REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur **Dida Mohamed**, qui a accepté de diriger ce mémoire.

Je le remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt pour ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude en vers Monsieur **Ghaouti Djellouli** d'avoir accepter d'être le président de ce Jury.

Je remercie aussi Messieur **A. AZZOUZ**, et **K. DJOURFI** d'avoir accepter de faire partir de ce jury.

Table des matières

Introduction

"Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe,ou au disque unité".

L'énoncé ci-dessus présente le théorème d'uniformisation sous la forme d'un résultat de classification des surfaces de Riemann a un biholomorphisme prés. Mais, au XIXème siècle, l'uniformisation n'était pas un problème de classification ; c'était un problème de paramétrisation. Une courbe (réelle ou complexe) peut être définie de deux manières différentes : de manière implicite par une equation $F(x, y) = 0$, ou de manière explicite par une paramétrisation $t \to (x(t), y(t))$. Uniformiser les surfaces de Riemann, c'est passer d'une équation a une paramétrisation. Ainsi, l'énoncé moderne du théorème d'uniformisation nous dit que toute surface de Riemann peut être paramétrée par la sphère, le plan complexe, ou le disque unité.

Les surfaces de Riemann

Au XIXème siècle, et en particulier lorsqu'il s'agissait d'uniformisation, les surfaces de Riemann était souvent pensées comme des outils, et non comme des objets géométriques abstraits intéressants en eux-mêmes. Les termes employés par David Hilbert dans son adresse au Congrés International des Mathématiciens de 1900 sont a cet égard révélateurs. Hilbert parle d'une relation entre deux variables, et non pas de la surface de Riemann qui est définie par cette relation :

« Comme Henri Poincaré fut le premier a le démontrer, il est toujours possible d'uniformiser une relation algébrique quelconque entre deux variables par le biais de fonctions automorphes d'une variable. C'est-à-dire, étant donnée une équation algébrique en deux variables, on peut toujours exprimer ces dernières comme des fonctions automorphes d'une troisième variable, de sorte que, après substitution, la relation algébrique soit identiquement satisfaite. Poincaré s'est également employé avec succés à la généralisation de ce théorème fondamental pour des relations qui ne sont plus algébriques mais analytiques quelconques »

Lorsque Bernhard Riemann introduit les surfaces qui portent son nom, il ne cherche d'ailleurs pas a étudier des objets géométriques abstraits ; les surfaces de Riemann qu'il considère sont celles définies par une équation algébrique, ou plus généralement, les surfaces associées à des fonctions multiformes. L'origine du problème de l'«uniformisation» n'est pas l'étude des surfaces de Riemann, mais l'existence de «fonctions multiformes» . Amenés à calculer les primitives de fonctions rationnelles dans le domaine complexe, les mathématiciens de la première moitié du XIXème siècle (en particulier, Abel et Jacobi) avaient déjà été confrontés à des fonctions multiformes : la valeur de la primitive $f(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dw}{w}$ n'est pas unique ; elle dépend du chemin d'intégration. Bien vite, l'existence de phénomènes de multiformité pour les fonctions analytiques est apparu au grand jour. On sait qu.une fonction analytique est entièrement caractérisée par sa restriction à n'importe quel ouvert non-vide. Mais lorsque l'on cherche à étendre une fonction analytique initialement définie sur un petit ouvert U, l'objet que l'on construit n'est pas une fonction au sens moderne du terme, mais une «fonction multiforme». Se débarasser (par des changements de variables) de ces phénomènes de multiformité est vite apparu comme un problème crucial : c'est e but de l'uniformisation. Uniformiser, c'est (ou c'etait) transformer les « fonctions multiformes » en fonctions uniformes. Voici l'énonc d'uniformisation que Poincaré démontre en 1883, et qu'évoquait Hilbert dans la citation précédente.

«Soit y une fonction analytique quelconque d'une variable x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z » .

Bien sûr, cet énoncé peut se traduire en termes purement géométrique en introduisant la surface de Riemann associée au germe de la fonction analytique y. Exprimer que x et y soient fonctions uniformes d'une variable auxiliaire z, c'est trouver un paramétrage (uniforme) de la surface de Riemann associé au germe de y par une variable auxiliaire z. C'est d'ailleurs par ce biais que Poincaré démontre le résultat annoncé. Il n'en reste pas moins que le but de l'article de Poincaré est d'établir un résultat sur les fonctions ; cet article s'intitule « Sur un théorème de la Théorie générale des fonctions » .

Le chemin qui amena Poincaré à l'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques en 1881 - 82 est également significatif. Ce qui intéresse Poincaré au début de sa carrière, ce sont les équations différentielles. En 1881, un article de Lazarus Fuchs attire plus particulièrement son attention sur les équations différentielles linéaires du second ordre a coefficients méromorphes. Les solutions des ces équations sont naturellement multiformes (quand on fait le tour d'un pôle d'un des coefficients, la solution change de valeur). La grande découverte de Poincaré, c.est que l'on peut néanmoins exprimer ces solutions à l'aide de fonctions uniformes d'une variable auxilaire. Cette découverte lui permet aussi de montrer que toute surface de Riemann algébrique est uniformisée par le disque.

Ce travail se veut une introduction aux idées de Riemann sur les fonctions analytiques

Dans le présent mémoire on va donner quelques exemples de fonctions dont la définition est locale et dont les possibles prolongements analytiques présentent le phénomène de ramification : apparition de plusieurs branches. Riemann a inauguré un point de vue géométrique et topologique là dessus, d'abord à propos des fonctions algébriques, puis à propos des équations différentielles. Il y a un certain domaine $X \subset \mathbb{C}$, plus généralement, $X \subset S$ (la sphère de Riemann) où l'on peut a priori résoudre une équation fonctionnelle (typiquement algébrique ou différentielle). On obtient tout d'abord une solution locale de ce problème. Une méthode standard est de la chercher sous forme de série entière. On a alors l'unicité de l'extension de cette solution aux ouverts connexes de X : cela est dû au principe d'unicité du prolongement analytique (ou parfois plus simplement à des considérations de continuité, comme dans le cas des fonctions algébriques). Bien sûr, on ne peut espérer aucune espèce d'unicité si l'on se place sur des ouverts non connexes de X, car leurs composantes connexes sont des ouverts deux à deux disjoints sur lesquels les restrictions des fonctions recherchées sont totalement indépendantes les unes des autres.

Pour obtenir l'existence de solutions sur un ouvert connexe $U \subset X$, on tente de recoller des solutions locales, qui sont définies sur de "petits" ouverts, par exemple des disques. En général, cela marchera bien si X est simplement connexe mais pas autrement : on obtient une fonction multiforme, qui a des branches.

Le premier chapitre est une introduction aux notions de germes de fonctions, de fonctions multiformes et uniformes et la notion de ramification. La surface de Riemann étant présenté comme une variété de dimension finie, on définie alors les fonctions holomrphe sur sur une variété de dimension 1 (une surface).

Dans le deuxième chapitre, on donne quelques exemples de fonctions qui présente le phénomène de ramification (apparition de plusieurs branches) ; citons les plus importants : $\sqrt{z}$ et $\log z$. On va prolonger analytiquement ces fonctions le long d'un chemin continue, mais malheureusement, le résulat obtenu dépend du choix du chemin.

La solution à ce problème est l'introdution de la monodromie, c'est le but du **troisième chapitre**. On peut démontrer que le résultat du prolongement analytique le long d'un chemin ne dépend pas du choix du chemin. A La fin de ce mémoire on va essayer de visualiser (ou faire de la géométrie dans un certain sens) du comportement des germes de fonctions et leurs continuité analytique ; c'est l'idée de la surface de Riemann.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notions de topologie générale

On note $\mathbb{C}$ le corps des complexes et $S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphére de Riemann. Le demi-plan de Poincaré est $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$.

Ouverts, fermés :
L'espace $\mathbb{C}$, corps des nombres complexes, est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé par $|.|$ (« module » des nombres complexes ou norme euclidienne). C'est un espace complet, ce qui veut dire que toutes les suites de Cauchy y sont convergentes. Je noterai

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}| \ \ |z - z_0| < r\}$$

le disque ouvert de rayon r centré en z_0.

Les ouverts sont des réunions de disques ouverts. Par exemple, le quadrant

$$\{f_z \in \mathbb{C}|R(z) > 0 \quad et \quad Im(z) > 0\}$$

est un ouvert, ainsi que la couronne

$$\{z \in \mathbb{C}|1 < |z| < 2\}.$$

Les fermés sont les complémentaires des ouverts, toute partie A a une adhérence $\overline{A}$ (le plus petit fermé qui la contient), ce qui fait que je noterai aussi

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}||z - z_0| \leq r\}$$

l'adhérence du disque ouvert, qui est le disque fermé. Toute partie a aussi et un intérieur A^0 (le plus grand ouvert contenant A).

Compacts :
Un espace topologique est une partie séparée de cet espace telle que, de tout recouvrement de cette partie par des ouverts, on puisse extraire un sous-recouvrement fini.
Les compacts de $\mathbb{C}$ sont les parties à la fois fermées et bornées (contenues dans une boule assez grande) - c'est un théoréme (dit de Borel-Lebesgue ou de Heine-Borel), vrai dans $\mathbb{C}$ et dans n'importe quel espace $\mathbb{R}^n$, mais pas dans n'importe quel espace topologique).

Toute suite contenue dans un compact y posséde un point d'accumulation ou, ce qui revient au même, une sous-suite convergente, c'est un autre théoréme (dit de Bolzano-Weierstrass). L'image d'un compact par une application continue est un compact. Par exemple, si l'application continue est à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'image d'un compact est un fermé borné de $\mathbb{R}$, ce qui implique que la fonction a un maximum, un minimum, et qu'elle les atteint.

Les compacts vérifient la propriété des fermés emboîtés, à savoir que si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides contenus dans un (le même) compact, alors leur intersection n'est pas vide.

Enfin, une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Connexes :
Un espace topologique X est dit connexe si, chaque fois que X est une réunion de deux ouverts disjoints, l'un deux est vide (et I'autre est X).

Proposition 1.1.1. *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé (sur le corps $\mathbb{R}$). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a *U est connexe*

b *deux points quelconques de U peuvent être joints par un chemin dans U*

c *deux points quelconques de U peuvent être joints par une ligne brisée dans U.*

Simplement connexe :
On dit qu'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est simplement connexe si

1 il est connexe par arcs et non vide,

2 tout lacet basé en un point z_0 est homotope au lacet constant égal à z_0.

Un ouvert connexe est simplement connexe s'il n'a pas de « trou ». On remarquera que c'est une « propriété topologique » au sens où, si U est simplement connexe et V homéomorphe à U, alors V est simplement connexe lui aussi.

1.2 Fonctions complexes

1.2.1 Exponentielle complexe.

Elle est définie par la série entiére

$$exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il est clair que le rayon de convergence de cette série est infini. La convergence absolue implique que l'on peut calculer

$$(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!})(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^l}{l!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

ce qui fait que la fonction exponentielle vérifie la formule d'addition (ou « équation fonctionnelle »)

$$exp(a)exp(b) = exp(a+b) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Cette relation implique que $e^0 = 1$ et que $e^z.e^{-z} = 1$. Les coefficients de la série sont des nombres réels ce qui fait que e^x est réel pour x réel. On appelle e le nombre (réel) $e = e^1$ (ce qui justifie la notation !). Le théoréme suivant résume les propriétés les plus importantes de la fonction exponentielle.

Théorème 1.2.1. *1. L'application* exp *est une surjection* $\mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$.

2. *Elle est égale à sa dérivée, c'est-à-dire on a* $\exp' = exp$.
3. *La restriction de* exp *à* $\mathbb{R}$ *est une fonction réelle strictement croissante et positive qui vérifie*

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

4. *Il existe un nombre réel positif, noté* π, *tel que* $\exp(i\pi/2) = i$ *et tel que* $e^z = 1$ *si et seulement si* $\frac{z}{(2i\pi)} \in \mathbb{Z}$.
5. *La fonction* exp *est périodique de période* $2i\pi$.
6. *L'application* $t \mapsto e^{it}$, e^{it} *envoie l'axe réel sur le cercle unité.*

1.2.2 Logarithme complexe

Il s'agit d'inverser la fonction exponentielle . . . dont nous savons fort bien qu'elle n'est pas inversible, n'étant pas injective. On peut donc s'attendre à des problémes. Nous savons cependant pourquoi elle n'est pas injective (en d'autres termes nous connaissons le noyau de l'homomorphisme de groupes exp).

Donnons-nous un nombre complexe t et cherchons tous les nombres complexes z tels que $e^z = t$. Il est nécessaire que t ne soit pas nul. Écrivons, aprés avoir choisi un argument de t,

$$t =\mid t \mid exp(i \arg t)$$

et cherchons z sous la forme $z = x + iy$, c'est-à-dire résolvons

$$e^x e^{iy} =\mid t \mid \exp(i \arg t) :$$

on trouve

$$x = \log \mid t \mid ; y = \arg t$$

Donc on aimerait écrire

$$z = \log \mid t \mid +i \arg t$$

Définition 1.2.1. *On dit qu'une fonction continue f de la variable complexe t, définie sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ ne contenant pas 0, est une détermination du logarithme sur U si*

$$\forall t \in U, \exp(f(t)) = t.$$

Remarque 1.2.1. *Une telle détermination n'existe pas forcément. C'est le cas par exemple pour $U = \mathbb{C} - \{0\}$, comme on va le voir dans la proposition (1.2.2). Par contre, s'il en existe une, il y en a beaucoup d'autres, comme le précise la proposition suivante.*

Proposition 1.2.1. *Soit U un ouvert connexe ne contenant pas 0. Si f est une détermination du logarithme sur U, toute autre détermination du logarithme sur U est de la forme $f + 2ik\pi$ pour un certain entier k. Réciproquement, toute $f + 2ik\pi$ est une détermination du logarithme sur U.*

Proposition 1.2.2. *Il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur $\mathbb{C} - \{0\}$.*

La Détermination « principale » du logarithme :
Il y a une détermination du logarithme considérée comme meilleure que les autres. Commençons par définir une fonction réelle de variable réelle, la fonction arcsin . La fonction sin est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle admet donc une fonction réciproque strictement croissante

$$\arcsin : \quad]-1, 1[\to]-\pi/2, \pi/2[.$$

Proposition 1.2.3. *Soit U_π le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des réels négatifs ou nuls. Les formules*

$$f(t) = \log|t| + i \begin{cases} \arcsin(y/ \mid t \mid) & si \quad x \geq 0 \\ \pi - \arcsin(y/ \mid t \mid) & si \quad x \leq 0 \quad et \quad y \geq 0 \\ -\pi - \arcsin(y/ \mid t \mid) & si \quad x \leq 0 \quad et \quad y \leq 0\} \end{cases}$$

(avec $x = \text{Ré t}$, $y = Im$ t) définissent une fonction f sur U_π qui est une détermination analytique du logarithme.

1.2.3 Fonctions Analytique

Définition 1.2.2. *On dit d'une fonction f qu'elle est analytique dans un ouvert U du plan complexe si et seulement si elle est dérivable en tout point de U.*

Définition 1.2.3. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application. Soit $z_0 \in U$. On dit que f est analytique en z_0 s'il existe*

- *un nombre $r > 0$ tel que le disque $\mid z - z_0 \mid < r$ soit contenu dans U*
- *et une série entiére $\sum_{n\geq 0} a_n w^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ tels que, pour $\mid z - z_0 \mid < r$, on ait*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n :$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

Exemple 1.2.1. *Un polynôme est une fonction analytique en tout point de $\mathbb{C}$. En effet, on peut développer le polynôme en tout point grâce à la formule de Taylor :*

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

où n est le degré de P. Bien entendu, il existe des fonctions analytiques qui ne sont pas des polynômes .

Théorème 1.2.2. *(Principe du prolongement analytique). Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soient f, g deux fonctions analytiques sur U. Si f et g coïncident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U, alors elles coïncident sur U.*

Remarque 1.2.2. *Si U et V sont deux ouverts non vides avec $V \subset U$ et U connexe et si f est une fonction analytique sur V , on appelle prolongement analytique de f à U toute fonction analytique sur U qui coïncide avec f sur V . Il se pourrait trés bien qu'il n'existe pas de tel prolongement, mais, s'il en existe un, il estunique.*

1.2.4 Fonction Polynomiales

une equation de la forme $P(w,z) = 0$ où P est un polynôme a deux variablis a pour tuot z un nombre fini de la solution $W_1(z), ..., w_n(z)$ on va montrer que ces ce soulution peuve être interpréter comme des valeurs d'une fonction analytique globale qui est alors appellé une fonction algebrique. Invesement, si une fonction analytique globale est donnée, nous volon êter en musure si elle répond ou non à une équation polynomiale.

