

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la recherche scientifique

Université Dr Moulay Tahar de Saida

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématique et Informatique

## Mémoire de Master

Spécialité : Analyse fonctionnelle et applications

### Opérateur Intégral d'Abel

Présenté par : **DOUAR AZIZ**

Soutenu le : 20/06/2013

Président	M.BELMEKKI	Maitre de conférences-A-	Univ. de SAIDA
Encadreur :	F-Z.MOSTEFAI	Maitre de conférences-B-	Univ. de SAIDA
Examineur	K.DJORFI	Maitre de Assistant -A-	Univ. de SAIDA
Examinatrice,	H.ABBAS	Maitre de Assistant -B-	Univ. de SAIDA

**2012/2013**

## DEDICACES

Je rend grâce à dieu de m'avoir donner le courage et la volonté ainsi que la conscience de pouvoir terminer mes études.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont permis de réussir dans mes études.

A toute la famille DOUAR.

A tous mes amis : à LA FAC.

A mon encadreur F.Z MOSTEFAL.

DOUAR Aziz.

## REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont en premier lieu à Madame **F.Z MOSTEFAI**, qui a accepté de diriger ce mémoire.

Je la remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt pour ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Monsieur **M. BELMEKKI** d'avoir accepté d'être le président de ce Jury.

Je remercie aussi Monsieur **K. DJORFI**, et mademoiselle **H. ABBAS** d'avoir accepté de faire partie de ce jury.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 L'opérateur Intégral d'Abel</b>	<b>9</b>
1.1 Définitions et notations . . . . .	9
1.2 Formules de solutions . . . . .	11
1.3 Existence et unicité de solutions dans $L^1$ . . . . .	14
<b>2 Propriétés de l'opérateur d'Abel</b>	<b>19</b>
2.1 Propriétés de continuité de l'opérateur d'Abel dans l'espace $L^p$ . . .	19
2.2 Propriétés de continuité de l'opérateur d'Abel dans l'espace de Hölder	24
2.3 Compacité d'opérateurs d'Abel . . . . .	28
<b>3 Théorèmes d'existence et d'unicité</b>	<b>33</b>
3.1 Le cas linéaire . . . . .	33
3.2 Le cas non-linéaire . . . . .	40
<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>



# Introduction

Les concepts de base du calcul fractionnaire (opérateur intégral et différentiel d'ordre non entier) ont été développés il y a longtemps par Leibniz (1695), Liouville (1832), Riemann (1892) et d'autres. Ce fut Oliver Heaviside dans les années 1890 qui introduit ce calcul dans le monde de l'ingénierie, et c'est en 1974 que le premier livre sur ce sujet fut publié par Oldham et Spanier. Recents travaux ont mis en evidence l'application du calcul fractionnaire à la physique, la mécanique, le traitement de signal et à l'electromagnitisme.

Il est important de signaler que la première application du calcul fractionnaire a été faite par Niels Henrik Abel (1802-1829) dans la résolution d'une équation intégrale qui se pose sur un problème de mécanique. En 1823, Abel a considéré le problème suivant : Soit  $T(h)$  le temps que prend une particule à glisser le long d'une courbe  $x = \phi(y)$ . La relation entre les fonctions  $T(h)$  et  $\phi(y)$  est donnée par l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^y (y-z)^{-1/2} u(z) dz = \sqrt{2g} T(y), \quad y \in [0, h] \quad (1)$$

où  $u(z) = \sqrt{1 + \phi'^2(z)}$

La solution de cette équation a été faite par Abel dans les travaux suivants [1, 2]. En fait, il a traité une équation beaucoup plus générale, en remplaçant

$$(y-z)^{-1/2} \text{ par } (y-z)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Pour ces raisons, une équation de la forme

$$J^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler, est appelée équation intégrale d'Abel.

L'équation(2) est l'une des premières équations intégrales traité dans l'histoire des équations intégrales. Un autre type plus général d'équation intégrale

$$A_\alpha u(x) = \int_0^x \frac{K(x,t)u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3)$$

est appelé "équations singulières de Volterra du première espèce".

L'intérêt dans l'étude des opérateurs d'Abel  $u \rightarrow A_\alpha u$  et des équations d'Abel est motivé par les questions suivantes :

- (A) Des problèmes physiques qui conduisent à une équation intégrale d'Abel.
- (B) La relation des opérateurs d'Abel, en particulier de l'opérateur  $J^\alpha$ , à d'autres opérateurs intégraux.
- (C) Propriétés de la continuité et la compacité de  $A_\alpha$  sur certains cas espaces fonctionnels ( $L^p; C^0; C^\alpha; \dots$ ).
- (D) Les questions d'existence et d'unicité.

Les équations intégrales d'Abel (et pas seulement de type (3), mais aussi beaucoup plus générales, linéaires ou non linéaires, de premier type ou de deuxième type) ont des applications de la physique et les problèmes dans la mécanique,

L'opérateur Abel  $J^\alpha$  de (2) est un exemple simple d'une puissance fractionnaire d'un opérateur : en particulier, si  $\alpha = 1$ , alors  $J^\alpha = J$  est l'opérateur d'intégration, donnée par  $Ju(x) = \int_0^x u(t)dt$ . après le remplacement de  $\alpha \in (0, 1)$  par un nombre entier positif,  $J^\alpha u$  n'est autre que la  $\alpha$  - fois répété intégrante de  $u$ . L'opérateur de dérivation inverse de  $J^\alpha$  est

$$D^\alpha u(x) = \frac{d}{dx} J^{1-\alpha} u(x). \quad (4)$$

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions et définitions sur l'équation d'Abel, nous donnerons quelques exemple.

Dans le second chapitre, on s'intéressera en premier lieu à la propriété de continuité dans l'espace  $L^p$  ensuite dans un espace de Hölder  $C^\lambda$ , ensuite on étudiera la notion de compacité.



Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence de solutions de l'équation d'Abel dans le cas linéaire et non-linéaire.



# Chapitre 1

## L'opérateur Intégral d'Abel

Le but de ce chapitre est de définir l'opérateur d'Abel et les équations intégrales d'Abel. Nous allons aussi donner quelques formules de base que nous utiliserons fréquemment plus tard.

### 1.1 Définitions et notations

**Définition 1.1.1.** *La transformée d'Abel d'une fonction  $u$  est défini par*

$$J_a^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt, \quad a < x < b \quad (1.1)$$

où  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $\Gamma$  est la fonction gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \quad (1.2)$$

Dans le cas où  $a = 0$ , on notera la transformée d'Abel de la fonction  $u$  par  $J^\alpha u(x)$ .

**Remarque 1.1.1.** (a) *Actuellement, L'opérateur  $J_a^\alpha$  est défini pour tout  $\alpha > 0$  et est appelé opérateur integral fractionnaire.*

(b) *Si on remplace  $\alpha$  par un entier naturel positif  $n$  alors*

$$J_a^n u(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t) dt = \underbrace{J_a J_a \dots J_a}_{n \text{ fois}} u(x)$$

est l'intégrale répétée  $n$ - fois, où

$$J_a v(x) = \int_a^x v(t) dt, \quad a < x < b$$

**Exemple 1.1.1.** Calcul de la transformée d'Abel d'un polynôme pour le cas particulier  $a = 0$ . Soit

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Par la linéarité de  $J^\alpha$  nous avons

$$\begin{aligned} J^\alpha P(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{t^k dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{\lambda x^k}{(x-\lambda x)^{1-\alpha}} x d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\Gamma(\alpha)} x^{k+\alpha} \int_0^1 \frac{\lambda^k d\lambda}{(1-\lambda)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

En utilisant la formule suivante

$$\int_0^1 \frac{\lambda^\beta d\lambda}{(1-\lambda)^{1-\alpha}} = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}, \quad \beta > -1. \quad (1.3)$$

on trouve

$$J^\alpha P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} x^{k+\alpha}.$$

En particulier si  $\alpha = 1$ , on obtient le pôleynome primitive de  $P$

$$J^1 P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}.$$

**Exemple 1.1.2.** Calcul de la transformée d'Abel d'une fonction caractéristique. Soit  $[c, d]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $\chi_{[c,d]}$  la fonction caractéristique définie sur  $[c, d]$  par

$$\chi_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c, d], \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

Si  $[c, d] \subset [a, b]$  alors

$$J^\alpha \chi_{[c,d]}(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} [(x-c)^\alpha \chi_{[c,b]}(x) - (x-d)^\alpha \chi_{[d,b]}(x)]$$

On remarque sur cet exemple que la transformée d'Abel d'une fonction discontinue est une fonction continue, l'inverse est impossible. Or, il existe des fonctions discontinues qui ont leurs transformées d'Abel aussi discontinues.

**Exemple 1.1.3.** Considérons  $-1 < \lambda < -\alpha$ , la transformée d'Abel de la fonction  $u$  définie par

$$u(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0, \\ (x - x_0)^\lambda, & x_0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

est donnée par

$$J^\alpha u(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+\lambda+\alpha)}(x - x_0)^{\lambda+\alpha}, & x_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

**Remarque 1.1.2.** La formule (1.3) est un cas particulier de la formule générale

$$\int_0^1 (1 - \lambda)^{r-1} \lambda^{s-1} d\lambda = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = B(r, s), \quad r > 0, \quad s > 0,$$

pour la fonction beta d'Euler. Par des changements de variables on obtient deux formules suivantes aussi :

$$\int_0^x (x-t)^{r-1} t^{s-1} dt = x^{r+s-1} B(r, s), \quad r > 0, \quad s > 0, \quad x > 0,$$

$$\int_p^q (q-t)^{r-1} (t-p)^{-r} dt = \int_0^1 (1-\lambda)^{r-1} \lambda^{-r} d\lambda = \Gamma(r)\Gamma(1-r), \quad r > 0, \quad -\infty < p < q < +\infty$$

## 1.2 Formules de solutions

Nous allons tirer quelques formules de représentation des solutions des équations intégrales d'Abel.

**Définition 1.2.1.** Considérons pour  $\alpha \in (0, 1)$ ;  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  l'équation classique

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt = f(x), \quad a < x < b \quad (1.5)$$

est appelée équation intégrale d'Abel.

Afin de résoudre (1.5), nous multiplions les deux côtés par  $\frac{(y-x)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$   $a < x < y < b$ . L'intégration sur  $(a, y)$ , nous donne

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_a^y \left\{ (y-x)^{-\alpha} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right\} dx = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^y \left\{ (y-x)^{-\alpha} f(x) \right\} dx.$$

Interchangeant l'ordre d'intégration sur la gauche entraîne

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_a^y \left\{ \int_t^y (y-x)^{-\alpha} (x-t)^{\alpha-1} dx \right\} u(t) dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^y \left\{ (y-x)^{-\alpha} f(x) \right\} dx.$$

Maintenant, en substituant  $x = t + \lambda(1-t)$  et en utilisant (1.3) nous obtenons

$$\int_t^y (y-x)^{-\alpha} (x-t)^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \lambda^{-\alpha} (1-\lambda)^{\alpha-1} d\lambda. \quad (1.6)$$

En utilisant cette formule, nous avons

$$\int_a^y u(t) dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^y \left\{ (y-x)^{-\alpha} f(x) \right\} dx. \quad (1.7)$$

Si le côté droit de (1.7) est dérivable, on obtient la formule

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \quad a < x < b \quad (1.8)$$

Par analogie avec l'opérateur intégral fractionnaire, On définit l'opérateur dérivative par

**Définition 1.2.2.** On appelle l'opérateur dérivative fractionnaire de  $u$

$$u \mapsto \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{d}{dx} J_a^{1-\alpha} u = (J_a^\alpha)^{-1} u$$

