Remerciement

Louange à notre Seigneur "ALLAH" qui nous a doté de la merveilleuse faculté de raisonnement. Louange à notre Créateur qui nous a incité à acquérir le savoir.

C'est à lui que nous adressons toute notre gratitude en premier lieu.
Je voudrais remercier les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail. Tout d'abord, ce mémoire ne serait pas aussi riche et n'aurait pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de notre encadreur Mr **Kandouci Abdeldjebbar** je le remercies pour la qualité de son encadrement, sa rigueur et sa disponibilité, ses remarques fructueuses et ses directives précieuses, qui ont contribué efficacement à l'avancement de ce travail.

Je remercie également Mr T.Guendouzi et M^{lle} F. Benziadi qui ont accepté de jurer ce travail et Mr F.Madani, malgré un emploi du temps fort chargé, a accepté de présider ce jury.

Je n'oublies pas d'adresser notre gratitude à mes amis et collègues pour leurs soutiens et encouragements.
Finalement, je pense que je ne suis arrivé à ce stade que grâce aux encouragements et aides apportés par mes parents et mes frères et sœurs à qui je dois beaucoup de respect et d'admiration, et je leurs dis mille mercis.

Dédicaces

Je rend grâce à dieu de m'avoir donné le courage et la volonté ainsi que la conscience d'avoir pu terminer mes études.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont permis de réussir dans mes études.

Ma chère mère et mon père Abdelazziz .

A toute la famille yahiaoui, et la famille becharef.

A Mes soeurs et mes frères : Nabil, Kaddour , Mohamed, Omar et Saad et toute la famille sans exception.

A tous mes amis de la faculté, dans la vie entre autres : Massaoud, Khalfalah, Khelifa, Zouaoui, Abdelkrime, Mohamed, semail.

A mon collègue Houari.

A mon encadreur Kandouci Abdeldjebbar.

Yahiaoui Lahcene.

Introduction

Si un mathématicien regarde de loin l'histoire du mouvement Brownien au cours de ce siècle, il y verra sans doute deux périodes : entre 1900 et 1950, une évolution lente et linéaire, repérable par les pères fondateurs que furent Albert Einstein, NorbertWiener, Paul Lévy ; et depuis 1950, une efflorescence difficile à maîtriser, avec la poursuite des propriétés fines qui font du mouvement Brownien l'un des prototypes de la fractalité, le mouvement Brownien sur les variétés, le mouvement Brownien à plusieurs paramètres, le mouvement Brownien à la source ou au carrefour des études sur les processus gaussiens, les processus à accroissements indépendants, les processus de Markov avec leur lien à la théorie du potentiel, les martingales, les équations différentielles stochastiques, les intégrales de chemins, les superprocessus qui décrivent des particules qui se scindent au cours du temps, etc...
La littérature sur le mouvement Brownien est facile à inventorier et même à lire dans la première période, et difficile à maîtriser dans la seconde ; Daniel Revuz et Marc Yor, dans leur livre Continuous martingales and Brownian motion [Revuz et Yor 1991] ont fait un état d'une littérature énorme, dont la bibliographie qu'ils donnent, avec 500 titres, ne fournit qu'une faible idée. Il ya heureusement, sur différents aspects, beaucoup de bons livres qui permettent d'accéder dans cette forêt.

La théorie mathématique du mouvement Brownien, mise en place par Norbert Wiener, est à la fois si simple au départ, si belle et si riche qu'elle a conquis une large audience chez les mathématiciens et aussi chez les physiciens. Mais il faut préciser dès maintenant que ce n'est qu'une des idéalisations mathématiques du mouvement réel de particules en suspension dans un liquide, tel qu'il fut observé et décrit par le botaniste anglais Richard Brown en 1828, et, à sa suite, par plusieurs physiciens expérimentateurs au XIXe siècle. Ce n'est même pas la meilleure idéalisation pour l'application de la théorie d'Einstein à la détermination du nombre d'Avogadro. Wiener, d'ailleurs, fut toujours prudent à cet égard.

Le mouvement brownien avec dérive est un processus qui se comporte comme un mouvement Brownien mais avec une tendance, positive ou négative selon la valeur du coefficient μ. Ce processus modélise par exemple l'évolution d'un capital financier dont la valeur fluctue autour d'une moyenne croissante.

Le mouvement Brownien avec dérive a été développé au début des années 90 par les auteur I. Karatzas et S. E. Shreve [6], Olivier Lévêque [10], Ràsonyi. M, Schachermayer. W, et Warnung, R [13] dans le but de résoudre certains problèmes liés à la finance, la gestion de Stocks, le risque de crédits, etc ...

Le travail de ce mémoire est partagé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, on introduit le mouvement brownien comme limite d'une marche aléatoire et on cite les différentes propriétés. Le deuxième chapitre est consacré au mouvement brownien avec dérive, pour lequel on donne quelques généralités et quelques résultats récents.

Dans le dernier chapitre, on montre quelques applications du mouvement Brownien avec dérive en finance.

Table des matières

Chapitre 1

Le Mouvement Brownien

le mouvement Brownien modélise un mouvement d'esordonné et sans orientation privilégiée. Toutefois, les marches aléatoires sont des processus aléatoires dont le temps et l'espace sont discrets. Pour le mouvement Brownien, le temps et l'espace seront des dimensions continues. Nous allons dans ce paragraphe décrire le mouvement Brownien comme la limite de suite de marches aléatoires.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, où $\mathbb{F}$ est la filtration $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$.

1.1 Marches aléatoires

Nous Considérons une marche aléatoire commençant à 0 avec des sauts h et $-h$ également probablement de temps en temps $\delta, 2\delta, \ldots$, où h et δ sont des nombres positifs. Plus précisément, soit $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des variables aléatoires identiquement distribuées avec

$$\mathbb{P}(X_i = h) = \mathbb{P}(X_i = -h) = \frac{1}{2}, i \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $Y_{h,\delta}(0) = 0$ et mettre

$$Y_{h,\delta}(n\delta) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Pour $t > 0$, on définit $Y_{h,\delta}(t)$ par linéarisation, i.e pour $n\delta < t < (n+1)\delta$, on a

$$Y_{h,\delta}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{h,\delta}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{h,\delta}((n+1)\delta)$$

nous pouvons penser $Y_{h,\delta}(t)$ que la position de la marche aléatoire au temps t. En particulier, $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est la position de cette marche au temps $n\delta$.

Laissez-nous calculer les limites suivantes de la fonction caractéristique de $Y_{h,\delta}(t)$:

$$\lim_{\delta,h\to 0} \mathbb{E}[\exp(i\lambda Y_{h,\delta}(t))],$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé. Pour la dérivation heuristique, soit $t = n\delta$ et donc $n = t/\delta$.
Ensuite, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(i\lambda Y_{h,\delta}(t))] &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{i\lambda X_i}) \\
&= [\mathbb{E}(e^{i\lambda X_i})]^n \\
&= (e^{i\lambda h}\frac{1}{2} + e^{-i\lambda h}\frac{1}{2})^n \\
&= [\cos(\lambda h)]^n \\
&= [\cos(\lambda h)]^{\frac{t}{\delta}} \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Evidemment, pour des λ et t fixés, la limite de $\exp(i\lambda Y_{h,\delta}(t))$ n'existe pas lorsque δ et h tendent vers zéro de maniére indépendante. Ainsi, pour que la limite existe, nous devons imposer une certaine relation entre δ et h. Toutefois, en fonction de cette relation, nous pouvons obtenir des limites différentes.
Soit $u = [\cos(\lambda h)]^{\frac{t}{\delta}}$, alors $\ln u = \frac{1}{\delta} \ln\cos(\lambda h)$. notons que

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 h^2, \qquad \text{pour h petite.}$$

Mais $\ln(x+1) \approx x$ pour x au voisinage de 0. D'où

$$\ln\cos(\lambda h) \approx \ln\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\right) \approx -\frac{1}{2}\lambda^2 h^2.$$

Donc, pour h et δ petites, nous avons $\ln u \approx -\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2$ et donc

$$u \approx \exp[-\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2].$$

Puis, par l'équation (1.1),

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda Y_{h,\delta}(t))] \approx \exp[-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2 h^2]. \qquad (1.2)$$

En particulier, si h et δ sont liés par $h^2 = \delta$, alors

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbb{E}[\exp(i\lambda Y_{h,\delta}(t))] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, nous avons formulé le théorème suivant sur la limite de la marche aléatoire $Y_{h,\delta}(t)$ que $h, \delta \to 0$ de telle façon que $h^2 = \delta$.

Théorème 1.1.1 *Soit $Y_{h,\delta}(t)$ la marche aléatoire partant de 0 avec des sauts h et $-h$ tout aussi probable au temps $\delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$. Supposons que $h^2 = \delta$. Ensuite, pour chaque $t \geq 0$ la limite*

$$B_t = \lim_{\delta \to 0} Y_{h,\delta}(t)$$

existe en distribution. En outre, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\exp(i\lambda B_t)\right] = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

1.2 Mouvement Brownien standard

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 *Le mouvement Brownien réel standard (ou mouvement Brownien tout court) est un processus $\{B_t : t \geq 0\}$ tel que*

1. *$\forall \omega \in \Omega, B_0(\omega) = 0$ p.s.*
2. *$\forall t > s \geq 0$, $B_t - B_s$ suit une loi de Gauss centrée et de variance $t - s$, i.e., pour tout $a < b$*

$$\mathbb{P}\{a \leq B_t - B_s \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx.$$

3. *Pour tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_n-1}$ sont indépendantes.*

Proposition 1.2.1.1 *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Alors les cinq processus ci-dessous sont également des mouvements Browniens standard :*

1. $B_t^{(1)} = -B_t, t \in \mathbb{R}_+$ *(Propriété de symétrie du mouvement Brownien) ;*
2. *soit* $T \in \mathbb{R}_+$ *fixé :* $B_t^{(2)} = B_{t+T} - B_T, t \in \mathbb{R}_+$ *(stationnarité) ;*
3. $T \in \mathbb{R}_+$ *fixé :* $B_t^{(3)} = B_T - B_{T-t}, t \in [0, T]$ *(renversement du temps) ;*
4. *soit* $a > 0$ *fixé :* $B_t^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}, t \in \mathbb{R}_+$*(loi d'échelle) ;*
5. $B_t^{(5)} = tB_{1/t}, t > 0$ *et* $B^{(5)} = 0$ *(inversion du temps).*

Preuve. On prouve la propriété de stationnarité et les autre de même manière. le processus stochastique $B_t^{(2)}$ satisfait évidemment le condition (1) d'un mouvement Brownien standard. Pour tout $s < t$,

$$B_t^{(2)} - B_s^{(2)} = B_{t+T} - B_{s+T}. \tag{1.4}$$

Par la condition (2) de B_t, nous voyons que $B_t - B_s$ est normalement distribué avec une moyenne nulle et de variance $t - s$. Ainsi $B_t^{(2)}$ satisfait la condition (2). Pour vérifier la condition (3) pour $B_t^{(2)}$, on peut supposer que $t_0 > 0$. Alors pour tout $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, nous avons $0 < t_0 \leq t_1 + t_0 < t_2 + t_0 < \ldots < t_n + t_0$. Ainsi par la condition (3) de B_t, $B_{t_k+T} - B_{t_{k-1}+T}, k = 1, 2, 3, ..., n$, sont des variables aléatoires indépendantes. Ainsi, par l'équation (1.4), les variables aléatoires $B_{t_k}^{(2)} - B_{t_{k-1}}^{(2)}, k = 1, 2, 3, ..., n$, sont indépendants et donc $B_t^{(2)}$ satisfait à la condition (3) d'un mouvement Brownien standard.

1.2.2 Continuité des trajectoires

Dire qu'un processus aléatoire $\{X_t, t \geq 0\}$ est continu si

$$\lim_{h \to 0} X_{t+h} - X_t = 0.$$

Selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte. La plus faible des notions de continuité est liée à la convergence en loi. Elle est êvidemment vérifiée. Nous allons démontrer une continuité en probabilité pour le mouvement Brownien standard.

Proposition 1.2.2.1 *Soit $\epsilon > 0$ et $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard (dimension 1). On a*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \epsilon) = 0$$

Preuve. Soit $h > 0$. Par définition, l'accroissement $B_{t+h} - B_t$ admet pour loi $\mathcal{N}(0, h)$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \mathbb{P}(|B_{t+h} - B_t| > \epsilon) &= \frac{2}{h} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x^2}{2h}} dx \\ &< 2 \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h^{3/2}} e^{-\frac{\epsilon x}{2h}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{h^{3/2}} \frac{h}{\epsilon} e^{-\frac{\epsilon^2}{2h}} \end{aligned}$$

Le dernier terme converge vers 0 lorsque $h \to 0$.

