Table des matières

Chapitre 1

Mouvement Brownien classique

1.1 Mouvement Brownien standard

Dans ce paragraphe on étudier les définitions et quelque propriété de mouvement brownien standard

Définition 1.1.1. *Une variable aléatoire* $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_d)$ *á valeurs dans* $\mathbb{R}^p$ *est un vecteur gaussien, si pour tous reéls* $a_1, \ldots, a_d$ *la variable aléatoire reélle* $\sum_{i=1}^{d} a_i X_i$ *est une gaussienne.*

Définition 1.1.2. *Le processus* X *est un processus gaussien si chaque famille finie* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ *est un vecteur gaussien.*

Définition 1.1.3. *Le mouvement brownien standard est défini comme suit :*
- $B_0 = 0$ *(issue de* 0*)*
- *Pour tout* $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ *est une variable gaussienne* $N(0, t-s)$ *indépendante de la tribu* F_s *engendreé par* $B_u, u \leq s$.

Théorème 1.1.1. *Etant donné* $(B_t)_t$ *un mouvement brownien, les processus suivant sont également des mouvements browniens :*
- $(-B_t)_{t \geq 0}$
- $(B_{t+a} - B_a)_{t \geq 0}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $(cB_{t/c^2})_{t \geq 0}, \quad \forall c \neq 0$ *(propriété de scaling)*
- *Le processus* $\tilde{B}$ *défini par :*

$$\begin{cases} \tilde{B}_0 = 0 \\ \tilde{B}_t = tB_{1/t} \end{cases}$$

Remarque 1.1.1. *La propriété de continuité des trajectoires est une propriété p.s.*

Preuve :
On vérifie tour à tour les critères imposés par la définition :
- $B_0 = 0$ dans tous les cas
- la continuité est évidente sauf dans le dernier des cas. Considérons l'ensemble :

$$\tilde{F} = \tilde{B}_t \to 0 = \cap_n \cup_m \cap_q \in Q \cup [0,m] \left\{ |\tilde{B}_q| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

  Les processus $(\tilde{B}_t)_t et (B_t)_t$ étant continus et ayant même distribution,

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\tilde{F}) = 1.$$

  Le dernier $\cap$ montre que $\tilde{B}_q$ est majoré apcr, ensuite qu'il existe m assez petit pour que ce soit vrai et finalement que $\tilde{B}_q$ est petit.
- pour ce qui est de la distribution des accroissements :

$$c(B_{(t+h)/c_2} - B_{t/c^2}) \simeq c\mathcal{N}(0, \frac{h}{c^2}) = \mathcal{N}(0,h)$$

  puis,

$$\begin{aligned} (t+h)B_{1/(t+h)} - tB_{1/t} &= -t(B_{1/t} - B_{1/(t+h)}) + hB_{1/(t+h)} \\ &\simeq t\mathcal{N}(0, \tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{t+h}) + h\mathcal{N}(0, \tfrac{1}{t+h}) \\ &\simeq \mathcal{N}(0, \tfrac{th}{t+h}) + \mathcal{N}(0, \tfrac{h^2}{t+h}) \\ &\simeq \mathcal{N}(0,h) \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.1. *(Récurrence). Nous avons*

$$\mathbb{P}\left(\sup_t B_t = +\infty, \inf_t B_t = -\infty \right) = 1$$

Preuve :
Notons $Z = \sup_t B_t$. On utilise la propriété de scaling pour montrer que pour $c > 0$:

$$cZ = Z$$

Ainsi, la loi de Z est concentrée sur $0, +1$.

$$\mathbb{P}(Z=0) \leq \mathbb{P}(B_1 \leq 0 \text{ et } B_u \leq 0) \text{ pour } u \geq 1$$

$$= \mathbb{P}\left(B_1 \leq 0 \text{ et } \sup_{t \geq 0} \underbrace{B_{t+1} - B_t} \right) = 0$$

On obtient ainsi par indépendance :

$$\mathbb{P}(Z=0) \leq \mathbb{P}(B_1 \leq 0)\mathbb{P}(Z=0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z=0)$$

D'où la conclusion en utilisant le fait que $(-B_t)_t$ est un mouvement brownien.

Remarque 1.1.2. *Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée réduite la variable aléatoire $N\sqrt{t-s}$ à la même loi que $B_t - B_s$*

Théorème 1.1. *Si $(X(t))_{t\geq o}$ est un mouvement brownien et si $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ alors $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Preuve :
Soit $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$,alors le vecteur aléatoire est composé de variables aléatoires gaussiennes et indépendantes (d'aprés la définition du mouvement brownien) ,ce vecteur donc est un vecteur gaussien. Il est donc de même pour $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$.

Proposition 1.1.1. *B_t est un processus gaussien dont la fonction de covariance est :*

$$\rho(s,t) = \min(s,t).$$

Preuve :
soit $s \leq t$ on a :

$$\rho(s,t) = cov(B_t, B_s) = \mathbb{E}(B_t B_s) - \mathbb{E}(B_t)\mathbb{E}(B_s)$$

Comme B_t suit une loi gaussienne centrée ($\mathbb{E}(B_t = 0)$) donc :

$$\rho(s,t) = \mathbb{E}(B_t B_s + B_s^2 - B_s^2) = \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s))$$

Pour $s \leq t$ on utilise l'indépendance, et l'èvoluation $B_t \sim N(0,s)$ Nous obtenons la valeur :

$$\rho(s,t) = \mathbb{E}(B_s^2) + \mathbb{E}(B_s)\mathbb{E}(B_t - B_s) = \mathbb{E}(B_s^2) = s$$

Proposition 1.1.2. *Si B_t est un mouvement brownien alors X_t dèfinie par :*

$$X_t = (1-t)B(\frac{t}{1-t}), t \in [0,1]$$

pour $s, t \leq 1$:

$$\begin{aligned} &= (1-t)(1-s)\min(\frac{t}{1-t}, \frac{s}{1-s}) \\ &= \min(s,t) \end{aligned}$$

1.1.1 Propriétés en loi

Systématiquement, pour vérifier qu'on a un mouvement brownien, il s'agit de vérifier qu'on a un processus gaussian, centré, à trajectoires continues et avec la bonne fonction de covariance.
Symétrie : Si B est un mouvement brownien alors $-B$ en est un aussi.
propriété d'échelle (autosimilarité) : Si B est un mouvement brownien alors pour tout $c > 0, B_t^c = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ est encore un mouvement brownien standard.
En effet dans cas,

$$Cov(B_t^c, B_s^c) = \frac{1}{\sqrt{c}}^2 Cov(B_{ct}, B_{cs}) = \frac{1}{c} \min(ct, cs) = \min(t, s)$$

Cette propriété est particulièrement importante, elle montre queε fois B_t se comporte comme un mouvement brownien lu en $\varepsilon^2 t$.
Comportement analogue en 0 **et en** $+\infty$:$\tilde{B}_t = tB_{1/t}$ est encore un mouvement brownien standard.
En effet dans cas,

$$Cov(\tilde{B}_t, \tilde{B}_s) = tsCov(B_{1/t}, B_{1/s}) = ts \min(1/t, 1/s) = ts/\max(t, s) = \min(t, s)$$

Le processus B_t a donc le même comportement en 0 et en $+\infty$
Invariance par translation : Le mouvement brownien translaté de $h > 0, \tilde{B}_t^h = B_{t+h} - B_h$ est encore un mouvement brownien standard, indépendant du mouvement brownien arrêté en $h(B_t)_{0 \le t \le h}$.
En effet pour $s \le t$:

$$Cov(B_t^h, B_s^h) = Cov(B_{t+h} - B_h, B_{s+h} - B_h)$$

$$= K(t + h, s + h) - K(t + h, h) - K(h, s + h) + K(h)$$
$$= s + h - h - h + h = s = \min(s, t)$$

Le processus B_t a donc le même comportement en 0 et en h.
Retrournement du temps : Le processus retourné à l'instant T, $\tilde{B}_t^T = B_T - B_{T-t}$ est encore un mouvement brownien sur $[0, T]$.