Il est noté par  $\frac{d}{dx} J_a^{1-\alpha}$ ,  $(J_a^\alpha)^{-1}$ ,  $D_a^\alpha$

**Exemple 1.2.1.** , nous calculons la dérivée fractionnaire d'un polynome

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

pour le cas particulier d'un  $a = 0$ . On a (voir (1.1)),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} J^{1-\alpha} P(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \frac{a_k \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+2-\alpha)} x^{k+1-\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha} \end{aligned}$$

Donc

$$D^\alpha P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}$$

Nous observons que si nous posons  $\alpha = 1$  dans la dernière formule, nous n'avons pas généralement  $D^1 P(x) = \frac{d}{dx} P(x)$ . En fait, le premier terme  $\frac{a_0 \Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$  n'a pas de sens si  $\alpha = 1$

La formule (1.8) peut s'écrire sous différentes formes. En fait, une intégration par parties donne (nous supposons  $a \in \mathbb{R}$ )

$$\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt = \frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt.$$

Par conséquent, la solution  $u$  de (1.5) peut être écrite comme

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ f(a)(x-a)^{-\alpha} + \int_a^x (x-t)^{1-\alpha} f'(t) dt \right\}. \quad (1.9)$$

A partir de la formule de représentation pour la solution de (1.5) nous pouvons trouver, par un changement de variables facile, la solution de plusieurs autres types des équations intégrales d'Abel.

Considérons l'équation d'Abel

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt = f(x), \quad a < x < b. \quad (1.10)$$

En substituant  $\xi = b + a - t$  on obtient

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{b+a-x} (b+a-\xi)^{\alpha-1} u(b+a-\xi) d\xi = f(x), \quad a < x < b. \quad (1.11)$$

Une seconde substitution  $X = b + a - x$ ,  $U(\xi) d\xi = u(b+a-\xi)$  on obtient l'équation

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^X (X - \xi)^{\alpha-1} U(\xi) d\xi = f(b + a - X), \quad a < X < b. \quad (1.12)$$

qui peut être résolu par la formule de représentation (1.8). En inversant la substitution, nous trouvons

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t - x)^{-\alpha} f(t) dt, \quad a < x < b. \quad (1.13)$$

### 1.3 Existence et unicité de solutions dans $L^1$

**Théorème 1.3.1.** *Supposons que  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Alors il existe au plus une solution de l'équation (1.5) dans  $L^1(a, b)$ . En outre, si la fonction  $f$  est à variation bornée et continue alors l'équation (1.5) admet une solution dans  $L^1(a, b)$ , donnée par*

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{a-0}^x \frac{df(t)}{(x - t)^\alpha}. \quad (1.14)$$

où l'intégrale dans 1.14 est au sens de Lebesgue.

**Preuve.**

(a) **L'unicité.**

Soit  $u \in L^1(a, b)$  une solution de

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x \frac{u(t) dt}{(x - t)^{1-\alpha}} = 0, \quad a < x < b. \quad (1.15)$$

On considère, pour  $y$  fixé dans  $(a, b)$ , la fonction

$$(x, t) \longrightarrow \frac{u(t)}{(x - t)^{1-\alpha}(y - x)^\alpha}, \quad (1.16)$$

définie sur le domaine  $T_y = \{(x, t) / a \leq t \leq x \leq y\}$

En utilisant le théorème de Tonelli (voir [3]), La fonction (1.16) est dans  $L^1(T_y)$ , car

$$\begin{aligned} \int \int_{T_y} \left| \frac{u(t)}{(x - t)^{1-\alpha}(y - x)^\alpha} \right| dt dx &= \int_a^y \{ |u(t)| \int_t^y \frac{dx}{(y - x)^\alpha (x - t)^{1-\alpha}} \} dt \\ &= \Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) \int_a^y |u(t)| dt < +\infty. \end{aligned}$$



Maintenant par le théorème de Fubini (voir [Royden, 1968]) et (1.15), nous avons, pour tout  $y \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \int_a^y u(t) dt &= \int_a^y \left\{ u(t) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_t^y \frac{dx}{(y-x)^\alpha(x-t)^{1-\alpha}} \right\} dt \\ &= \int_a^y \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right\} \frac{dx}{\Gamma(1-\alpha)(y-x)^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Donc  $u(y) = 0$  pour  $a \leq y \leq b$ .

(b) **Existence.**

Soit  $f$  une fonction à variation bornée et continue. Alors il existe deux fonctions  $f_1, f_2$ , croissante, à variation bornées, continues à partir de la droite, de telle sorte que  $f = f_1 - f_2$  et donc  $df = df_1, df_2$ . Par conséquent, si  $u$  est donnée par (1.A.1), qui est

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \int_{a-0}^x \frac{df_1(t)}{(x-t)^\alpha} - \int_{a-0}^x \frac{df_2(t)}{(x-t)^\alpha} \right\}, \quad (1.17)$$

nous avons

$$|u(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a-0}^x \frac{df_1(t)}{(x-t)^\alpha} + \int_{a-0}^x \frac{df_2(t)}{(x-t)^\alpha}.$$

Pour montrer que  $u \in L^1(a, b)$ , il suffit de prouver que

$$x \longrightarrow \int_{a-0}^x \frac{d\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}$$

est dans  $L^1(a, b)$  pour chaque fonction  $\varphi$  croissante, bornée, continue à partir de la droite de  $[a, b]$ , et prolongeable par 0 sur la gauche en  $a$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{a-0}^b \int_{a-0}^t \frac{d\varphi(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} dt &= \int_{a-0}^b \int_\xi^b \frac{dt}{(t-\xi)^\alpha} d\varphi(\xi) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{a-0}^b (b-\xi)^{1-\alpha} d\varphi(\xi) \\ &\leq \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_{a-0}^b d\varphi(\xi) \leq \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \varphi(b) < +\infty. \end{aligned}$$

D'où  $u \in L^1(a, b)$ . Maintenant, la fonction

$$(t, \xi) \longrightarrow \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^\alpha}$$

est dans  $L^1(T_x, dt \otimes d\varphi(\xi))$  pour  $a < x < b$  et tout  $\varphi$  ayant les propriétés citées plus haut.