□

1.2.3 Le mouvement Brownien comme processus gaussien

Un processus aléatoire est dit gaussien si tous les vecteurs finidimensionnels extraits sont gaussiens. Précisons cette définition.

Définition 1.2.2 *Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus aléatoire réel. Il est gaussien si, pour tous $t_1, \ldots, t_n$ le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^T$ est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$.*

La loi de probabilité d'un processus aléatoire gaussien est entiêrement caractérisée par sa fonction moyenne

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad m(t) = \mathbb{E}[X_t]$$

et par sa fonction de covariance

$$\forall t, s \in \mathbb{R}_+, \quad k(t, s) = Cov(X_t, X_s)$$

Proposition 1.2.3.1 *Un processus gaussien $\{B_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ à trajectoires continues est un mouvement Brownien si et seulement si*

$$m(t) = 0 \text{ et } k(t, s) = \min(s, t), \quad \text{pour tout } t, s \geq 0.$$

Preuve. Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. Soient $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Les variables réelles $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_n - 1}$ sont indépendantes et gaussiennes. Le vecteur aléatoire

$$Z = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})^T$$

se déduit par une transformation linéaire : il s'agit donc d'un vecteur gaussien. De plus, pour tout $s \geq t$, nous avons, par indépendance des accroissements,

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] = 0 + s = \min(s, t).$$

Réciproquement, supposons les relations vraies et montrons qu'alors $B_t,\ t \in \mathbb{R}_+$, est un mouvement Brownien. Il faut montrer d'abord que si $0 \leq s \leq t,\ B_t - B_s$ est indépendant de $\sigma(B_r, r \leq s)$.

Puisque la famille des $B_t, t \leq 0$, est gaussienne, il sufit de vérifier que $Cov(B_t - B_s, B_r) = 0$, si $r \leq s \leq t$. Or

$$Cov(B_t - B_s, B_r) = \mathbb{E}(B_t B_r) - \mathbb{E}(B_s B_r) = \min(t, r) - \min(s, r) = 0.$$

Ensuite, il faut voir que, si $0 \leq s \leq t$, loi de $B_t - B_s$ ne dépend que de $t - s$: cette loi est gaussienne centrée et sa variance est

$$\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = \mathbb{E}(B_t^2) + \mathbb{E}(B_s^2) - 2\mathbb{E}(B_t B_s) = t + s - 2s = t - s.$$

Enfin, B_t est bien centré de variance t.

$\square$

1.2.4 Lois marginales et conditionnelles

Nous déterminons en premier lieu la densié conjointe du vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})^T$.

Proposition 1.2.4.1 *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard et $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. La densité conjointe du vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est*

$$f_{B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(t_i - t_{i-1})} \right)$$

(en posant $x_0 = t_0 = 0$).

Preuve. Les variables $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_n-1}$ étant indépendantes et des lois respectives $\mathcal{N}(0, t_1), \mathcal{N}(0, t_2 - t_1), ..., \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1})$, le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_n-1})$ a pour densité

$$f_{B_{t_1},\ldots,B_{t_n}}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = \prod_{i=1}^{n} f_{B_{t_i}-B_{t_{i-1}}}(x_{t_i} - x_{t_{i-1}})$$

$\square$

On peut en déduire par exemple pour $s < t$, la loi de probabilité conditionnelle de la variable B_s sachant que $B_t = x$.

Proposition 1.2.4.2 *La loi conditionnelle de la variable B_s sachant que $B_t = x$ est la loi normale $\mathcal{N}(\frac{s}{t}x, \frac{s(t-s)}{t})$.*

Preuve. Le couple (B_s, B_t) est gaussien. Nous avons,

$$\mathbb{E}[B_s|B_t = x] = \frac{Cov(B_t, B_s)}{Var(B_t)}x = \frac{sx}{t},$$

et

$$Var(B_s|B_t = x) = Var(B_s) - \frac{Cov(B_t, B_s)^2}{Var(B_t)} = s - \frac{s^2}{t}$$

$\square$

1.2.5 Le mouvement Brownien comme martingales

nous avons présenté quelques résultats liés aux martingales. Cette classe de processus constitue un outil important dans l'étude des propriétés du mouvement Brownien.

Définition 1.2.3 *Un processus stochastique $M = \{M_t : t \geq 0\}$ est une martingale si :*

$i)$ $\forall t \geq 0,\ \mathbb{E}[|M_t|] < \infty$;

$ii)$ $\forall t \geq 0,\ M_t$ est $\mathcal{F}_t -$ mesurable ;

$iii)$ $\forall t, s \geq 0,$ tel que $t > s,\ \mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$.

Proposition 1.2.5.1 *Si $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un Mouvement Brownien et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle, les processus $(B_t), (B_t^2 - t)$ et $(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}})$ (Brownien Exponentiel) sont des $\mathbb{F}$-martingales.*

Preuve. Ces trois processus sont adaptés à $\mathbb{F}$. Il sont intégrables car $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, donc son espérance, sa variance et sa transformée de Laplace sont finies. Reste á vérifier la derniére condition. Pour le premier, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t/\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_s/\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s/\mathcal{F}_s] \\
&= B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s] \\
&= B_s.
\end{aligned}$$

Pour le deuxiéme, comme B_t est une martingale, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2/\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] \\
&= var(B_t - B_s) \\
&= t - s,
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}[B_t^2 - t/\mathcal{F}_s] = B_s^2 - s.$$

Et la condition sur le dernier s'obtient grâce á la transformée de Laplace d'une Gaussienne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}/\mathcal{F}_s] &= e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}\mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}e^{\sigma B_s}/\mathcal{F}_s] \\
&= e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}e^{\sigma B_s}\mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}] \\
&= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2 s}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Théorème de Lévy[8] (caractérisation du mouvement Brownien standard)
Soit (X_t) un processus à trajectoires continues, adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et tel que

$$\begin{cases}
(i) & (X_t) \text{ est une martingale par rapport à } (\mathcal{F}_t), \\
(ii) & (X_t^2 - t) \text{ est une martingale par rapport à} (\mathcal{F}_t),
\end{cases}$$

Alors (X_t) est un mouvement Brownien standard.

1.2.6 Le mouvement Brownien comme processus de Markov

Propriété de Markov faible du mouvement Brownien

Processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}(f(X_t)|X_s) \quad p.s,$$

pour tout $t > s \geq 0$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée (NB :$\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, r \leq s)$).
En particulier, si $f(x) = \mathbb{1}_B(x)$ avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$ alors $\mathbb{P}(X_t \in B|\mathcal{F}_s^X) = \mathbb{P}(X_t \in B|X_s)$.

Proposition 1.2.6.1 *Le mouvement Brownien standard* $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ *est un processus de Markov.*

Preuve. En utilisant le fait que $(B_t - B_s) \perp B_s,$ B_s est $\mathcal{F}_s^B$-mesurable et la proposition siuvant

Proposition 1.2.6.2 *[10] Si* $X \perp \mathcal{G}$ *,* Y *est* $\mathcal{G}$*-mesurable et* $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est borélienne et telle que* $\mathbb{E}(|\varphi(X,Y)|) < \infty$*, alors*

$$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)|\mathcal{G}) = \varphi(Y), \quad \text{où} \quad \varphi(y) = \mathbb{E}(\varphi(X,y)).$$

On obtient

$$\mathbb{E}\left(f(B_t)\,|\mathcal{F}_s^B\right) = \mathbb{E}\left(f(B_t - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s^B\right) = \psi(B_s) \quad \text{p.s.},$$

où $\psi(y) = \mathbb{E}\left(f(B_t - B_s + y)\right)$. Un calcul identique montre que $\mathbb{E}\left(f(B_t)|B_s\right) = \psi(B_s)$ p.s. et donc la Propriété simple de Markov est démontrée.

□

Remarque. De la démonstration ci-dessus, on déduit que

$$\mathbb{E}(f(B_t)|\mathcal{F}_s^B) = \psi(B_s) \quad \text{p.s.,} \quad \text{où} \quad \psi(y) = \mathbb{E}(X + y)$$

avec $X \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Ceci montre qu'une expression a priori compliquée faisant intervenir une espérance conditionnelle d'une fonction du mouvement Brownien peut se réduire à une simple espérance d'une fonction d'une loi gaussienne.

Propriété de Markov forte du mouvement Brownien

-Temps d'arrêt.

Définition 1.2.4 *Une application τ de Ω dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ est un temps d'arrêt si, pour tout $t \geq 0, \{\tau \geq t\} \in \mathcal{F}_t$. La tribu*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0,\ A \cap \{\tau \geq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

s'appelle la tribu des événements antérieurs à τ.

Proposition 1.2.6.3

i) *Soient σ et τ des temps d'arrêt. Alors $\sigma \vee \tau$ et $\sigma \wedge \tau$ sont des temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. De plus $\{\sigma \geq \tau\}$ et $\{\sigma = \tau\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.*

ii) *Soient τ_n des temps d'arrêt. Alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ est un temps d'arrêt.*

iii) *Supposons $(\mathcal{F}_t)$ continue à droite. Alors τ est un temps d'arrêt dés que $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$. Un inf d'une suite de temps d'arrêt est un temps d'arrêt.*

Preuve. (i)Soit $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$, alors $A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t$ et $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$. Si $A \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, $A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$ est dans $\mathcal{F}_t$. Donc $A \in \mathcal{F}_\tau$ de même $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Pour montrer que $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, il sufit de montrer que $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. Mais l'on a $\{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \wedge t \leq \tau \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\{\sigma \leq \tau\} \cap \{\sigma \leq t\} = \{\sigma \wedge t \leq \tau \wedge t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On procède de même pour $\{\sigma = \tau\}$.

(ii)On a $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n \leq t\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

(iii)Si $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0, \{\tau \leq t\} = \cap_{\epsilon>0}\{\tau \leq t + \epsilon\} \in \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$. Si τ_n est une suite de temps d'arrêt qui décroit vers $\tau, \{\tau < t\} = \cup_n\{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$, donc τ est un temps d'arrêt.

□

Soit (X_t) un processus adapté à $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ à valeurs dans un espace métrique (E, d), par exemple $\mathbb{R}^k$ avec la norme usuelle. La distance d définit une topologie et on munit E de la tribu borélienne. On associe à un sous ensemble A de E,

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t \geq 0, X_t(\omega) \in A\}, \tag{1.5}$$

τ_A est appelé le temps d'entrée dans A.

Proposition 1.2.6.4 *Si A est fermé et X à trajectoires continues, τ_A est un temps d'arrêt.*

Preuve. Posons $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$. Cette fonction est continue car, pour tout $x, y \in E$ et $a \in A$

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

donc $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ ce qui assure que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. On utilise alors que

$$\{\tau_A \leq t\} = \cap_n \cup_{s<t, s \in Q^+} \{d(X_s, A) \leq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t.$$

□

Lemme 1.2.6.1 *Si (X_t) est un processus continu à droite adapté à $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable de $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans E.*

Preuve. Pour tout n, posons $X_s^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} X_{\frac{k+1}{n} \wedge t} \mathbb{1}_{\frac{k}{n} \wedge t \leq s < \frac{k+1}{n} \wedge t}$. Alors $(s, \omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ est mesurable de $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans E. Il en est donc de même de la limite X de $X^{(n)}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Proposition 1.2.6.5 *Si X_t est un processus adapté continu à droite et τ un temps d'arrêt, $X_\tau \mathbb{1}_{\tau < \infty}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Preuve. Soit A un borélien de E. Il s'agit de montrer que pour tout $t \leq 0$, $\{X_t \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Soit $\Omega_t = \{\tau \leq t\}$. L'application $\omega \mapsto (\tau(\omega), \omega)$ est mesurable de $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ dans $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$, l'application $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable de $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans E par le lemme 1.2.6.1. Donc l'application composée $\omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$ de $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ dans E est mesurable i.e. $\{\tau \leq t, X_t \in A\} \in \mathcal{F}_t$.

Lemme 1.2.6.2 *Soit τ un temps d'arrêt. Il existe une suite décroissante τ_n de temps d'arrêt tel que τ_n est à valeurs dans $\{k/2n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{+\infty\}$.*

Preuve. On peut prendre $\tau_n = \frac{[2^n \tau]+1}{2^n}$.