1.1.2 Pont Brownien

Le mouvement brownien standard $B_t; t \ge 0$ défini sur $[0, 1]$, et conditionné sur $B_1 = 0$ est appelé pont brownien.
Autrement dit, le pont brownien est un mouvement brownien sur $[0, 1]$ conditionné à retourner à 0 à l'instant 1

Remarque 1.1.3. *: Ce conditionnement est spécifique. Considérons un mouvement brownien $B_t; t \in [0,1]$, il satisfait la relation :*

$$B_t = B_t - tB_1 + tB_1 = \tilde{B}_t + tB_1$$

Preuve :
pour $\tilde{B}_t = B_t - tB_1$ Donc $\tilde{B}_t$ est un processus gaussien.
Fixons $t \in [0,1]$;le couple $(\tilde{B}_t, B_1)$ est un vecteur gaussien centré avec

$$\mathbb{E}(\tilde{B}_t B_1) = \mathbb{E}(B_t B_1) - t\mathbb{E}(B_1^2) = t - t = 0$$

D'où l'indépendance entre $\tilde{B}_t$ et B_1 cela implique l'indépendance entre le processus $\tilde{B}_t; t \in [0,1]$ et la variable B_1. Par conséquent :

$$\tilde{B}_t; t \in [0,1] \;\; B_1 = 0 = \tilde{B}_t + tB_1; t \in [0,1] \;\; B_1 = 0$$
$$= \tilde{B}_t; t \in [0,1] \;\; B_1 = 0 = \tilde{B}_t; t \in [0,1] \;\; enloi.$$

Définition 1.1.2.1. *Si B_t est un mouvement brownien,alors l'ensemble*

$$\tilde{B}_t = B_t - tB_1; \quad t \in [0,1]$$

est un pont brownien.

Proposition 1.1.3. *Si $\tilde{B}_t$ est un pont brownien, $-\tilde{B}_t$ l'est aussi.*
Soit

$$X_t = (1+t)\tilde{B}(\frac{t}{t+1}) \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

Si $\tilde{B}_t$ est un pont brownien alors X_t l'est aussi.

Preuve :
Soit $-\tilde{B}_t = -B_t + tB_1$ par définition X est gaussien alors $-X$ l'est aussi

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \mathbb{E}(-X_t(-X_s))$$

ils ont de même structure de covariance ainssi $-\tilde{B}_t$ est un pont brownien.
-Par définition la covariance de $X_t X_s$ est égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t X_s) &= \mathbb{E}((1+t)\tilde{B}(\tfrac{t}{1+t})(1+s)\tilde{B}(\tfrac{s}{1+s})) \\
&= (1+t)(1+s)\mathbb{E}(\tilde{B}(\tfrac{t}{1+t})\tilde{B}(\tfrac{s}{1+s})) \\
&= (1+t)(1+s)[\min \tfrac{t}{1+t}, \tfrac{s}{1+s} - \tfrac{st}{(1+t)(1+s)}] \\
&= mint(1+s), s(1+t) - st \\
&= min(t,s) - st
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.4. *Si B_t est un mouvement brownien*

$$X_t = B_t - \int_0^t r^{-1} B_r dr$$

avec $t \in [0,1]$ est un mouvement brownien.

Preuve :
voir [2]

Proposition 1.1.5. *Si $\tilde{B}$ est un pont brownien alors :*

$$X_t = \tilde{B}_t - \int_0^t r^{-1} \tilde{B}_r dr$$

avec $t \in [0,1]$

Preuve :
On a :

$$\tilde{B}_t = B_t - tB_1$$

donc d'aprés l'équation (1.1)on trouve :

$$X_t = B_t - \int_0^t r^{-1} B_r dr$$

avec $t \in [0,1]$ On est dans le cas de la proposition précedente donc X_t est un mouvement brownien.

1.2 Etude des deux propriétes trajectorielles

Définition 1.2.1. *Soit*

$$f : I \to \mathbb{R}$$

f est hölder continu de paramétre $\mu \in [0,1]$ s'il existe $c > 0$ tel que :

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t-s|^{\mu}, \quad \forall s,t \in I$$

On va citer le théorème de KOLMOGROV qui est un théorème de base.

Théorème 1.2. *Soit X_t,un processus à valeurs reélles pour lequel il existe trois constantes strictement positives,γ, c, ε telque :*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^{\gamma}\right] \leq |t-s|^{d+\varepsilon}$$

Alors il existe une modification $\tilde{X}$ de X telque :

$$\mathbb{E}\left[(\sup|\tilde{X}_t - X_s|/|t-s|^{\alpha})^{\gamma}\right] < \infty$$

Pour chaque $\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma]$. En particulier les trajectoires de $\tilde{X}$ sont hölder continues de paramétre α.

Preuve :
Voir [3] page $26, 27$.
Examinons quelques conséquences du théorème On a :

$$\mathbb{E}\left[(\sup|\tilde{X}_t - X_s|/|t-s|^{\alpha})^{\gamma}\right] < \infty \quad p.s$$

Donc :

$$\sup_{t\neq s}|\tilde{X}_t - X_s|/|t-s|^{\alpha} < \infty \quad p.s$$

Ceci preuve que $\tilde{X}$ hölder continus de paramétre α p.s.

1.2.1 Etude trajectorielle de Mouvement Brownien standard

Dans ce paragraphe on va illustrer l'une des propriétés importante concernant les trajectoires du mouvement brownien standard.

Proposition 1.2.1. *Les trajectoires du mouvement brownien standard sont hölder continues de paramétre $\alpha < \frac{1}{2}$.*

Preuve :
On prend $\mu = 2n$

$$\mathbb{E}\left[|B_t - B_s|^{2n}\right] = \mathbb{E}\left(|Z|^{2n}\right)(t-s)^n$$

D'aprés le corollaire 1
On a $\gamma = 2n, d = 1, d + \varepsilon = n$
En appliquant le théorème de KOLMOGOROV B_t a une modification (version) $\tilde{B}$ dont les trajectoires sont hölder continues de paramétre

$$\alpha \in [0, \varepsilon/\gamma] = [0, \frac{n-1}{2n}] = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$$

En prenant n grand ,on a prouvé que $\tilde{B}$ est hölder continu de paramétre $\alpha < \frac{1}{2}$

1.2.2 Etude de Variation

Variation Quadratique du Mouvement Brownien Classique

Dans ce paragraphe on va calculer la variations quadratique d'un mouvement brownien.

Définition 1.2.2.0.1. *Un processus X est dit à variation quadratique finie sur $[0,T]$ si pour toute famille de subdivisions $0 = t_0 < t <_1 < ... < t_n = T$ on a :*

$$\sum_{i=0}^{n}(X_{t_i+1} - X_{t_i})^2$$

qui converge en probabilité vers une variable aléatoire Y ,dans ce cas Y sera appelée la variation quadratique de X.
Soit $(t_i^n)_{i=0}^{N(n)}$ une subdivision de $[0,T]$ et :

$$\delta(n) = \sup_i^{N(n)}(t_{i+1}^n - t_i^n)$$

Proposition 1.2.2. *Pour toute famille de subdivision (t_i^n) tel que $\delta(n) \longrightarrow 0$*

$$\sum_{i=0^{N(n)}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \longrightarrow T \quad P, p.s.$$

Remarque 1.2.1. *En réalité on peut montrer la convergence dans L^2ce qui signifie que :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N(n)}(B_{t_i+1} - B_{t_i})^2\right) \longrightarrow T \quad P, p.s.$$

Preuve :
Il reste à voir que :

$$\mathbb{E}\left((\sum_{i=0}^{N(n)}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - T)^2\right) \longrightarrow 0$$

On a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N(n)}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j}^{N(n)}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right) = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = \sum_{i=0}^{N(n)} \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4\right)$$

et

$$I_2 = 2\sum_{j>i} \mathbb{E}\left((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right)$$

On sait d'aprés la Remarque 1.1 que

$$B_t - B_s = N_{\sqrt{t_s}} \tag{1.1}$$

en loi aves $N \sim N(0,1)$
Donc

$$I_1 \leq \delta(n)\mathbb{E}(N^4)\sum_{i=0}^{N(n)}(t_{i+1} - t_i)$$

car$(t_{i+1} - t_i) \leq \delta(n)$
Mais

$$\sum_{i=0}^{N(n)}(t_{i+1} - t_i) = T \tag{1.2}$$

et comme $N \sim N(0,1)$ on a $\mathbb{E}(N^4) = 2$ d'ou l'équation suivante :

$$I_1 \leq 2T\delta(n) \to 0n \to \infty \tag{1.3}$$

Maintenant on va calculer I_2

$$I_2 = 2\sum_{j>i} \mathbb{E}\left((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2\right) = 2\sum_{j=0}^{N(n)}(t_{j+1} - t_j)\sum_{i=0}^{j-i}(t_{i+1} - t_i)$$

Mais

$$\sum_{i=0}^{j-i}(t_{i+1} - t_i) = t_j$$

Donc

$$I_2 = 2\sum_{i=0}^{N(n)}(t_{j+1} - t_j)t_j$$

Compte tenu de la définition de l'intégrale de Rieman, on a l'équation suivante :

$$I_2 \to 2\int_0^T t dt = T^2 \tag{1.4}$$

D'aprés (1.1),(1.2) on a :

$$\mathbb{E}\left((\sum_{i=0}^{N(n)}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2)\right)^2 = T^2 \tag{1.5}$$

et

$$-2TE\left(\sum_{i=0}^{N(n)}(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\right)=-2T\sum_{i=0}^{N(n)}(t_{i+1}-t_i)=-2T^2 \tag{1.6}$$

D'aprés (1.3),(1.4),(1.5),et (1.6) on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N(n)}((B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2-T)^2\right)\to 0$$

d'ou le résultat.

