sided ideals and Congruence in the Ring of Bounded Opertaors in Hilbert Space" .Ann. of Math. 42(1941)839-873.

[4] B. Sg. Nagy, "On the stability of the index of unbounded linear transformations". Act. Math. Acad. Sci Hung. 3, (1952), 49-52.

[5] Dautry. J. L. Lion,"Analyse mathématique et calcule numérique." Tome2, (1985).

[6] Djaa. B. Messirdi, "Etude spectrale des Opérateurs de Multiplications ". Maghreb. Math .Rev. Volume 8 $N^o 1/2$, 1999.p97-109.

[7] J. Ph. Labrousse," Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert ". Dept. De Math. Univ. de Nice(1970)

[8] J. Ph. Labrousse, On a metric space of closed operators on a Hilbert space. Rev. Mat. Fis. teorica. Uni. N. Tucuman (Argentine) XVI (1 et 2)(1966) 45-77.

[9] S. Goldberg," Unbounded linear operators ". Mc Graw Hill, New York, (1966).

[10] F. V. Atkinson ,The Normal Solvability of Linear equations in normed spaceces ". Mat.Sbornik. 28 (70) (1951) 3-14.

[11] M. G . Krein, M. A. Krasnoselski," Théoeèmes fondamentaux sur l'extension d'operateurs hermitiens " .Usp. Math. Nauk 2 (3) (19),(1947) 60-106

[12] Dragan Vukotic, " Analytic Toeplitz opertaors " . Mc Graw Hill, New York, (1966)

[13] T,Kato," Perturbation Theory for linear operators" Springer-Verlag,New York,(1966).

[14] McDonald, Fredholm propreties of class of Toeplitz operators on the ball, Indiana, Math. J. 26 (1977), 567-576.

H. O Cordes et J. P. Labrousse, " The invariance of index in the metric space of closed operators " J. Math. and Mech. 12(5), (1963), 693-720.

[15] J.D Newburgh, " A Topolory For Closed Operators". Annals Of Mathematics. Volume 53, N^o, 1951.

[16] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, 1980.

[17] M. Atiyah, " Elliptic Opertators, discrete groups and Von Neuman algerbras " Astérisque (1976), 43-72