Proposition 1.2.6.6 ***(La Propriété de Markov forte du mouvement Brownien)*** *Soit $B_t, t \geq 0$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement Brownien. Alors, pour tout temps d'arrêt τ, conditionnellement à $\{\tau < +\infty\}$, le processus $\{B_{t+\tau} - B_\tau, t \in \mathbb{R}_+\}$ est un Brownien, indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.*

Preuve. Il faut montrer que pour toute v.a. $Z, \mathcal{F}_\tau$-mesurable bornée et $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, continue bornée,

$$\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}F(B_{t_1+\tau} - B_\tau, \ldots, B_{t_d+\tau} - B_\tau)) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d}))$$

On considère d'abord le cas où τ prend toutes ses valeurs dans l'ensemble d'enombrable $\{s_k = k2^{-n}, k \in \mathbb{N}\}$. Alors, puisque Ω est la réunion dénombrable des ensembles disjoints $\{\tau = s_k\}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}F(B_{t_1+\tau} - B_\tau \quad &, \quad \ldots, B_{t_d+\tau} - B_\tau)) = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau=s_k\}}F(B_{t_1+\tau} - B_\tau, \ldots, B_{t_d+\tau} - B_\tau)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau=s_k\}}F(B_{t_1+s_k} - B_{s_k}, \ldots, B_{t_d+s_k} - B_{s_k})) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau=s_k\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d}) \\
&= \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d}))
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $Z\mathbb{1}_{\{\tau=s_k\}}$ est $\mathcal{F}_{s_k}$ mesurable et que B est un $\mathcal{F}_t$-Brownien. Dans le cas général, on approche τ par une suite décroissante τ_n de temps d'arrêt à valeurs d'enombrables, donnée par le lemme 1.2.6.2. Puisque $\mathcal{F}_\tau$ est contenu dans $\mathcal{F}_{\tau_n}$ on a encore

$$\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau_n<+\infty\}}F(B_{t_1+\tau_n} - B_{\tau_n}, \ldots, B_{t_d+\tau_n} - B_{\tau_n})) = \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}})\mathbb{E}(F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_d}))$$

et on fait tendre n vers l'infini pour conclure, en utilisant la continuité des trajectoires.

Proposition 1.2.6.7 ***(Principe de réflaxion).***
Soit $\{B_t; t \geq 0\}$ un mouvement Brownien. Pour $a > 0$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$. Alors

$$\mathbb{P}\left(T_a \leq t\right) = 2\mathbb{P}\left(B_t \geq a\right).$$

La densité de T_a est $f(s) = a\frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) \mathbb{1}_{R^+}(s)$

Preuve. En utilisant la Propriété de Markov forte du Brownien, on sait que $W_t = B_{t+T_a} - B_{T_a}$ est un Brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}$ donc en particulier de T_a. On peut donc écrire, puisque $B_{T_a} = a$ que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_t \geq a) &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \geq a) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t - B_{T_a} + B_{T_a} \geq a) \\
&= \mathbb{P}(T_a \leq t, W_{t-T_a} \geq 0) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(T_a \leq t).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(s) = a\frac{1}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) \mathbb{1}_{R^+}(s)$$

□

La propriété suivante est assez étonnante !
Corollaire. La loi de $\sup_{0\leq s\leq t} B_s$ est la même que celle de $|B_t|$.
Preuve. Par l'utilisant de la proposition précédent, on va obtenir

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a) = \mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a)$$

1.2.7 Intégrale stochastique (ou intégrale d'Itô)

Variation quadratique du mouvement Brownien standard :

Définition 1.2.5 *On définit la variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X_t sur $[0,T]$ associé à une subdivision $\Delta_n = (t_1, \ldots, t_n)$ de $[0,T]$ par :*

$$V_T^p(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p$$

Si $V_T^p(\Delta_n)$ a une limite dans un certain sens (convergence $\mathcal{L}^p$, convergence p.s.) lorsque $\pi_n = \|\Delta_n\|_\infty = \max_{i\leq n} |t_{i+1} - t_i| \to 0$.
En particulier :

- *si $p = 2$, la limite s'appellera variation quadratique de X_t sur $[0,T]$ notée $\langle X\rangle_T$.*

Proposition 1.2.7.1 *La variation quadratique sur* $[0,T]$ *du mouvement Brownien existe dans* $\mathcal{L}^2(\Omega)$ *(la variation infinitésimale converge en* $||.||_2$ *) et vaut* T *. De plus, si la subdivision* Δ_n *satisfait* $\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n < \infty$*, on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :*

$$\langle B\rangle_T = T$$

preuve. La variation infinitesimale d'ordre 2 du Mouvement Brownien est donnée par :

$$V_T^2(\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2$$

On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[X^2] = \sigma 2$ et $Var[X^2] = 2\sigma^4$. On a donc :

$$\mathbb{E}[V_T^2(\Delta_n)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = T$$

Et en notant $\pi_n = \max_{i\leq n}|t_{i+1} - t_i|$, on obtient :

$$Var[V_T^2(\Delta_n)] = \sum_{i=1}^{n} Var[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] = 2\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 \leq 2T\pi_n \longrightarrow_{\pi_n\to 0} 0$$

Donc $\|Var[V_T^2(\Delta_n)] - T\| = Var[V_T^2(\Delta_n)] \longrightarrow 0$ quand $\pi_n \to 0$. Pour obtenir la convergence presque sûre, il faut utiliser l'inégalité de Markov qui donne pour tout ϵ :

$$\mathbb{P}\left[|Var[V_T^2(\Delta_n)] - T| > \epsilon\right] \leq \frac{Var[V_T^2(\Delta_n)]}{\epsilon} \leq \frac{2T\pi_n}{\epsilon}$$

Donc si $\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n < \infty$, on a pour tout $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[|Var[V_T^2(\Delta_n)] - T| > \epsilon\right] < \infty$ ce qui (par Borel-Cantelli) entraîne la convergence presque sûre de $V_T^2(\Delta_n)$ vers T .

Intégrale d'Itô :

Soit $(B_t, t\in\mathbb{R}_+)$ un mouvement Brownien standard par rapport à $(\mathcal{F}_t, t\in\mathbb{R}_+)$. Soit $T > 0$ fixé . Notre but est de construire l'intégrale stochastique et on pose

$$(H.B)_t \equiv \int_0^t H_s dB_s, t\in[0,T]$$

pour un processus H_t vérifant certaines propriétés.
On étend maintenant l'intégrale $(H.B)$ par continuité à l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_T &= \{(H_t, t \in [0,T]) : H \text{ est adapté, continu à gauche, limité à droite} \\ &\qquad \text{et tel que } \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty\}.\end{aligned}$$

Cet ensemble est un espace vectoriel normé et complet (ou espace de Banach), muni de la norme $\|.\|_{T,1}$ définie par

$$\|H\|_{T,1}^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right).$$

Remarque. Un processus adapté et continu à gauche est l'équivalent à temps continu d'un processus prévisible à temps discret : la valeur d'un tel processus à l'instant t ne peut pas différer trop de sa valeur à l'instant $t-\epsilon$, instant où il est $\mathcal{F}_{t-\epsilon}$-mesurable car adapté. Il existe toutefois une notion plus générale de processus prévisible à temps continu, mais nous n'entrerons pas dans ces détails dans ce mémoire.
D'autre part, on entend par "limité à droite" que le processus peut être discontinu à droite, mais doit tout de même avoir une limite depuis la droite (i.e. le "futur"). Cette restriction est essentiellement technique ; elle assure que le processus soit suffisamment régulier. On a maintenant besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2.7.0.1 *$\forall H \in \mathcal{H}_T$, il existe une suite $(H^{(n)})$ de processus simples prévisibles tels que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s)^2 ds\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0,$$

alors

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} ((H^{(n)}\cdot B)_t - (H\cdot B)_t)^2\right) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0. \tag{1.6}$$

Preuve. Du fait que la suite $(H^{(n)})$ converge, c'est également une suite de Cauchy :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T (H_s^{(n)} - H_s^{(m)})^2 ds\right) \longrightarrow_{n,m\to+\infty} 0.$$

Et donc, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}((H^{(n)}\cdot B)_t-(H^{(m)}\cdot B)_t)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}((H^{(n)}-H^{(m)}\cdot B)_t)^2\right)\\ &\leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T(H_s^{(n)}-H_s^{(m)})^2ds\right)\longrightarrow_{n,m\to+\infty}0.\end{aligned}$$

La suite de processus $((H_{(n)}\cdot B))$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace de Banach M_T défini par

$$\mathcal{M}_T=\{(M_t,t\in[0,T])\ \text{ martingale continue de carré intégrable telle que } M_0=0\}$$

et muni de la norme $\|.\|_{T,2}$ définie par

$$\|M_t\|_{T,2}=\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}M_t^2\right).$$

Le fait que $\mathcal{M}_T$ soit complet (i.e. que toute suite de Cauchy dans $\mathcal{M}_T$ converge dans $\mathcal{M}_T$) implique que la suite $((H^{(n)}\cdot B))$ converge dans $\mathcal{M}_T$. Il existe donc un élément $(H.B)\in\mathcal{M}_T$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}((H^{(n)}\cdot B)_t-(H\cdot B)_t)^2\right)\longrightarrow_{n\to+\infty}0. \tag{1.7}$$

□

Remarque. (1.6) implique en particulier que pour tout $\epsilon>0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{t\in[0,T]}|(H^{(n)}\cdot B)_t-(H\cdot B)_t|>\epsilon)\longrightarrow_{n\to+\infty}0,$$

donc la suite $(H^{(n)}\cdot B)$ converge uniformément sur $[0,T]$ en probabilité vers $(H\cdot B)$. Nous avons ainsi défini l'application linéaire et continue

$$\begin{cases}\mathcal{H}_T\longrightarrow\mathcal{M}_T\\ H\longmapsto(H\cdot B)\end{cases}$$

qui vérifie certain propriété :

Proposition 1.2.7.2 *[14] Sur $\mathcal{L}^2(\Omega,[0,T])$, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés suivante :*

1. $\theta \longmapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire.*
2. $t \longmapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s.*
3. $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus $\mathcal{F}$-adapté.*
4. ***Propriété d'isométrie*** *:*
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$
5. $\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = 0$ *et* $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$.
6. *De manière plus générale, on a :*
$$\mathbb{E}\left(\int_u^t \theta_s dB_s|\mathcal{F}_u\right) = 0 \text{ et } \mathbb{E}\left[\left(\int_u^t \theta_s dB_s\right)^2 |\mathcal{F}_u\right] = \mathbb{E}\left(\int_u^t \theta_s^2 ds|\mathcal{F}_u\right).$$
7. *On a même le résultat plus général :*
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_u^t \phi_s dB_s\right)\left(\int_u^v \theta_s dB_s\right)|\mathcal{F}_u\right) = \mathbb{E}\left(\int_u^{t\wedge v} \phi_s\theta_s ds\mathcal{F}_u\right).$$
8. $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une $\mathcal{F}$-martingale.*
9. *Le processus* $\left(\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une $\mathcal{F}$-martingale.*
10. *La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :*
$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$
11. *La covariation quadratique entre deux intégrales stochastique est donnée par*
$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^v \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge v} \phi_s\theta_s ds.$$

Chapitre 2

Mouvement Brownien avec dérive

Soit $\mathcal{F}_t = \sigma\{S_s : 0 \leq s \leq t\}$, la σ-algébre engendrée par le processus jusqu'à temps $t \in [0, +\infty[$. La famille de σ-algébres $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty[\}$ s'appelle une filtration.

2.1 Définition et quelques propriétés

Définition 2.1.1 *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownient standard. Nous appelons mouvement Brownien avec dérive le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ défini par*

$$\forall t \geq 0, \quad S_t = \mu t + B_t$$

où μ est une constante réelle.