Chapitre 2

Mouvement Brownien Fractionnaire

Dans ce paragraphe on va présenter le mouvement Brownien Fractionnaire et leur propriétes et le mouvement Brownien multifractionnaire

2.1 le mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 2.1.1. *Le mouvement brownien fractionnaire B_T^H est un gaussien centré de covariance*

$$\rho(s,t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H})$$

Remarque 2.1.1. *Si $H = \frac{1}{2}$ on est dans le cas du mouvement brownien classique.*

Proposition 2.1.1. *le mouvement Brownien fractionnaire B_T^H est un processus à accroissement stationnaire .*

Preuve :
Comme B_T^H est un processus gaussien il suffit de vérifier que :
$Cov(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H) = cov(B_{t_1+h}^H - B_{t_0+h}^H, B_{s_1+h}^H - B_{s_0+h}^H)$

tel que $s_0 < s_1 < t_0 < t_1$,par simplification on se raméne au cas ou il y a deux incréments :

$$cov(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H) =$$

$$cov(B_{t_1}^H, B_{s_1}^H) - cov(B_{t_1}^H, B_{s_0}^H) - cov(B_{t_0}^H, B_{s_1}^H) + cov(B_{t_0}^H, B_{s_0}^H)$$

$$= \frac{1}{2}(t_1^{2H} + s_1^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}) - \frac{1}{2}(t_1^{2H} + s_0^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H})$$
$$-\frac{1}{2}(t_0^{2H} + s_1^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}) + \frac{1}{2}(t_0^{2H} + s_0)^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H})$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$cov(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H) = \frac{1}{2}(t_1 - s_0)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_0)^{2H}$$

et

$$cov(B_{t_1+h}^H - B_{t_0+h}^H, B_{s_1+h}^H - B_{s_0+h}^H) = cov(B_{t_1+h}^H, B_{s_1+h}^H) - cov(B_{t_1+h}^H, B_{s_0+h}^H)$$
$$cov(B_{t_0+h}^H, B_{s_1+h}^H) + cov((B_{t_0+h}^H, B_{s_0+h}^H)$$
$$= \frac{1}{2}((t_1+h)^{2H} + (s_1+h)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}) - \frac{1}{2}((t_1+h)^{2H} + (s_0+h)^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H})$$
$$\frac{1}{2}((t_0+h)^{2H} + (s_1+h)^{2H} - (s_1+h)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}) - \frac{1}{2}((t_0+h)^{2H} + (s_0+h)^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H})$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$cov(B_{t_1+h}^H - B_{t_0+h}^H, B_{s_1+h}^H - B_{s_0+h}^H) = \frac{1}{2}(t_1 - s_0)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_1)^{2H} + (t_0 - s_0)^{2H}$$

d'ou le résultat

Proposition 2.1.2. *Si X_t est un processus gaussien stationnaire et $X_0 = 0$ tel que $Var(X_t) = t^{2H}$ alors X_t est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre H.*

Preuve :

On a :

$$cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}var(X_t) + var(X_s) - var(X_t - X_s)$$

on utilise la stationnarité d'ou l'on deduit :

$$cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}var(X_t) + var(X_s) - var(X_{t-s})$$
$$= \frac{1}{2}(t^{2H} - s^{2H} - (t - s)^{2H})$$

Remarque 2.1.2. *En remarque que :*

$$B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H = (t_{i+1} - t_i)^H N \quad en\ loi$$

ou N suit une loi gaussienne centrée réduite.

Définition 2.1.2. *Un processus X est autosimilaire d'indice H si pour tout $a > 0$:*

$$X(at), t \in \mathbb{R} = \overline{\mathfrak{L}} a^H X(t), \quad e \in \mathbb{R}$$

au sens de l'égalité des lois fini-dimensionnelles.

2.1.1 Propriétes de mémoire

Soit $r(n) = \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)X_1)$

Définition 2.1.1.1. *On dit que X_t est à courte mémoire tant que $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ et X_t a longue mémoire si $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$*

Proposition 2.1.3. *Le mouvement brownien fractionnaire B^H a une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$ et il a une courte mémoire si $H \leq \frac{1}{2}$.*

Preuve :
Si $H = \frac{1}{2}$ on est dans le cas d'un mouvement brownien standard on a :

$$r(n) = E(B_{n+1}B_1) - E(B_nB_1) = 1 - 1 = 0$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ (courte mémoire).
Si $H \neq \frac{1}{2}$

$$r(n) = E(B_{n+1}B_1) - E(B_nB_1) = \frac{1}{2}(n+1)^{2H} - n^{2H} + (n_1)^{2H} - n^{2H}$$

d'ou

$$r(n) \leq (n+1)^{2H-2}$$

et

$$r(n) > (n-1)^{2H-2}$$

on conclut que

$$r(n) \sim n^{2H-2}$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ si $H \leq \frac{1}{2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$ si $H > \frac{1}{2}$ $(c.q.f.d)$.

2.1.2 Etude trajectorielle de Mouvement Brownien Fractionnaire

Dans ce paragraphe en va présenter l'une des propriétés importante concernant les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire.

Proposition 2.1.4. *Les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont hölder continues de paramétre $\alpha < H$.*
Pour la démonstration on utilise le corollaire suivant :

Corollaire 2.1. *Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire on a :*

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H})$$

et

$$\mathbb{E}(B_t^{2H}) = t^{2H}$$

Preuve :
on a :

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^2) = \mathbb{E}(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|)$$

Par application de la linéarité de l'espérance et du corrollaire précédent on a :

$$\mathbb{E}(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}|) = \mathbb{E}(|B_t^{2H}|) - 2\mathbb{E}(|B_t^H B_s^H|) + \mathbb{E}(|B_s^{2H}|)$$

$$|t^{2H}| + |s^{2H}||(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H})|$$

$$= |t-s|^{2H}$$

Donc ona :

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^2) = |t-s|^{2H}$$

On prend $\gamma = 2, d = 1, d + \varepsilon = 2H$ d'ou $\varepsilon = 2H - 1$
D'aprés le théorème de KOLMOGOROV , B_t^H à une modification $(vrsion)\tilde{B^H}$ dont les trajectoire sont hölder continues de paramétre

$$\alpha \in [0, \varepsilon/\mu[= [0, \frac{2H-1}{2}[= [0, H - \frac{1}{2}[$$

On a prouvé que $\tilde{B}^H$ hölder continue de paramétre $\alpha < H$

2.1.3 Variation du mouvement brownien Fractionnaire

Dans ce paragraphe on va calculer la α variations d'un mouvement brownien fractionnaire.

Définition 2.1.3.1. *Un processus X est dit à α variation finie si pour toute famille de subdivisions $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ on a :*

$$\sum_{i=0}^{n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^{\alpha}$$

qui converge en probabilité vers une variable aléatoire Y ,dans ce cas Y sera appelée la α variation de X.

Proposition 2.1.5. *la α variation de B_t^H vaut $T\mathbb{E}(|N|^\alpha)$ pour $\alpha = \frac{1}{H}$.*

Lemme 2.1.3.1. *Soit*

$$A = \frac{Cov(B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H, B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H)}{(t_{j+1} - t_j)^H}$$

Alors $\sup_{i,j} A \to 0 \quad \forall i, j.$

Preuve :
On va vérifier le cas $t_i = i2^{-N}, i = 0, ..., 2^N$ On a :

$$t_{i+1} - t_i = t_{j+1} - t_j = 2^{-N} = \varepsilon$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} Cov(B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H, B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H) & = & \frac{1}{2}((t_i - t_j(\varepsilon^{2H} + (t_i - t_j) - \varepsilon)^{2H} + 2(t_i - t_j)^{2H} \\ & = & \frac{\varepsilon^{2H}}{2}\varphi(\frac{t_i - t_j}{\varepsilon}) \end{array}$$

où

$$\varphi(s) = s^{2H}\left((1 + \frac{1}{s})^{2H} + (1 - \frac{1}{s})^{2H} - 2\right)$$

et $\lim \varphi(s) = 0 quand s \to \infty$
Donc $|\varphi(s)|$ est borné et

$$\frac{Cov(B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H, B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H)}{\varepsilon^{2H}} < c$$

Alors la limite tend vers 0 ,d'où le résultat
Maintenant on va démontrer la proposition.