En effet, par le théorème de Tonelli,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left\{ \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a-0}^t \frac{d\varphi(\xi)}{(t-\xi)^\alpha} \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_{a-0}^x d\varphi(\xi) \int_\xi^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\xi)^\alpha} = \varphi(x) \end{aligned}$$

Maintenant, on utilise (1.A.4) pour conclure la preuve.  $\square$

Remarquons que si  $f$  est absolument continue sur  $[a, b]$  alors  $df(x) = (f(a)\delta(x-a) + f'(x))dx$ , où  $\delta$  est de Dirac "fonction delta". le Théorème (1.5) et la formule (1.9) sont des conséquences du Théorème (1.14) et la formule (1.14).

Il est utile d'observer que la formule (1.8) est plus général que les formules (1.9) et (1.14). En effet, considérons la fonction

$$J^\alpha u(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1+\lambda+\alpha)} (x-x_0)^{\lambda+\alpha}, & x_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

où  $x_0 \in (0, 1)$  et  $-1 < \lambda < -\alpha$ . Cette fonction n'est pas à variation bornée dans  $[0, 1]$ , d'où la formule (1.14) ne peut pas être utilisée, mais, comme nous l'avons vu dans Exemple (??) de la fonction

$$u(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ (x-x_0)^{\lambda+\alpha}, & x_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

est une solution de

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x). \quad (1.18)$$

De plus  $u$  est dans  $L^1(0, 1)$  et est donc l'unique solution  $L^1$  de (1.18). Nous observons également que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{(x-x_0)^{\lambda+1}}{\lambda+1}, & x_0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Donc  $x \longrightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}$  est absolument continue et

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} = u(x)$$

.

La vraie raison de la différence entre les formules (1.8) et (1.14) ou (??) réside dans le fait que l'ensemble des fonctions à variations bornées dans  $[a, b]$  est un sous-ensemble propre de  $J^\alpha(L^1(a, b))$  pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Théorème 1.3.2.** *Soit  $-\infty < a < b < +\infty$ . Alors il existe une fonction  $u \in L^1(a, b)$  tel que*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \quad a \leq x \leq b. \quad (1.19)$$

si et seulement si  $f \in L^1(a, b)$  et la fonction

$$J^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad a \leq x \leq b. \quad (1.20)$$

est absolument continue avec  $J^{1-\alpha} f(a) = 0$

**Preuve.**

S'il existe  $u \in L^1(a, b)$  vérifiant (1.19), alors

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b dx \frac{|u(t)|dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \left\{ |u(t)| \int_t^b \frac{dx}{(x-t)^{1-\alpha}} \right\} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{(b-t)^\alpha}{\alpha} |u(t)|dt \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b |u(x)|dt. \end{aligned}$$

où  $f \in L^1(a, b)$ . De plus, on a

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left\{ u(\xi) \int_\xi^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-\xi)^{1-\alpha}} \right\} d\xi = \int_0^x u(\xi)d\xi.$$

Inversement, supposons que la fonction de (1.20) s'annule en  $x = a$  et on définit

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Alors  $u \in L^1(a, b)$  et

$$\int_a^x u(\xi) d\xi = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^\xi \frac{f(t) dt}{(\xi-t)^\alpha} \Big|_{\xi=a}^{\xi=x} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} \quad (1.21)$$

Maintenant

$$\int_a^x u(\xi) d\xi = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(\xi) d\xi}{(t-\xi)^\alpha} \right)$$

Par conséquent, d'après (1.21),

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha}} - f(x) \right\} \frac{dt}{(x-t)^\alpha} = 0,$$

Maintenant  $f \in L^1(a, b)$  et  $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha}} \in L^1(a, b)$  par ce qui précède et par la partie unicité du théorème (1.14) nous avons

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha}} = 0.$$

□

# Chapitre 2

## Propriétés de l'opérateur d'Abel

Ce chapitre est consacré à la description de l'une des plus importantes propriétés de l'opérateur d'Abel

$$(J^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq a$$

Nous étudions  $J^\alpha$  comme un opérateur agissant dans  $L^p(0, a)$  dans [3.1](#) et comme un opérateur agissant dans des espaces de fonctions continues de Hölder dans [3.2](#). En [3.3](#), nous donnons quelques résultats de compacité pour l'opérateur  $J^\alpha$  et aussi pour des opérateurs plus généraux. Ces propriétés de base ont été trouvées dans [\[16\]](#).

### 2.1 Propriétés de continuité de l'opérateur d'Abel dans l'espace $L^p$

**Définition 2.1.1.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , on appelle produit de convolution  $f * g$  l'intégrale suivante

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \tag{2.1}$$

Pour plus de détails sur le produit de convolution voir [\[22\]](#), [\[14\]](#), [\[15\]](#).

**Remarque 2.1.1.** L'opérateur d'Abel  $J^\alpha$  agit sur une fonction  $f$  en effectuant une convolution de celui-ci avec une puissance. En fait

$$J^\alpha u = \chi_\alpha * \tilde{u} \quad \text{dans } (0, a) \tag{2.2}$$

où

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \text{ et } x \geq a \end{cases}$$

**Théorème 2.1.1.** Soit  $u \in L^p(0, a)$ ,  $0 < a < \infty$ ,  $1 \leq p \leq 1 - \alpha$ ,  
et  $s = p/(1 - p(\alpha - \epsilon))$  avec  $\epsilon > 0$  alors

$$\|J^\alpha u\|_{L^s(0,a)} \leq \frac{a^\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \left(1 - \frac{1-\alpha}{\epsilon}\right)^{1-\alpha+\epsilon} \|u\|_{L^p(0,a)} \quad (2.3)$$

**Preuve.**

L'inégalité (2.3) est une conséquence immédiate de l'inégalité de Young.