Définition 1.2.4. *un polynome $P(w,z)$ à deux variables est dit irreductible s'il ne peut pas s'écrire sous forme d'un produit de deux polyômes dont aucun n'est constant. Deux polyômes sont premier s'ils n'ont pas de facteur commun, sauf pour les consatntes.*

Définition 1.2.5. *une fonction analytique globale f est dite fonction algebrique si pour tout couple (f, Ω) satisfaisant à la relation $P(f(z), z) = 0$ dans Ω où $P(w,z)$ est un polynôme qui ne s'annule pas identiquement*

1.2.5 Fractions Rationnelles

Une fonction rationnelle est quotient de deux polyômes $P(z)$ et $Q(z)$ de la forme $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. On suppose que $P(z)$ et $Q(z)$ n'ont pas de facteur ou de zéro commun. Un zéro de $Q(z)$ est appelé un pôle de $R(z)$

1.3 Groupes d'homotopie

1.3.1 Composantes connexes par arcs

Soit $p \in M$ un point de M. Nous dirons que $q \in M$ est dans la même composante connexe par arcs que p, s'il existe une courbe $\gamma : [0,1] \to M$, continue, telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(1) = q$. Donc, par définition, les points d'une même composante connexe par arc de M peuvent être reliés entre eux par une courbe continue dans M. Nous noterons $\pi_0(M)$ l'ensemble des composantes connexes par *arc* de M. Nous dirons que M est connexe par arc si $\pi_0(M)$ est réduit à un seul point, c'est à dire si M n'a qu'une seule composante connexe par arcs. Un espace topologique connexe par arcs est connexe.

1.3.2 Le groupe fondamental

Dans ce qui suit, M désigne un espace topologique connexe par arc.

L'ensemble $\pi_1(M)$ L'ensemble le plus utilisé dans les applications qui nous concerne est certainement l'ensemble $\pi_1(M)$. Nous allons voir que cet ensemble peut être muni d'une loi de composition interne qui en fait un groupe. Soit $p_0 \in M$ un point quelconque de M, fixé. Nous posons $\mathcal{C}(p_0)$ l'ensemble des courbes $\gamma : [0,1] \to M$ telles que $\gamma(0) = \gamma(1) = p_0$. Ce sont donc les courbes qui commencent et se referment en p_0. $\mathcal{C}(p_0)$ est l'espace des lacets centrés en p_0, et nous dirons que $\gamma \in \mathcal{C}(p_0)$ est un lacet.

Il faut remarquer que si γ_1 est un lacet $\gamma_1 : [a,b] \to M$ tel que $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = p_0$, alors il existe un lacet $\gamma \in \mathcal{C}(p_0)$ qui passe par les mêmes points de M que γ_1. Il suffit en effet de changer la paramétrisation, par exemple en posant

$$\gamma(t) = \gamma_1(a + t(b-a))$$

Maintenant, nous dirons que deux lacets γ_0 et γ_1 de $\mathcal{C}(p_0)$ sont homotopes s'il existe une application continue $F : [0,1] \to \mathcal{C}(p_0)$ telle que $F(0) = \gamma_0$ et $F(1) = \gamma_1$. On peut encore voir F comme une application continue

$$F : [0,1] \times [0,1] \to M$$

avec

$$F(0,t) = \gamma_0(t) \qquad F(1,t) = \gamma_1(t)$$

pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, pour toute valeur $u \in [0,1]$, $F(u,.)$ est un lacet de $\mathcal{C}(p_0)$. L'application F permet de déformer continûment le lacet γ_0 (à $u=0$) en le lacet γ_1 (à $u=1$). Bien sûr, les lacets ne sont pas toujours homotopes entre eux. Prenons par exemple pour espace M une couronne. Si γ_0 est un lacet qui ne fait pas le tour du trou, et si γ_1 fait au contraire le tour du trou, alors il est impossible de déformer γ_0 en γ_1. En effet, nous constatons facilement que γ_0 peut être « contracté » en le lacet $\gamma_{(t)} \equiv p_0$, le lacet qui ne « bouge » pas dans M, alors que le trou de la couronne empêche γ_1 de pouvoir être ainsi contracté en un point. La relation d'homotopie sur les lacets est une relation d'équivalence, qui permet de quotienter $\mathcal{C}(p_0)$. Nous posons $\gamma_1 \in \pi_1(M, p_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{C}(p_0)$ pour la relation d'homotopie. Nous noterons $[\gamma] \in \gamma_1(M, p_0)$ la classe d'homotopie de $\gamma \in \mathcal{C}(p_0)$.

1.3.3 Structure de groupe

Nous allons maintenant donner à l'ensemble $\pi_1(M, p_0)$ une structure de groupe. Pour cela, nous définissons sur $\mathcal{C}(p_0)$ une composition des lacets. Soient γ_0 et γ_1 deux lacets de $\mathcal{C}(p_0)$. Nous notons $\gamma_1\gamma_0$ le lacet obtenu en parcourant d'abord γ_0 puis γ_1. Ce lacet, par un changement de paramétrisation (il suffit de parcourir les deux lacets deux fois plus vite) est un élément de $\mathcal{C}(p_0)$. Nous définissons donc une composition interne

$$\mathcal{C}(p_0) \times \mathcal{C}(p_0) \to \mathcal{C}(p_0) \qquad (\gamma_0, \gamma_1) \mapsto \gamma_1\gamma_0$$

Maintenant, il est facile de montrer que $[\gamma_1\gamma_0]$ ne dépend que de $[\gamma_0]$ et $[\gamma_1]$. Nous avons donc un produit

$$\pi_1(M,p_0)\times\gamma_1(M,p_0)\to\gamma_1(M,p_0)\qquad([\gamma_0],[\gamma_1])\mapsto[_0].[_1]=[\gamma_1\gamma_0]$$

C'est ce produit qui donne à $\pi_1(M,p_0)$ une structure de groupe. En effet, l'élément neutre de ce produit, comme il est aisé de s'en convaincre, est la classe d'homotopie du lacet

$$\gamma_{p_0}(t)=p_0\qquad \textit{pour}\quad \textit{tout}\qquad t\in[0,1],$$

le lacet constant. Nous avons alors

$$[\gamma].[\gamma_{p_0}]=[\gamma_{p_0}].[\gamma]=[\gamma]$$

Si γ est un lacet de $\mathcal{C}(p_0)$, nous notons γ^{-1} le lacet obtenu en le parcourant dans l'autre sens

$$\gamma^{-1}(t)=\gamma(1-t)$$

Alors nous avons

$$[\gamma].[\gamma^{-1}]=[\gamma^{-1}].[\gamma]=[\gamma_{p_0}]$$

C'est à dire que $[\gamma^{-1}]$ est l'inverse de $[\gamma]$ dans $\pi_1(M,p_0)$. Muni de ce produit, $\pi_1(M,p_0)$ est donc un groupe, le groupe fondamental de l'espace M en p_0.

Nous remarquons que ce groupe dépend du point p_0 choisi au départ. Il est cependant possible de montrer que si q_0 est un autre point de M, quelconque, alors $\pi_1(M,p_0)$ et $\pi_1(M,q_0)$ sont des groupes isomorphes. Ceci signifie que la structure de ces groupes est toujours la même, quelque soit le point p_0 choisi. Nous notons $\pi_1(M)$ l'un de ses groupes sachant qu'il n'est défini qu'à un isomorphisme près. C'est le groupe fondamental de l'espace M, appelé aussi groupe d'homotopie d'ordre 1 de M. Nous dirons que M est simplement connexe si $\pi_1(M)=\{1\}$, c'est à dire s'il n'y a qu'une seule classe d'homotopie des lacets, celle du lacet constant. Nous avons alors le résultat suivant : si M et M_0 sont deux espaces topologiques connexes par arcs homéomorphes, alors $\pi_1(M)$ et $\pi_1(M')$ sont isomorphes.

Cette propriété montre que le groupe fondamental ne retient de M que des caractéristiques topologiques. La réciproque de ce théorème n'est pas vraie, comme nous allons le voir dans les exemples qui suivent.

1.3.4 Exemples

1/ Le disque, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ont pour groupe fondamental l'ensemble $\{1\}$ et sont donc simplement connexes.

2/ Le cercle et la couronne ont le même groupe fondamental, $\mathbb{Z}$. Chaque entier $n \in \mathbb{Z}$ est le nombre de « vrais » tours (dans un sens ou dans l'autre, d'où le signe possible de n) que fait le lacet autour du trou.

3/ Pour $n > 1$, si S^n est la sphère dans $\mathbb{R}^{n+1}$, alors $\pi_1(\mathrm{S}^n) = \{1\}$. Ces sphères sont donc simplement connexes. Bien que $\pi_1(\mathrm{S}^n) = \pi_1(\mathbb{R}^n)$ pour $n > 1$, nous n'avons pas $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{R}^n$!

Remarque 1.3.1. *Nous avons vu que M est connexe par arcs s'il est « composé d'un seul morceau ». De même, M est simplement connexe s'il « n'a pas de trou ».*

Proposition 1.3.1. *Soient γ_0 et γ_1 deux chemins continus homotopes (avec extrémités fixes) et $\varphi : [0;1]^2 \to \mathbb{C}$ une homotopie de γ_0 vers γ_1. Pour tout $t \in [0,1]$ notons $\gamma_t(s) = \varphi(s,t)$ les chemins intermédiaires. Soit (f,D) une paire dont le disque D est centrée en $\gamma_0(0)$. Alors, si (f,D) admet un prolongement (g_t, D_t) le long de chaque chemin γ_t , on a $g_0 = g_1$.*

Corollaire 1.3.1. *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Soit D un disque ouvert contenu dans Ω. Soit (f,D) une paire se prolongeant en (g,A) le long de tout chemin continu γ contenu dans Ω et d'origine le centre de D et d'extrémité un point $z \in \Omega$. Alors le prolongement de (f,D) le long d'un tel chemin est indépendant du chemin choisit.*

Définition 1.3.1. *Plus généralement, soit P un polynôme à deux variables, $P = P(T_1, T_2)$ pas identiquement nul. Une solution (analytique) $f(z)$ de l'équation*

$$p(f(z), z) = 0$$

pour z dans un ouvert que l'on appelle une fonction algébrique. Il peut être démontré que si nous supprimons un nombre fini de points du plan, alors une telle solution f peut être poursuivi analytiquement le long de chaque chemin.

Chapitre 2

Fonction holomorphes et Surface de Riemann

2.1 Fonction holomorphes

Rappelons tout d'abord comment Riemann introduit la notion de fonction holomorphe, Il considére une fonction $w(z) = u(z) + iv(z)$, à valeurs coplexes, d'une grandeur $z = x + iy$ variant dans un ouvert U du plan complexe. Il étudie alors le rapport

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{z' \to z} \frac{w(z) - w(z')}{z - z'}$$

et observe :

lorsque la dépendance de la grandeur w de z est prise arbitrairement, le raport $\frac{du+idv}{dx+idy}$ variera, d'une maniére générale, avec les valeurs de dx et de dy.
on peut reformuler cela comme suit : si l'on note

$$dw_z : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

la différentielle, au sens réel, de la fonction w en un point z, et si l'on considére un petit accroissement $dz = \varepsilon e^{i\varphi}$ de la variable z, on a $\frac{dw_z(\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} = \frac{1}{2}((\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})) + \frac{1}{2}((\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}))e^{-2i\varphi}$. Si le terme

$$(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})$$

ne s'annule pas au poit z, la qantité $\frac{dw_z(\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}$ varie lorsque $e^{i\varphi}$ varie. Mais Riemann observe que pour toutes les fonction w obtenues par « des opérations élémentaires du calcul » à partit de z, la quantité $\frac{dw_z(\varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}$ ne dépend pas de $dz = \varepsilon e^{i\varphi}$. Il propose donc de prendre cette propriété comme définition de ce qu'il appelle une fonction d'une variable complexe :

Une grandeur variable complexe z lorsqu'elle varie avec elle de telle sort que la valeur de la dérivée $\frac{dw}{dz}$ est indépendantte de la valeur de la différentielle dz.

Autrement dit, le terme «fonction d'une variable coplexe» désingne toujours, chez Riemann, une fonction holomorphe. Par définition ces fonction sont donc celles qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.1}$$

2.2 Germe d'une fonction

Définition 2.2.1. *On considére les couples (V, f), où V est un voisinage ouvert de p et $f : V \to \mathbb{R}$ une application $\mathbb{C}^\infty$. On dit que deux couples (V, f) et (V', g) sont équivalents si f et g coïncident sur un voisinage W de p contenu dans $V \cap V'$. Une classe d'équivalence est appelé un germe de fonction $\mathbb{C}^\infty$ en p.*

2.3 Surface de Riemann

Cartes de X :
Il sera dorénavant sous-entendu que toutes nos cartes sont complexes de dimension 1. Ce sont donc des couples (U, ϕ), où U est un ouvert non vide de X et où ϕ est un homéomorphisme de U sur un ouvert $V := \phi(U)$ de $\mathbb{C}$. Une carte en $x \in X$ est une carte (U, ϕ) telle que $x \in U$. On dit que la carte est un disque si V est un disque ouvert de $\mathbb{C}$; si de plus ce disque est de centre 0 et si $\phi(x) = 0$, on dit que la carte est centrée en x. Enfin, on dira qu'une carte (U, ϕ) est connexe (par exemple) si son domaine U l'est. Pour tout $y \in U$, on dit alors que $\phi(y)$ est la coordonnée de y dans la carte (U, ϕ) et ϕ est appelée coordonnée locale en x.

Atlas sur X :
C'est un recouvrement de X par des cartes. cela signifie que $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i)$ et que $X = \cup U_i$. S'il existe un atlas sur X, c'est une surface. Comme toute variété topologique connexe, X est alors automatiquement connexe par arcs (car connexe et localement connexe par arcs).

Cartes compatibles :
Ce sont les conditions de compatibilité entre les cartes qui permettent de préciser la structure (différentielle, analytique ...) de X. Nous dirons que les cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) sont compatibles (sous-entendu : au sens analytique) si l'homéomorphisme :

$$\begin{cases} \psi : \phi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow & \phi_2(U_1 \cap U_2), \\ z \mapsto & \phi_2(\phi_1^{-1}(z)), \end{cases}$$

est biholomorphe, autrement dit, si ψ et ψ^{-1} sont holomorphes ; cela a bien un sens puisque $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ et $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sont des ouverts de $\mathbb{C}$. Notez que, si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, les cartes sont automatiquement compatibles. Attention ! La relation de compatibilité n'est pas en général une relation d'équivalence : si l'on teste quelque chose sur $U_1 \cap U_2$ et sur $U_2 \cap U_3$, cela ne dit pas ce qui se passe sur $U_1 \cap U_3$.

Atlas analytique :
Un atlas $\mathcal{A}$ est dit analytique si les cartes qui le composent sont deux à deux compatibles. Disons provisoirement que deux atlas sont compatibles si toute carte de l'une est compatible avec toute carte de l'autre : cela revient à dire que la réunion des deux atlas est encore un atlas analytique. Cette relation entre atlas est une relation d'équivalence. La réunion de tous les atlas d'une même classe est un atlas analytique qui est maximal pour l'inclusion (et même maximum dans la classe) ; on dit qu'il est saturé.

Définition 2.3.1. *Une surface de Riemann est un espace topologique X (connexe, séparé) muni d'un atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ où $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ forme un recouvrement ouvert de X et les $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda$ sont des homéomorphismes vers des ouverts de $\mathbb{C}$ (les cartes) tels que les compositions*

$$\varphi_\lambda o \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$$

sont des transformations biholomorphes (c'est-à-dire des bijections holomorphes).

La topologie de X :
Bien souvent, on se donne une famille $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_i)$ destinée à être un atlas sur X avant même d'avoir défini sa topologie. Dans ce cas, il faut comprendre que l'on munit chaque U_i de la topologie déduite de celle de $\phi(U_i)$ par transport de structure ; puis on munit X de la topologie dont une base d'ouverts est la réunion des topologies des U_i : cela revient à dire que $\Omega \subset X$ est un ouvert de X si, et seulement si, chaque $\phi_i(W\Omega \cap U_i) \subset \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Cette définition n'est cohérente que si les "cartes" (U_i, ϕ_i) sont compatibles au sens topologique, autrement dit, si chaque bijection $\phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ obtenue par restriction de $\phi_j o \phi_i^{-1}$ est un homéomorphisme. En principe, de telles compatibilités devraient êtres démontrées, ainsi d'ailleurs que la connexité de X ; mais habituellement on les accepte comme évidentes.