Grâce aux propriétés du mouvement Brownien, nous avons immédiatement :

- $S_0 = 0$ p.s.
- Le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.
- La variable S_t admet pour loi la loi $\mathcal{N}(\mu t, t)$, i.e,

$$f_{S_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{1}{2t}(x - \mu t)^2\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

Proposition 2.1.1 *Le mouvement Brownien avec dérive est caractérisé par les propriétés ci-dessus et on a de plus :*

- *Il s'agit aussi du processus gaussien de moyenne*

$$\forall t \geq 0 \ m(t) = \mu t.$$

et de covariance

$$\forall s, t \geq 0 \ k(s,t) = \min(s,t).$$

- *Les trajectoires sont continues avec probabilité 1.*
- *Les trajectoires sont de variation infinie sur tout intervalle fini* $[0, T]$. *En d'autres termes, la variation totale sur tout intervalle fini* $[0, T]$ *d'un chemin d'échantillon d'un mouvement Brownien avec dérive est infini avec une probabilité 1 dans la limite de* $n \to \infty$ *(comme la partition devient plus fine et plus fin) :*

$$\mathbb{P}\left(\underset{n\to\infty}{lim} V^b(S) = \underset{n\to\infty}{lim} \sup \sum_{i=1}^{n} |S_{t_i} - S_{t_{i-1}}| = \infty \right) = 1$$

- *Les variations quadratiques de trajectoires de mouvements Browniens avec dérive* S_t *sont finies sur tout intervalle fini* $[0, T]$ *et converge vers* T *avec une probabilité* 1 *dans la limite de* $n \to \infty$ *(comme la partition devient plus fine et plus) :*

$$\mathbb{P}\left(\langle S \rangle_T = \underset{n\to\infty}{lim} V_T^2(S) = \underset{n\to\infty}{lim} \sup \sum_{i=1}^{n} |S_{t_i} - S_{t_{i-1}}|^2 = T \right) = 1$$

Preuve. La démonstration de cette proposition a partir des propriétés d'un mouvement Brownien standard.

□

2.2 Propriété NonMartingale d'un mouvement Brownien avec dérive

Théorème 2.2.1 ***(Mouvement Brownien avec dérive n'est pas une martingale continue).***
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. *Un mouvement Brownien avec dérive* $S_t = B_t + \mu t$ *n'est pas une martingale continue par rapport à la filtration* $\mathcal{F}_t$ *et la mesure de probabilité* $\mathbb{P}$.

Preuve. Par définition, le processus S_t est adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ avec espérance finie $\mathbb{E}(|S_t|) \leq |\mu|t + \mathbb{E}(|B_t|) = |\mu|t < \infty$, pour tout $t \geq 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ mais ne vérifie pas le dernier condition de martingale, c'est à dire $\forall t \geq s \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(S_t - S_s + S_s/\mathcal{F}_t). \\
&= \mathbb{E}(S_t - S_s) + S_s. \quad \text{(d'aprés l'indépendance des accoroissements)} \\
&= S_s + (t-s)\mu.
\end{aligned}$$

Théorème 2.2.2 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard défini sur un espace probabilité filtré . Puis, un mouvement Brownien avec dérive détendancée défini comme suit :*

$$S_t - \mu t = B_t, \quad t \geq 0$$

est une martingale continue par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ et la probabilité mesurer $\mathbb{P}$.

Preuve. Puis que le mouvement Brownien standard est une martingale continue par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ et la probabilité mesurer $\mathbb{P}$.

2.3 La propriété de Markov et temps d'arrêt

Pour voir S_t comme un processus de Markov, nous avons parfois besoin de se détendre et laisser hypothése (1) S_0 ont une valeur arbitraire dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3.1 *soit $\{S_t : t \in [0, \infty[\}$ le mouvement Brownien avec dérive. Alors S_t est un processus de Markov homogène avec la densité de probabilité de transition p_t donnée par*

$$p_t(x,y) = f_t(y-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp[-\frac{1}{2t}(y-x-\mu t)^2], t \in [0, +\infty[; x, y \in \mathbb{R}$$

Preuve. puisque le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ est á accroissements indépendants et stationnaires, alors pour $s \in [0, +\infty[$ le processus $\{S_{s+t} - S_s : t \in [0, +\infty[\}$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

□

Notons $x > 0$ le capital de départ et disons que x est compris entre les valeurs a et b. Nous souhaitons calculer la probabilité $p(x)$ pour que le processus (le capital) atteigne la valeur élevée b avant la valeur basse a. Soit $\mu > 0$ et

$$\forall t \geq 0 \ Z_t = x + \mu t + B_t$$

Soit $h > 0$ et $S_h = Z_h - Z_0$.

Lemme 2.3.1 *La probabilité que le processus $\{S_t, t \geq 0\}$ sorte d'un intervalle borné $[a, b]$ est de l'ordre de $o(h)$.*

Preuve. Un conditionnement considérant les cas où le processus sort ou non de l'intervalle $[a, b]$ conduit aux équations suivantes

$$\begin{aligned} P(x) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\text{ Le processus atteint } b \text{ avant } a|S_h)] + o(h) \\ &= \mathbb{E}[p(x + S_h)] + o(h). \end{aligned}$$

Dans ces équations, $o(h)$ représente la probabilité pour que le processus atteigne a ou b dans l'intervalle de temps de longueur h. Un développement en série donne

$$p(x) = \mathbb{E}\left[p(x) + p'(x)S_h + p''(x)\frac{S_h^2}{2} + \ldots\right] + o(h)$$

soit

$$p(x) = p(x) + p'(x)\mathbb{E}(S_h) + p''(x)\mathbb{E}(\frac{S_h^2}{2}) + \ldots + o(h).$$

Finalement, la variable S_h est une variable de loi normale de moyenne μh et de variance h. Après simplification, nous avons donc

$$p'(x)\mu + \frac{p''(x)}{2} = \frac{o(h)}{h}.$$

Puisque h peut être arbitrairement petit, p est solution de l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$p'' + 2\mu p' = 0$$

et vérifie les "conditions de bord"

$$p(b) = 1; p(a) = 0.$$

La solution de ce problème est classique :

$$\forall x \in [a, b], \qquad p(x) = \frac{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu x}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}}.$$

Commentaires. Si $\mu < 0$, en laissant a tendre vers l'infini, on obtient la probabilité pour que le processus atteigne b. Cette probabilité est égale à

$$p(x) = e^{-2\mu(b-x)}. \tag{2.1}$$

Proposition 2.3.2 *Soit $\{S_t, t \geq 0\}$ le mouvement Brownien avec dérive positive μ. Alors,*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\max_{0\leq s\leq t} S_s]}{t} = \mu \quad p.s$$

Preuve. Soit $T_0 = 0$ et pour tout $n > 0$, notons T_n le temps d'atteinte de la valeur n. Comme le processus est à accroissements indépendants, les variables $T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes et de même loi. La suite (T_n) forme donc un processus de renouvellement de processus de comptage $\{N_t; t \geq 0\}$. De plus, nous savons que

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\max_{0\leq s\leq t} S_s] = \mathbb{E}[N_t + 1]$$

et

$$\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\mu}.$$

D'après les résultats concernant les processus de renouvellement

$$\frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \longrightarrow_{t\to+\infty} \frac{1}{\mathbb{E}[T_1]} = \mu \qquad \text{p.s.}$$

□

Proposition 2.3.3 *Soit $\mu > 0$. La suite (S_n) converge presque-sûrement vers $+\infty$.*

Preuve. Nous utilisons le lemme de Borel-Cantelli. Soit $A > 0$, nous avons

$$\mathbb{P}(\mu n + B_n < A) = \int_{-\infty}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{-(x-\mu n)^2}{2n}} dx$$

En développant le carré, nous obtenons

$$\mathbb{P}(\mu n + B_n < A) \leq e^{\frac{-2\mu n}{2}} e^{\mu A} \int_{-\infty}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{\frac{-x^2}{2n}} dx \leq e^{\frac{-2\mu n}{2}} e^{\mu A}$$

Donc la variable S_n converge donc p.s vers $+\infty$.

□

On déterminons la loi du temps d'atteinte de la valeur a par un mouvement Brownien avec dérive. Nous supposons que le coefficient de dérive μ est strictement positif. Soit

$$T_a = \inf\{t \geq 0, S_t = a\} \tag{2.2}$$

et

$$\forall s > 0, \qquad L_{T_a}(s) = \mathbb{E}[e^{-sT_a}]$$

sa transformée de Laplace. Pour tout $a, b > 0$, on remarque que

$$L_{T_{a+b}}(s) = \mathbb{E}[e^{-sT_{a+b}}] = \mathbb{E}[e^{-s(T_a+T_{a+b}-T_a)}].$$

Comme T_a et $T_{a+b} - T_a$ sont indépendantes, on a

$$L_{T_{a+b}}(s) = \mathbb{E}[e^{-sT_a}]\mathbb{E}[e^{-s(T_{a+b}-T_a)}].$$

et par stationarité des accroissements

$$L_{T_{a+b}}(s) = L_{T_a}(s)L_{T_b}(s).$$

Ceci implique que

$$\forall s > 0, \qquad L_{T_a}(s) = e^{-c(s)a}$$

où $c(s) > 0$ ne dépend pas de a.

Proposition 2.3.4 *La transformée de Laplace de la variable T_a est égale à*

$$\forall s > 0, L_{T_a}(s) = e^{-a(\sqrt{\mu^2+2s}-\mu)}.$$

Preuve. Il s'agit de déterminer $c(s)$. On conditionne par S_h pour un h petit. Ceci entraine que

$$\begin{aligned} f(a) = L_{T_a}(s) &= \mathbb{E}[e^{-s(h+T_a-S_h)}] + o(h) \\ &= e^{-sh}\mathbb{E}[f(a - S_h)] + o(h). \end{aligned}$$

En utilisant un développement de Taylor :

$$f(a) = e^{-sh}\mathbb{E}[f(a) - S_h f'(a) + \frac{S_h^2}{2} f''(a) + \ldots] + o(h)$$

soit

$$f(a) = f(a)(1 - sh) - f'(a)\mu h + h^2 f''(a) + o(h).$$

Puisque h peut être choisi arbitrairement petit, f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$sf = -\mu f' + \frac{f''}{2}.$$

Remarquons maintenant que

$$f(a) = e^{-c(s)a}.$$

Nous obtenons alors

$$c^2(s) + 2\mu c(s) - 2s = 0,$$

et

$$c(s) = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2s}.$$

□

Commentaires. On peut déduire de cette proposition le temps moyen d'atteinte de la valeur a par un mouvement Brownien avec d'erive

$$\mathbb{E}[T_a] = -L'_{T_a}(0) = \frac{a}{\mu}.$$

2.4 Intégration par rapport un mouvement Brownien avec dérive

Nous considérons un mouvement Brownien avec dérive de la forme $dS_t = \int_0^t \mu_t dt + dB_t$ pour $t \geq 0$, avec un un processus $(\mu_t)_{t\geq 0}$ prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$, la filtration naturelle du mouvement Brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$. Nous construisons un processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$, aussi prévisible par rapport à $\mathcal{F}_t^B$, tel que $((H\cdot S)_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien dans sa filtration. En outre, pour tout $\delta > 0$, nous affinons cette construction tels que le dérive $(\mu_t)_{t\geq 0}$ n'admet que des valeurs dans $]\mu - \delta, \mu + \delta[$, pour $\mu > 0$ fixé.

2.4.1 Construire le processus de dérive

Soit B_t un mouvement Brownien et soit ϵ un signe aléatoire indépendant de B_t telle que $\mathbb{P}(\epsilon = 1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = 1/2$. Considérons

$$S_t = \int_0^t \mu_s ds + B_t, \ t \geq 0, \tag{2.3}$$

avec μ_t un processus borné $\mathcal{F}_t^B$-prévisible et un processus $Y_t = \epsilon S_t$. Notre but est de trouver μ_t tels que Y_t est un mouvement Brownien dans sa propre filtration.
Nous imaginons μ_t comme étant "collés" à partir de deux $\mathcal{F}^Y$-processus prévisibles. Formellement, soit $\mu_t^+, \ \mu_t^-$ deux processus prévisibes bornés tels que

$$\mu_t = \mathbb{1}_{\{\epsilon=1\}} \mu_t^+ + \mathbb{1}_{\epsilon=-1} \mu_t^-. \tag{2.4}$$

Nous souhaitons tirer conditions sur $\mu_t^+, \ \mu_t^-$ garantissant que Y_t est aussi nécessaire. À cette fin, introduire les probabilités conditionnelles

$$p_t = \mathbb{P}[\epsilon = 1 | \mathcal{F}_t^Y], \ t \geq 0. \tag{2.5}$$

Dans le langage de la théorie de filtrage, p_t donne la distribution du "signal" ϵ conditionnellement aux "observations" Y.