Preuve :
Soit (t_i^n) une subdivision de $[0, T]$tel que $\delta(n) \to 0$ on pose

$$K = \sum_{i=0}^{n} |B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H|^\alpha$$

Alors on montre que

$$\mathbb{E}((K)^2) \to T^2\mathbb{E}(|N|^\alpha)^2$$

On a :

$$K^2 = \sum_{i,j} |B_{t_{i+1}}^H - B_{t_i}^H|^\alpha |B_{t_{j+1}}^H - B_{t_j}^H|^\alpha$$

On sait que :

$$K^2 = \sum_{i=0}^{n} |B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^{2\alpha}$$

$$+2\sum_{i>j} |B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^{\alpha}|B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j}|^{\alpha}$$

$$\mathbb{E}(K^2) = I_1 + I_2 telque : I_1 \to 0 quand \delta(n) \to 0$$

car

$$I_1 = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left(|B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^{2\alpha}\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(|N|^{2\alpha})(t_{i+1} - t_i)^{2\alpha H}$$

D'aprés la Remarque (1.4)
Et comme $\alpha = \frac{1}{H}$
$I_1 = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(|N|^{2\alpha})(t_{i+1} - t_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(|N|^{2\alpha})(t_{i+1} - t_i)(t_{i+1} - t_i)$
Mais

$$(t_{i+1} - t_i) \leq \delta(n)$$

de plus

$$\sum_{i=0}^{n}(t_{i+1} - t_i) = T$$

on déduit que :

$$I_1 \leq 2T\delta(n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty$$

Maintenant en va calculer la quantité I_2

$$I_2 = 2\sum_{i>j} \mathbb{E}\left(|B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^{\alpha}|B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j}|^{\alpha}\right)$$

en utilisant la regression linéaire on obtient que :

$$B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} = a_{ij}(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}) + R \tag{2.1}$$

où
$a_{ij} = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{Var(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})}$

d'aprés la Remarque (1.4) et l'équation 2.1

$B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{\sqrt{Var(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i})}} N_1 + R$
Donc :

$$B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j} = \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^H} N^1 + R \tag{2.2}$$

où R est une v.a indépendante de N_1 de moyenne nulle, on va calculer sa variance à partir de l'équation (2.9)

$$(t_{j+1} - t_j)^{2H} = \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^{2H}} + Var(R) \tag{2.3}$$

en utilisant l'équation (2.3) on déduit que

$R = \sqrt{(t_{j+1} - t_j)^{2H} - \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^{2H}}} N_2$

où $N_2 \sim N(0,1)$ Donc

$$(B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j}) = \frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^H} N_1$$

$$+\sqrt{(t_{j+1} - t_j)^{2H} - \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^{2H}}} N^2$$

où N_1 et N_2 sont indépendantes.
On pose

$$r_{ij} = \mathbb{E}\left(|B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}|^\alpha |B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j}|^\alpha\right)$$

alors d'aprés l'équation précédente et la Remarque (1.4)

$$r_{ij} = \mathbb{E}\left(|t_{i+1} - t_i|^{\alpha H} |N_1|^\alpha \left(|\frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^H} N_1\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{(t_{j+1} - t_j)^{2H} - \frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^{2H}}} N^2|^\alpha\right)\right)$$

Comme $\alpha = \frac{1}{H}$ on a :

$$r_{ij} = (t_{i+1} - t_i)(t_{j+1} - t_j)\mathbb{E}\left(|N_1|^\alpha |(\frac{Cov(B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i}, B^H_{t_{j+1}} - B^H_{t_j})}{(t_{i+1} - t_i)^H (t_{j+1} - t_j)^H} N_1\right.$$

$$+\sqrt{1-\frac{Cov^2(B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i},B^H_{t_{j+1}}-B^H_{t_j})}{(t_{i+1}-t_i)^{2H}(t_{j+1}-t_j)^{2H}}N^2|^{\alpha})\Bigg)$$

on sait que

$$I_2=2\sum_{i>j}\mathbb{E}\left(|B^H_{t_{i+1}}-B^H_{t_i}|^{\alpha}|B^H_{t_{j+1}}-B^H_{t_j}|^{\alpha}\right)=2\sum_{i>j}r_{ij}$$

D'aprés le lemme(1.1)

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\sum_{i>j}(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j)\mathbb{E}\left(|N_1|^{\alpha}|N_2|^{\alpha}\right)\\ &= 2\mathbb{E}\left(|N_1|^{\alpha}|N_2|^{\alpha}\right)\sum_{i>j}(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j)\end{aligned}$$

Comme N_1, N_2 sont indépendantes on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\mathbb{E}\left(|N_1|^{\alpha}\right)\left(|N_2|^{\alpha}\right)\sum_{i>j}(t_{i+1}-t_i)(t_{j+1}-t_j)\\ &= 2\mathbb{E}\left(|N_1|^{\alpha}\right)\left(|N_2|^{\alpha}\right)\sum_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)\sum_{j+0}^{i-j}(t_{j+1}-t_j)\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{j+0}^{i-j}(t_{j+1}-t_j)=t_i$$

Donc :

$$I_2=2\mathbb{E}\left(|N_1|^{\alpha}\right)\left(|N_2|^{\alpha}\right)\sum_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)t_j$$

Compte tenu de la définition de l'intégrale de Reiman on a :

$$\sum_{i=0}^{n}(t_{i+1}-t_i)t_j\to 2\int_0^T tdt=T^2$$

on déduit alors que :

$$I_2\to T^2\mathbb{E}(|N_1|^{\alpha})^2$$

donc

$$\mathbb{E}((K)^2)\to T^2\mathbb{E}(|N|^{\alpha})^2$$

2.2 Mouvement brownien multifractionnaire

Il s'agit d'un mouvement brownien multifractionnaire avec un paramètre de Hurst H qui est une fonction du temps (ou de l'espace) assez régulière :H : $\mathbb{R}_+ \to]0,1[\beta-$ höldérienne.

2.2.1 Définition et propriétés du mouvement brownien multifractionnaire

Définition 2.2.1.1. *Le mouvement brownien multifractionnaire est un processus gaussien $(B^{H_t}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ centré défini par :*

$$\mathbb{E}[B^H(s)B^H(t)] = (\sigma^2/2)(|s|^{2H_t+2H_s} + |t|^{2H_t+2H_s} - |t-s|^{2H_t+2H_s}).$$

On a à nouveau des représentations de ce processus sous forme d'intégrales stochastiques.

En particulier, on a une représentation moyenne mobile :
$B^{H_t}(t) = \frac{1}{T(H_t+1/2)}\int_{-\infty}^{0}[(t-s)^{H_t-1/2}-(-s)^{H_t-1/2}]dM_s+\int_0^t (t-s)^{H_t-1/2}dM(s)$
où M est un bruit blanc gaussien standard (controlé par la mesure de lebesgue λ)

Remarque 2.2.1. *Le mouvement brownien multifractionnaire est une extension naturelle du mouvement brownien fractionnaire mais perd certaines de ses propriétés :*
- *le mouvement brownien multifractionnaire n'est plus autosimilaire.*
- *les accroissements du mouvement brownien multifractionnaire ne sont plus stationnaires.*

Cependant, on a :

Proposition 2.2.1. *Presque sûrement, le mouvement brownien multifractionnaire $B^{H_t}(t)$ est une fonction continue de t.*

Pour le mouvement brownien fractionnaire, on a même mieux : le mouvement brownien fractionnaire $(H,t) \to B^H(t)$ est uniformément continue par rapport à H :

Proposition 2.2.2. *Soit $B^H(t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in]0,1[$. Alors pour tout intervalle $[a,b] \subset]0,1[$ et $k>0$, on a ps*

$$\lim_{h\to 0} \sup |B^H(t) - B^{H'}(t)| = 0$$

Remarque 2.2.2. – *Comme H varie localement, on peut étudier des propriétés de régularité locale.*
- *Le mouvement brownien multifractionnaire est utilisé en modélisation du trafic sur internet, pour décrire les fonds marins.*
- *On a les mêmes généralisations en dimensions supérieures que pour le mouvement brownien fractionnaire : le drap multifractionnaire et le champ multifractionnaire.*
- *Il existe encore des généralisations du mouvement brownien multifractionnaire (avec des fonctions de Hurst H de plus en plus générale (non continues).*

2.2.2 Régularité des trajectoires

Comme le n'est pas stationnaire, on ne s'intéresse pas aux propriétés globales des trajectoires mais aux propriétés locales.

Proposition 2.2.3. *Presque sûrement, l'exposant de Hölder en t_0 du mouvement brownien multifractionnaire B^H est H_{t_0}*

La dimension de Haussdoff (1918) est un nombre réel positif (éventuellement$+\infty$) associé à tout espace métrique. Cette notion étend celle de dimension d'un espace vectoriel réel.