Une surface de Riemann X est nécessairement un espace topologique séparé. Soient en effet x, y deux points distincts de X. On veut démontrer qu'il existe des ouverts disjoints $U_1 \ni x$ et $U_2 \ni y$. S'il existe une carte (U, ϕ) telle que

$x, y \in U$, c'est clair puisque U, homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$, est séparé. Sinon, supposons que $x \in U$ a pour image $z \in \phi(U)$ et soit $U' := \phi^{-1}(D^0(z,r))$ où $r > 0$ est assez petit pour que $D^0(z,r) \subset \phi(U)$. Alors, si $0 < r_0 < r$, les ouverts $U_1 := \phi^{-1}(D^0(z,r_0))$ et $U_2 := X \setminus \phi^{-1}(\overline{D}(z,r'))$ contiennent respectivement x et y et ils sont disjoints.

Remarque 2.3.1. *Sa dimension en tant que variété réelle est 2, en tant que variété complexe c'est 1. Certains ouvrages appellent d'ailleurs "courbe holomorphe" ce que nous appellerons "surface de Riemann".*

Utilisation d'un atlas particulier :
Le plus souvent, on se donnera un atlas particulier, auquel on ajoutera à volonté des cartes compatibles selon les besoins. Cependant, il faudra prouver qu'une définition ou une construction faisant référence à un tel atlas particulier ne change pas si l'on prend un autre atlas équivalent . Naturellement, une construction effectuée sur un atlas saturé peut être considérée comme intrinsèque, puisqu'il n'y a qu'un atlas saturé dans chaque classe.

Raffinement d'un atlas :
Si chaque ouvert U_i de l'atlas $\mathcal{A} = ((U_i, \phi_i)_i$ admet un recouvrement ouvert $U_i = \cup U'_{i,j}$, on peut former un nouvel atlas avec les cartes $(U'_{i,j}, \phi'_{i,j})$, où $\phi_{i,j}$ désigne la restriction de ϕ_i à $U'_{i,j}$. Par exemple, si l'on a d'une part l'atlas $\mathcal{A}$ sur X, d'autre part un recouvrement ouvert de X, on peut en déduire un atlas $\mathcal{A}'$ compatible avec $\mathcal{A}$ et de plus subordonné au recouvrement : cela signifie que toute carte de $\mathcal{A}'$ est contenu dans un ouvert du recouvrement.

Avec cette définition, on peut étendre immédiatement les propriétés et objets locaux de $\mathbb{C}$ et définir les notions de fonctions et de formes holomorphes ou méromorphes, d'applications holomorphes et de biholomorphismes (ou isomorphismes) entre surfaces de Riemann :

1. Une fonction complexe ψ définie sur un ouvert $U \subset X$ est holomorphe si pour tout $P \in U$ et pour toute carte $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ telle que $P \in U_\lambda$, la fonction $\psi o \varphi_\lambda^{-1}$ est holomorphe au voisinage de $z = \varphi_\lambda(P)$. De plus : la fonction ψ a un zéro d'ordre n en P si et seulement si $\psi o \varphi_\lambda$ a un zéro d'ordre n en z
2. De la même manière on définit les fonctions méromorphes sur les surfaces de Riemann ainsi que l'ordre d'un pôle d'une fonction méromorphe.
3. Une application continue $f : Y \to X$ entre deux surfaces de Riemann est holomorphe si, pour toute carte locale $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ dans X, l'application $\varphi_\lambda o f$ est holomorphe. Une telle application est un isomorphisme de surfaces de Riemann, ou un biholomorphisme, si c'est un homéomorphisme et son inverse est holomorphe.

Remarque 2.3.2. *Ces définitions ne dépendent pas de la carte choisie, notamment l'ordre des pôles et zéros car les changements de cartes sont des biholomorphismes.*

Proposition 2.3.1. *Soient U un ouvert d'une surface de Riemann X, p un point de U et f holomorphe bornée sur $U \backslash \{p\}$. Alors f s'étend en une fonction holomoprhe sur U*

2.4 Trois exemples simplement connexes

On décrit ici trois exemples simplement connexes de surfaces de Riemann. Le théorème d'uniformisation, qu'on verra plus loin, énonce que ce sont les seuls et que toute surface de Riemann est un quotient d'un de ces exemples.

2.4.1 Le plan $\mathbb{C}$

Le plan est évidemment une surface de Riemann simplement connexe

2.4.2 Le disque $\mathbb{D}$ ou le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$

Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ est une surface de Riemann simplement connexe. Cependant, du point de vue des surfaces de Riemann, ils ne donnent qu'un seul exemple en plus de $\mathbb{C}$ lui-même. En effet, le théorème de représentation conforme de Riemann [Rud1987] énonce que tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid\mid z \mid< 1\}.$$

Nous préférerons souvent au disque le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}.$$

Un biholomorphisme entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ z & \mapsto & i\dfrac{1+z}{1-z} \end{array}$$

et s'étend en un homéomorphisme des bords : $\mathbb{S}^1 \simeq \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{H} \simeq \mathbb{RP}^1$.

2.4.3 La sphére de Rieman

Définition 2.4.1. *(Sphére de Riemann) On considére la sphére* $S_2 = x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, *munie de la topologie induite par* $\mathbb{R}^3$. *On fixe les points* $p_\pm = (0, 0, \pm 1) \in S_2$, *les ouverts* $\mathcal{U}_\pm = S_2 \setminus p_\pm$ *et les projections stéréographiques de* $\mathcal{U}_\pm$ *sur* $\mathbb{C}$, *données par formules*

$$z_\pm(x) = \frac{x_1 \pm ix_2}{1 \mp x_3}, x \in \mathcal{U}_\pm$$

Puisque $S_2 = \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_-$ *et* $z_+.z_- \equiv 1$ *sur* $U_+ \cap U_-$, *atlas de cartes* $(U_\pm, z_\pm)$ *déterminent la structure analytique sur* $S_2 = \overline{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Munie de cette structure,* S_2 *s'appelle la sphére de Riemann.*

Dans cette partie, on fait une construction rigoureuse l'idée est d'ajouter un point à l'espace localement compact $\mathbb{C}$ pour le rendre compact. Notons $\widehat{C}$ l'ensemble

$$\widehat{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

où ∞ est juste le nom qu' ou donne au point ajouté. Pour justifier ce nom, on met une topologie sur ce qui n'est, pour le moment, qu'un ensemble.

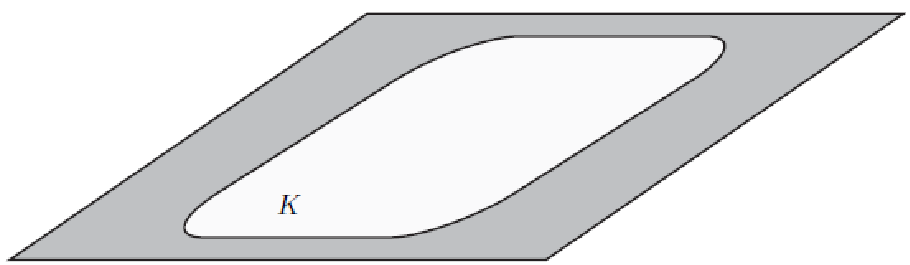


FIGURE 2. Voisinage de ∞

Pour définir cette topologie, il suffit de donner une base de voisinages de chaque point. Considérons donc un point z de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. De deux choses l'une :

1/ soit $z \in \mathbb{C}$, on alors prend pour base de voisinages de z les boules ouvertes centrées en z (c'est une base de voisinages de z pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}$),

2/ soit $z = \infty$, cas où l'on prend pour base de voisinages de ∞ dans $\widehat{C}$ les complémentaires des compacts de $\mathbb{C}$ auxquels on ajoute ∞, en d'autres termes les $(\mathbb{C} - K) \cup \{\infty\}$, où $K \subset \mathbb{C}$ est un compact.

Proposition 2.4.1. *Cette topologie fait de* $\widehat{C}$ *un espace topologique compact, homéomorphe à la sphére unité de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.4.2. *On appelle $\widehat{C}$ la sphére de Riemann.*

Remarque 2.4.1. *Une remarque fondamentale est que la transformation $z \to \frac{1}{z}$ échange voisinages de 0 dans $\mathbb{C}$ et voisinages de ∞ dans $\widehat{C}$.*

2.5 Surface de Remann d'une fonction

Définition 2.5.1. *(Surface de Riemann étalée). Soit Y une surface de Riemann. On appelle une surface de Riemann étalée au-dessus de Y le couple : une surface de Riemann connexe X et une application holomorphe non constante $\varphi : X \to Y$.On considére le plus souvent les cas où Y est un plan complexe $\mathbb{C}$ où la sphére de Riemann $S_2 = \overline{\mathbb{C}}$.*

Définition 2.5.2. *(fonction sur une surface de Riemann X). Une fonction continue $f : X \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe (resp. $\mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^\infty$, méromorphe) si les composés $fo\varphi_\alpha^{(-1)}$ a sont holomorphes (resp. $\mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^\infty$,méromorphes) sur $f_\alpha(\mathcal{U}\alpha)$.*

Théorème 2.5.1. *Etant donné un ouvert connexe $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ et une fonction f holomorphe sur $\mathcal{U}$, il existe une unique surface de Riemann X_f de la fonction f.*

Théorème 2.5.2. *(Riemann). Surface de Riemann de la fonction f X_f est compacte ssi f est algébrique, i.e. $p(z, f(z)) \equiv 0$ pour un polynôme irréductible de deux variables $p \neq 0$.*

Théoréme d'existence de Riemann et les résultats associés :
La surface de Riemann X_f de la fonction holomorphe (méromorphe) f est munie naturellement de deux fonctions holomorphes (méromorphes) qui séparent les points de X_f :laprojection $\varphi : X_f \to \overline{\mathbb{C}}$ et la fonction f elle-même vue comme fonction uniforme sur X_f. Il s'agit d'un phénoméne fondamental.

Théorème 2.5.3. *Théoréme d'existence de Riemann (Riemann,1851, Klein,1881, Hilbert,1901, Weyl,1913)*

Soient X une surface de Riemann et $a \in X$. Alors, il existe une fonction méromorphe sur X ayant un pôle en a et holomorphe sur $X \setminus \{a\}$. Si en plus la surface X est ouverte (i.e. non compact) alors $\forall a, b \in X, a \neq b$, $\exists f \in \Theta(X)$ telle que $F(a) \neq F(b)$. Ce théoréme implique que toute surface de Riemann est isomorphe à une surface de Riemann X_f d'une fonction holomorphe (méromorphe)

Proposition 2.5.1. *Il existe une surface de Riemann (connexe) S avec un point marqué $p_0 \in S$ et une application holomorphe $\phi : S \to \Omega \times \mathbb{C}$, $\phi = (\pi, \widetilde{f})$, satisfaisant :*

1. *$\pi(p_0) = x_0$ et $fo\pi \equiv \widetilde{f}$ au voisinage de p_0 ;*

2. *$\pi : S \to \Omega$ est un difféomorphisme local en tout point de S ;*
3. *tout autre triplet (S', p'_0, ϕ') satisfaisant (1) et (2) se factorise par (S, p_0, ϕ) via une application holomorphe $\varphi : S' \to S : \varphi(p'0) = p_0$ et $\varphi' = \phi o \varphi$.*

Le triplet (S, p_0, ϕ) est unique à isomorphisme prés. Le graphe $G := \phi(S)$ est unique.

voir figure si dessus

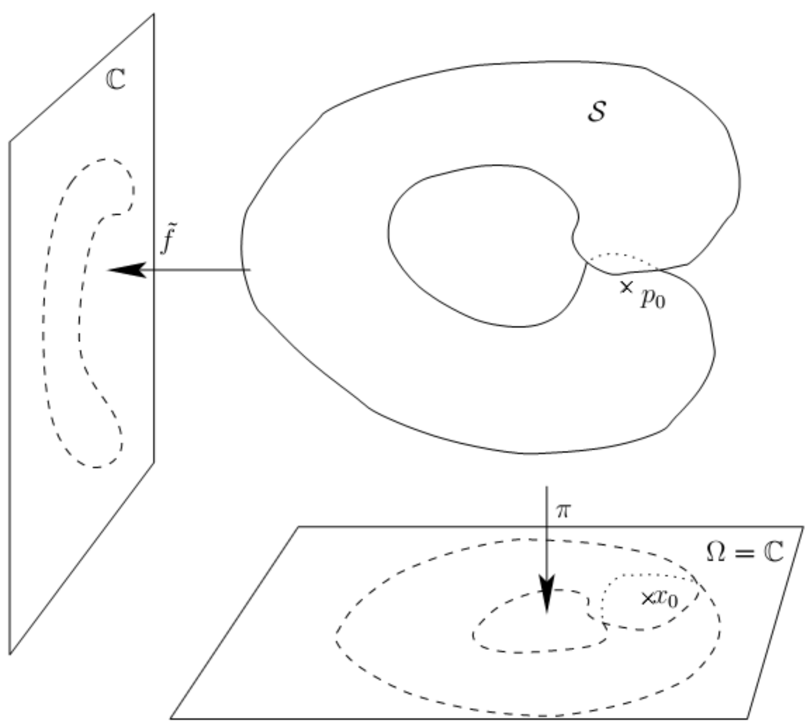


Figure. Surface de Riemann (ou graphe) de f

2.6 Fonctions multiformes et surface de Riemann

Pour Riemann ces surfaces apparaissent comme une maniére de traiter les fonction multiformes en partant d'une fonction holomorphe définie sur un ouvert du plan complexe, on cherche à la prolonger analytiquement. la premiére phrase de la citation qui suit énonce le principe du prolongrmrnt analytique et la deuxieme explique comment on peut tomber ainsi sur un probléme de multiformité. ce-ci motive précisément l'introduction du terme « fonction multiforme », qui n'est bien sûr pas une fonction au sens ensembliste moderne.

Une fonction de $x + iy$, qui est donnée en une portion du plan des (x, y), ne peut être prolongée au-delà d'une maniére continue que d'une seule façon.
Maintenant, d'aprés la nature de la fonction à prolongé, elle repredra ou non, toujours la même valeur de z, quel que soit le chemin suivant lequel le prolongement a lieu.

Dans le premier cas, on la nommera nommerai uniforme ; c'est alors pour toute valeur de z une fonction parfaitement déterminée et elle ne devient discontinue le long d'une ligne. Dans le second cas, où l'on dira qu elle est multiforme, on doit avant tout, pour saisir la marche de cette fonction , porter son attention sur certains points du plans des z, autour des quels la fonction se prolonge en une autre.Les fonctions e^z, $\log z$, $\sin(z)$ et $\cos(z)$ sont des fonction multiformes.

Ces points autour des quels s'échangent par prolongement analytique les déterminations d'une fonction sont si importants pour la suit que Riemann leur donne un nom :

On nommera les divers prolongements d'une fonction pour une même portion du plan des z les branch de cette fonction, et un point autour du quel une branche se prolonge en une autre un point de ramification de la fonction. Partuot où il ne se trouve aucune ramification, la fonction est dite monodrome ou uniforme

Définition 2.6.1. *Une fonction f est appelée multiforme si à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de $f(z)$.*

Définition 2.6.2. *Une fonction f est appelée uniforme si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.*

2.7 Surface de Riemann d'un germe de fonction

Nous expliquons ici comment la surface de Riemann associée à un germe de fonction holomorphe $f : (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C}$.
Soit $\mathcal{C} = \{germes\ \ de\ \ fonction\ \ holomorphes \quad (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{C}\}$.
On va munir cet ensemble d'une topologie séparée.
Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$ et toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$, on défini

$$\mathcal{U}(U, f) = \{germe \ \ f_x : (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C} \mid x \in U\}$$

et on munit $\mathcal{C}$ de la topologie engendrée par les $\mathcal{U}(U, f)$. En particulier, l'application

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{C} &\to \mathbb{C} \\ (f_x : (\mathcal{C}, x) \to \mathbb{C}) &\mapsto x \end{aligned}$$

est continue et induit des homéomorphismes locaux en restriction aux ouverts $\mathcal{U}(U, f)$. Ceux-ci permettent de munir $\mathcal{C}$ d'une structure de surface de Riemann . Cette topologie est séparée. En effet, deux germes basés en deux points différents sont déjà séparés par la fonction continue π. Prenons maintenant $f_x : (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C}$ et $g_x : (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C}$ deux germe basée en x . Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant x tel que f_x et g_x soient les germes de $f, g : U \to \mathbb{C}$. Si on a un germe $h_y : (\mathbb{C}, y) \to \mathbb{C}$ dans l'intersection $\mathcal{U}(U, f) \cap \mathcal{U}(U, g)$, les fonctions f et g coïncident sur un ouvert de définition de définition de h donc sont égales, ce qui implique $f_x = g_x$. Ainsi, si $f_x \neq g_x$, les ouvert $\mathcal{U}(U, f)$ et $\mathcal{U}(U, g)$ sont disjoints, et séparent donc les deux germes.
Soit maintenant $f_x : (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C}$ un germe de fonction holomorph. On appelle surface de Riemann de f_x la composante connexe $\mathcal{L}(f_x)$ de $\mathcal{C}$ contenant f_x. Les germes $g_y : (\mathbb{C}, y) \to \mathbb{C}$ dans $\mathcal{S}(f)$ sont obtenus pars prolongment analytique de $(f_x : (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C})$ le long d'un chemin joignant x à y. En particulier, si $f_x : (\mathbb{C}, x) \to \mathbb{C}$ est le germe d'une détermination au voisinage de x d'une fonction multiforme f, la surface $\mathcal{S}(f_x)$ contiendra un point « au-dessus» de x (c'est-à-dire dans $\pi^{-1}\{x\}$) pour chaque détermination de f en x. La surface $\mathcal{S}(f_x)$ vient donc avec une application holomorphe (uniforme) $\widehat{f} : \mathcal{S}(f) \to \mathbb{C}$ qui «détermine » .