Proposition 2.4.1.1 *[13] Soit S et Y comme ci-dessus et $(\mu_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t^B$-prévisible borné de la forme (2.4). Les probabilités conditionnelles p_t défini en (2.5) satisfont*

$$\begin{aligned} p_0 &= 1/2 \ et \\ dp_t &= \frac{(\mu_t^+ + \mu_t^-)^2}{2} [\epsilon p_t(1-p_t) + p_t(1-p_t)(1-2p_t)]dt + \epsilon p_t(1-p_t)(\mu_t^+ + \mu_t^-) dB_t \end{aligned} \tag{2.6}$$

Proposition 2.4.1.2 *Sous les hypothèses de la Proposition 2.4.1.1, on suppose en outre, que pour tout $u \geq 0$,*

$$p_u \mu_u^+ - (1-p_u)\mu_u^- = 0 \ p.s \tag{2.7}$$

alors le processus Y est un $\mathcal{F}_t^Y$-mouvement Brownien.

Preuve. Évidemment $(Y_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t^Y$-adapté, continu et a la variation quadratique droite comme le dérive est borné. Afin d'utiliser le théorème Lévy de la caractérisation du mouvement Brownien , nous devons vérifier la condition de martingale. Par conséquent, on fixe $s \leq t < \infty$ et considèrons que

$$\mathbb{E}[\epsilon(S_t - S_s)|\mathcal{F}_s^Y] = \mathbb{E}[\int_s^t \epsilon\mu_u du|\mathcal{F}_s^Y] + \mathbb{E}[\epsilon(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s^Y]$$

La deuxième espérence conditionnelle est nulle. La propriété de martingale est donc équivalente à

$$\mathbb{E}[\int_s^t \epsilon\mu_u du \mathbb{1}_A] = 0 \tag{2.8}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_s^Y$. Notons que le théorème de Fubini s'applique puisque $|\epsilon\mu_u\mathbb{1}_A|$ est bornée. De plus, en utilisant la loi tour nous obtenons que (2.8) a lieu ssi

$$\mathbb{E}[\int_s^t \epsilon\mu_u du \mathbb{1}_A] = \int_s^t \mathbb{E}[\mathbb{E}[\epsilon\mu_u|\mathcal{F}_u^Y]\mathbb{1}_A]du = 0$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_s^Y$. Rappellons que μ_u^+ et μ_u^- sont supposés être $\mathcal{F}_u^Y$-mesurable pour $u \geq 0$. Il résulte des hypothéses de cette proposition que

$$\mathbb{E}[\epsilon\mu_u|\mathcal{F}_u^Y] = p_u\mu_u^+ - (1 - p_u)\mu_u^- = 0 \ p.s$$

□

La formule (2.7) montre qu'il est raisonnable de choisir μ_t^+ proportionnel à $(1 - p_t)$ et μ_t^- proportionnel à p_t. Cela permettra de garantir la validité de (2.7) comme la proposition suivante le montre.

Proposition 2.4.1 *Soit $\mu > 0$ est une constante arbitraire. Soit g_t une solution de l'équation*

$$g_0 = 1/2 \ \ et \ \ dg_t = 2\mu^2\left[\epsilon g_t(1 - g_t) + g_t(1 - g_t)(1 - 2g_t)\right]dt + \epsilon g_t(1 - g_t)2\mu dB_t \tag{2.9}$$

adapté à la filtration $\mathcal{F}^{\epsilon,B}$ *et satisfaisant* $0 \leq g_t \leq 1$ *pour* $t \geq 0$. *Soit*

$$\mu_t^+ = 2\mu(1-g_t), \quad \mu_t^- = 2\mu g_t, \quad t \geq 0, \tag{2.10}$$

on définit μ_t, S_t, Y_t, p_t *convenabelement. Si* g_t *est* $\mathcal{F}^Y$*-prévisible et* μ_t *est* $\mathcal{F}^B$*-prévisible alors* p_t *est égal à* g_t *et* Y *est un mouvement Brownien dans sa propre filtration .*

Preuve. Notons d'abord que les coefficients de l'EDS autonome (2.9) sont Lipschitz continues et bornée lorsqu' on se restrient à $[0,1]$ donc g_t est la solution forte unique de (2.9) adapte à $\mathcal{F}^{\epsilon,B}$. Ainsi, il suffit de prouver que p_t est aussi une solution de (2.9). Évidemment, $p_0 = \mathbb{P}[\epsilon = 1] = 1/2 = g_0$. Si g_t est $\mathcal{F}^Y$-prévisible alors μ_t^+, μ_t^- le sont aussi. Proposition 2.4.1.1 montre que p_t est une solution de (2.9), en effet $p_t = g_t$. Avec ce choix de μ_t^+, μ_t^- équation (2.7) est satisfaite et la proposition (2.4.1.2) nous permet de conclure.

□

Il reste à résoudre l'équation différentielle stochastique (2.9).

Proposition 2.4.2 *Soit* $B = (B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement Brownien standard et* ϵ *une variable aléatoire avec* $\mathbb{P}[\epsilon = 1] = \mathbb{P}[\epsilon - 1] = 1/2$, *indépendante de* B. *Notons* $(\mathcal{F}_t^B)$ *la filtration engendrée par* (B_t). *Pour chaque* $\mu > 0$, *il existe un processus* μ_t $(\mathcal{F}_t^B)$*-prévisibles à valeurs dans* $]0, 2\mu[$ *tel que pour* $S = (S_t)_{t\geq 0}$ *et* $S_0 = 0$ *vérifiant*

$$dS_t = \mu_t dt + dB_t, \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

nous avons que

$$Y_t = \epsilon S_t, \quad t \geq 0,$$

est un mouvement Brownien dans sa propre filtration .

Preuve. Dans la section 4.2 de [2], un autre problème de filtrage conduit à peu prés la même équation que (2.9). Cette équation a une solution explicite (voir (4.55) à la page 180) à partir de laquelle il est facile de faire la conjecture

$$g_t = \begin{cases} \frac{\exp(2\mu B_t + 2\mu^2 t)}{1+\exp(2\mu B_t + 2\mu^2 t)}, & \text{si}\epsilon = 1 \\ \frac{1}{1+\exp(2\mu B_t + 2\mu^2 t)}, & \text{si}\epsilon = -1 \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô nous pouvons vérifier que cela donne en effet une solution (forte) à (2.9) qui reste trivialement dans $[0,1]$. Définir $\mu_t^+, \mu_t^-, \mu_t, S_t, Y_t, p_t$ comme dans la proposition 2.4.1. On peut vérifier que

$$dg_t = 2\mu g_t(1-g_t)dY_t, \tag{2.12}$$

montrant que g_t est $\mathcal{F}^Y$-prévisible. Nous constatons que la dynamique de μ_t est

$$d\mu_t = -\mu_t^2(2\mu-\mu_t)dt - \mu_t(2\mu-\mu_t)dB_t, \tag{2.13}$$

où μ_t est $\mathcal{F}^B$-prévisible. Pour une utilisation ultérieure, nous notons que, en substituant pour (2.10), nous obtenons la formule suivante pour μ_t :

$$\mu_t = \frac{2\mu}{1+\exp(2\mu B_t + 2\mu^2 t)}. \tag{2.14}$$

Proposition 2.4.1 implique maintenant que $p_t = g_t$ et Y_t est en effet le cas échéant.

$\square$

Passant à la transformation de Lévy

Dans cette partie, nous décrivons comment se débarrasser de l'élargissement de la filtration $\mathcal{F}_t^B$ par le signe ϵ. Nous ferons usage de la transformée de Lévy qui se pose naturellement dans la formule célèbre de Tanaka pour l'EDS de $(|B_t|)_{t\geq 0}$ pour un certain mouvement Brownien B (pour le calcul de la formule Tanaka voir [6]).
Rappelons que la transformation de lévy $(M_t^0)_{t\geq 0}$, d'un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est définie par

$$M_t^0 = \int_0^t \mathrm{sign}(B_s)dB_s, t \geq 0 \tag{2.15}$$

où nous utilisons la fonction signe sous la forme continue à gauche ci-dessous

$$\mathrm{sign}(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} - \mathbb{1}_{\{x\leq 0\}}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Parmi les propriétés de la transformation de lévy nous mentionnons que $(M_t^0)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien dans sa filtration et la filtration engendrée par $(M_t^0)_{t\geq 0}$ est égale à celle générée par $(|B_t|)_{t\geq 0}$, qui est plus petite que celle généré par la filtration $(B_t)_{t\geq 0}$.

Théorème 2.4.1 *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^B, \mathbb{P})$, où $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ est la filtration continue à droite saturée générée par B.*

- *Pour chaque $\mu > 0$, il existe $\mathcal{F}_t^B$-processus prévisibles $H = (H_t)_{t\geq 0}$ prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $(\mu_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $]0, 2\mu[$ de telle sorte que pour $S = (S_t)_{t\geq 0}$ définie par $S_0 = 0$ et*

$$dS_t = \mu_t dt + dB_t$$

nous avons que le processus $((H \cdot S)_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien dans sa propre filtration $\mathcal{F}_t^{(H\cdot S)}$.

Preuve. Prenons μ_t, S_t tels que construits dans la preuve de la proposition 2.4.2. On introduit $(Y_t)_{t\geq 0} = (\epsilon S_t)_{t\geq 0}$, c'est un mouvement Brownien dans sa propre filtration, par la proposition 2.4.2

Considérons maintenant la transformée de Léyy $(M_t)_{t\geq 0}$ de la $\mathcal{F}_t^Y$-mouvement Brownien $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$. Elle est définie par $M_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} dM_t &= \operatorname{sign}(Y_t) dY_t = \operatorname{sign}(\epsilon S_t) \epsilon dS_t \\ &= \operatorname{signe}(S_t) dS_t, t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

C'est encore un mouvement Brownien (dans $\mathcal{F}_t^Y$ ainsi que dans $\mathcal{F}_t^M$) par les propriétés de transformée de Lévy . Il s'ensuit que avec le choix $H_t = \operatorname{sign}(S_t)$, le processus $(H \cdot S)_t,\ t \geq 0$ est un mouvement Brownien dans sa filtration propre.

□

2.4.2 L^∞-approximation d'un dérive constant

Le but de cette section est de montrer que nous pouvons en effet définir un processus $(S_t)_{t\geq 0}$ tel que le processus de dérive μ_t est proche d'un constante μ par rapport à la norme dans $\mathbf{L}^\infty$. La stratégie est que chaque fois que nous nous arrêtons dès que le dérive $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est passée par un petit nombre fixe. Aprés cela, nous allons relancer la construction. Un point un peu délicat, c'est que l'arrêt doit être fait d'une maniére adaptée à $\mathcal{F}^M$. Lemme 2.4.2.1 ci-dessous montre que c'est effectivement possible. La distance entre le processus de dérive μ_t et μ est proportionnelle à la distance entre p_t et $1/2$. À savoir, par (2.4) et (2.10),

$$\begin{aligned} |\mu_t - \mu| &= |2\mu(1-p_t) - \mu|\mathbb{1}_{\{\epsilon=1\}} + |2\mu p_t - \mu|\mathbb{1}_{\{\epsilon=-1\}} \\ &= 2\mu\left|\frac{1}{2} - p_t\right|, \quad \text{pour } t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dans le lemme suivant, nous montrons que l'on peut définir un temps d'arrêt dans la filtration engendrée par la transformation de Lévy $(M_t)_{t\geq 0}$ du mouvement Brownien $(Y_t)_{t\geq 0}$, i.e $(\mathcal{F}_t^M)_{t\geq 0}$, de sorte que nous avons un contrôle sur la distance entre p et $1/2$.

Lemme 2.4.2.1 *on prend p_t, μ_t, S_t, Y_t définies comme précédemment. On Considère la transformation de Lévy $M = (M_t)_{t\geq 0}$ de $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, définie par $M_0 = 0$ et*

$$dM_t = sign(Y_t)dY_t.$$

Pour chaque $\delta > 0$ nous définissons le temps d'arrêt $\rho_\delta = \inf\{t : |M_t| \geq \delta\} \wedge \delta$. L'estimation suivante est vérifié

$$\left|p_t - \frac{1}{2}\right| \leq \delta\frac{(2\mu + 3\mu^2)}{2} \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq \rho_\delta \tag{2.18}$$

Preuve. Nous présentons la preuve en deux étapes.
Étape 1 : Nous montrons que $|Y_t| \leq 2\delta$, pour $0 \leq t \leq \rho_\delta$.
Soient $\tau = \inf\{t : |Y_t| \geq 2\delta\}$ et $\sigma = \max\{t \leq \tau : Y_t = 0\}$, i.e. le temps du dernier zéro de Y précédent τ. Nous notons que τ est un temps d'arrêt dans la filtration $\mathcal{F}^Y$, pendant que σ ne parmanque d'être un temps d'arrêt. Observez que par la formule de Tanaka (voir par exemple [6])

$$M_t = |Y_t| - L_t.$$

où L est le temps local de Y à zéro. Par définition de σ le temps local L ne grandit pas sur $[\sigma, \tau]$ et donc p.s. $L_\sigma = L_\tau$. Pour que le processus M ce qui donne

$$|M_\sigma - M_\tau| = 2\sigma,$$

de sorte que $\sup_{0\leq t\leq\tau} |M_t| \geq \delta$, ce qui montre que $\rho_\delta \leq \tau$ p.s., c'est à dire $|Y_t| \leq 2\delta$ pour $0 \leq t \leq \rho_\delta$.