Définition 2.2.2.1. ***(Dimension de Haussdorff)*** *On définit pour un ensemble E et $s > 0, \delta > 0$:*

1. $H_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} diam(A_i)^s \text{ pour les partitions } (A_i)i \geq 1 \text{ de } E \text{ avec } diam(A_i) \leq \delta \right\}$
2. $H_s(E) = \lim_{\delta \to 0} {}_{H_\delta^s(E)}$

La dimension de Haussdoff de E est alors

$$dim_H(E) = \inf(s : H^s(E) = 0) = \sup(s|H^s|(E) = +\infty)$$

Chapitre 3

Intégrale stochastique

3.1 Intégrale stochastique par rapport un mouvement brownien Standard

On veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dB_s$$

Lorsque l'on intègre une fonction g par rapport à une fonction f dérivable, si g est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \int_0^T g(s)f'(s)ds$$

si jamais f n'est pas dérivable mais simplement à variation bornée, on s'en sort encore en définissant l'intégrale par :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

L'intégrale alors définie s'appelle intégrale de Stieljes. Dans notre cas, le Mouvement Brownien n'est pas à variation bornée donc, on ne peut pas définir cette limite trajectoire par trajectoire. Par contre, comme il est a variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport au Mouvement Brownien comme une limite dans $\mathcal{L}^2$ (convergence au sens de $\|.\|_2$) de cette variable aléatoire.

$$\int_0^T \theta_s dB_s = \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Attention, la convergence est au sens de la convergence des variables aléatoires dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Pour cela nous allons donc devoir imposer au processus θ d'être $\mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$.
On demandera également à l'intégrant θ d'être $\mathcal{F}$-adapté afin que θ_{t_i} soit indépendant de$B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$. En effet, dans les applications en finance, θ_t représentera la quantité d'actif risqué contenue dans notre portefeuille à l'instant t et dB_t la variation infinitésimale de cet actif risqué. Il est donc naturel de vouloir imposer que θ soit $\mathcal{F}$-adapté.
S'il ne l'était pas, on pourrait tout de même définir une intégrale par rapport au mouvement Brownien mais elle serait très différente car la variation quadratique du Mouvement Brownien est non nulle. Sur un exemple simple par exemple, comme approximations de$\int_0^T B_t dB_t$, nous aurions entre autre le choix entre les 2 approximations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] ou \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{i+1}}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]$$

L'écart entre nos deux intégrales est alors égal à :

$$\sum_{i=0}^{n-1}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]^2 \rightarrow^{\mathcal{L}^\in} T$$

Nous allons construire l'intégrale stochastique ou l'approximation est faite au point le plus à gauche afin que l'intégré soit indépendant de l'intégrant. C'est l'intégrale au sens d'Ito (et non Stratonovich ou anticipante). Enfin, pour des raisons techniques, nous allons demander de la régularité aux processus que nous manipulons. Nous leur demanderons d'être presque surement Continus A Droite avec Limite A Gauche (CADLAG).Finalement, nous allons donc construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble

$$\mathcal{L}^2_F(\Omega, [0,T]) = (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus CADLAG } \mathcal{F} - \text{adapté tq } \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < \infty$$

Construisons tout d'abord l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires

Définition 3.1.1. *Un processus $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ et un processus discret $(\theta_i)0 \leq i \leq n-1$ tel que tout θ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-adapté et dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$tel que :*

$$\theta_t(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(w) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

On note ε l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace de $\mathcal{L}^2_F(\Omega,[0,T])$.

Définition 3.1.2. *Avec les même notations, l'intégrale stochastique entre $0 ett \leq T$ d'un processus élémentaire $\theta \in \varepsilon$ est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{k} \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i(B_t - B_{tk}) sur]t_k, t_{k+1}]$$

soit

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n} \theta_i(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}$$

On associe donc à $\theta \in \varepsilon$ le processus $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$

Remarque 3.1.1. *On définit naturellement $\int_s^t \theta_u dB_u = \int_0^t \theta_u dB_u - \int_0^s \theta_u dB_u$*

Proposition 3.1.1. ***Propriétés de l'intégrale Stochastique sur ε :***
Sur l'ensemble des processus élémentaires E, l'intégrale stochastique satisfait les propriétés :

1. $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire*
2. $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est continue p.s*
3. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus $\mathcal{F}$-adapté*
4. $E[\int_0^t \theta_s dB_s] = 0$ *et* $Var(\int_0^t \theta_s dB_s) = E[\int_0^t \theta_s^2 ds]$
5. *propriété d'Isométrie :*

$$E[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2] = E[\int_0^t \theta_s^2 ds]$$

6. *De maniére plus générale ,on a :* $E[\int_0^t \theta_u dB_u / F_s] = 0$ *et* $E[(\int_0^t \theta_v dB_v)^2 / F_s] = E[\int_0^t \theta_v^2 dv / F_s]$
7. *On a même le résultat plus générale :*

$$E[(\int_s^t \theta_v dB_v)(\int_s^u \phi_v dB_v)/F_s] = E[\int_s^{t\wedge u} \theta_v \phi_v dv / F_s]$$

8. $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0\leq t\leq T}$ *est une $\mathcal{F}$-martingale*
9. *le processus* $((\int_0^t \theta_s dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds)_{0\leq t\leq T}$ *est une $\mathcal{F}$-martingale*

10. *la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

11. *La covariation quadratique entre* 2 *intégrales stochastiques est donnée par :*

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds$$

Preuve :

1. La linéarite de l'intégrale est immédiate.
2. La continuité de l'intégrale stochastique se lit sur sa deuxième écriture par la continuité des trajectoires du Mouvement Brownien.
3. La v.a. $\int_0^t \theta_s dB_s$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable comme somme de v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurables, donc l'intégrale stochastique est un processus $\mathcal{F}$-adapté.
4. Prenons $t = t_k$ quitte à rajouter un point à la suite $(t_i)_{0\leq 1\leq n}$. Alors, le calcul de l'espérance de $\int_0^t \theta_s dB_s$ donne :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\theta_i \mathbb{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}/\mathcal{F}_{t_i}]] = 0$$

Le calcul de la variance, un peu plus lourd, s'écrit :

$$\begin{aligned} var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{k-1} \theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\theta_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] + 2\sum_{i\leq j} \mathbb{E}[\theta_i\theta_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2/\mathcal{F}_{t_i}] + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}[\theta_i\theta_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\mathbb{E}[B_{t_{j+1}} - B \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2(t_{i+1} - t_i) + 0 = \int_0^t \theta_s^2 ds \end{aligned}$$

On aurait pu éviter le calcul et utiliser le résultat plus général énoncé dans (6)

5. La propriété d'isométrie est celle que l'on vient d'écrire .

6. Quitte à rajouter 2 points à la suite $(t_i)_{0\leq 1\leq n}$, on peut supposer que $s = t_j$ et $t = t_k$ et alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\textstyle\int_0^t \theta_u dB_u/\mathcal{F}_s\Big] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k-1}\theta_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})/\mathcal{F}_{t_j}\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{j-1}\theta_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})/\mathcal{F}_{t_j}\Big]+\sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}[\theta_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})/\mathcal{F}_{t_j}]\\
&= \sum_{i=0}^{j-1}\theta_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})+\sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}[\theta_i\mathbb{E}[B_{t_{i+1}}-B_{t_i}/\mathcal{F}_{t_i}]/\mathcal{F}_{t_j}]\\
&= \textstyle\int_0^s \theta_u dB_u + 0
\end{aligned}$$

Le deuxième calcul, un peu plus lourd, séécrit :

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t \theta_u dB_u\Big)^2/\mathcal{F}_s\Big]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=j}^{k-1}\theta_i(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\Big)^2/\mathcal{F}_{t_j}\Big]\\
&= \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}[\theta_i^2(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2/\mathcal{F}_{t_j}]+2\sum_{i<l}\mathbb{E}[\theta_i\theta_l(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})(B_{t_{l+1}}-B_{t_l})/\mathcal{F}_{t_j}]\\
&= \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}[\theta_i^2\mathbb{E}[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2/\mathcal{F}_{t_i}]/\mathcal{F}_{t_j}]+2\sum_{i<l}\mathbb{E}[\theta_i\theta_l(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})\mathbb{E}[(B_{t_{l+1}}-B_{t_l})/\mathcal{F}_{t_l}]/\mathcal{F}_{t_j}]\\
&= \sum_{i=j}^{k-1}\mathbb{E}[\theta_i^2(t_{i+1}-t_i)/\mathcal{F}_{t_j}]+0\\
&= \mathbb{E}\Big[\textstyle\int_s^t \theta_u^2 du/\mathcal{F}_s\Big]
\end{aligned}$$