2.8 Surface de Riemann associée à une fonction algébrique

On considére dans ce paragraphe la surface de Riemann associée à une fonction algebrique $S(z)$. Le graph de s, dans $\overline{\mathbb{C}}_z \times \overline{\mathbb{C}}_s$, est défini par une équation polynomiale irréductible $F(Z, s) = 0$. une telle équation définit une courbe algébrique irréductible dans $\overline{\mathbb{C}_Z} \times \overline{\mathbb{C}}_s$.
Riemann se propose de « déterminer le mode de ramification de la fonction S ou de la surface T qui la représente ». Dans un premier temps, T est la surface de Riemann de la partie réguliére de la fonction c'est -à-dire le prolongement analytique maximal de n'importe lequel de ses germes réguliers (holomorphe et uniformes). Ensuite, il montre qu'il existe une unique copactification lisse de T que l'on obtient comme suit. Il définit d'bort les points de ramification les plus simples possibles sur la surface T :

Un opint de la surface T, où se rattachent ensemble seulement deux branches d'une fonction de telle sorte qu'autour de ce point la premiére branche se prolonge en la seconde et la second en la premiére, je le nommerai un point de ramification simple.

Cas général

Soit $P \in \mathbb{C}[Z;W]$ un polynôme irréductible dans lequel apparaissent effectivement les deux indéterminées Z etW. On l'écrira :

$$P = a_0(Z)W^n + ... + a_n(Z)$$

avec $deg_W P = n \geq 1, a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}[Z], a_0 \neq 0$ et $deg_Z P = max(dega_0, ..., dega_n) \geq 1$. Soit $w(z)$ une solution holomorphe locale de l'équation algébrique $P(z, w(z)) = 0$. En vertu du principe de préservation des relations algébriques, tout prolongement analytique de $w(z)$ doit encore être solution de cette équation. On peut démontrer qu'il existe des prolongements analytiques au voisinage de tout point de $\mathbb{C}$, sauf éventuellement d'un nombre fini. Cela découle en effet, des deux faits suivants :

1. L'ensemble S des $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que l'équation $P(z_0, w) = 0$ admet n racines distinctes w_i est à complémentaire .
2. Au voisinage d'un tel point (z_0, w_i), le théorème des fonctions implicites , garantit l'existence d'une solution holomorphe.

Notons F la fonction algébrique multiforme obtenue par prolongement du germe de départ, d'où un diagramme d'uniformisation :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & & \\ \downarrow^{\pi} & \searrow & \\ U & \rightsquigarrow_F & \mathbb{C} \end{array}$$

dans lequel U est un ouvert de C qui contient au moins l'ensemble S décrit ci-dessus ; U est donc à complémentaire fini dans $\mathbb{C}$. L'application $(\pi, \widetilde{F})$, $[g, b] \rightarrow (b, g(b))$ de F dans $\mathbb{C}^2$ envoie F dans l'ensemble

$$X := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in U \quad et \quad P(z, w) = 0\} :$$

En fait, le théorème des fonctions implicites garantit qu'en tout point (z_0, w_0) tel que $\frac{\partial P}{\partial W}(z_0, w_0) \neq 0$, il y a une solution locale $w(z)$. Mais, pour que celle-ci définisse un point de F , il faut de plus que cette solution locale s'obtienne par prolongement analytique du germe de départ. On peut se convaincre que cela découlerait de la connexité par arcs de X : nous laisserons le lecteur construire.

Remarque 2.8.1. *Cette connexité est directement liée à l'hypothèse d'irréductibilité de P. Supposons en effet que $P = P_1P_2$, et soient X_1 et X_2 leurs lieux d'annulation dans $\mathbb{C}^2$. On a donc $X = X_1 \cup X_2$. Si le germe de départ annule P_1, il en est de même de tous ses prolongements analytiques, et $(\pi, \widetilde{F})$ envoie donc F dans X_1. En général, X_1 et X_2 sont distincts, et l'on voit que toutes les solutions locales ne correspondent pas à un point de F .*

Exemple "hyperelliptique"

Soit $P(Z,W) := W^2 -^Q (Z)$, $\mathbb{Q}(Z) := (Z - a_1)...(Z - a_n)$, où les $a_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts. En tout point a_0 de $S := \mathbb{C} \setminus \{a_1, ..., a_n\}$, l'équation $P(a_0, w) = 0$ admet deux racines distinctes $\pm\sqrt{Q(a_0)}$ et il y a donc deux branches distinctes de la fonction algébrique multiforme $\sqrt{Q(z)}$. On peut même préciser des domaines d'éléments fonctionnels représentant ces deux branches. Soit $r := \min_{1 \leq i \leq n}(\mid a_0 - a_i \mid)$. Alors Q ne s'annule pas sur $\Omega := D^0(a_0, r)$, d'où l'existence de deux déterminations de $\sqrt{Q(z)}$ sur Ω.

Chapitre 3

Prolongement Analytique : Etudes globales de fonctions

De nombreuses fonctions holomorphes importantes s'étudient sans problème localement à l'aide de l'analyse complexe élémentaire, mais ont un comportement global mystérieux et intéressant que l'on peut comprendre géométriquement.

3.1 Racine carrée

On connait bien la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$: elle est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

De plus, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. Sa définition est sans mystère en tant que réciproque de la fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, qui est bijective.

Pour définir la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même, on serait tenté de poser $\sqrt{re^{i\theta}} := \sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Malheureusement, cela donne lieu à des paradoxes :

$$\begin{aligned} \sqrt{1} &= \sqrt{1.e^{i0}} = \sqrt{1}e^{i0/2} = 1 \\ \sqrt{1} &= \sqrt{1.e^{i(2\pi)}} = \sqrt{1}e^{i(2\pi)/2} = -1 \end{aligned}$$

Pour éviter les contradictions, il faut donc restreindre l'argument θ à un "domaine fondamental" : par exemple, $[0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$. Pour chacun de ces deux choix (que l'on appelle déterminations de la racine carrée), on a $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; mais le calcul de $\sqrt{-i}$ donne $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ pour la première détermination, $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ pour la deuxième.

Autre inconvénient : dans l'un et l'autre cas, la fonction obtenue n'est pas continue sur $\mathbb{C}$. Par exemple, dans le premier cas, $\lim_{z\to 1} \sqrt{z}$ vaut 1 ou -1 selon que z tend vers 1 par dessus (argument $\theta \to 0_+$) ou par dessous (argument $\theta \to 2\pi-$) ; dans le second cas, c'est le calcul de $\lim_{z\to -1} \sqrt{z}$ qui donne un résultat ambigu.

Théorème 3.1.1. *(i) Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}$, $(f(z))^2 = z$ et qui soit continue. (ii) Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $z \in \mathbb{C}$, $(f(z))^2 = z$ et qui vérifie de plus $a, b \in \mathbb{C}$, $f(ab) = f(a)f(b)$.*

Preuve . (i) Posons $\varepsilon(t) := f(e^{it})e^{-it/2}$ pour $t \in \mathbb{R}$. La fonction ε est continue et a pour carré la constante 1. Elle est donc constante de valeur $\alpha = \pm 1$, et $f(e^{it}) = \alpha e^{it/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Mézalor $f(1) = \alpha$ (prendre $t = 0$) et $f(1) = -\alpha$ (prendre $t = 2\pi$), contradiction.
(ii) On a bien entendu $f(1) = \pm 1 \neq 0$. La deuxième contrainte entraine $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$, donc $f(1) = 1$. Cela implique alors $f(-1)^2 = f((-1)^2) = 1$, ce qui contredit la première contrainte. ∎

3.1.1 Etude locale

On va chercher à définir $\sqrt{z}$ sur un "petit" ouvert U, par exemple un disque. On posera :

$$F(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \ \ est \ \ continue \ \ et \ \ \forall z \in U, (f(z))^2 = z\}.$$

(On verra qu'en fait toutes les solutions continues sont holomorphes.) Si $0 \in U$, c'est impossible (autrement dit, $F(U) = \emptyset$) par le même argument que dans le théorème : fixer $r > 0$ tel que le disque ouvert $D(0, r)$ soit inclus dans U et considérer la fonction $t \mapsto f(re^{it})e^{-it/2}$. Soit donc $U \subset \mathbb{C}^*$. On le suppose non vide (sinon, aucun interêt !) et connexe .

Remarque 3.1.1. *L'ensemble $F(U)$ peut être vide même si $0 \notin U$: il suffit par exemple que U contienne un cercle $\partial D(0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid\mid z \mid= r\}$, $r > 0$ (même argument que précédemment). On peut démontrer que, pour que $F(U)$ soit vide, il faut, et il suffit, que U contienne l'image d'un lacet λ tel que l'indice $I(0, \lambda)$ de 0 par rapport à λ soit non nul. Cela découlera, au choix, de l'étude qui suit ; ou bien de la propriété analogue de la fonction logarithme .*

Développement en série entière au voisinage de 1 :
Prenons $z_0 = 1$, d'où $w_0 = \pm 1$; et choisissons $w_0 = 1$. On ne prescrit pas l'ouvert U, et l'on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} f(1) & = 1 \\ (f(z))^2 & = z \end{cases}$$

Développement en série entière On cherche d'abord f sous forme de série entière au voisinage de 1 :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-1)^n \Rightarrow f(1+u) = g(u) = \sum_{n \geq 0} a_n u^n$$

Les conditions sur g s'écrivent :

$$\begin{cases} g(0) & = 1 \\ (g(u))^2 & = 1 + u \end{cases}$$

Parce que cela rend les calculs beaucoup plus faciles, on remplace ce système algébrique par le système différentiel équivalent :

$$\begin{cases} g(0) & = 1 \\ 2(1 + u)g' & = g \end{cases}$$

(les deux systèmes sont en effet équivalents : ici encore, la connexité de U intervient.) Les conditions correspondantes sur les coefficients s'écrivent :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ 2(na_n + (n + 1)a_{n+1}) & = a_n \end{cases}$$

On en déduit que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-n+1/2}{n+1}$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{-k + 1/2}{k + 1} = \binom{1/2}{n}$$

et enfin :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (z - 1)^n \tag{3.1}$$

Le rayon de convergence de cette série est 1 (car $a_{n+1}/a_n \to 1$) et l'on a donc obtenu une solution holomorphe sur le disque ouvert $U = D^0(1, 1)$. On ne pouvait pas espérer un plus grand rayon de convergence puisque, pour $r > 1$, le disque ouvert $D^0(1, r)$ contient 0.

Calcul avec le module et l'argument. La fonction définie par $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ pour $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$ est une détermination de la racine carrée, continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: sa restriction à $D^0(1, 1)$ (qui est bien inclus dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$) est donc égale à la série trouvée précédemment, ou bien à son opposée, en vertu de ce qui a été dit sur $F(U)$. En comparant leurs valeurs en $z = 1$, on voit qu'il y a égalité.

Définition 3.1.1. *L'unique détermination de la racine carrée continue sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *et telle que* $1 \mapsto 1$ *est appelée détermination principale.*

Développement en série entière au voisinage d'un autre point de $\mathbb{C}^*$ Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et soit w_0 tel que $w_0^2 = z_0$. On ramène facilement le système au voisinage de z_0 : $f(z_0) = w_0$, $(f(z))^2 = z$, au système au voisinage de 1 en posant $f(z) = w_0\phi(z/z_0)$: le système ci-dessus est alors équivalent à $\phi(1) = 1$, $(\phi(z))^2 = z$, que l'on a déjà résolu.

On en déduit la solution holomorphe sur $D^0(z_0; \mid z_0 \mid)$:

$$f(z) = \omega_0 \sum_{n\geq 0} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} (z/z_0 - 1)^n.$$

Calcul avec le module et l'argument :
Pour tout choix de θ_0 tel que $D^0(z_0, \mid z_0 \mid) \subset V := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- e^{i\theta_0}$, la fonction définie par $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ pour $r > 0$ et $\theta_0 - \pi < \theta < \theta_0 + \pi$ est une détermination de la racine carrée continue sur V dont la restriction à $D^0(z_0, \mid z_0 \mid)$ admet le développement en série entière ci-dessus ou son opposé.

3.1.2 Etude globale

Puisque l'on sait définir localement des déterminations continues (et même holomorphes) de la racine carrée, on peut tenter d'en construire globalement en "recollant" les petits morceaux locaux. Mais nous savons d'avance que c'est impossible . Pour comprendre pourquoi, on va propager les informations locales et voir à quel moment on ne peut plus. Il s'agit donc au fond de la question du prolongement analytique.

On va partir du point $1 \in \mathbb{C}$ et tourner autour de 0 le long du cercle unité $\partial D(0,1)$, parcouru dans le sens positif. Le cercle unité est recouvert par les disques ouverts $U_k := D(e^{i\pi k/2}, 1)$, $k = 0, 1, 2, 3$ (bien entendu, $U_{k+4} = U_k$) ; noter que $U_k \subset \mathbb{C}^*$.
On note f_0 la détermination principale de la racine carrée sur le disque ouvert $U_0 = D^0(1,1)$ i.e. la restriction de cette détermination à U_0, i.e. la fonction définie par la série entière (3.1).
Pour prolonger au disque $U_1 = D^0(i,1)$, on commence par restreindre f_0 à l'ouvert $U_{01} := U_0 \cap U_1$. On note $f_{01} \in F(U_{01})$ la fonction obtenue. Comme U_{01} est non vide (il contient par exemple $\frac{1+i}{2}$), convexe (car intersection de deux convexes) donc connexe, il y a exactement deux déterminations $\pm f_{01}$ de la racine carrée sur U_{01}.
On a déjà vu qu'il y a exactement deux déterminations de la racine carrée sur U_1 : puisque les racines carrées de i sont $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, ce sont les fonctions $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} f_0(z/i)$. L'une de ces deux fonctions admet pour restriction à U_{01} la fonction f_{01} ci-dessus. Notons $f_1 \in F(U_1)$ cette fonction, qui a donc été obtenue par restriction suivie de prolongement.

L'argument se synthétise ainsi : les applications naturelles de restriction $F(U_0) \to F(U_{01})$ et $F(U_1) \to F(U_{01})$ sont bijectives ; en composant l'une avec la réciproque de l'autre, on définit une bijection $F(U_0) \to F(U_1)$; l'image de f_0 par cette bijection est f_1. On continue la promenade le long de $U_2 = D^0(-1,1), U_3 = D^0(-i,1)$

pour finir en $U_4 = D^0(1,1) = U_0$ en répétant le mécanisme de restriction suivie de prolongement, i.e. en composant les bijections

$$F(U_0) \to F(U_1) \to F(U_2) \to F(U_3) \to F(U_4), \quad f_0 \mapsto f_1 \mapsto f_2 \mapsto f_3 \mapsto f_4 :$$

Noter que tous nos choix de restriction-prolongement sont totalement contraints par la condition de continuité. A la fin, on a nécessairement $f_4 = \pm f_0$ (deux déterminations continues de la racine carrée sur le même disque). Plus ou moins ?