Étape 2 : Par un calcul simple, $|p_t - (1/2)| = (1/2)|\operatorname{th}(\mu^2 + \mu B_t)|$, où "th" désigne la tangente hyperbolique. Comme $|\operatorname{th} x| \leq |x|, dY_t = \epsilon\mu_t dt + \epsilon dB_t$ et $\mu_t \in]0, 2\mu[$ on peut écrire, pour $t \leq \rho_\delta$,

$$\begin{aligned} \left|p_t - \frac{1}{2}\right| &\leq \mu^2(t/2) + \mu(|B_t|/2) \leq \mu^2(t/2) + \mu(|Y_t|/2) + \mu\left|\int_0^t \mu_s ds\right|/2 \\ &\leq \mu^2\delta/2 + \mu(2\delta)/2 + \mu^2\delta. \end{aligned}$$

en utilisons l'étap 1 et $\rho_\delta \leq \delta$.

□

En utilisant le lemme précédent, nous pouvons affiner la construction en arrêtant et en redémarrage, lorsque nous sommes trop loin d'un dérive constant, considérant les informations de $\mathcal{F}^M$ seulement. La constante $\mu > 0$ fixée. Pour le but de contrôler la distance L^∞ entre μ et le processus de dérive μ_t être construit fixer également une constante $\delta > 0$. La stratégie est simple. Nous commençons à $t = 0$ en utilisant le dérive $(\mu_t^1)_{t\geq 0}$ qui est donnée par $\mu_0^1 = \mu$ et (2.13). Définir le processus S^1 par $S_0^1 = 0$,

$$dS_t^1 = \mu_t^1 dt + dB_t, \qquad t \geq 0.$$

Nous effectuons la transformation de Lévy qui se traduit par un processus $(M_t^1)_{t\geq 0}$. On présente $\mathcal{F}^M$-temps d'arrêt

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0; |M_t^1| \geq 2\delta\} \wedge \delta.$$

nous pouvons assurer par le Lemme 2.4.2.1 et (2.17) que

$$|\mu_t^1 - \mu| \leq \delta(3\mu^3 + 2\mu^2) \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq \tau_1. \tag{2.19}$$

Puis, après τ_1 nous redémarrons la construction en définissant le dérive $(\mu_t^2)_{t\geq\tau_1}$ où $\mu_{\tau_1}^2 = \mu$ et $(\mu_t^2)_{t\geq\tau_1}$ satisfait (2.18). Soit $S_0^2 = 0$ et

$$dS_t^2 = \mu_t^2 dt + dB_t, \qquad t \geq \tau_1.$$

En outre, nous effectuons la transformation de Lévy qui résulte en $(M_t^2)_{t\geq\tau_1}$ et nous définissons le temps d'arrêt

$$\tau_2 = \inf\{t \geq \tau_1; |M_t^2| \geq 2\delta\} \wedge (\delta + \tau_1).$$

Par cette construction, nous avons que l'estimation (2.19) est vraie pour $(\mu_t^2)_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2}$, et nous pouvons continuer la construction de la même façon.
Nous procédons maintenant :
soit $\tau_0 = 0$ et on définit de façon récursive pour $l \geq 1$ $(\check{S}_t^l)t \geq 0$ par $\check{S}_0^l = 0$ et

$$d\check{S}_t^l = \check{\mu}_t^l dt + dW_t^l, \qquad t \geq 0,$$

où le mouvement Brownien $(W_t^l)_{t \geq 0}$ est donné par

$$W_t^l = B_{\tau_{l-1}+t} - B_{\tau_{l-1}}, \qquad t \geq 0,$$

et le processus de dérive $(\check{\mu}_t^l)_{t \geq 0}$ est donnée par

$$\check{\mu}_t^l = \frac{2\mu}{1 + \exp(2\mu W_t^l + 2\mu^2 t)} \tag{2.20}$$

(à comparer à (2.14)).
L'intégrand $(H_t^l)_{t \geq 0}$ est défini par

$$H_t^l = \operatorname{sign}(\check{S}_t^l), \qquad t \geq 0,$$

et le temps d'arrêt γ_l est défini par

$$\gamma_l = \inf\{t : |(H^l \cdot \check{S}^l)_t| \geq \delta\} \wedge \delta. \tag{2.21}$$

Ensuite, nous avons mis en

$$\tau_l = \tau_{l-1} + \gamma_l \tag{2.22}$$

et continuer avec la définition récursive.
Enfin, pour $l \geq 1$, nous introduisons le processus $(\check{N}_t^l)_{t \geq 0}$ et $(N_t^l)_{t \geq 0}$ par

$$\check{N}_t^l = (H^l \cdot \check{S}^l)_t, \qquad t \geq 0$$

et

$$N_t^l = \check{N}_{t \wedge \gamma_l}^l, \qquad t \geq 0$$

Notez que par les considérations précédentes, $(\check{N}^l_t)_{t\geq 0}$ ainsi que sa version arrêtée $(N^l_t)_{t\geq 0}$ sont des martingales dans leurs filtrations pour $l \geq 1$.

Remarque. Il est évident que $(\gamma_l)_{l\geq 1}$ ainsi que $\{(W^l_t)_{0\leq t\leq \gamma_l}\}_{l\geq 1}$ sont i.i.d. Par $\sigma(N^l_t, t \geq 0) \subseteq \mathcal{F}^{W^l}_{\gamma_l}$ il soutient que $(N^l_t)_{l\geq 1}$ sont des processus indépendants (et identiquement distribuées) et que $\mathcal{F}^B_{\tau_{l-1}}$ est indépendante de $(W^l_t)_{t\geq 0}$ pour $l \geq 1$. Par ces observations, il suit que $\mathcal{F}^B_{\tau_{l-1}}$ est indépendante de $(N^l_t)_{t\geq 0}$ pour $l \geq 1$.
Nous devons montrer que l'union des intervalles stochastiques $\bigcup_{l\geq 1}[\tau_{l-1}, \tau_l]$ est égal à l'ensemble $\mathbb{R}^+$.

Lemme 2.4.2.2 *Soit $(\tau_l)_{l=0}^{\infty}$ être défini par $\tau_0 = 0$ et (2.22) pour $l \geq 1$. Alors*

$$\mathbb{P}(\tau_l \longrightarrow \infty_{l\to\infty}) = 1.$$

Preuve. Nous avons déjà remarqué dans la remarque précédente que les longueurs des intervalles $\tau_l - \tau_{l-1} = \gamma_l$ sont positives et identiquement distribuées. Un résultat bien connu (voir par exemple [[11], Proposition 4.14]) nous dit que

$$\lim_{l\to\infty} \tau_l = \sum_{l=0}^{\infty}(\tau_l - \tau_{l-1}) = \infty \qquad \text{p.s.}$$

$\square$

La dernière étape est de montrer que le processus qui est donné par la concatènation de transformation de Lévy $(N^l_t)_{l\geq 1}$ sur les intervalles stochastiques respectifs sont des mouvements Brownien dans leur filtrations.
On définit le processus $(S_t)_{t\geq 0}$ en utilisant $(\check{S}_l)_{l\geq 1}$ et $(H_t)_{t\geq 0}$ en utilisant $(H_l)_{l\geq 1}$:

$$S_t = \sum_{j=1}^{l-1} \check{S}^j_{\gamma_j} + \check{S}^l_{t-\tau_{l-1}} \qquad \text{pour } \tau_{l-1} \leq t \leq \tau_l,$$

ainsi le dérive $(\mu_t)_{t\geq 0}$ de $(S_t)_{t\geq 0}$ est donné par

$$\mu_t = \check{\mu}^l_{t-\tau_{l-1}} \qquad \text{pour } \tau_{l-1} \leq t \leq \tau_l, \tag{2.23}$$

et l'intégrand est défini comme

$$H_t = H^l_{t-\tau_{l-1}} \qquad \text{pour } \tau_{l-1} \leq t \leq \tau_l,$$

Nous avons évidemment

$$S_t = \int_0^t \mu_s ds + B_t,\ t \geq 0,$$

Ensuite, l'intégrale stochastique $(M_t)_{t\geq 0}$ est défini par

$$M_t = (H \cdot S)_t = \sum_{l=1}^{k-1} (H^l \cdot \check{S}^l)_{\gamma_l} + (H^k \cdot \check{S}^k)_{t-\tau_{k-1}} \qquad \text{pour } \tau_{k-1} \leq t \leq \tau_k. \tag{2.24}$$

Notez que, par construction, S_t et M_t sont des processus continus.

Proposition 2.4.3 *[13] Le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est défini dans (2.24) satisfait*

$$M_t = \sum_{l=1}^{\infty} N^l_{(t-\tau_{l-1})^+}, \tag{2.25}$$

où la somme converge dans L^2. $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale à sa filtration, i.e, pour $0 \leq s < t < \infty$

$$\mathbb{E}[(M_t)|\mathcal{F}^M_s] = M_s.$$

Théorème 2.4.2 *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}^B_t, \mathbb{P})$, où $(\mathcal{F}^B_t)_{t\geq 0}$ est la filtration continue à droite saturée générée par B.*

(i) *Pour chaque $\mu > 0$, il existe $\mathcal{F}^B_t$-processus prévisibles $H = (H_t)_{t\geq 0}$ prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $(\mu_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $]0, 2\mu[$ de telle sorte que $S = (S_t)_{t\geq 0}$ définie par $S_0 = 0$ et*

$$dS_t = \mu_t dt + dB_t$$

nous avons que le processus $(M_t = (H \cdot S)_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien dans sa propre filtration $\mathcal{F}^{(H\cdot S)}_t$.

(ii) *pour chaque $\delta > 0$, nous pouvons choisir $(\mu_t)_{t\geq 0}$ tel que cela prend seulement leur valeurs dans $]\mu - \delta, \mu + \delta[$.*

Preuve. Par construction et par la proposition 2.4.3 $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue et à variation quadratique $\langle M_t \rangle = t$ et par $|H_s| = 1,\ s \geq 0$ donc $(M_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien (dans sa propre filtration).
Pour $(\mu_t)_{t\geq 0}$, le dérive de S, nous concluons que, en raison de (2.4.2.1), le lemme 4.1, (2.21), (2.23) et le lemme 4.3

$$\sup_{t\geq 0} |\mu_t - \mu| \leq \delta(3\mu^3 + 2\mu^2) \qquad p.s, \tag{2.26}$$

qui peut être fait arbitrairement petit.