7. Pour θ et ϕ dans ϵ, et $u \leq t$ on a :

$$2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t \theta_v dB_v\Big)\Big(\int_s^u \phi_v dB_v\Big)/\mathcal{F}_s\Big]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\textstyle\int_s^t(\theta_v+\phi_v\mathbb{I}_{v\leq u})dB_v\Big)^2/\mathcal{F}_s\Big]-\mathbb{E}\Big[\Big(\textstyle\int_s^t\theta_v dB_v\Big)^2/\mathcal{F}_s\Big]-\mathbb{E}\Big[\Big(\textstyle\int_s^u\phi_v dB_v\Big)^2/\mathcal{F}_s\Big]\\
&= \mathbb{E}\Big[\textstyle\int_s^t(\theta_v+\phi_v\mathbb{I}_{v\leq u})^2 dv/\mathcal{F}_s\Big]-\mathbb{E}\Big[\textstyle\int_s^t\theta_v^2 dv/\mathcal{F}_s\Big]-\mathbb{E}\Big[\textstyle\int_s^u\phi_v^2 dv/\mathcal{F}_s\Big]\\
&= 2\mathbb{E}\Big[\textstyle\int_s^u\theta_v\phi_v dv/\mathcal{F}_s\Big]
\end{aligned}$$

8. On a vu que le processus $\int_0^t \theta_s dB_s$. est $\int_0^t \theta_s dB_s$ est dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et donc dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$. La premiere partie de la propriete 6 nous donne la propriete de martingale de l'integrale stochastique. En fait c'est simplement une tranformee de martingale.
9. Le processus M defini par $\left((\int_0^t \theta_s dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$ est $\mathcal{F}$-adapte comme somme discrete de processus $\mathcal{F}$-adaptes. Chaque M_t est dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ comme somme de 2 elements de $\mathcal{L}^1(\Omega)$. La 2ème partie de la propriete (6) nous donne la propriete de martingale de M.
10. Si on admet que la variation quadratique est telle que $M^2 - \langle M \rangle$ soit martingale (Doob-Meyer), le résultat du dessus nous permet de conclure directement.
11. Le résultat vient directement de la définition de la covariation quadratique par les même calculs que dans (8).

Lemme 3.1.0.1. *L'ensemble des processus élémentaires ϵ est dense dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ au sens de la convergence en norme quadratique. Autrement dit, pour tout $\theta \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$, il existe une suite θ^n d'éléments de ϵ telle que*

$$\|\theta^n - \theta\|_2' = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right]^{1/2} \to 0$$

Ce lemme sera admis. Il s'agit d'une généralisation de la densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions avec un contrôle global sur l'ensemble des trajectoires. Pas super comme remarque.

Théorème 3.1. *Il existe une unique application linéaire I de$\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ dans $M^2([0,T])$ qui coincide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires ϵ et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\forall t \leq T \quad \mathbb{E}[I(\theta)_t^2] = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

Preuve :

Approximation Soit θ un processus élément de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ D'après le lemme admis, il existe une suite θ^n d'éléments de ϵ telle que :

$$\|\theta - \theta^n\|_2' = \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right]^{1/2} \to 0$$

Convergence : La propriété d'isométrie entre 0 et $t \leq T$ sur l'intégrale stochastique du processus $(\theta^{n+p} - \theta^n)$ de ϵ nous donne :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n) dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds\right]$$

ce qui s'écrit en terme de norme :

$$\left\| \int_0^t \theta_s^{n+p} dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s \right\|_2 \leq \|\theta^{n+p} - \theta^n\|_2'$$

Comme θ^n converge dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$, elle est de Cauchy et donc $\int_0^t \theta_s^n dB_s$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Or $\mathcal{L}^2(\Omega)$ muni de $\|.\|_2$ est un espace de Banach (donc complet), par conséquent la suite $\int_0^t \theta_s^n dB_s$ converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. En notant $\int_0^t \theta_s dB_s$ sa limite, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\theta_s dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right]$$

Unicité : Cette propriété implique que la limite ne dépend pas de la suite approximante choisie, en effet, si j'avais 2 suites approximantes θ^n et ϕ_n, la condition d'isométrie donnerait :

$$\left\| \int_0^t \theta_s^n dB_s - \int_0^t \phi_s^n dB_s \right\|_2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^n - \phi_s^n)^2 ds\right]^{1/2} \leq \|\theta^n - \phi^n\|_2' \to 0$$

Donc les deux suites approximantes donnent la meme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ qui sont donc égales p.s.

Convergence dans$M^2([0,T])$: Le processus limite M est un élément de $M^2([0;T])$ car chaque M_t s'écrit comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de M_t^n avec M^n une suite de martingales$\mathcal{F}-adaptes$ telles que $E[|M_t^n|^2] < \infty$ pour tout t. **Linéarité et Isométrie :**La linéarité est immédiate, reste à prouver la propriété d'isométrie qui s'écrit en passant à la limite la propriété d'isométrie sur les éléments de ε :

$$E\left[\left(\int_0^t \theta_s^n dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds\right] \Rightarrow \left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

Proposition 3.1.2. *Si le processus θ n'est pas aléatoire mais simplement une fonction f du temps, en plus des propriétés précédentes, l'intégrale stochastique alors appelée* ***intégrale de Wiener*** *est Gaussienne :*

$$\int_0^t f(s)dB_s \sim N(0, \int_0^t f^2(s)ds)$$

Preuve :
En effet,$\int_0^t f(s)dB_s$ s'écrit comme une limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de v.a de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \to^{\mathcal{L}^{\in}} \int_0^t f(s)dB_s$$

Or $\sum_{i=0}^{n-1} f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ est Gaussienne comme combinaison linéaire d'éléments du vecteur Gaussien $B_{t_1}, ..., B_{t_n}$. Donc $\int_0^t f(s)dB_s$ est Gaussienne comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de v.a. Gaussiennes. En effet, la convergence dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ entraîne la convergence de l'espérance, de la variance et donc de la fonction caractéristique des v.a. gaussiennes.
De plus, toute combinaison linéaire de $\int_0^{t_i} f(s)dB_s$ est également une intégrale de Wiener qui est Gaussienne. Donc l'intégrale de Wiener$\int_0^t f(s)dB_s$ est un processus Gaussien caractérisé par

$$Cov\left(\int_0^t f(s)dB_s, \int_0^u g(s)dB_s\right) = \int_0^{t\wedge u} f(s)g(s)ds$$

Cas particuler où le processus θ est de la forme f(B) Pour l'instant, nous avons vu que, lorsqu'une suite de processus élémentaires θ^n converge vers θ dans $\mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$, alors l'intégrale stochastique de θest la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ des intégrales stochastiques des θ^n. Le candidat le plus naturel pour approcher l'intégrale stochastique de f(B) est alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Proposition 3.1.3. *Si f est une fonction dérivable à dérivée bornée on a :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{1}{n}T})(B_{\frac{(i+1)}{n}T} - B_{\frac{1}{n}T}) \to \int_0^T f(B_s)dB_s$$

la convergence alieu dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$

Preuve :
Avant toute chose, il faut justifier que l'intégrale stochastique a un sens, i.e. que $f(B) \in \mathcal{L}_F^2(\Omega, [0,1])$. Le processus $f(B)$ est bien $\mathcal{F} - adapt$ et CADLAG car le mouvement Brownien est $\mathcal{F} - adapt$ et continu p.s. . On a, pour tout $t \leq T$:

$$|f(B_t)| \leq |f(B_0)| + \|f'\|_\infty |B_t - B_0| = |f(0)| + \|f'\|_\infty |B_t|$$

La constante $|f(0)|$ est bien sûr dans $\mathcal{L}_F^2(\Omega, [0,1])$ et on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |B_s|^2 ds\right] = \int_0^T \mathbb{E}[|B_s|^2]ds = \int_0^T s ds = \frac{T^2}{2} < \infty$$

Donc $f(B_t) \in \mathcal{L}_F^2(\Omega, [0,1])$ et$\int_0^T f(B_s)dB_s$ est bien définie. L'intervalle $[0,T]$ est découpé en n intervalle $]t_i, t_{i+1}]$ avec $t_i = iT/n$ et on introduit le processus

$B^n_s := \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$ tel que $\int_0^T f(B^n_s)dB_s := \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{1}{n}T})(B_{\frac{(i+1)}{n}T} - B_{\frac{1}{n}T})$
Alors $\int_0^T f(B_s)dB_s$ sera la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de $\int_0^T f(B^n_s)dB_s$ si $f(B)$ est la limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega,[0,1])$ de $f(B^n)$ .or on a :
$\|f(B) - f(B)^n\|'_2 = \mathbb{E}[\int_0^T (f(B_s) - f(B^n_s))^2 ds]^{1/2} = \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(B_s) - f(B_{t_i}))^2 ds]^{1/2}$
$\leq \|f'\|_\infty (\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}[(B_s - B_{t_i})^2]ds)^{1/2} = \|f'\|_\infty (\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s-t_i)ds)^{1/2}$
$\|f'\|_\infty \left(n \int_0^{T/n} udu\right)^{1/2} = \frac{T\|f'\|_\infty}{2\sqrt{n}} \rightarrow_{n\to\infty} 0$