Calculs explicites :
Ils se font le plus aisément sous la forme trigonométrique. On a a priori $f_k(re^{i\theta}) = \varepsilon_k \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ pour $r > 0$ et $\theta \in]k\pi/2 - \pi, k\pi/2 + \pi[$, où $\varepsilon_k = \pm 1$ est une certaine constante à déterminer de proche en proche. Par définition de f_0, on a $\varepsilon_0 = +1$. Puis :

1. En comparant f_0 et f_1 en $e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, on trouve $\varepsilon_1 = 1$.
2. En comparant f_1 et f_2 en $e^{3i\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, on trouve $\varepsilon_2 = 1$.
3. En comparant f_2 et f_3 en $e^{5i\pi/4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$,on trouve $\varepsilon_3 = 1$.
4. En comparant f_3 et f_4 en $e^{7i\pi/4}$,on trouve $\varepsilon_4 = 1$.

Finalement, on voit que f_4 est la fonction sur$D^0(1,1)$ définie par $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ pour $r > 0$ et $\theta \in]\pi; 3\pi[$. Ce n'est pas la même détermination qu'au départ : $f_4 = -f_0$, comme on le vérifie en $z_0 = 1 = e^{i.0} = e^{i.2\pi}$.

Quelle est la règle générale ?
Comment prolonge-t-on une détermination locale de la racine carrée ? Autrement dit, étant donnés $a \in \mathbb{C}^*$ et une fonction $f(z)$ de carré z continue au voisinage de a, comment "propage-t-on" l'information jusqu'en un point b en lequel f n'est pas définie au départ ? La réponse est le prolongement analytique le long d'un chemin. Les données de départ en sont : le point a, la fonction f , le point b et un chemin dans C^* d'origine a et d'extrémité b, autrement dit, une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. La procédure est la suivante :

1. On recouvre le compact $Im\gamma$ par un nombre fini de disques ouverts $U_i = D^0(z_i; r_i) \subset \mathbb{C}^*$, $z_i = g(t_i), r_i > 0, i = 0, ..., k$, choisis de telle sorte que :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \mapsto z_0 = a, \quad t_k = 1 \mapsto z_k = b; \\ t_0 < t_1 < ... < t_k; \\ \forall i \in \{1, ..., k\}, U_i \cap U_{i-1} \neq \emptyset. \end{cases}$$

2. On définit f_0 comme l'unique élément de $F(U_0)$ qui coïncide avec f au voisinage de a ; il suffit d'ailleurs pour cela d'imposer $f_0(a) = f(a)$ d'après l'étude locale.

3. On appelle $f_1, ..., f_k$ les images successives de f_0 dans $F(U_1), ..., F(U_k)$ par les bijections de "restriction-prolongement" $F(U_{i-1}) \to F(U_i \cap U_{i-1}) \to F(U_i), i = 1, ..., k$.
4. Le résultat du prolongement analytique de f le long de γ est la fonction f_k sur U_k. On a donc en fait défini une bijection $F(U_0) \to F(U_k)$. Il faut noter que les rayons de définition r_0, r_k de f_0, f_k n'ont pas vraiment un sens intrinsèque ; ce qui est réellement en jeu, ce sont des fonctions définies dans "un certain voisinage" (ouvert non vide) non spécifié de a, resp. b. En effet, si deux déterminations de la racine carrée coïncident en un point, elles coïncident sur tout disque centré en ce point où elles sont toutes les deux définies (cela découle encore de l'étude locale). Notre procèdure opère donc en fait sur des germes de fonctions holomorphes .

On peut démontrer que le résultat du prolongement analytique le long d'un chemin ne dépend pas du choix des disques U_i (c'est un cas particulier du théorème de monodromie). On peut cependant se demander si ce résultat dépend du choix du chemin. La réponse est malheureusement oui. En effet, on peut vérifier que, si l'on prolonge la détermination principale f de $a = 1$ à $b = 1$ le long du chemin $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$, le résultat est $-f$ (cf. la promenade) ; alors que si l'on prolonge f de $a = 1$ à $b = 1$ le long du chemin constant $\gamma(t) = 1$, le résultat est f (c'est trivial).

3.2 "Caractères"

Il s'agit des fonctions $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, elles se définissent sans problème (holomorphes sur $\mathbb{C}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, holomorphes sur $\mathbb{C}^*$ et admettant un pôle en 0 si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; mais, dans tous les cas, uniformes). Si $\alpha = p \setminus q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, on trouve des fonctions algébriques qui étendent la fonction $x \mapsto \sqrt[q]{p}$ de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. En général, il s'agit de prolonger la fonction $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ qui est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur R_+^*, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Lemme 3.2.1. *: Soit f un prolongement analytique de la fonction $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ sur un ouvert connexe non vide V de $\mathbb{C}$.*

1. *Si $\alpha = p \setminus q \in \mathbb{Q}$, la fonction f vérifie l'équation algébrique : $\forall z \in V$, $(f(z))^q = z^p$.*
2. *Quel que soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction f vérifie l'équation différentielle :$\forall z \in V$, $zf'(z) = \alpha f(z)$.*

Preuve . : Précisons d'abord ce que nous entendons ici par prolongement analytique : on suppose donnés $a \in \mathbb{R}_+^*$, un disque ouvert non vide U_0 de centre a et une fonction f_0 holomorphe sur U_0 dont la restriction à $U_0 \cap R_+^*$ est la fonction $x \to e^{\alpha \ln x}$. On prolonge analytiquement f_0 le long d'un chemin γ de a à $b \in \mathbb{C}$, et le résultat est la fonction f sur le voisinage V de b. Puisque ce sont les germes de f_0 et f qui nous intéressent, on peut aussi bien supposer que U_0 et V sont des disques ouverts. Nous noterons $U_0, U_1, ..., U_k = V$ les disques ouverts successifs de prolongement et $f_0, f_1, ..., f_k = f$ les prolongements successifs de f_0. Nous noterons $f_{i,i+1}$ la restriction commune de f_i et f_{i+1} à l'ouvert connexe non vide $U_i \cap U_{i+1}$.

(i) Si $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ on a $(f(x))^q - x^p = 0$ sur l'intervalle ouvert non vide $U_0 \cap \mathbb{R}_+^*$ centré en a donc, en vertu du principe de prolongement analytique, sur U_0 (car les zéros de la fonction analytique $(f(z))^q - z^p$ sur l'ouvert connexe U_0 admettent des points d'accumulation). Comme restriction de f_0 à $U_0 \cap U_1$, la fonction $f_{0,1}$ vérifie la même identité. La fonction analytique $(f_1(z))^q - z^p$ sur l'ouvert connexe U_1 admet donc une restriction triviale à $U_0 \cap U_1$, donc elle est triviale sur U_1 en vertu du principe de prolongement analytique. On a donc $(f_1(z))^q = z^p$ identiquement sur U_1. En itérant cet argument (preuve par récurrence), on arrive ainsi jusqu'à $f_k = f$.

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{C}$ on a $xf'(x) = \alpha f(x)$ sur $U_0 \cap R_+^*$ donc, en vertu du principe de prolongement analytique, sur U_0 (car les zéros de la fonction analytique $zf'(z) - \alpha f(z)$ sur l'ouvert connexe U_0 admettent des points d'accumulation). Comme restriction de f_0 à $U_0 \cap U_1$, la fonction $f_{0,1}$ vérifie la même équation différentielle. La fonction analytique $zf_1'(z) - \alpha f_1(z)$ sur l'ouvert connexe U_1 admet donc une restriction triviale à $U_0 \cap U_1$, donc elle est triviale sur U_1 (principe de prolongement analytique), i.e. $zf_1'(z) = \alpha f_1(z)$ identiquement sur U_1. On conclut comme ci-dessus.

■

Le principe sous-jacent aux deux démonstrations se formule ainsi : Les relations algébriques et différentielles sont préservées par un prolongement analytique.

Bien que toute solution de l'équation différentielle $zf'(z) = \alpha f(z)$ ne soit pas un prolongement analytique de la fonction $x \mapsto e^{alnx}$ (ce n'est vrai qu'à un facteur près), il sera commode d'utiliser cette équation différentielle comme critère. On posera donc, pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$:

$$F(U) := \{f \in O(U) \mid zf' - \alpha f = 0 \quad sur \quad U\}$$

(On note $O(U)$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur U.)

Lemme 3.2.2. *:*

(i) *$F(U)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $O(U)$.*

(ii) *Si U est connexe non vide, $dim_C F(U) \leq 1$.*

(iii) *Si U est connexe et $U' \subset U$ est ouvert non vide, alors l'application de restriction $f \mapsto f \mid U', F(U) \to F(U')$ est linéaire et injective.*

Preuve . :

(i) est évident (solutions d'une équation différentielle linéaire homogène).

(ii) Soit $f_0 \in F(U)$ non triviale (s'il en existe) et soit $f \in F(U)$ arbitraire. La dérivée de la fonction méromorphe f/f_0 est nulle :

$$(f/f_0)' = (f'f_0 - ff_0')/f'^0 = (zf'f_0 - fzf_0')/(zf_0^2) = (\alpha ff_0 - f\alpha f_0)/(zf_0^2) = 0$$

Donc, U étant connexe, cette fonction est constante : donc $F(U) = \mathbb{C}f_0$ dans ce cas. (L'autre cas est celui où il n'existe pas de telle f_0, la dimension est alors nulle.)

(iii) La linéarité est évidente, l'injectivité découle directement du principe de prolongement analytique.

■

Remarque 3.2.1. *Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, il existe une solution globale non triviale sur $\mathbb{C}$ (si $\alpha \in N$) ou $\mathbb{C}^*$ (si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$). La reciproque est vraie.*
Soit, en effet ; f une solution de l'equation differentielle $zf' = \alpha f$ sur un voisinage ouvert epointe .$\overline{U}$ de 0 dans $\mathbb{C}$, autrement dit, $\overline{U} := U\backslash\{0\}$, où U est un voisinage ouvert de 0. Si f est non triviale, quitte a restreindre U, on eut supposer que f ne s'annule pas dans $\overline{U}$. Considerons alors un lacet circulaire simple $\lambda(t) := re^{2i\pi t}$,

ou $r > 0$ est assez petit pour que $Im\lambda \subset U$ et donc tel que f ne s'annule pas sur $Im\lambda$. Le théorème de Cauchy garantit alors que le complexe :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_\lambda \frac{\alpha}{z}dz = \alpha$$

est égal au nombre des zéros et des pôles de f (comptés avec leurs multiplicités) dans $D^0(0,r)$, donc à un entier.

Nous supposerons désormais que $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Comme dans le cas de la racine carrée, sans espoir de trouver une solution globale, nous commencerons par une recherche de solutions locales, qui sera suivie d'une étude globale.

3.2.1 Etude locale

Pour trouver une solution non triviale au voisinage de 1, nous considérons le système avec condition initiale :

$$\begin{cases} f(1) & = 1 \\ zf' - \alpha f & = 0 \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires complexes nous garantit l'existence d'une solution holomorphe unique sur tout disque centré en 1 et assez petit . Mais ici, le calcul est très facile à la main. On pose $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-1)^n$ et l'on est ramené aux relations :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ na_n + (n+1)a_{n+1} & = \alpha a_n \end{cases}$$

dont la solution unique est $a_n = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array}\right)$ d'où enfin :

$$\forall z \in D^0(1,1), f_0(z) := \sum_{n\geq 0} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array}\right)(z-1)^n$$

Si $U = D^0(1,1)$, on en conclut que $F(U) = \mathbb{C}f_0$ est de dimension 1. Nous considèrerons la fonction ci-dessus comme détermination principale et nous la noterons z^α. On vérifiera après l'étude similaire du logarithme que $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ pour la détermination principale du logarithme complexe.

Pour tout $z_0 \neq 0$, on vérifie alors immédiatement que la fonction $z \mapsto (z/z_0)^\alpha$ est holomorphe sur $D^0(z_0, \mid z_0 \mid)$ et y satisfait l'équation différentielle, d'où la conclusion :

$$F(D^0(z_0, \mid z_0 \mid)) = \mathbb{C}(z/z_0)^\alpha$$

est de dimension 1. Plus généralement, si $V \subset U := D^0(z_0, \mid z_0 \mid)$ est un ouvert connexe non vide, du fait que $F(U) \to F(V)$ est linéaire injective et que $dim_C F(V) \leq 1 = dim_C F(U)$, on voit que $F(V)$ est de dimension 1 et engendré par la restriction à V de la fonction $(z/z_0)^\alpha$.

3.2.2 Etude globale

Pour prolonger notre détermination principale $f_0 = z^\alpha \in F(U_0)$, $U_0 := D^0(1,1)$, le long d'un chemin γ de $\gamma(0) = 1$ à $\gamma(1) = a \in \mathbb{C}^*$, nous supposerons, par commodité, que γ est de classe $\mathbb{C}^1$ par morceaux, i.e. que γ est continue sur $[0,1]$ et que $[0,1]$ est une réunion finie de segments $[\alpha_i, \beta_i]$ tels que γ soit de classe $\mathbb{C}^1$ sur chaque intervalle ouvert $]\alpha_i; \beta_i[$. (L'intérêt est de pouvoir calculer certaines intégrales.)

Comme précédemment, on sait qu'il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$ de [0,1] et des disques ouverts non vides $U_i = D^0(z_i, r_i)$, $z_i = \gamma(t_i)$, $i = 0, ..., k$, tels que : les U_i recouvrent $Im\gamma$; pour $i = 1, ..., k$, l'ouvert connexe $U_i \cap U_{i-1}$ est non vide.
Les applications de restriction $F(U_{i-1}) \to F(U_{i-1}) \cap F(U_i)$ et $F(U_i) \to F(U_{i-1} \cap F(U_i)$, $i = 1, ..., k$, sont alors bijectives. En effet, chacune est linéaire injective, sa source est de dimension 1 et son image est de dimension au plus 1.
On peut donc définir les applications de prolongement (des isomorphismes) $F(U_{i-1}) \cap F(U_i) \to F(U_i)$ puis les isomorphismes composés $F(U_{i-1}) \to F(U_i)$ puis, par composition de tous ces isomorphismes, l'isomorphisme $F(U_0) \to F(U_k)$ de prolongement analytique le long de γ.
Notons $f_1, ..., f_k$ les prolongements successifs de f_0 sur $U_1, ..., U_k$. Avant de préciser ces calculs, il faut noter que chacune des fonctions f_i ne s'annule en aucun point de U_i. On peut le déduire de l'assertion d'unicité dans le théorème de Cauchy sur les équations différentielles holomorphes.

Théorème 3.2.1. *L'image par prolongement analytique le long d'un lacet γ de base 1 de la fonction z^α est la fonction $e^{2i\pi I(0,\gamma)} z^\alpha$.*

3.3 Logarithme

Il y a plusieurs approches possibles pour définir les logarithmes complexes : prolongement analytique de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+$, réciproque de l'exponentielle complexe (dont la définition par série entière ne pose aucun problème global), primitive de $1/z$ . . .

La condition $\exp \lg z = z$ montre que les déterminations du logarithme seront définies, au pire, à un multiple entier de $2i\pi$ près. Autrement dit, si f et g sont deux fonctions continues sur un ouvert connexe telles que $\exp f(z) = \exp g(z) = z$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g(z) = f(z) + 2i\pi k$ sur U. (On peut aussi le voir en définissant les logarithmes par des intégrales le long de chemins, (C_f).

Impossibilité globale :
Dans tous les cas, il n'est pas question de définir le logarithme au voisinage (même épointé) de 0. L'impossibilité de prolonger le logarithme réel en une fonction continue sur $\mathbb{C}^*$ découlera de l'étude globale ci-dessous. L'impossibilité d'une primitive uniforme f de $1/z$ sur $\mathbb{C}^*$ découle du théorème de Cauchy ; notant λ le lacet $t \mapsto e^{2i\pi t}$, on aurait en effet :

$$\int_\lambda f'(z)dz = \begin{cases} f(1) - f(1) & = 0 \\ \int_\lambda \frac{dz}{z} & = 2i\pi \end{cases}$$

L'impossibilité d'une fonction f continue telle que $\exp(f(z)) = z$ sur $\mathbb{C}^*$ car la fonction $\exp(f(z)/2)$ serait une détermination globale de la racine carrée. On peut aussi raisonner directement comme suit. La fonction $k(t) := \frac{f(e^{it})-it}{2i\pi}$ serait continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans Z, donc constante ; mais le calcul en $t = 0$ et en $t = 2\pi$ conduirait alors à une contradiction.