**Théorème 2.1.2.** (Inégalité de Young)

soit  $f \in L^q(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R})$ , où  $1 \leq q \leq +\infty$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$  alors

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad (2.4)$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \quad (2.5)$$

Pour la preuve de ce Théorème, voir le livre [14].

Pour  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ , l'inégalité (2.3) peut être améliorée. En fait, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.1.3.** Si  $0 < a \leq +\infty$  et  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ , on a l'inégalité suivante

$$\|J^\alpha u\|_{L^{\frac{p}{1-\alpha p}}(0,a)} \leq C(\alpha, p) \|u\|_{L^p(0,a)} \quad (2.6)$$

où  $C(\alpha, p)$  est une constante dépendant de  $\alpha$  et  $p$ .

**Preuve.**

Pour une preuve directe le lecteur peut consulter [16].

**Remarque 2.1.2.**  $J^\alpha$  n'est pas un opérateur continu de  $L^1(0, a)$  dans  $L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0, a)$ , même si  $a$  est fini. Voici un contre-exemple.

Soit la fonction

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\log \frac{1}{x})^{-\beta} & \text{pour } 0 < x < 1/2 \\ 0 & \text{pour } x \geq 1/2 \end{cases} . \quad (2.7)$$

On remarque que  $u \in L^1(0, 1)$  si  $\beta > 1$ , en effet

$$\int_0^1 \bar{u}(x) dx = \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

Mais

$$J^\alpha \bar{u} \notin L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0, a) \quad \text{si } 1 < \beta < 2 - \alpha.$$

En effet, pour  $x \leq 1/2$ , on a

$$J^\alpha \bar{u}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} d\lambda}{\lambda(1-\lambda)^{1-\alpha} (\log \frac{1}{\lambda x})^\beta} \geq \frac{x^{\alpha-1} (\log \frac{1}{x})^{1-\beta}}{(\beta - 1)\Gamma(\alpha)}$$

Donc

$$\int_0^1 |J^\alpha \bar{u}(x)|^{\frac{1}{1-\alpha}} dx \geq \frac{1}{(\beta - 1)\Gamma(\alpha)} \int_0^{1/2} \frac{1}{x} (\log \frac{1}{x})^{-\frac{\beta-1}{1-\alpha}} dx$$

et ceci est égal à  $\infty$  pour  $\beta \in (1, 2 - \alpha)$ . En fait,  $\frac{\beta-1}{1-\alpha} < 1$  pour les valeurs de  $\beta$  comprises entre 1 et  $2 - \alpha$ .

**Remarque 2.1.3.**  $J^\alpha$  n'est pas un opérateur continu de  $L^{\frac{1}{\alpha}}(0, 1)$  dans  $L^\infty(0, 1)$ . Nous prouvons qu'il existe un fonction  $v \in L^{\frac{1}{\alpha}}(0, 1)$  tel que  $J^\alpha v \notin L^\infty(0, 1)$ . Supposons le contraire, pour  $u \in L^\infty(0, 1)$  on a  $J^\alpha u \in L^\infty(0, 1)$ . Alors pour tout  $\varphi \in L^1(0, 1)$  on doit avoir

$$\left| \int_0^1 J^\alpha u \cdot \varphi dx \right| < +\infty \quad (2.8)$$

On en conclut alors à partir de cette inégalité et comme

$$\int_0^1 J^\alpha u \varphi dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (u(t)) \int_t^1 \varphi(x) (x - t)^{\alpha-1} dx dt$$

que pour tout  $\varphi \in L^1(0, 1)$  et pour tout  $u \in L^{\frac{1}{\alpha}}(0, 1)$ , nous avons

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^1 (u(t) \int_t^1 \varphi(x)(x-t)^{\alpha-1} dx) dt \right| < +\infty \quad (2.9)$$

ceci implique que (voir [3])

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 \varphi(x)(x-t)^{\alpha-1} dx \in L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0, 1) \quad (2.10)$$

pour chaque  $\varphi \in L^1(0, 1)$ . Cependant pour  $\varphi(x) = \bar{u}(1-x)$ , avec  $\bar{u}$  définie dans (2.1.7), la relation (2.10) (voir remarque 2.1.2) n'est pas satisfaite, contradiction.

**Théorème 2.1.4.** Soit  $u \in L^p(0, a)$  avec  $p > \frac{1}{\alpha}$ , alors  $J^\alpha u \in C^{\alpha-\frac{1}{p}}(0, a)$  et

$$\|J^\alpha u\|_\infty + a^{\alpha-\frac{1}{p}} [J^\alpha u]_{\alpha-\frac{1}{p}} \leq a^{\alpha-\frac{1}{p}} c(\alpha, p) \|u\|_{L^p(0,1)} \quad (2.11)$$

où  $c(\alpha, p)$  est une constante dépendant de  $\alpha$  et  $p$  et la semi-norme  $[u]_\gamma$  est définie pour  $0 < \gamma < 1$  par

$$[u]_\gamma = \sup_{x,y \in [0,a]} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}$$

**Preuve.**

De l'inégalité de Young pour produit de convolutions, on déduit

$$\|J^\alpha u\|_\infty \leq \frac{a^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha) \left(\frac{\alpha p - 1}{p-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}} \|u\|_{L^p(0,1)} \quad (2.12)$$

Maintenant, pour  $y \geq x$ , nous avons (en utilisant l'inégalité de Hölder avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  après le deuxième signe  $\leq$ )

$$\begin{aligned} |J^\alpha u(y) - J^\alpha u(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^y \frac{|u(t)| dt}{(y-t)^{1-\alpha}} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left| \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \right| |u(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_x^y \frac{dt}{(y-t)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{1/p'} \|u\|_{L^p(0,1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \int_0^x \left( \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}} \right) p' dt \right]^{1/p'} \|u\|_{L^p(0,1)}. \end{aligned}$$