□

2.5 Distribution de temps d'occupation du mouvement Brownien avec dérive

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard unidimensionnel. Avec $\mu \in \mathbb{R}$, nous introduisons le mouvement Brownien avec dérive S définie par $S_t = B_t + \mu t, t \geq 0$. nous considérons la restriction de S à l'intervalle de temps $[0, T]$, i.e S est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathcal{C}[0, T])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ muni de la σ-algèbre de Borel [voir Billingsley (1968)[5], chapitre 2]. Ensuite, par application de la fonctionnelle mesurable $\Gamma_+(T, k) : \mathcal{C}[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Gamma_+(T, k)(S) = \int_0^T \mathbb{1}_{\{S_t > k\}} dt \tag{2.27}$$

où S_t est le mouvement brownien avec dérive. Dans le cas $\mu = 0$ avec $k = 0$ la distribution de $\Gamma_+(T, 0)(B)$ est un exemple bien connu dans la littérature sur le mouvement Brownien et fournit une loi arc sinus bien connu. Comme application du théorème central limite de marche aléatoire Billingsley présente une dérivation élémentaire de la densité conjointe $\mathbb{P}[\Gamma_+(T, k)(B) \in du; B_t \in dx]$ [voir [5], chapitre 2, pp . 80-83]. La densité conjointe $\mathbb{P}[\Gamma_+(T, k)(B) \in du; B_t \in dx]$ est donc donnée par la formule,

$$\mathbb{P}[\Gamma_+(T, k)(B) \in du; B_t \in dx] = \begin{cases} \frac{|x|}{2\pi} \int_u^T \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{2(T-t)}\right]}{[t(T-t)]^{\frac{3}{2}}} dtdudx, & x < 0; \\ \frac{|x|}{2\pi} \int_{u_T}^T \frac{\exp\left[-\frac{x^2}{2(T-t)}\right]}{[t(T-t)]^{\frac{3}{2}}} dtdudx, & x > 0 \end{cases}$$

En ce qui concerne les calculs explicites suivants de distributions et de leurs applications en finance mathématique, nous noterons les fonctions de la distribution normale à une variable et à deux variables respectivement par

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[\frac{v^2}{2}\right] dv$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{N}(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \exp\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2 + w^2 - 2\rho v w)\right] dvdw$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\rho \in]-1, 1[$.
D'après le théorème de Girsanov nous obtenons la densité conjointe

$$\mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,0)(S) \in du; S_t \in dx\right] = \exp\left[-\frac{\mu^2}{2}T + \mu x\right] \mathbb{P}[\Gamma_+(T,0)(B) \in du; B_t \in dx]$$

et par l'application du théorème de Fubini le premier résultat de Akahori généralisée arc-sinus [voir [1], Théorème 1.1 (i)],

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,0)(S) \in du\right] &= \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}T\right) \frac{1}{\sqrt{u(T-u)}} du \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sqrt{T-u}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}(T-u)\right) \mathcal{N}\left(\mu\sqrt{u}\right) du \\ &- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}u\right) \mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{T-u}\right) du \\ &- 2\mu^2 \mathcal{N}\left(\mu\sqrt{u}\right) \mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{T-u}\right) du. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Avec équation (2.28), on obtient immédiatement une représentation intégrale double de $\mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,k)(S) \leq t\right]$.
D'abord, nous introduisons le temps T_k par (2.2) et d'après la proposition 2.3.4, la distribution de $T_k(S)$ est

$$\mathbb{P}[T_k(S) \in dt] = h(t, k; \mu) dt$$

où

$$h(t,k;\mu) = \frac{|k|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{(k-\mu t)^2}{2t}\right].$$

En outre, nous notons

$$\phi(T,t,\mu) = \mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,0)(S) \in du\right], 0 \le t \le T,$$

et depuis S a accroissements indépendants que nous avons pour tout $k < 0$ et tout $0 \le t < T$ la relation

$$\mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,k)(S) \le t\right] = \int_0^t \phi(T-s, t-s, \mu) h(s,k;\mu) ds \tag{2.29}$$

la relation correspondante pour tout $k > 0$ et tous $0 \le t \le T$

$$\mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,k)(S) \le t\right] = 1 - \int_0^{T-t} \phi(T-s, T-t-s, -\mu) h(s,-k;-\mu) ds \tag{2.30}$$

Les équations (2.29) et (2.30) correspondent à Akahori [Voir [1] Théorème 1.1 (ii)]. Nous présentons maintenant une version unique intégrante de la distribution de $\Gamma_+(T,k)(S)$ et donc une formule explicite pour sa densité. Pour les valeurs $0 \le \theta \le t, k, \mu \in \mathbb{R}$ on définit la fonction $F(t,\theta,k,\mu)$ par

$$F(t,\theta,k,\mu) = \int_0^\theta \phi(T-s, \theta-s, \mu) h(s,k;\mu) ds \tag{2.31}$$

Le théorème suivant donne la fonction de répartition des temps d'occupation du mouvement Brownien avec dérive

Théorème 2.5.1 *[4] Soit f définie comme dans l'équation (2.31). Ensuite, la distribution de $\Gamma_+(T,k)(S)$ est déterminée sur $[0,T]$ par*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,k)(S) < t\right] &= F(T,t,k,\mu), \ \textit{si } k \le X_0; \\ \mathbb{P}\left[\Gamma_+(T,k)(S) < t\right] &= 1 - F(T,T-t,-k,-\mu), \ \textit{si } k > X_0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

et pour $k < 0$, la fonction F peut être représentée de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
F(\tau,\theta,k,\mu) \;=\;& (3+2k\mu+2\mu^2\tau)\exp(2k\mu)\times \\
& \mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}+\mu\sqrt{\tau},-\mu\sqrt{\tau-\theta},-\sqrt{1-\frac{\theta}{\tau}}\right) \\
& +\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}}-\mu\sqrt{\tau},\mu\sqrt{\tau-\theta},-\sqrt{1-\frac{\theta}{\tau}}\right) \\
& -(1+2k\mu+2\mu^2\theta)\exp(2k\mu)\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\theta}}+\mu\sqrt{\theta}\right)\mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{\tau-\theta}\right) \\
& +\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\theta}}-\mu\sqrt{\theta}\right)\mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{\tau-\theta}\right) \\
& -2\mu\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{k}{\sqrt{\theta}}-\mu\sqrt{\theta})^2\right)\mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{\tau-\theta}\right) \\
& +2\mu\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{k}{\sqrt{\tau}}-\mu\sqrt{\tau})^2\right)\mathcal{N}\left(k\sqrt{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\tau}}\right) \\
& -2\mu\sqrt{\frac{\tau-\theta}{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mu^2(\tau-\theta)\right)\exp\left(2k\mu\right)\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\theta}}+\mu\sqrt{\theta}\right).
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Pour $\theta < 0$ Soit $F(\tau,\theta,k,\mu)\equiv 0$ et pour $\theta \geq \tau$,$F(\tau,\theta,k,\mu)\equiv 1$.

Chapitre 3

Applications du mouvement Brownien avec dérive

3.1 L'application de la répartition du temps d'occupation du mouvement Brownien avec dérive

L'application de la répartition du temps d'occupation du mouvement Brownien avec dérive vers un certain type d'options de gamme est considéré, en particulier une formule de tarification explicite des options double interrupteur est prévu dans le cadre de Black et Scholes. Bien que la densité conjointe du mouvement Brownien (avec dérive) au temps T et ses temps d'occupation jusqu'à T est un résultat familier du calcul stochastique [voir Billingsley (1968) [5]], il semble qu'une version explicite de la répartition des temps d'occupation n'a pas été fourni autant que l'auteur sait. Cependant, la connaissance explicite de cette distribution est utile pour le prix d'une grande classe d'options path-dependent tels que la gamme ou des options quantile, en particulier par rapport à un point de vue pratique.

3.1.1 Introduction et description du problème

Depuis 1973, lorsque de Black et Scholes ont présenté leur article fondamental concernant la tarification des financiers titres [voir Black et Scholes (1973)], où le prix processus de non-arbitrage $X = (X_t; t \geq 0)$ du sous-jacent est décrite par un mouvement Brownien géométrique, les questions d'évaluation d'options ont stimulé les deux, l'économie et le calcul stochastique [voir Harrison et Pliska (1981), Karatzas et Shreve (1988), Duffie

(1988), et al.].
Des résultats récents ont été inspirés par les options asiatiques dits ou des options moyennes et induit une étude rigoureuse des variables aléatoires obtenus par application de la moyenne fonctionnelles au processus de prix. Un problème connu en finance mathématique est née de l'application de moyennes arithmétiques de X. Pour découvrir une analytique représentation de la distribution correspondant s'est avéré être un problème résistant pendant des années et a été notée en plaisantant "un Saint-Graal mineure en mathématique financement" [voir Hart et Ross (1994)] jusqu'à Yor (1992) ont trouvé un résultat remarquable en utilisant la transformation de Laplace.
Un autre type de moyen d'options sont des options quantile d'abord introduites par Miura (1992). Le α-quantile $M(\alpha;T)(S)$ d'une fonction mesurable S sur $[0,T]$ est définie par

$$M(\alpha;T)(S) = \inf\left\{k \in \mathbb{R} | \int_0^T \mathbb{1}_{\{S_t \leq k\}} dt > \alpha\right\}.$$

Les questions concernant la distribution de $M(\alpha;T)(S)$ sont étroitement liés aux questions de distribution concernant les temps d'occupation du mouvement Brownien avec dérive $S = (S_t)$, c'est à dire la variable aléatoire $\Gamma_+(T,k)(S) = \int_0^T \mathbb{1}_{\{S_t > k\}} dt$. La distribution de $M(\alpha;T)(S)$ a été étudiée avec succès par Akahori (1995) et Dassios (1995). Bien que la loi arc sinus de Lévy pour des temps d'occupation de mouvement Brownien standard est le résultat probabiliste classique [voir Billingsley (1968)], il semble que des formules explicites pour les distributions de temps d'occupation du mouvement Brownien avec dérive n'ont pas été disponibles depuis les deux, Akahori et Dassios, seulement fournir des formules pour des densités respectivement les versions intégrales pour les prix des options. Cependant, il existe un besoin pratique et l'intérêt pour ces solutions explicites si disponible, surtout lorsqu'il s'agit des options path-dependent, où établi des méthodes approximatives, par exemple intégration numérique, la simulation de Monte Carlo ou approximation en treillis, échouent souvent ou - au moins - consomment d'énormes ressources de temps de calcul. Motivé par les besoins pratiques que nous fournissons la représentation explicite de la distribution de $\Gamma_+(T,k)(S)$ qui peut être utilisé non seulement pour les prix des options quantile, mais aussi pour certains types d'options de couloir.
Bien que les options quantile semblent être des produits financiers très sophistiqués presque inconnus pour les investisseurs des options de corridors ou les options de la gamme ont été introduits pour les options des marchés européen en 1994 et sont devenus des ins-

truments dérivés familiers.
Le paiement profil d'une option traditionnelle unique de corridor est donnée par

$$\Psi_1(\lambda; T; K_1; K_2; S) = \lambda \int_{-T_0}^{T} \mathbb{1}_{\{K_1 < S_t \leq K_2\}} dt \tag{3.1}$$

avec $T; T_0 \geq 0, \lambda > 0$ et $-\infty \leq K1 < K2 \leq +\infty$, tandis que la structure plus complexe d'une option de double corridor est donnée par

$$\Psi_2(\lambda_1; \lambda_2; T; K_1; K_2; S) = \left(\lambda_1 \int_{-T_0}^{T} \mathbb{1}_{\{S_t \in [K_1, K_2]\}} dt - \lambda_2 \int_{-T_0}^{T} \mathbb{1}_{\{S_t \notin [K_1, K_2]\}} dt \right)^+ \tag{3.2}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
L'objectif est de fournir une formule générale de tarification des options à double commutation, à savoir les options à double couloir avec $K_2 = +\infty$, et des titres dérivés connexes dans le modèle de Black et Scholes bien connu.

3.1.2 Le prix d'une option double interrupteur

nous considérons prix des titres dérivés dans le modèle Black and Scholes, où le prix processus risque-neutre $X = (X_t; t \geq 0)$, c'est à dire le processus qui doit être utilisée pour le calcul du prix de l'option, pouvant être représentée par

$$X_t = X_0 \exp(\sigma Bt + \mu_{BS} t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.3}$$

avec $B = (B_t, t \geq 0)$ le mouvement Brownien standard, X_0 le prix initial du sous-jacent, sa volatilité σ, $(r > 1)$ définie par un plus le taux d'intérêt sans risque et le dérive

$$\mu_{BS} = \log r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

déterminée par le modèle.
Comme on le sait le profil de distribution d'une option est décrite par une fonction à valeur réelle Φ sur l'espace mesurable $(\mathcal{C}[0, T]$. Ensuite, le prix de Black et Scholes $\pi_{BS}(\Phi)$ est calculé en

$$\pi_{BS}(\Phi) = r^{-T} \mathbb{E} [\Phi(X)] . \tag{3.4}$$

Pour nos besoins, nous introduisons le mouvement Brownien avec dérive $S = (S_t, t \geq 0)$ définie par

$$S_t = B_t + \frac{\mu_{BS}}{\sigma} t.$$

par ailleurs soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire $\Gamma_+(T,k)(X)$ avec

$$\Gamma_+(T,k)(X) = \Gamma_+\left(T, \frac{1}{\sigma}\log\frac{k}{X_0}\right)(S), \tag{3.5}$$

i.e. $\mathbf{F}(t) = \mathbb{P}\left[\Gamma_+\left(T, \frac{1}{\sigma}\log\frac{k}{X_0}\right)(S) < t\right]$. D'après le théorème 2.5.1 est explicitement connu et peut être représenté de la façon suivante,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\Gamma_+\left(T, \frac{1}{\sigma}\log\frac{k}{X_0}\right)(S) < t\right] &= F(T, t, \frac{1}{\sigma}\log\frac{k}{X_0}, \frac{\mu_{BS}}{\sigma}), \ \text{si} k \leq X_0; \\
\mathbb{P}\left[\Gamma_+\left(T, \frac{1}{\sigma}\log\frac{k}{X_0}\right)(S) < t\right] &= 1 - F(T, T-t, \frac{1}{\sigma}\log\frac{X_0}{k}, -\frac{\mu_{BS}}{\sigma}), \ \text{si} k > X_0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où la fonction $F(\tau, \theta, k, \mu)$ est définie dans l'éqaution (2.33).