3.3.1 Etude locale

On spécifiera le(s) logarithme(s) complexe(s) comme primitive(s) de $1/z$. Au voisinage de 1, on ajoute la condition initiale $f(1) = 0$. Posant $z = 1 + u$, on peut intégrer le développement en série de $1 + u$ et obtenir :

$$\lg z = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \mid z - 1 \mid < 1 \tag{3.2}$$

C'est la détermination principale du logarithme sur $D^0(1, 1)$. Au voisinage d'un point arbitraire $z_0 \in \mathbb{C}^*$, on impose la condition initiale $f(z_0) = w_0$, où $w_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $\exp(w_0) = z_0$. Une solution du problème est alors donnée par la série :

$$f(z) = \omega_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z/z_0 - 1)^n. \tag{3.3}$$

On obtient ainsi une détermination holomorphe du logarithme sur $D^0(z_0, |z_0|)$.

Calcul avec le module et l'argument :
On écrit $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ (on a donc choisi un argument de z_0) et $w_0 = \ln r_0 + i\theta_0$. Une détermination du logarithme compatible avec ces conditions initiales est :

$$re^{i\theta} \mapsto \ln r + i\theta, \quad r > 0, \ \ \theta \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[\tag{3.4}$$

Cette fonction est continue sur $C \setminus \mathbb{R} - e^{i\theta_0}$. Sa restriction à $D^0(z_0, \mid z_0 \mid)$ est la fonction définie par la série (3.3). En particulier, pour $r_0 = 1$ et $q_0 = 0$, on obtient la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, dont la restriction à $D^0(1, 1)$ coïncide avec la fonction définie par la série (3.2).

3.3.2 Etude globale

On reprend la promenade telle que décrite pour la racine carrée. Si f_0 désigne la détermination principale du logarithme sur $D^0(1, 1)$ et f_1, f_2, f_3, f_4 ses prolongements successifs, on sait d'avance que chaque f_k est égal à la fonction (3.4) évaluée en $z_0 i^k$, à une constante près de $2i\pi\mathbb{Z}$. Le calcul de cette constante se fait en comparant deux fonctions successives sur leur domaine commun.

3.4 La fonction $\sqrt{1-z^2}$

Au départ, c'est une fonction définie continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathbb{C}^*$ sur $]-1,1[$. Elle y vérifie $w^2+z^2=1$, où $w=f(z)$; cette relation sera donc encore satisfaite par tous ses prolongements analytiques. Nous recherchons donc les "déterminations" de la fonction $\sqrt{1-z^2}$. On sait a priori que, sur tout ouvert connexe non vide, il y aura 0 ou deux telles déterminations.

3.4.1 Etude locale

Posons $P(z,w):=w^2+z^2-1$. Le théorème des fonctions implicites complexe nous garantit, pour tout $(z_0,w_0)\in\mathbb{C}^2$ tel que $P(z_0,w_0)=0$ et $\frac{\partial P}{\partial W}(z_0,w_0)\neq 0$, l'existence d'une solution locale du système avec condition initiale :

$$\begin{cases} f(z_0) & = w_0 \\ P(z,f(z)) & = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $z_0\neq\pm 1$ et si w_0 est l'une des deux racines carrées de $1-z_0^2$, il existe, dans un voisinage ouvert convenable de z_0, une unique détermination de la fonction $\sqrt{1-z^2}$ dont la valeur en z_0 soit w_0. (Naturellement, sur le même voisinage, l'unique autre détermination est l'opposée de la première.) Pratiquement, on a deux manières de calculer :

1. La composée de $z\mapsto 1-z^2$ et d'une détermination adéquate de la fonction racine carrée est donnée par la série $\sum_{n\geq 0}\begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix}\left(\frac{1-z^2}{1-z_0^2}\right)^n$. Cette fonction est définie sur l'image réciproque par $z\mapsto 1-z^2$ du disque ouvert $D^0(z_0,\mid z_0\mid)$, autrement dit sur l'ouvert défini par l'inéquation $\mid z^2-z^2\mid<\mid 1-z_0^2\mid$.
2. On choisit une détermination de $\sqrt{1+z}$ et une détermination de $\sqrt{1-z}$, et on les multiplie. Les quatre couples de choix possibles ne donnent quand même que deux produits !

3.4.2 Etude globale

Pour étudier l'ambiguïté introduite par la "monodromie", on part d'un point $z_0=\pm 1$ et d'une détermination de $\sqrt{1-z^2}$ sur un disque ouvert de centre z_0, que l'on prolonge analytiquement le long d'un lacet λ de base z_0 dans $\mathbb{C}\setminus\{+1,-1\}$. Il y a (au moins) deux manières de calculer l'effet du prolongement analytique :

1. La fonction $t\mapsto 1-\lambda^2(t)$ est un lacet μ de base $1-z_0^2$ dans $\mathbb{C}$. Soit $k:=I(0,\mu)$: le prolongement analytique le long de λ multiplie $\sqrt{1-z^2}$ par $(-1)^k$.

2. Chaque facteur $\sqrt{1+z}$, $\sqrt{1-z}$, n'est affecté que par les tours autour de -1, resp. de $+1$. Si $k' := I(1,\lambda)$ et $k'' := I(-1,\lambda)$, le prolongement analytique le long de λ multiplie $\sqrt{1-z^2}$ par $(-1)^{k'+k''}$.

Interprétation géométrique :
On peut décrire géométriquement les conclusions de notre étude globale. Si l'on évite les points de ramification $z = \pm 1$, le "cercle" d'équation $z^2+w^2 = 1$ peut être localement considéré comme le graphe d'une fonction $\sqrt{1-z^2}$ et, pour tout z, il y a dans un petit voisinage connexe U de z, deux graphes disjoints qui composent la partie du cercle formée des points tels que $z \in U$. Mais, les variables z, w étant complexes, la courbe algébrique complexe $z^2+w^2 = 1$ ne se comporte pas comme la courbe algébrique réelle $x^2+y^2 = 1$, que l'on coupe en deux composantes connexes en enlevant les deux points $(\pm 1, 0)$. Le cercle complexe privé de ces deux points reste connexe. Il n'y a donc aucun espoir de le décrire globalement comme réunion de deux graphes disjoints. En fait, une courbe algébrique complexe est, en tant que variété différentielle, une surface : enlever un nombre fini de points ne peut la déconnecter. C'est ici que la topologie permet de comprendre le comportement étrange des fonctions multiformes.

3.5 Points à l'infini, points de ramification

Les points de ramification d'une fonction multiforme sont ceux autour desquels il y a "de la monodromie" : le prolongement analytique le long d'un lacet entourant un tel point modifie la détermination. Par ailleurs, l'étude globale d'une fonction (même uniforme) doit prendre en compte ses "branches infinies" ; par exemple un développement asymptotique à linfini peut souvent s'exprimer comme un développement en série en $1/z$.

Riemann a découvert que le comportement à l'infini et aux points de ramification des fonctions multiformes algébriques était susceptible d'une description géométrique . Nous n'examinerons donc ici que deux des quatre exemples précédents .

3.5.1 La fonction $\sqrt{z}$

Quelle que soit la détermination de $\sqrt{z}$ sur un ouvert U, on a $\mid \sqrt{z} \mid = \sqrt{\mid z \mid}$, donc, si 0 est adhérent à U, $\lim_{z\to 0} \sqrt{z} = 0$, et l'on peut prolonger cette détermination par continuité en 0.

De la même manière, $\lim_{z\to\infty} \sqrt{z} = \infty$. Ici il y a cependant un problème : doit-on prendre en compte les arguments, i.e. la direction selon laquelle z tend vers l'infini ? Suivant Riemann, on prendra le point de vue de la géométrie projective complexe, selon lequel on compactifie la droite complexe C en lui adjoignant un point à l'infini, noté ∞. L'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ainsi obtenu est appelé droite projective complexe et noté $P^1(\mathbb{C})$; mais on l'appelle également sphère de Riemann et on le note alors S.

Ici, on s'en tient à une règle simple : le point à l'infini $z = \infty$ est celui en lequel la coordonnée $Z = 1/z$ s'annule. Comme l'image $w = \sqrt{z}$ devient infinie en $z = \infty$, on va également utiliser la coordonnée $W = 1/w$. Il est clair que $w^2 = z \Leftrightarrow W^2 = Z$, donc que W est une détermination de $\sqrt{Z}$. De l'étude déjà faite, on peut alors conclure :

1. Il n'y a aucune détermination de $\sqrt{z}$ continue dans un voisinage du point à l'infini.
2. Une détermination continue de $\sqrt{z}$ dans un ouvert non borné (i.e. auquel ∞ est adhérent) admet un prolongement continu à l'infini (de valeur $\sqrt{\infty} := \infty$).

3.5.2 La fonction $\sqrt{1 - z^2}$

Pour $z \to \pm 1$, on voit comme ci-dessus que $\sqrt{1 - z^2} \to 0$ et l'on peut donc prolonger en 0 par continuité toute détermination de $\sqrt{1 - z^2}$ sur un ouvert auquel 0 est adhérent.

De l'égalité $\mid \sqrt{1-z^2} \mid = \mid z \mid \sqrt{\mid 1-z^{-2} \mid}$, on déduit que $\lim_{z\to\infty} \sqrt{1-z^2} = \infty$. On pose donc $Z = 1/z$, $W = 1/w$ et l'on a :

$$z^2 + w^2 = 1 \Leftrightarrow Z^2 + W^2 = Z^2 W^2 \Leftrightarrow W^2 = \frac{Z^2}{Z^2 - 1},$$

la dernière égalité ayant un sens au voisinage de $Z = 0$ (point à l'infini). On voit alors que, pour $\mid Z \mid < 1$, nous avons deux déterminations opposées :

$$W = \pm i Z \sqrt{1 - Z^2} = \pm i Z (1 - Z^2/2 + ...),$$

où les coefficients peuvent être calculés par la formule du binôme généralisé . Puisque chacune de ces deux déterminations est holomorphe uniforme sur l'ouvert connexe $\mid Z \mid < 1$, qui est un voisinage de ∞, on en déduit qu'il n'y a pas de monodromie autour de ∞ : le point à l'infini n'est pas un point de ramification, les deux branches sont séparées et ne se permutent pas.

3.6 Une fonction algébrique qui n'est pas définie par une formule

Considérons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'équation d'inconnue w :

$$P(z, w) := w^3 - 3w + 2z = 0.$$

Quelles fonctions continues $w(z)$ en sont solution ? Il s'agit encore de décrire une courbe algébrique $P(z, w) = 0$ comme un graphe, localement ou globalement.

3.6.1 Etude locale

On invoque à nouveau le théorème des fonctions implicites Comme $\partial P/\partial w = 3(w^2 - 1)$, les conditions initiales (z_0, w_0) sont celles telles que $w_0 = \pm 1$, ce qui correspond aux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. En tout autre point, il y a un disque U centré en z_0 et trois fonctions holomorphes $w_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, telles que, pour tout $z \in U$:

1. les $w_i(z)$ sont deux à deux distincts ;
2. $P(z, w) = 0 \Leftrightarrow w \in \{w_1(z), w_2(z), w_3(z)\}$.

Il y a donc sur U trois déterminations distinctes de $w(z)$. On pourrait les calculer explicitement à l'aide des formules de Cardan mais cela ne sert pas à grand chose pour les étudier en tant que fonctions ; de plus, dans le cas général, il n'y a aucun analogue de ces formules

Lorsque $z_0 = 1$, l'équation s'écrit $(w+2)(w-1)^2 = 0$ et l'on peut définir une détermination continue $w(z)$ telle que $w(1) = -2$: la valeur $z = 1$ est un point de ramification pour certaines déterminations (voir plus loin) mais pas pour celle-là. Pour étudier cette détermination au voisinage de $z = 1$, le plus simple est de poser $z = 1 + u$, $w = -2 + v$, d'où l'équation $P(1+u, -2+v) = v(v-3)^2 + 2u = 0$. Un peu d'analyse complexe élémentaire garantit l'existence d'une unique solution série entière $v(u)$ telle que $v(0) = 0$ et le calcul usuel sur les développements limités permet de calculer les premiers termes :

$$v = -\frac{2}{9}u + \frac{4}{243}u^2 + \ldots$$

(Il suffit en fait d'itérer l'équation $v = \frac{-2u}{9}(1 - v/3)^2$).

3.6.2 Etude globale

La question est : que se passe-t-il lorsque l'on tourne autour de l'un des points de ramification ? Tout lacet de $\mathbb{C} \setminus \{+1, -1\}$, mettons basé en 0, est homotope à une composition de lacets dont chacun tourne seulement autour de $+1$ ou seulement autour de -1.

Nous allons donc étudier le cas d'un tour positif autour de $+1$ (le cas de -1 s'en déduisant facilement par symétrie centrale). De plus, toujours pour des raisons topologiques , on peut considérer le prolongement analytique le long d'un cercle centré en 1 et de petit rayon.

On pose donc $z = 1+u$, où u a vocation a tourner sur un petit cercle de centre 0 ; et $w = 1 + v$, où v est donc une petite solution de l'équation :

$$P(1+u, 1+v) = v^2(v+3) + 2u = 0.$$

On voit alors que, pour u proche de 0 :

$$v \sim i\sqrt{2}\sqrt{u}$$

où $\sqrt{u}$ est une détermination de la racine carrée. On ne peut donc pas définir w(z) de manière continue près de $z = +1$, avec $w(1) = 1$. On doit donc introduire de petits ouverts connexes auquel adhère 1 : par exemple $D^0(1,1) \setminus \mathbb{R} - e^{i\theta_0}$ (disque fendu). Sur un tel ouvert, il y a deux déterminations $w_1(z)$ et $w_2(z)$ qui tendent vers 1 quand $z \to 1$, et elles s'échangent par prolongement analytique le long d'un petit lacet autour de 1.

Points à l'infini :
Pour toute détermination de $w(z)$ sur un ouvert U non borné, il est clair que $w(z) \to \infty$ lorsque $z \to \infty$ (car si w est borné, $z = (3w - w^3)/2$ l'est aussi). Pour étudier l'allure de la courbe à l'infini, on pose donc $Z := 1/z$ et $W := 1/w$, d'où l'équation : $Z - 3W^2Z + 2W^3 = 0$, que l'on doit étudier au voisinage de $Z = 0$. Pour $Z = 0$, l'équation admet une racine triple $W = 0$. L'étude analytique locale montre que $W \sim \alpha\sqrt[3]{Z/2}$, où $\alpha^3 = 1$. Il n'y a donc aucune détermination continue au voisinage du point à l'infini, et les trois déterminations distinctes qui existent dans un voisinage non borné s'échangent par prolongement analytique.

3.7 Conclusion

D'abord, nous avons un phénomène : lorsque l'on prolonge analytiquement certaines fonctions aussi loin que possible dans le plan complexe, elles présentent "de la monodromie", c'est-à-dire des modifications qui sont fonction de la classe d'homotopie des chemins choisis pour prolonger. Il y a d'ailleurs un paradoxe à utiliser le mot "monodromie", avec son préfixe mono (unique) pour décrire le l'apparence multiforme de ces fonctions. En fait, le théorème de monodromie est bien un théorème d'unicité (du résultat du prolongement analytique, la classe d'homotopie du chemin - ou dromos - étant fixée) ; et l'on a gardé ce terme pour parler du comportement de telles fonctions lorsque l'on change de classe d'homotopie.

Pour comprendre le phénomène de monodromie et en prédire les conséquences, nous avons ensuite la méthode léguée par Riemann : géométriser la situation. On dit que le véritable lieu où vit une fonction algébrique multiforme (sa niche écologique) n'est pas le plan complexe, mais une certaine surface "étalée" au dessus de $\mathbb{C}$ et dont la topologie et la géométrie jouent un rôle essentiel.

Chapitre 4

Surface de Riemann et Théoreme de Monodromie

4.1 Continuité analytique

Ce chapitre traite la question de savoir quand ce processus d'extension décrit vaguement (peut être réalisée), et en particulier, ce sens précis qui peut être donnée à l'extension de l'ensemble U autant que possible.

On peut espérer que, compte tenu de U et f :U→ C holomorphe, alors il y aurait un U maximal unique aux quel f s'étend holomorphiquement. Cela s'avère ne pas être le cas. Cependant, il y'a une théorie complète sur ces questions, cette théorie est l'objet du présent chapitre.

Définition 4.1.1. *la fonction de l'élément est une paire ordonnée* (f, U) *où* U *est un disque* $D(P, r)$ *et* f *une fonction holomorphe définie sur* U.

Définition 4.1.2. *Soit* (f, U) *et* (g, V) *deux éléments. On dit que* (g, V) *est un prolongement analytique directe de* (f, U) *si* $U \cap V \neq \varnothing$ *et* $f \equiv g$ *sur* $U \cap V$. *Evidemment,* (g, V) *est un prolongement analytique directe de* (f, U) *si et seulement si* (f, U) *est un prolongement analytique directe de* (g, V).