Utilisant l'inégalité  $(b - a)^q \leq p^q - a^q$ , valable pour  $b \geq a \geq 0, q \geq 1$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^x \left( \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(y-t)^{1-\alpha}} \right)^{p'} dt &\leq \int_0^x \left( \frac{1}{(x-t)^{(1-\alpha)p'} } - \frac{1}{(y-t)^{(1-\alpha)p'} } \right)^{p'} dt \\ &= \frac{x^{1-(1-\alpha)p'} - y^{1-(1-\alpha)p'} + (y-x)^{1-(1-\alpha)p'}}{1 - (1-\alpha)p'} \end{aligned}$$

par suite

$$\left( \int_x^y \frac{dt}{(y-t)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{1/p'} = \frac{(y-x)^{\alpha - \frac{1}{p}}}{\left( \frac{\alpha p - 1}{p-1} \right)^{1 - \frac{1}{p}}}.$$

□

Les Théorèmes 2.1.3 et 2.1.4 peuvent être étendus à un opérateur plus général  $A_\alpha$  défini par

$$(A_\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x,t)u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2.13)$$

où  $K$  est une fonction définie sur l'ensemble

$$T = \{(x, t) \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq x \leq a\}.$$

Les deux prochains Théorèmes généralisent le Théorème 2.1.3.

**Théorème 2.1.5.** *Soit  $A_\alpha$  l'opérateur défini dans (2.13) avec  $K \in L^\infty(T)$ . Alors, si  $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ , l'opérateur  $A_\alpha$  est continu de  $L^p(0, a)$  dans  $L^q(0, a)$  avec  $q = \frac{1}{1-\alpha p}$ , et*

$$\|A_\alpha u\|_{L^q(0,a)} \leq c_1(\alpha, p) \|K\|_{L^\infty(T)} \|u\|_{L^p(0,a)} \quad (2.14)$$

où  $c_1(\alpha, p)$  est la même constante que dans le Théorème 2.1.3

**Théorème 2.1.6.** *L'opérateur  $A_\alpha$  est continu de  $L^1(0, a)$  dans  $L^{\frac{1}{1-\alpha}-\varepsilon}(0, a)$  et de  $L^{\frac{1}{\alpha}}(0, a)$  dans  $L^r(0, b)$  pour chaque  $\varepsilon \in (0, \frac{\alpha}{1-\alpha}]$ ,  $r \geq 1$ ,  $b \in [0, a]$ , ( $b < +\infty$  si  $a = +\infty$ ). De plus,*

$$\|A_\alpha u\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}-\varepsilon}(0,b)} \leq c_2(\alpha, b, \varepsilon) \|K\|_{L^\infty(T)} \|u\|_{L^1(0,a)} \quad (2.15)$$

où  $c_2(\alpha, b, \varepsilon)$  est la même constante comme dans le Théorème 2.1.3, et

$$\|A_\alpha u\|_{L^r(0,b)} \leq c_2(\alpha, b, r) \|K\|_{L^\infty(T)} \|u\|_{L^{1/\alpha}(0,a)}, \quad (2.16)$$

où  $c_2(\alpha, b, r) = \frac{b^{1/r}}{\Gamma(\alpha)} [1 + (1-\alpha)r]^{1-\alpha+\frac{1}{r}}$ .

La preuve de ce Théorème est une conséquence immédiate du le Théorème 2.1.3  
 Pour  $p > 1/\alpha$ , le Théorème suivant généralise le Théorème 2.1.4.

**Théorème 2.1.7.** *si  $K \in C^\lambda(t)$ ; alors  $A_\alpha u \in C^\mu([0, a])$  pour  $u \in L^p(0, a)$  où  $\mu = \min\{\alpha - \frac{1}{p}, \lambda\}$  et  $p > 1/\alpha$ . En outre pour  $\lambda > 0$ , l'inégalité suivante*

$$\|A_\alpha u\|_\infty + a^\mu [A_\alpha u]_\mu \leq c(\alpha, p) a^{\alpha - \frac{1}{p}} (\|K\|_\infty + a^\lambda [K]_\lambda) \|u\|_p, \quad (2.17)$$

est satisfaite où  $c(\alpha, p) = \frac{12}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{p-1}{\alpha p-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}$ .

## 2.2 Propriétés de continuité de l'opérateur d'Abel dans l'espace de Hölder

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques résultats sur la continuité de l'opérateur Abel agissant dans l'espace de Hölder  $C^\alpha[0, a]$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Définition 2.2.1.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $BC(\Omega)$  l'ensemble des fonctions continues et bornées*

*Pour  $u \in BC(\Omega)$  et  $0 < \beta < 1$  soit*

$$\|u\| = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

et

$$[u]_\beta = \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \right\}.$$

*Si  $[u]_\beta < \infty$  alors  $u$  est Hölder continue d'exposant  $\beta$ .*

*L'ensemble des fonctions  $\beta$ -Hölder continues sur  $\Omega$  est noté*

$$C^{0,\beta}(\Omega) = \{u \in BC(\Omega) : [u]_\beta < \infty\}$$

*et pour  $u \in C^\beta(\Omega)$ , on a*

$$\|u\|_{C^\beta(\Omega)} = \|u\|_a + [u]_\beta$$

**Théorème 2.2.1.** *Supposons que*

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1 - \alpha \quad (2.18)$$

$$u \in C^\beta[0, a], \quad u(0) = 0 \quad (2.19)$$

Alors  $J^\alpha u \in C^{\alpha+\beta}[0, a]$  et

$$[J^\alpha u]_{\alpha+\beta} \leq c(\alpha, \beta)[u]_\beta \quad (2.20)$$

où  $c(\alpha, \beta)$  est constant ne dépendant que de  $\alpha, \beta$ .