En outre, nous définissons pour $k < 0$ l'intégrale $J(\tau, \theta, k, \mu) = \int_{-\infty}^{\theta} F(\tau, v, k, \mu) dv$ et calculer

$$\begin{aligned}
J(\tau,\theta,k,\mu) &= \left(3 + 2k\mu + 2\mu^2\tau\right)\theta \exp(2k\mu)\,\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}} + \mu\sqrt{\tau}, -\mu\sqrt{\tau-\theta}, -\sqrt{1-\frac{\theta}{\tau}}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2\mu^2} - \mu^2\tau^2 - 2\tau + k\right)\exp(2k\mu)\,\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}} + \mu\sqrt{\tau}, -\mu\sqrt{\tau-\theta}, -\sqrt{1-\frac{\theta}{\tau}}\right) \\
&+ \left(\theta - \frac{1}{2\mu^2} - \frac{k}{\mu}\right)\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}} - \mu\sqrt{\tau}, \mu\sqrt{\tau-\theta}, -\sqrt{1-\frac{\theta}{\tau}}\right) \\
&- \left(\mu^2\theta^2 + 2k\mu\theta + \theta + k^2 - \frac{1}{2\mu^2}\right)\exp(2k\mu)\,\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\theta}} + \mu\sqrt{\theta}\right)\mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{\tau-\theta}\right) \\
&+ \left(\theta - \frac{1}{2\mu^2} - \frac{k}{\mu}\right)\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\theta}} - \mu\sqrt{\theta}\right)\mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{\tau-\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$- \left(\mu\theta + k + \frac{1}{\mu}\right)\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{\eta}} - \mu\sqrt{\theta}\right)^2\right]\mathcal{N}\left(-\mu\sqrt{\tau-\theta}\right)$$

$$+ \left(2\theta\mu - \mu\tau - \frac{1}{\mu} + k\right)\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}} - \mu\sqrt{\tau}\right)^2\right]\mathcal{N}\left(k\sqrt{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tau}}\right)$$

$$+ \left(\mu(\tau-\theta) + \frac{1}{\mu}\right)\sqrt{\frac{\tau-\theta}{2\pi}}\exp(2k\mu)\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}(\tau-\theta)\right)\mathcal{N}\left(\frac{k}{\sqrt{\theta}} + \mu\sqrt{\theta}\right)$$

$$+\sqrt{\frac{\theta(\tau-\theta)}{2\pi}}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}(\tau-\theta)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{\theta}} + \mu\sqrt{\theta}\right)^2\right). \tag{3.7}$$

Dans ce qui suit nous considérons le profil de paiement $\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, T, K, Z)$ d'une option de double interrupteur avec une durée de vie totale T_1 à partir de $t = -T_0$ à $t = T$, i.e $T_1 = T_0 + T$, à l'instant $t = 0$. Dans l'intervalle de temps $[-T_0, 0]$ le processus de prix Z respectivement le processus de non-arbitrage X est décrit par ses données historiques. Alors $\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, T, K, Z)$ est déterminée par

$$\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, T, K, Z) = \left\{\lambda_1 \int_{T_0}^{T} \mathbb{1}_{\{Z_t > K\}} - \lambda_2 \int_{T_0}^{T} \mathbb{1}_{\{Z_t \leq K\}}\right\}^+$$

De cela, nous obtenons immédiatement

$$\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, T, K, Z) = \{(\lambda_1 + \lambda_2)\Gamma_+(T_1, k)(Z) - \lambda_2 T_1\}^+ \tag{3.8}$$

Finales, on obtient le résultat principal pour la formule de Black et Scholes des options à double commutation dans cette théorème :

Théorème 3.1.1 *[3] Soit $\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, T, K, Z)$ le profil de paiement d'une option de double commutateur définie par l'équation (3.8). Laissez outre $J(\tau, \theta, k, \mu)$ est défini par l'équation (3.7). Alors pour $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, le prix de Black et Scholes d'une telle option est calculée en*

$$\begin{aligned}\pi_{BS}(\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2, T, K, Z)) &= r^{-T}|\lambda_1 + \lambda_2|\{J(T, \theta(\tau_0, K, Z_0), k(K, Z_0), \mu(K, Z_0)) \\ &\quad -\theta(\tau_0, K, Z_0)e(\lambda_1, \lambda_2, K, Z_0) \\ &\quad -(J(T, T, k(K, Z_0), \mu(K, Z_0)) - T)e(\lambda_1, \lambda_2, K, Z_0)\},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}T - \Gamma_+(T_0,k)(Z),\\
\theta(\tau_0,K,Z_0) &= \tau_0 \mathbb{1}_{\{K\le Z_0\}} + (T-\tau_0)\mathbb{1}_{\{K>Z_0\}},\\
k(K,Z_0) &= \frac{1}{\sigma}\log\frac{K}{Z_0}[\mathbb{1}_{\{K\le Z_0\}} - \mathbb{1}_{\{K>Z_0\}}],\\
\mu(K,Z_0) &= \frac{\mu_{BS}}{\sigma}[\mathbb{1}_{\{K\le Z_0\}} - \mathbb{1}_{\{K>Z_0\}}],\\
e(\lambda_1,\lambda_2,K,Z_0) &= \mathbb{1}_{\{\lambda_1+\lambda_2\ge 0\}}\mathbb{1}_{\{K\le Z_0\}} + \mathbb{1}_{\{\lambda_1+\lambda_2<0\}}\mathbb{1}_{\{K>Z_0\}}.
\end{aligned}$$

3.2 Contrôle d'un processus de production.

nous considérons un processus de production qui tend à se détériorer avec le temps, précisément, nous supposons que les processus de production change d'état en fonction d'un mouvement Brownien avec μ coefficient de dérive positive, Lorsque l'état du processus est B, le processus est supposé se décomposer et un coût R doit être accordée à retourner le processus à l'état 0. D'autre part, on peut essayer de réparer le processus avant qu'il n'atteigne le point de rupture B. Si l'état est x et une tentative de réparer le processus est fait, alors cette tentative va réussir avec une probabilité α_x et d'échouer avec une probabilité $1-\alpha_x$. Si la tentative est couronnée de succès, le processus retourne à l'état 0, et si elle échoue, alors nous supposons que le processus va à B (qui est, il tombe en panne) Le coût de tenter une réparation est C.

Nous allons tenter de déterminer la politique qui minimise le coût moyen à long terme par le temps, et ce faisant, nous allons restreindre l'attention sur les politiques qui tentent une réparation lorsque l'état du processus est x, $0<x<B$.

Pour ces politiques, il est clair que les rendements à l'état 0 constituent des renouvellements, et donc (voir [7] le théorème 3.6.1 du chapitre 3)

$$\frac{\mathbb{E}[\text{coût d'un cycle}]}{\mathbb{E}[\text{longueur d'un cycle}]} = \frac{C+R(1-\alpha_x)}{\mathbb{E}[\text{le temps d'atteindre } x]}. \tag{3.9}$$

Soit $f(x)=\mathbb{E}[\text{le temps d'atteindre } x]$ désigne le temps prévu qu'il prend le processus pour atteindre x. Nous dérivons une équation différentielle de $f(x)$ en conditionnant sur

$S_h = Z_h - Z_0$, le changement dans le temps h Cela donne

$$f(x) = h + \mathbb{E}[f(x-Y)] + o(h),$$

où le terme $o(h)$ représente la probabilité que le processus aurait déjà atteint x en le temps h.nous utilisons le meme technique qui dans la proposition et nous obtenons l'équation déffirentielle suivante

$$1 = \mu f'(x) - f''(x)/2. \tag{3.10}$$

Plutôt que d'essayer de résoudre le dessus noter directement que

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \mathbb{E}[\text{temps pour atteindre x + y allant de 0}] \\ &= \mathbb{E}[\text{temps pour atteindre x}] + \mathbb{E}[\text{temps pour atteindre x + y allant de x}] \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Par conséquent, $f(x)$ est de la forme $f(x) = cx$, et de (3.10), on voit que $c = \frac{1}{\mu}$. Par conséquent,

$$f(x) = \frac{x}{\mu}.$$

Ainsi, à partir de (3.9), la politique qui tente de réparer lorsque l'état est x, $0 < x < B$, a un coût moyen à long terme de

$$\mu \frac{C + R(1-\alpha_x)}{x}$$

tandis que la politique qui ne tente jamais de réparer a un coût moyen à long terme de

$$\mu \frac{R}{B}.$$

On déterminer la fonction α_x par la proposition 2.3.4, alors on peut utiliser le calcul pour déterminer la politique qui minimise le coût moyen à long terme.

3.3 L'exercice d'une option d'achat d'actions.

Supposons que nous ayons la possibilité d'acheter, à un certain moment dans l'avenir, une unité d'actions à un prix fixe A, indépendamment de son prix actuel du marché. Le prix du marché actuel de l'action est considérée comme 0, et nous supposons que cela change en fonction d'un processus de mouvement Brownien avec dérive négative $-\mu$, où $\mu > 0$. La question est de savoir quand, si jamais, ne devrions-nous exercer notre option ? Prenons la politique qui exerce l'option lorsque le prix du marché est B. Notre espérance de gain en vertu d'une telle politique est

$$p(B)(B - A),$$

où $p(B)$ est la probabilité que le processus ne sera jamais atteindre B.
À partir (2.1), nous voyons que

$$p(B) = \exp\left(-2\mu B\right), \quad B > 0,$$

la valeur optimale de B est l'une maximisation $\exp\left(-2\mu B\right)(B - A)$, et cela se voit facilement être

$$B = A + \frac{1}{2\mu}$$

conclusion

- J'ai présenté des généralités et des notions fondamentales sur les mouvements browniens et particulièrement sur le mouvement brownien avec dérive .
- La liste des applications du mouvement brownien avec dérive présentée dans ce mémoire n'est pas exhaustive, il existe sûrement d'autres applications dont le lecteur pourrait voir dans les articles sur les mathématiques de finance.
- Les résultats récents publiés en finance et notamment le risque de crédit se basent sur des techniques liées aux mouvements browniens géométriques. Dans mes travaux perspectifs, je m'intéresserai aux techniques liées au mouvement brownien avec dérive pour lesquelles on profitera des résultats fondamentaux du mouvement brownien avec dérive malgré les difficultés des calculs.

Bibliographie

[1] Akahori, J. (1995). Some Formulae for a New Type of Path-Dependent Option. Ann. Appl. Probab. 5 383-388.

[2] A. N. Shiryaev. Optimal stopping rules, volume 8 of Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[3] A.Pechtl.Some Applications Of Occupation Times Of Brownian Motion With Drift In Mathematical Finance. Journal of Applied Mathematics And Decision Sciences, 3(1), 63-73 (1999) Reprints Available directly from the Editor. Printed in New Zealand.

[4] A.Pechtl.Distributions Of Occupation Times Of Brownian Motion With Drift . Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, 3(1), 41-62 (1999) Reprints Available directly from the Editor. Printed in New Zealand.

[5] Billingsley, P. (1968). Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.

[6] I. Karatzas and S. E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus, volume 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[7] JOHN WILEY and SONS. INC. Stochastic Processes Second Edition. Sheldon M. Ross University of California, Berkeley

[8] N.J. Nielsen. Lévy's characterization of Brownian Motion.

[9] N.J. Nielsen. Brownian Motion, Lecture Notes.

[10] O.Lévêque. Cours de probabilites et calcul stochastique. *EPFL*, Semestre d'hiver 2004-2005.

[11] O. Kallenberg. Foundations of modern probability. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition,2002.

[12] P. Bougerol. Calcul Stochastique *Hermann*, 14 Octobre 2009.

[13] Ràsonyi, M., Schachermayer, W., and Warnung, R. Hiding a drift. Ann. Probab. (2009). 37, 6, 2459-2470. http ://arxiv.org/abs/0802.1152.

[14] Romuald ELIE. Calcul Stochastique pour la finance.