Si $(f_1, U_1), ..., (f_k, U_k)$ sont des fonctions éléments et si chaque (f_j, U_j) est un prolongement analytique directe de (f_{j-1}, U_{j-1}), $j = 2, ..., k$, alors on dit que (f_k, U_k) est un prolongement analytique directe de (f_1, U_1).

Evidemment, (f_k, U_k) est un prolongement analytique directe de (f_1, U_1) si et seulement si (f_1, U_1) est un prolongement analytique directe de (f_k, U_k). Aussi, si (f_k, U_k) est un prolongement analytique directe de (f_1, U_1) et (f_{k+l}, U_{k+l}) est un prolongement analytique de (f_k, U_k) à travers $(f_k, U_k), ..., (f_{k+l}, U_{k+l})$, puis enfilant les deux chaînes $(f_1, U_1), ..., (f_{k+l}, U_{k+l})$ on trouve que (f_{k+l}, U_{k+l}) est un prolongement analytique directe de (f_1, U_1). Evidemment, (f, U) est un prolongement analytique directe de lui même.

Donc, on obtient une relation d'équivalence des fonctions éléments. La classe d'équivalence induit par cette relation est appelée fonction anlytique globale. Les fonctions Globales analytiques ne sont pas encore des fonctions au sens habituel et ils ne sont pas analytique dans tous les sens que nous avons défini pour l'instant.

Notons que l'élément initiale $(f, U) = (f_1, U_1)$ détermine uniquement la fonction analytique globale, ou la classe d'équivalence qui le contient. Mais une fonction analytique globale peut comprendre plus d'un élément de la forme (f, U) pour un U fixé. En effet ; une fonction analytique globale peut avoir plus d'une valeur en un point de C.

Dans certaines situations, il est commode de penser à un élément de fonction en tant que la convergence de la série de puissance. Ensuite, le rôle du disque ouvert U est vu comme le domaine de convergence de la série de puissance.

De ce point de vue, deux fonctions éléments (f_1, U) et (f_1, V) au point P (tel que U et V sont des disques centrés en P) devrait être considéré comme égales $f_1 \equiv f_2$ sur $U \cap V$.

comme nos exemples l'ont déjà indiqué, la question de non ambiguité de prolongement analytique est liée à des questions de topologie plane. Ceux-ci, à leur tour, sont gérées par le concept de déformation homotopique-continu des courbes. Donc, dans la pratique, il est utile de penser au prolongement analytique le long d'une courbe. c'est le sujet de la prochaine section.

4.2 Continuité analytique le long d'une courbe

Ainsi, nous voyons que la continuité analytique d'une fonction élément donnée le long d'une courbe donnée est essentiellement unique, si elle existe. A partir de là, nous allons considérer deux prolongement analytique (f_t, U) et $(\widetilde{f}, \widetilde{U})$ égaux ou équivalents si $f_t \equiv \widetilde{f}$ sur $U \cap \widetilde{U}$. Avec cette convention terminologique la proposition dit exactement que ce prolongement analytique d'une fonction élément donnée le long d'une courbe est unique.

La méthode la plus élémentaire pour tenter le prolongement analytique le long d'une courbe γ serait de commencer avec une fonction élément (f, U) en choisissant un point de γ qui est, près du bord de U, nous pouvons alors calculer le développement en série de f sur ce point. Nous espérons que la série de puissance converge sur un disque de rayon plus grand que la distance du point au bord du premier disque. cela donnerait lieu à un second disque, et une deuxième fonction élément dans notre chaîne. on peut espérer poursuivre ce processus.

la procédure décrite dans le dernier paragraphe très efficace pour la fonction élément (f, U) tel que $f(z) = \sqrt{z}$ et $U = D(1, 1/2)$ et pour toute courbe γ, commençant à $1 + i0$ et qui ne passe pas par le point 0. Si la courbe ce termine à 0, alors nous constatons que les rayons de convergence de notre série de puissance était toujours assez faible pour que la chaîne de disque n'englouti jamais 0. En bref, il ya un obstacle à la poursuite analytique à 0.

Si U est un ouvert connexe de C et f est une des fonctions holomorphes sur U, puis par un prolongement analytique de f, nous entendons une continuité analytique d'une fonction élément (f, V) où $V \subset U$.

Dans toute la suite, Ω désigne un domaine (connexe) de $\mathbb{C}$, f un germe de fonction holomorphe en un point $x_0 \in \Omega, \gamma : [0, 1] \to \Omega$ un chemin (continu ou différentiable) issu de $\gamma(0) = x_0$ et $x_1 := \gamma(1)$ son extrémité.

Définition 4.2.1. *On dit qu'une suite de disques $D_0, D_1, ..., D_n \subset \Omega$ recouvre γ si, pour un découpage convenable $0 = t_0 < t_1 < \; < t_n < t_{n+1} = 1$ de l'intervalle, D_k contient $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ pour $k = 0, ..., n$. On dit que f admet un prolongement analytique le long de γ s'il existe une suite de disque $D_0, D_1, ..., D_n \subset \Omega$ recouvrant γ et des fonctions holomorphes $f_k : D_k \to \mathbb{C}$ telles que $f_0 \equiv f$ au voisinage de x_0 et $f_k \equiv f_{k-1}$ sur $D_{k-1} \cap D_k$ pour tout $k = 1, ..., n$. Le germe de fonction défini par f_n en $x_1 := \gamma(1)$ sera noté f_γ et appelé détermination de f au dessus de x_1.*

comme montre la figure ci-dessous

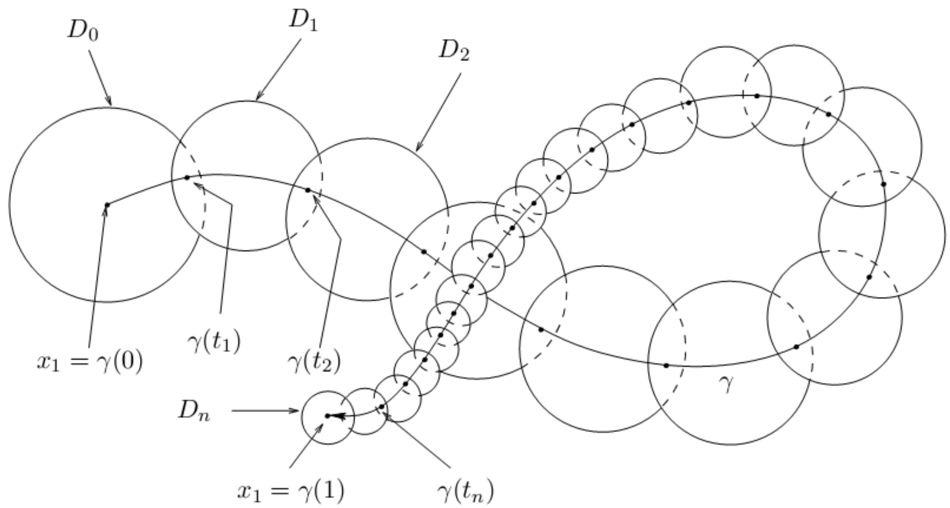


Figure. Prolongement analytique

Ainsi, quitte à remplacer γ par une perturbation, on pourra toujours supposer γ différentiable dans la définition précédente et celles qui suivent.

On note par Θ_a l'éspace de germes de fonctions holomorphes au voisinage du point $a \in \mathbb{C}$.

Définition 4.2.2. *(prolongement analytique le long d'un arc). Soient $f \in \Theta_a$ et $f = \sum_{n\geq 0} c_n(z-a)^n$ une série du Taylor de f, convergente au voisinage de $a \in \mathbb{C}$, $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$ un chemin d'origine $a = \gamma(0)$, d'extrémité $b = \gamma(1)$. On dit que f admet un prolongement analytique le long de γ,s'il existe $\delta > 0$ et une famille de séries de Taylor*

$$f_t(z) = \sum_{n\geq 0} C_n(t)(z-\gamma(t))^n \in \Theta_\gamma(t)$$

de rayons de convergence $r(t)$ d'épendante de paramétre $t \in [0,1]$ telle que $f_0(z) = f(z)$, $z \in D(\gamma(0), r(0))$ et $f_s(z) = f_t(z)$, $z \in D(\gamma(t), r(t)) \cap D(\gamma(s), r(s))$ si $|s-t| < \delta$ D'aprés théoréme d'unicité si le prolongement analytique d'un germe de fonction f le long d'un arc γ existe, alors il est déterminé de façon unique.

Les prolongements analytiques du germe de la fonction holomorphe le long des arcs différents forment une fonction a priori multiforme sur $\mathbb{C}$ ou un ouvert de $\mathbb{C}$. Par exemple la fonction $\ln z$. ou $\sqrt{z}$

Théorème 4.2.1. *Soient* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$*, a et b deux points de* $\mathcal{U}$ *et* $f \in \Theta_a$*.On suppose que f est prolongeable le long de n'importe quel chemin joignant a et b dans* $\mathcal{U}$*.Alors si* γ_0 *et* γ_1 *sont des chemins homotopes dans* $\mathcal{U}$ *joignant les points a et b et si* $f_0^t \in \gamma_0(t)$ *et* $f_t^1 \in \Theta_1(t)$ *sont des prolongements de f le long de* γ_0 *et* γ_1 *respectivement on a* $f_b^0 = f_b^1$ *au voisinage du point b.*

Remarque 4.2.1. *Dans la définition précédente, la détermination* $f\gamma$ *ne dépend que de la chaine de disques* $(D_k)_k$*. En particulier, pour* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit, f admet un prolongement analytique le long de toute* ε*-perturbation de* γ *, c'est à dire de tout chemin* $\gamma' : [0,1] \to \Omega$ *satisfaisant* $|\gamma'(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$ *et* $\gamma'(0) = x_0$*. De plus, dés que* $\gamma'(1) = x_1$*, ce nouveau chemin nous conduit à la même détermination* $f_{\gamma'} = f_\gamma$*.*

Lemme 4.2.1. *(Poincaré-Volterra). Au dessus de chaque point* $x_1 \in \Omega$*,l'ensemble :*

$$\{f_\gamma; \gamma : [0,1] \to \Omega, \gamma(0) = x_0 \quad et \quad \gamma(1) = x_1$$

des déterminations de f est au plus dénombrable.

Démonstration. - Toute détermination f_γ est déterminée par la suite de disques $(D_k)_k$ recouvrant γ . Quitte à remplacer les D_k par des disques trés proches (ce qui ne modifie pas le germe de fonction obtenu en x_1) on peut supposer leur rayon et les coordonnées de leur centre rationnels. L'ensemble des suites finies de disques à coordonnées rationnelles étant dénombrable, l'ensemble des déterminations l'est aussi.

Remarque 4.2.2. - *Le germe* $f\gamma$ *admet un prolongement analytique le long de* γ *si et seulement si* γ *se reléve en e* $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to S$ *satisfaisant* $\widetilde{\gamma}(0) = p_0$ *et* $\gamma \equiv \pi o \widetilde{\gamma}$ *. Alors,* f_γ *est le germe de fonction défini en* $\gamma(1)$ *par l'égalité* $f_\gamma o \pi = \widetilde{f}$ *en* $\widetilde{\gamma}(1)$*.*

4.3 Théorème de monodromie

La question fondamentale qui doit être abordés dans cette section est que : Soient P et Q deux points dans le plan complex. Soit (f, U) une fonction élément telle que U est un disque centré en P. Si γ_1, γ_2 sont deux courbes qui commençant en P et se terminent on Q, ne puis l'élément final de la continuité analytique de (f, U) le long de γ_1 = l'élément finale de la continuité analytique de (f, U) le long de γ_2 .

Il s'avère, dans l' exemple de $\sqrt{z}$, que la raison pour laquelle une telle défaillance pourrait se produire, c'est que la courbe $\gamma_0(t) = e^{i\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$ et la courbe $\gamma_1(t) = e^{-i\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$ ne peuvent pas être continuement déformés la l'autre, se réservant les points d'extrémité fixe, de sorte que toutes les courbes intermédiaires admettent prolongement analytique de l'élément de fonction d'origine . L'ennemi, comme déjà indiqué, est à l'origine : Il n'est pas possible de définir un élément de fonction $\sqrt{z}$ sur un disque centré à l'origine.
Ainsi, il n'est pas possible de faire prolongement analytique le long d'une courbe qui passe par zéro. Et il n'ya aucun moyen continue à se déformer γ_0 dans γ_1 sans qu'une courbe au moins passe par l'origine.
Le théorème de monodromie donne une formulation précise de la condition qui permettra d'éviter la situation dans l'exemple $\sqrt{z}$. Nous avons d'abord besoin d'une définition

Définition 4.3.1. *Soit W un ouvert connexe et soit (f, U) un élément de fonction en W. nous dirons (f, U) admet une continuité sans restriction dans W s'il existe un prolongement analytique (f_i, U_i) de (f, U) le long de γ chaque courbe pour γ qui commence à P et se trouve en W.*

la question posée au début de lu chapitre 3 a une réponse affirmative et est donnée par le théorème suivant

Théorème 4.3.1. *Soit $W \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit (f, U) un élément de fonction, avec $U \subseteq W$. Soit P le centre du disque U. Supposons que (f, U) admet une continuité sans restriction à W Si γ_0, γ_1 sont des courbes qui partant de P et arrivant à un certain point Q. et sont homotopes dans W, alors le prolongement analytique de (f, U) à Q le long de γ_0 est égale à la continuation analytique de (f, U) à Q le long de γ_1*

Preuve . : on écrit $f_{s,t}$ pour la fonction élément en $H(s, t)$ obtenu par la continuité analytique de (f, U) le long de la courbe $t \mapsto H(s, t)$ D'utre part $t \mapsto f_{s,t}$ pout un s fixé ,soit une continuité analytique le long de la courbe $t \mapsto H(s, t)$ on veut obtenur que $f_{1,1} = f_{0,1}$
on pose $S = \{s \in [0, 1]/\forall\lambda \in [0, s], f_{\lambda,1} = f_{0,1}\}$
$S \neq \emptyset \quad care \quad 0 \in S$

si on preuvr que S est fermé et ouvert de $[0,1]$, de la conixité de $[0,1]$ on aura que $S = [0,1]$. Alors $1 \in S$ et $f_{1,1} = f_{0,1}$

S ouvert de $[0,1]$:
on supoose $s_0 \in S$. Notons que pour s_0 fixie, $\exists \varepsilon > 0$ telque $\forall t \in [o,1]$, la rayon de convergence de l'extention de la puissance $f_{s_0,t}$ autour de $H(s_0,t)$ est au moin ε cela découle de la compacité de $[0,1]$ et la définition de la coninuité analytique le long de la courbe
on choisit $\delta > 0$ assez petit telque $\forall \varepsilon \in]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\cap [0,1]$, et $\forall t \in [0,1]$ alors $|H(s,t) - H(s_0,t)|$ (continuité uniforme de H).
Alors il est simple de voir la continuité analytique de $\widehat{f}_{s,t}$ = l'unique fonction élément en $H(s,t)$ c'est une cntinuité analytique direct de $f_{s_0,t}$

puisque $\widehat{f}_{s_0,t}$ est une continuité analytique directe de $\widehat{f}_{s_0,0} = (fu)$, l'unicité de la continuité analytique proposition $(N = 0)$ implique que $\widehat{f}_{s,t} = f_{s,t}$, $\forall t \in [0,1]$ maintenaut $\widehat{f}_{s,1}$ est continuité analytique directe de

$$f_{s_0,1} = f_{0,1} \Rightarrow f_{s,1} = f_{0,1}$$

Cependant, chaque $s \in]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\cap [0,1] \Rightarrow s \in S$ Alor S est un ouvert

S fermé :
on suppose que $\{s_j\}$ est une suite convergente de point s.
Soit $s_0 = \lim_{j \to \infty} s_j$. on peut choisit $\delta > 0$ telque si $s \in]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\cap [0,1]$, alors $f_{s,1}$ est une continuité analytique de $f_{s_0,1}$. Puisque $s_j \in]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\cap [0,1]$, $\forall j$ alors
$\forall j f_{s_0,1} = f_{s_j,1} = f_{0,1} \Rightarrow s_0 \in S$ et S est fermé

■

Corollaire 4.3.1. *soit $W \subset \mathbb{C}$ un ouvert conexe, on suppose que W est un espace topologique simplement conex, dans le sense où deux courbes .*
ayant les mêmes poitns de départ et d'arrive (peut être deux points de départ différent) il est homotop on suppose que (f, U) admet une continuité non restrent W . Alors il exist une fonction holomorphe F définie globalment sur W telque $f = F$ sur U.