**Preuve.**

Pour  $0 < h \leq x \leq a$ , nous estimons la différence

$$J^\alpha u(x) - J^\alpha u(x - h). \quad (2.21)$$

Utilisant  $\int_y^x (t - y)^{\alpha-1} dt = \frac{u(t)}{\alpha} (x - y)^\alpha$  pour  $y=0$  et  $y=h$  et fractionnement  $\int_0^x = \int_0^h + \int_h^x$ , on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)[J^\alpha u(x) - J^\alpha u(x - h)] &= \int_0^x u(x - t)t^{\alpha-1} dt - \int_h^x u(x - t)(t - h)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{u(t)}{\alpha} [x^\alpha - (x - h)^\alpha] - \int_0^h [u(x) - u(x - t)]t^{\alpha-1} dt \\ &\quad - \int_h^x [u(x) - u(x - t)][t^{\alpha-1} - (t - h)^{\alpha-1}] dt. \end{aligned}$$

Nous désignons par A, B, C les valeurs absolues des trois termes de la dernière somme et donner des estimations supérieures pour chacun d'eux :

$$A = \left| \frac{u(t)}{\alpha} [x^\alpha - (x - h)^\alpha] \right| \leq \frac{[u]_\beta}{\alpha} x^\beta [x^\alpha - (x - h)^\alpha].$$

La concavité de la fonction  $x \rightarrow x^\gamma$  pour  $x \geq 0$ ,  $0 < \gamma < 1$  (pour  $0 < r < s$  on a  $s^\gamma - r^\gamma \leq (s - r)^\gamma$ ), on obtient

$$\begin{aligned} x^\beta [x^\alpha - (x - h)^\alpha] &= [x^\beta - (x - h)^\beta] [x^\alpha - (x - h)^\alpha] + (x - h)^\beta [x^\alpha - (x - h)^\alpha] \leq \\ &h^{\alpha+\beta} + (x - h)^\beta [x^\alpha - (x - h)^\alpha]. \end{aligned}$$

Nous distinguons les deux cas  $x \leq 2h$  et  $x \geq 2h$ .

Dans le premier cas, nous avons

$$(x - h)^\beta [x^\alpha - (x - h)^\alpha] \leq h^{\alpha+\beta}$$

dans le second cas, nous trouvons (en utilisant le fait que la dérivée première de  $x^\alpha$  est décroissante)

$$(x-h)^\beta [x^\alpha - (x-h)^\alpha] \leq \alpha(x-h)^{\beta+\alpha-1}h \leq \alpha h^{\alpha+\beta}.$$

Dans les deux cas

$$(x-h)^\beta [x^\alpha - (x-h)^\alpha] \leq h^{\alpha+\beta}.$$

donc

$$A \leq \frac{2[u]_\beta}{\alpha} h^{\alpha+\beta}.$$

$$\begin{aligned} B &= \left| \int_0^h [u(x) - u(x-t)] t^{\alpha-1} dt \right| \\ &\leq [u]_\beta \int_0^h t^{\alpha+\beta-1} dt = \frac{[u]_\alpha}{\alpha+\beta} h^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \left| \int_h^x [u(x) - u(x-t)] [t^{\alpha-1} - (t-h)^{\alpha-1}] dt \right| \\ &\leq [u]_\beta h^{\alpha+\beta} \int_1^{\frac{x}{h}} s^\beta |s^{\alpha-1} - (s-1)^{\alpha-1}| ds \\ &\leq [u]_\beta h^{\alpha+\beta} \int_1^\infty t^\beta |t^{\alpha-1} - (t-1)^{\alpha-1}| dt. \end{aligned}$$

Maintenant à partir de  $\alpha + \beta - 2 < -1$  et  $\alpha - 1 < 1$ , nous concluons que

$$c_1(\alpha, \beta) = \int_1^\infty t^\beta |t^{\alpha-1} - (t-1)^{\alpha-1}| dt < \infty.$$

Par conséquent, nous avons

$$c \leq c_1(\alpha, \beta) [u]_\beta h^{\alpha+\beta}.$$

un l'estimations au A, B, C, entraînent

$$|J^\alpha u(x) - J^\alpha u(x-h)| \leq c(\alpha, \beta) [u]_\beta h^{\alpha+\beta}.$$

avec

$$c(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + \beta} + c_1(\alpha, \beta) \right\}.$$

□

Théorème 2.2.1 illustre certaines analogies et différences entre opérateurs intégrale d'ordre fractionnaire et d'ordre entier.

En effet, on sait que  $u \in C^\beta[0, a]$ ,  $0 < \beta < 1$ , implique que la fonction primitive  $J^\alpha u(x) = \int_0^x u(t) dt \in C^{1+\beta}[0, a]$  et l'intégrale répétée  $J^n u$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  appartient à  $C^{n+\beta}[0, a]$ . De manière analogue, si  $u$  satisfait la condition  $u(0) = 0$  et est en  $C^\beta[0, a]$ ,  $0 \leq \beta < 1 - \alpha$  alors  $J^\alpha u \in C^{\alpha+\beta}[0, a]$ .

Cependant, contrairement au cas de l'application de l'opérateur  $J = J^1$  (Ou l'un des opérateurs  $J^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ ), on exige l'hypothèse supplémentaire  $u(0) = 0$  pour  $0 < \alpha < 1$ , si nous voulons  $J^\alpha u$  d'être "plus normal" de  $u$ .

En fait, pour la fonction  $u = 1$ , on obtient  $(J^\alpha u)(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$  et nous avons donc un exemple simple d'une fonction  $u \in C^\infty[0, a]$  transformée en une fonction qui n'est pas encore en  $C^\beta[0, a]$  mais seulement en  $C^\alpha[0, a]$ . Donc, si  $u(0) \neq 0$  il est une perte de la régularité. Nous remarquons que le Théorème 2.2.1 n'est pas vrai si  $\alpha + \beta = 1$ . (Voir [16]) pour un contre-exemple éclairant.