3.2 Intégrale stochastique par rapport un mouvement brownien fractionnaire

Soit $\alpha > 0$ (et dans la plupart des cas ci-dessous $\alpha < 1$ si ce n'est pas obligatoire). Dèfinir les intégrales de Riemann-Liouville fractions de gauche et du côté droit de (a,b) d'ordre α par

$$(I^\alpha_a + f)(x) := \frac{1}{T(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

et

$$(I^\alpha_b - f)(x) := \frac{1}{T(\alpha)} \int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt$$

respectivement. La fonction $f \in D(I^\alpha_{a+(b-)})$(le symbole D $(\cdot)$ désigne le nom de domaine de l'opérateur correspondant), si les intégrales correspondantes convergent pour $x \in (a,b)$ (en ce qui concerne (w.r.t.) Lebesgue measure). Les intégrales de Riemann-Liouville fractions de R sont définis comme :

$$(I^\alpha + f)(x) := \frac{1}{T(\alpha)} \int_{-\infty}^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

et

$$(I^\alpha - f)(x) := \frac{1}{T(\alpha)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt$$

respectivement. la fonction $f \in D(I^\alpha_\pm)$ si les intégrales corrpespondantes convergent si $x \in \mathbb{R}$.conformément à $(SKM93)$, nous avons inclusion $L_p(\mathbb{R}) \subset D(I^\alpha_\pm), 1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$ par ailleurs, le théorème suivant Hardy.Littlewood détient.

Théorème 3.2.1. *((SKM93))si* $1 \leq p, q < \infty, 0 < \alpha < 1$ *puis le opérateurs* $I^{\alpha}_{\pm}$ *est l'opérateur* I^{α}_{+-} *sont délimitées à partir de* $L_p(\mathbb{R})$ *to* $L_q(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ *et* $q = p(1_{\alpha}p)^{-1}$. *Cela signifie, en particulier, que pour tout*$1 < p < \frac{1}{\alpha}$ *et* $q = \frac{p}{1-\alpha p}$ *il existe une constante* α,$C_{p,q,\alpha}$ *de telle sorte que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}|f(u)||x-u|^{\alpha-1}du)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q,\alpha}\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \quad (3.2.1)$$

Intégration fractionnaire admet les formules de composition suivante pour fractionnaire intégrales :

$$I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}f = I^{\alpha+\beta}_{a+}f, I^{\alpha}_{b-}I^{\beta}_{b-}f = I^{\alpha+\beta}_{b-}f$$

pour $f \in L_1[a,b].Si\alpha+\beta \geq 1$ alors ces égalités tiennent à tout point $x \in (a,b)$, autrement ils tiennent pour x aussi,

$$I^{\alpha}_{\pm}I^{\beta}_{\pm} = I^{\alpha+\beta}_{\pm}f$$

for$f \in L_p(\mathbb{R}), \alpha, \beta > 0and\alpha + \beta < \frac{1}{p}$.let $f \in L_p[a,b], g \in L_q[a,b], p, q \geq 1and\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$,ou laisser $p > 1, q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$.Alors nous devons l'intégration par la formule suivante des pièces pour la formule fractionnaire integralsintegrationby-pièces! pour les intégrales fractionnaires :

$$\int_a^b g(x)(I^{\alpha}_a + f)(x)dx = \int_a^b f(x)(I^{\alpha}_b - g)(x)dx$$

soit $f \in L_p(\mathbb{R}), g \in L_q(\mathbb{R}), p > 1, q > 1et\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha$.Puis

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)(I^{\alpha} + f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(I^{\alpha} - g)(x)dx \quad 3.2.2$$

soit $C^{\lambda}(\mathbb{T})$ comme l'ensemble Hölder continues $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ of order λ,i.e. $C^{\lambda}(\mathbb{T}) = f : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : \|f\|_{\lambda} := \sup_{t\in\mathbb{T}}|f(t)| + \sup_{s,t\in\mathbb{T}}|f(s) - f(t)|(t-s)^{-\lambda} < \infty$.

Si $\alpha > 0et\alpha p > 1, puisI^{\alpha}_{\pm}(L_p(\mathbb{R})) \subset C^{\lambda}[a,b]pourtoute - \infty < a < b < \infty et0 < \lambda \leq \alpha - \frac{1}{p}$.

Le résultat suivant est évident.

Lemme 3.2.1. *soit* $0 < \alpha < 1, f \in L_p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \frac{1}{\alpha}etI^{\alpha}_{\pm}(f) = 0..Puis$ $f(x) = 0pourx \in \mathbb{R}$.

Pour $p \geq 1$,notons $I_{\pm}^{\alpha}(L_p(\mathbb{R}))$ la classe des fonctions f, qui peut être présenté comme intégrales Riemann-Liouville, plus exactement,$f = I_{\pm}^{\alpha}\varphi$ pour certains $\varphi \in L_p(\mathbb{R}), p \geq 1$.le lemme assure l'unicité d'une telle fonction φ.

Pour $0 < \alpha < 1$, il coïncide pour $x \in \mathbb{R}$ avec la gauche (à droite) face Riemann-Liouville dérivée fractionnaire de f d'ordre α. Ces dérivés sont désignés.Par

$$(I_{+}^{-\alpha}f)(x) = (D_{+}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{T(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(t)(x-t)^{-\alpha}dt$$

et

$$(I_{-}^{-\alpha}f)(x) = (D_{-}^{\alpha}f)(x) := \frac{-1}{T(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty} f(t)(t-x)^{-\alpha}dt$$

respectivement.
Pour $p > 1$, la classe $I_{\pm}^{\alpha}(L_p(\mathbb{R}))$ coïncide avec la classe de ces fonctions $f \in L_r(\mathbb{R}), r = \frac{p}{1-\alpha p}$, pour lesquels les intégrales :

$$\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} (f(x) - f(t))(x-t)^{-\alpha-1}dt$$

et

$$\int_{x+\varepsilon}^{\infty} (f(x) - f(t))(t-x)^{-\alpha-1}dt$$

respectivement, convergent dans $L_p(\mathbb{R})$ en tant que $\varepsilon \to 0$. Ainsi, pour $f \in I_{\pm}^{\alpha}(L_p(\mathbb{R}))$ avec $p > 1$ dérivés de Riemann-Liouville coïncide avec la fraction Marchaud dérivés

$$(\tilde{D}_{+}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{T(1-\alpha)}\int_{\mathbb{R}_+} (f(x) - f(x-y))y^{-\alpha-1}dy$$

et

$$(\tilde{D}_{-}^{\alpha}f)(x) := \frac{1}{T(1-\alpha)}\int_{\mathbb{R}_+} (f(x) - f(x+y))y^{-\alpha-1}dy$$

respectivement. Si $\alpha > 0$ et $\alpha p < 1$, alors $I_{\pm}^{\alpha}(L_p(\mathbb{R})) \subset L_q(\mathbb{R}) pour \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$.

Les dérivés de fractions Riemann-Liouville peut être envisagé pour tous intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ de la manière suivante : nous introduisons la classe $I_{\pm}^{\alpha}(L_p[a, b])$ de fonctions f qui peut être présenté comme $f = I_{a+\varphi}^{\alpha}(f = I_{b-\varphi}^{\alpha})$ pour $\varphi \in L_p[a, b], p \geq 1$, où l'on noteé :

$$(I_{a+}^{-\alpha}f)(x) = (D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{T(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)(x-t)^{-\alpha}dt$$

et

$$(I_{b-}^{-\alpha}f)(x) = (D_{b-}^{\alpha}f)(x) = -\frac{1}{T(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)(t-x)^{-\alpha}dt$$

respectivement. Dans ce cas, les dérivés fractions de Riemann-Liouville $D_{a+}^{\alpha}f$ et $D_{b-}^{\alpha}f$ admettre la représentation de dérivés fractionnaires de Weyl (nous supposons que $f = 0$ à l'extérieur (a,b)) :

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{T(1-\alpha)}\left(f(x)(x-a)^{-\alpha} + \alpha\int_a^x (f(x)-f(t))(x-t)^{-\alpha-1}dt\right).\mathbb{1}_{(a,b)}(x)$$

et

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{T(1-\alpha)}\left(f(x)(b-x)^{-\alpha} + \alpha\int_x^b (f(x)-f(t))(t-x)^{-\alpha-1}dt\right).\mathbb{1}_{(a,b)}(x)$$

respectivement, où la convergence des intégrales détient ponctuelle pour $x \in (a,b)$ pour $p = 1$ et dans $L_p[a,b] pour p > 1$.
Selon (SKM93, théorème), nous avons que $f = I_{a+\varphi}^{\alpha}$ pour certains $\varphi \in L_p[a,b], o 1 < p < \infty$, si et seulement si $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p[a,b]$ et