Par la théorem de monodromie on comprend précisemment pour $\sqrt{z}$ et plus généralement la fonction $\lg(z)$ n'admettent pas de prolongement continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la difficulté est que les deux courbes définies dans le paragraphe précédent ne sont pas homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

4.4 Surface de Riemann

L'idée d'une surface de Riemann est que l'on peut visualiser, ou faire de la géométrie dans un certain sens, du comportement des germes de fonctions et leurs continuité analytiques.
Une fonction analytique globale est un objet analytique tel que défini aux chapitre précedente, une fonction analytique globale est l'ensemble de tous les éléments fonctionnels obtenus par prolongement analytique le long des courbes (à partir d'un point de base $P \in \mathbb{C}$) d'un germe de fonction (f, U) à P.

Considérons l'élément fonctionnel (f, U) déffinie sur $U = D(1;1)$ par $z = re^{i\theta} \mapsto \sqrt{re^{i\theta}}$ où $r > 0$ et $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ qui rend la représentation de $re^{i\theta}$ de $z \in D(1,1)$ unique. Cet élément de fonction est la «branche principale de $\sqrt{z}$ en $z = 1$ que nous avons déjà discuté. Le germe de fonctionnel (f, U) peut être prolonger analytiquement le long de chaque courbe γ émanant de 1 et abouti dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Notons S (pour «surface de Riemann») la totalité des fonctionnels obtenus par ces continuités analytiques. Bien sûr, dans ce termes théorique, $\mathbb{S}$ est simplement la fonction analytique global $\sqrt{z}$, tout comme nous avons défini ce concept plus tôt. Tout ce que nous essayons de faire maintenant est de "visualiser" S dans un certain sens.
Notez que chaque point de S "se trouve sur" un point unique de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: Un germe de fonction $(f, U) \in$ S est associée au centre de U, (f, U) est un germe de fonction en un point de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ainsi, nous pouvons définir une "projection"

$$\begin{array}{rcl} \pi : \quad S & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (f, u) & \mapsto & \pi((f, u)) = \quad centre \;\; du \;\; disque \;\; U. \end{array}$$

La projection π de S est de deux-en-un sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dans un voisinage d'un $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il ya exactement deux branches holomorphes de $\sqrt{z}$. [Si l'un d'entre eux est (f, U), alors que l'autre est $(-f, U)$. Mais il n'y a aucun moyen de décider laquelle de (f, U) et $(-f, U)$ est la racine carrée dans un sens.] Nous pouvons penser à S comme "surface" de la manière suivante :

Nous définissons les voisinages de «points» (f, U) dans S en posant :
un voisinage de (f, U) comme $\{(f_p, U_p)|p \in U$ et (f_p, U_p) est le prolongement analytique directe (f, U) en p$\}$. Cette nouvelle dfinition rend π : S $\mapsto \mathbb{C} \setminus \{0\}$ localement un-en-un. L'image d'un voisinage de (f, U) par π est un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cela donne une façon de voir S comme étant localement un ensemble ouvert dans le plan.

Essayons de visualiser S encore plus loin. Soit $W = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i_0 : x \leq 0\}$. $\pi^{-1}(W)$ se décompose naturellement en deux composantes, dont chacune est un ouvert de S. [Puisque nous avons défini les voisinages d'un points dans S (ouvert est un voisinage de chacun de ses points.] Ces deux composantes sont "collées" dans R en elle-même : $\mathbb{S}$ est connexe, tandis que $\pi^{-1}(W)$ n'est pas. Notez que, sur chacune des composantes connexes de $\pi^{-1}(W)$, la projection π est un-en-un. Sur W, il existe deux branches holomorphes de la fonction $\sqrt{z}$, à savoir

$$re^{i\theta} \mapsto r^{1/2}e^{i\theta/2} \quad et \quad re^{i\theta} \mapsto -r^{1/2}e^{i\theta/2}, \quad -\pi < \theta < \pi$$

Chacun des composants de $\pi^{-1}(W)$ peut être considéré comme une « copie » de W, puisque π envoie chaque composante donnée sur W. Comment ces «copies» Q_1 et Q_2 sont collées ensemble pour former S ? nous joignons le second bord de quadrant de Q_1 avec la troisième arête de quadrant Q_2 et l'deuxième bord de quadrant de Q_2 à la troisième arête de quadrant de Q_1. Bien sûr ceux-ci joint ne peut pas être effectué simultanément dans l'espace à trois dimensions. Nous avons restauré l'axe réel négatif (mais pas au point 0).

Nous avons construit une surface, dite "surface de Riemann pour la fonction $\sqrt{z}$. " Cette surface que nous avons obtenu en collant ensemble les deux copies de W est en fait homéomorphe à l'espace topologique que nous avons fabriqué à partir de S (l'ensemble des éléments de fonction) lorsque nous avons défini les voisinages S.

Puisque $\pi : \mathrm{S} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est localement un-en-un, on peut utiliser cette projection pour montrer que la fonction $F : \mathrm{S} \to \mathbb{C}$ soit holomorphe. F est holomorphe si $Fo\pi^{-1} : \pi(U) \to \mathbb{C}$ est holomorphe pour chaque ouvert U de S avec π un-en-un sur U.
Avec cette définition , $\sqrt{z}$ devient une "valeur unique" bien définie, holomorphe sur S i.e. $(f, U) \in \mathrm{S}$ alors $\pi(f, U) = p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on pose alors $F((f, U)) = f(p)$

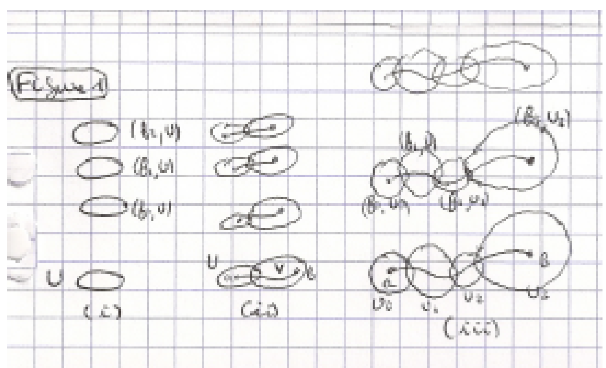
$$F((f, U)) = f(P).$$

Par conséquent, $F^2((f, U)) = \pi(f, U)$ avec $f^2(z) = z$. Donc F est la fonction racine carrée, dans le sens décrit.

4.5 Représentation graphique de la Surface de Riemann de $\sqrt{z}$

Par la méthode des piles d'assiettes :

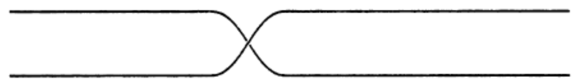
Nous plaçons au dessus de $\mathbb{C}$: sur chaque disque ouvert, il y a deux branches opposées, donc (avec l'image des piles d'assiettes) deux assiettes dans la pile.
La surface de Riemann de sera donc étalée au dessus de S et la projection sera un revêtement. Pour décrire cette surface, La règle est la suivante :
un tour autour de 0 (mettons dans le sens positif) fait changer de disque (puisqu'il transforme une détermination en son opposée) ; un tour de plus ramène donc au premier disque ! ar exemple, en parcourant deux fois le cercle unité de 1 à 1 dans le sens positif, on relie des petits disques de centres i^k. Si l'on relie de manière continue des disques de centres tous les points du cercle unité, on obtient une figure hélicoïdale qui se croise elle-même voir figure ci-dessous

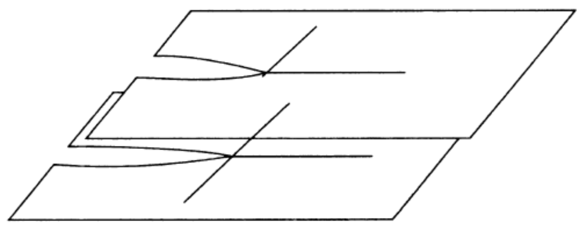


Par la méthode des coupures :
On pratique une coupure dans le plan ; on se place sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}-$. La détermination fondamentale de la racine carrée sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}-$ correspond à un feuillet, son opposée correspond à un autre feuillet. La règle de franchissement de la coupure est ici simple :
quel que soit le sens de franchissement, on change d'étage. On joint le second quadrant de F_1 au bord du troisième quadrant de F_2 et le second quadrand de F_2 au troisième quadrant de F_1.

Dans notre construction, nous avons restauré l'axe réel négatif (mais pas au point 0).

Nous avons construit une surface, dite "surface de Riemann pour la fonction $\sqrt{z}$." Cette surface que nous avons obtenu en recollant les deux copies de W est en fait homéomorphe à l'espace topologique que nous avons fait à partir de S (l'ensemble des éléments de fonction) lorsque nous avons défini les voisinages dans S voir figure ci-dessous





La surface étalée au dessus de $\mathbb{C}$:

Notant π : S $\to$ $\mathbb{C}$ la projection : pour tout ouvert $W \in \mathbb{C}$ "suffisamment petit", l'image réciproque $\pi^{-1}(W) = V_1 \cup V_2$ est réunion disjointe de deux ouverts V_1, V_2 de S tels que les restrictions $\pi_{|V_1}$, $\pi_{|V_2}$ soient des homéomorphismes de V_1, V_2 sur W. Dans notre cas, les ouverts sont tout simplement les ouverts sur lesquels il y a deux déterminations distinctes de $\sqrt{z}$: par exemple les disques ouverts $D(z_0; |z_0|)$

Uniformisation :

On exprime le fait que "la racine carrée s'uniformise sur sa surface de Riemann" par un diagramme commutatif :

Nous savons que la "fonction" $\sqrt{z}$ est "mal définie" (multiforme), il s'agit de la relever en une fonction "bien définie" (uniforme) $\widetilde{\sqrt{z}}$.

$$\begin{array}{ccc} S & & \\ \downarrow^{\pi} & \searrow^{F=\widetilde{\sqrt{z}}} & \\ \mathbb{C}-\{0\} & \to_{f=\sqrt{z}} & \mathbb{C} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} F : S & \to & \mathbb{C} \\ (f, U) & \mapsto & F(f, U) = \widetilde{\sqrt{z}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \pi : S & \to & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (f, U) & \mapsto & \pi(f, U) = P = \textit{ center du dicquedan } U \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{C} \\ P = \pi(f,U) & \mapsto & f(\pi(f,U)) = f(P) = \sqrt{z} \end{array}$$

Pour définir cette dernière, nous plaçons sur un petit ouvert en forme d'assiette de $\sum^*$ c'est-à-dire sur un (U ; f) où U est un disque ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et où f est une détermination de la racine carrée sur U. Par définition, sur cet ouvert, $\widetilde{\sqrt{z}}$ coïncide avec f

Une définition plus géométrique de l'uniformisation :

Soit un point $p_0 \in \pi^{-1}(1)$, On prend $U := D(1;1)$, on écrit $\pi -^1 (U) = V_1 \cup V_2$ (union disjointe), où chaque V_i correspond à l'une des deux déterminations ϕ_i de la racine carrée sur U ; et l'on choisit pour p_0 l'unique point de V_1 au dessus de 1, i.e. $\{p_0\} = V_1 \cap \pi^{-1}(1)$.

La valeur de $\widetilde{\sqrt{z}}$ en p_0 est alors $\phi_1(1)$ (donc 1 ou -1 selon que l'on a pris pour ϕ_1 la détermination principale ou son opposée).

Pour définir la valeur de $\widetilde{\sqrt{z}}$ en un point p quelconque de S , on choisit un chemin $\widetilde{\gamma}$ de p_0 à p dans S ; on projette $\widetilde{\gamma}$ en un chemin $\gamma = \pi o \widetilde{\gamma}$ de $\pi(p_0) = 1$ à $\pi(p) = z$ dans $\mathbb{C}$; on prolonge analytiquement la fonction ϕ_1 le long de γ, et l'on obtient, donc, une détermination ϕ de la racine carrée au voisinage de z. la valeur de la fonction $\widetilde{\sqrt{z}}$ en ce point z est alors par définition $\phi(z)$.

Pour que l'algorithme ci-dessus donne une définition cohérente, il faut que deux propriétés soient vérifiées :

1. Il existe un chemin de p_0 à p : autrement dit, S est connexe par arcs.
2. Le résultat du prolongement analytique le long de γ ne dépend pas du choix du chemin $\widetilde{\gamma}$ de p_0 à p.

La première propriété se voit ainsi :

si $p, p' \in S$ se projettent sur $z, z' \in \mathbb{C}^*$, alors tout chemin γ de z à z' dans $\mathbb{C}^*$ se relève en un chemin $\overline{\gamma}$ qui va de p à p' ou bien à l'autre point, disons q', de $\pi^{-1}(z')$. Par ailleurs, un lacet simple λ autour de 0 de base z' se relève en un chemin $\overline{\lambda}$ de q' à p' (ainsi d'ailleurs qu'en un chemin de p' à q'). Selon le cas, $\overline{\gamma}$ ou $\overline{\gamma}.\overline{\lambda}$ reliant p à p'.

La deuxième propriété se voit ainsi : si deux chemins $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ de projections respectives γ_1 et γ_2 vont de p' à p, alors les prolongements analytiques le long des chemins γ_1 et γ_2 menent à la même détermination de la racine carrée, puisque le "choix" de p au dessus de z équivaut au "choix" d'une des deux branches en z.

La surface de Riemann de "$\lg z$"

:

Nous commençons par la "branche principale"

$$re^{i\theta} \mapsto \lg r + i\theta$$

définie sur $D(1,1)$ avec $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Nous considérons que toutes ses suites analytiques le long des courbes sont issues 1. Nous pouvons visualiser les "branches" ici en notant que $W = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup$ l'axe réel négatif), $\pi^{-1}(W)$ a une infinité de composantes (chaque copie de W) où π envoie chaque copie en un-en-un sur W. Notamment, ces composantes sont les «branches» de $\log z$ sur W :

$$re^{i\theta} \mapsto \log r + i\theta + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z},$$

où $-\pi < \theta < \pi$. Chacune de ces images (une infinité) est empilée les unes au dessus des autres (figure) . Elles se joignent sur la surface en faisant un tour autour de l'origine et remantant en spirale (comptés dans le sens antihoraire dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Il s'agit de la représentation géométrique du fait que, lorsque nous faisons un prolongement analytique une branche de $\ln r + i\theta + 2\pi k$ tourne une fois autour de l'origine dans le sens antihoraire, Cette fois, il n'y a pas de jonction de la première et dernières "feuilles". La spirale se poursuit sans limite dans les deux sens.

L'idée que nous nous venons de présenter sur la construction de surface de riemann à partir des fonctions éléments, peuvent être effectuées en toute généralité : Considérons l'ensemble de tous les éléments de fonction analytique pouvant être obtenues par prolongement analytique (Sur une courbe dans $\mathbb{C}$) d'un élément de fonction donnée (f, U). C'est ce que nous avons appelé plus haut une fonction analytique globale. Alors cet ensemble d'éléments fonctionnels peuvent réellement être considéré comme une surface connexe :

Il s'agit d'une projection sur un ouvert de $\mathbb{C}$, obtenue par l'envoi de chaque élément fonctionnel au point de $\mathbb{C}$, où il se trouve. Cette projection est une identification locale de l'ensemble d'éléments de fonction avec une partie de $\mathbb{C}$, et de sorte qu'il présente l'ensemble des éléments fonctionnels comme étant à deux dimensions, c'est à dire une surface.

Bibliographie

[1] Uniformisation des Surface de Riemann :retour sur un théoreme ...../Henri Paul de Saint Gervais.

[2] POINCARÉ, 1912-2012, Séminaire Poincaré XVI (2012) 211 - 244 (Henri Poincaré et ses théorémes d'uniformisation).

[3] ANALYSE COMPLEXE / Michéle Audin .

[4] TOPOLOGIE : REVÊTEMENTS ET GROUPE FONDAMENTAL /Michéle Audin .

[5] Analyse complexe (Fonctions holomorphes, fonctions speciales) Part II,A Fonctions holomorphes sur les surfaces de Riemann./ G.Henkin.

[6] SUR LES THÉORÈMES I ET II DE PAINLEVÉ /Frank LORAY .

[7] INITIATION AUX SURFACES DE RIEMANN / J. Sauloy.

[8] Function Theory of One Complex Variable / THIRD EDITION / Robert E. Greene / Steven G. Krantz.

[9] COMPLEX ANALYSIS / An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable /Lars V. Ahlfors Professor of Mathematics, Emeritus Harvard University.

[10] EQUATIONS FONCTIONNELLES ANALYTIQUES DANS LE CHAMP COMPLEXE / J. Sauloy.