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_{a+\varepsilon}^b |\psi_\varepsilon(x)|^p dx < \infty$$

ou $\psi_\varepsilon(x) = \int_a^{x-\varepsilon}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt, a+\varepsilon \leq x \leq b$.si $f \in I_{\pm}^{\alpha}(L_p(\mathbb{R})), 0 < \alpha < 1 et p \geq$ 1.est

$$I_{\pm}^{\alpha}I_{\pm}^{-\alpha}f = f \quad (3.2.3)$$

Par ailleurs,pour $f \in L_1(\mathbb{R})$, nous avons que :

$$I_{\pm}^{-\alpha}I_{\pm}^{\alpha}f = f \quad (3.2.4)$$

wet set $I_{\pm}^{0}f := f$

La formule de la composition de dérivés fractionnaires a la forme

$$D_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\beta}f = D_{a+}^{\alpha+\beta}f \quad (3.2.5)$$

ou $\alpha \geq 0, \beta \geq 0 et f \in I_{a+}^{\alpha+\beta}(L_1(\mathbb{R}))$
En autre, selon les hypothéses $0 < \alpha < 1, f \in I_{a+}^{\alpha}(L_p[a,b]) et g \in I_{b-}^{\alpha}(L_q[a,b]), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1+\alpha$ nous avons la formule intégration sous-parties pour les dérivés fractionnaires

$$\int_a^b (D_{a+}^{\alpha} f)(x) g(x) dx = \int_a^b f(x)(D_{b-}^{\alpha} g)(x) dx \quad (3.2.6)$$

Pour $0 < \alpha < 1 et f \in C^1[a,b]$, les dérivés $D_{a+}^{\alpha} f et D_{b-}^{\alpha} f$ existent, appartiennentà$L_r[a,b] pour 1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$, et ont la forme

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{T(1-\alpha)} \left(f(a)(x-a)^{-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha} dt \right)$$

et

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{T(1-\alpha)} \left(f(a)(x-a)^{-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha} dt \right)$$

et

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{1}{T(1-\alpha)} \left(f(b)(b-x)^{-\alpha} + \int_x^b f'(t)(t-x)^{-\alpha} dt \right)$$

respectivement. Soit la fonction d'indicatrice général est donné par

$$\mathbb{1}_{(a,b)}(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t < b; \\ -1, & b \leq t < a; \\ 0, & \text{ailleure.} \end{cases}$$

Lemme 3.2.2. *Soit $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) et \alpha = H - \frac{1}{2}$.Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons l'égalit :*

$$(I_{-}^{\alpha} \mathbb{1}_{(0,t)})(x) = \frac{1}{T(1+\alpha)} ((t-x)_{+}^{\alpha} - (-x)_{+}^{\alpha}).$$

Preuve :
Soit $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ et, par exemple, $x < 0 < t$ (les autres cas peuvent être considéré comme similaire). ensuite

$$(I_{-}^{\alpha} \mathbb{1}_{(0,t)})(x) = \frac{1}{T(\alpha)} \int_x^{\infty} \mathbb{1}_{(0,t)}(u)(u-x)^{\alpha-1} du.$$

$$= \frac{1}{T(\alpha)} \int_0^t (u-x)^{\alpha-1} du = \frac{1}{T(\alpha+1)}((t-x)^\alpha - (-x)^\alpha). \quad (3.2.7)$$

Soit $H \in (0, \frac{1}{2})$. Selon la définition de la dérivée fractionnaire et (3.2.3), nous devons prouver que
$\int_x^\infty ((t-u)_+^\alpha - (-u)_+^\alpha)(u-x)^{-\alpha-1} du = T(-\alpha)T(\alpha+1)\mathbb{1}_{(0,t)}(x)$ (3.2.8)

Soit, par exemple, $0 < x < t$. Ensuite, le côté gauche de (3.2.8) est égal à

$$\int_x^\infty (t-u)^\alpha (u-x)^{-\alpha-1} du \mathbb{1}_{(0,t)}(x)$$

$$= B(\alpha+1, -\alpha)\mathbb{1}_{(0,t)}(x) = T(-\alpha)T(\alpha+1)\mathbb{1}_{(0,t)}(x)$$

Remarque 3.2.1. *De toute évidence,* $(I_+^\alpha \mathbb{1}_{(a,b)}(x)) = \frac{1}{T(1+\alpha)}((b-x)_+^\alpha - (a-x)_+^\alpha), -\infty < a < b < \infty.$

Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$. *La transformée de Fourier de* f *est défini comme étant*

$$(Ff)(x) = \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t) dt$$

Notons $S(\mathbb{R})$ *de la classe de smooth, c'est infiniment différentiables, et fonctions diminue rapidement.*

Théorème 3.2.2. *((SKM93)). (i) Pour tout*$0 < \alpha < 1 et f \in L_1(\mathbb{R})$, *il considére que*

$$F(I_\pm^\alpha f) = \hat{f}(x).(\mp ix)^{-\alpha}$$

ou $(\mp ix)^\alpha = |x|^\alpha \exp \mp \frac{\alpha \Pi i}{2} sign x$
ii) Pour tout $0 < \alpha < 1 et f \in S(\mathbb{R})$, *il considére que*

$$F(I^{-\alpha} f) = \hat{f}(x).(\mp ix)^\alpha$$

Pour$H \in (0,1)$, *nous introduisons l'ensemble*

$$F_H := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}), f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 |x|^{-2\alpha} dx < \infty \right\}$$

avec la norme

$$\|f\|_{F_H}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2.|x|^{-2\alpha}dx$$

Ici et dans tout le texte $\alpha := H - \frac{1}{2}$.
On dit que f est fonction d'étape ou d'une fonction élémentaire, s'il existe un nombre fini de points $t_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n - 1eta_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n$*, de telle sorte que*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{[t_{k-1},t_k]}(t)$$

Lemme 3.2.3. *Soit* $f \in F_H$*. Alors il existe une suite de fonctions en escalier* f_n*, tels que*

$$\|f - f_n\|_{F_H} \to 0, n \to \infty.$$

Théorème 3.2.3. *Pour*$H \in (0, 1)$*, l'ensemble* F_H *est un espace linéaire avec produit scalaire*

$$(f, g)_{F_H} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\bar{\hat{g}}(x)|x|^{-2\alpha}dx, \quad \alpha = H_{\frac{1}{2}}$$

En autre, la fonctions élémentaires appartient àF_H*, et il est dense dans* F_H*.*

Preuve :
La première affirmation est évidente. En outre, pour tout $-\infty < a < b < \infty$, il s'avère que $\mathbb{1}_{(a,b)} \in F_H$, parce que

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\mathbb{1}}_{(a,b)}(x)|^2|x|^{-2\alpha}dx = \int_{\mathbb{R}} |e^{ixb} - e^{ixa}|^2|x|^{-2-2\alpha}dx$$

et celui-ci est équivalent au intégrante du convergent intégrante$\int |x|^{-2-2\alpha}dx$, dans le voisinage de $\pm\infty$, et équivalent à l'intégrale convergente$\int |x|_{-2\alpha}$. dans le voisinage de 0. Par conséquent, une fonction d'étape appartient àF_H. La deuxième déclaration découle alors de lemme précédent.

Lemme 3.2.4. *Soit $f \in L_2(\mathbb{R})$. Ensuite, pour tout $H \in (0,1)$, y existe une suite de fonctions en escalier de telle sorte que f_n :*

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)|x|^{-2\alpha}|^2 dx \to 0, \quad n \to \infty. \quad (3.2.9)$$

Preuve :
En effet, pour $\varepsilon > 0$,on a

$$\hat{f}_\varepsilon(x) := \hat{f}(x)\mathbb{1}_{|x|>\varepsilon}.$$

Puis

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x) - \hat{f}_\varepsilon(x)|^2 dx \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

. Soit $H \in (0, \frac{1}{2})$. Ensuite .

$$\hat{f}_\varepsilon(x) = \hat{f}(x)|x|^\alpha \mathbb{1}_{|x|>\varepsilon}|x|^{-\alpha} = \hat{g}_\varepsilon(x)|x|^{-\alpha}$$

pour $g_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R}), \alpha = H - \frac{1}{2}$
Maintenant (3.2.9) suit du lemme(3.2.6). Dans le cas $H \in [\frac{1}{2}, 1]$, la preuve est similaire.