Avant de terminer ce paragraphe, nous rappelons au lecteur qu'il existe une abondante littérature sur les propriétés des opérateurs d'Abel dans des espaces d'ordre fractionnaire. Dans [16], l'opérateur Abel est également étudiée pour les fonctions  $u$  satisfaisant les conditions de Lipschitz "intégrés"

$$\int_0^a |u(x) - u(x - h)|^p dx = o(h^{pk}) \tag{2.22}$$

où  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 < k \leq 1$  Pour ces fonctions, ils montrent que si

$$0 < \alpha < 1 - k$$

alors

$$\int_0^a |(J^\alpha u)(x) - (J^\alpha u)(x - h)|^p dx = o(h^{p(k+\alpha)}) \tag{2.23}$$

(En (2.22) et (2.23) du côté droit peut être remplacé par 0).

## 2.3 Compacité d'opérateurs d'Abel

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques propriétés de compacité d'opérateurs Abel agissant dans des espaces de Hölder de fonctions continues et dans les espaces  $L^p$ .

Nous avons d'abord la liste des pré-requis bien connus de l'analyse fonctionnelle. Pour plus de détails nous renvoyons à [22],[30], [23].

**Définition 2.3.1.** *Un opérateur linéaire  $T : X \longrightarrow Y$ , où  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach, est dit "compact" (ou "complètement continue") si l'image  $T(B)$  de la boule  $B = \{u \in X \mid \|u\| \leq R\}$ , est relativement compact dans  $Y$  ou  $\overline{T(B)}$  est compact dans  $Y$ .*

Nous allons utiliser dans la suite une importante propriété de la notion de compacité.

**Propriété 2.3.1.** *Dans un espace de Banach  $V$  un sous-ensemble  $U$  est relativement compact si toute suite d'éléments  $(u_n)$  dans  $U$  contient un sous-suite converge dans  $V$ .*

**Théorème 2.3.1.** *(Arzela-Ascoli)*

*Soit  $J$  un sous-ensemble de  $C^0[a, b]$ , avec  $-\infty < a < b < +\infty$ . Alors  $J$  est relativement compact dans  $C^0[a, b]$  si et seulement si toutes les fonctions dans  $J$  sont équibornées et équicontinues.*

En disant "toutes les fonctions de  $J$  sont équicontinues et équibornées" nous voulons dire qu'il existe un nombre réel  $M$  tel que  $\|u\|_{C^0[a,b]} \leq M$ , pour chaque  $u \in J$  (équibornée), et que pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\delta_\epsilon > 0$  en fonction de  $\epsilon$  seulement, de telle sorte que  $|x - y| < \delta_\epsilon$  implique  $|u(x) - u(y)| < \epsilon$ , pour chaque  $u \in J$  (équicontinuité). Le lemme suivant donne un exemple utile d'un ensemble compact dans  $C^\lambda[0, a]$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $J$  un sous-ensemble de  $C^\mu[0, a]$ , où  $0 < \mu < 1$ . Si toutes les fonctions dans  $J$  sont équibornées et vérifiant*

$$[u]_\mu \leq L < \infty \quad \text{pour chaque } u \in J \quad (2.24)$$

*alors  $J$  est relativement compact dans  $C^\lambda[0, a]$  pour chaque  $\lambda \in (0, \mu)$ .*

**Preuve.**

Soit  $(u_n)_n$  une suite de  $J$ . Comme toutes les fonctions de  $J$  sont équibornées et que la condition (2.24) est vérifiée, alors l'équicontinuité est assurée, nous concluons que il existe une sous-suite  $(u_{n_k})_k$  de  $(u_n)_n$  et une fonction  $u \in C^0[0, a]$  de sorte que  $(u_{n_k})_k$  converge vers  $u$  par  $C^0[0, a]$ ; et par (2.24)  $u \in C^\mu[0, a]$ .

Maintenant, pour prouver que  $J$  est relativement compact dans  $C^\lambda[0, a]$ , il suffit de montrer que  $C^\mu[0, a] \subset C^\lambda[0, a]$  pour  $0 < \lambda < \mu$  et que  $(u_{n_k})_k$  converge vers  $u$  dans  $C^\lambda[0, a]$ .

Pour  $v \in C^\mu[0, a]$  et  $\delta > 0$  on a

$$\frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\lambda} \leq \begin{cases} [v]_\mu \delta^{\mu-\lambda} & \text{pour } |x - y| \leq \delta \\ 2\|v\|_{C^0[0, a]} \delta^{-\lambda} & \text{pour } |x - y| > \delta \end{cases} \quad (2.25)$$

Minimiser le côté droit par rapport à  $\delta$  donne

$$[v]_\lambda \leq 2^{1-\frac{\lambda}{\mu}} \|v\|_{C^0[0, a]}^{1-\frac{\lambda}{\mu}} ([v]_\mu)^{\frac{\lambda}{\mu}}. \quad (2.26)$$

Par (2.26)  $C^\lambda[0, a] \supset C^\mu[0, a]$ , donc  $u \in C^\lambda[0, a]$

et

$$[u_{n_k} - u]_\mu \leq 2L^{\frac{\lambda}{\mu}} \|u_{n_k} - u\|_{C^0[0, a]}^{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Par conséquent, puisque  $(u_{n_k})_k$  converge vers  $u$  dans  $C^0[0, a]$ , la suite  $(u_{n_k})_k$  converge vers  $u$  dans  $C^\lambda[0, a]$ .  $\square$

Maintenant, nous présentons quelques théorèmes de compacité de l'opérateur d'Abel suivant

$$(A_\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x, t)u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

**Théorème 2.3.2.** *soit  $K \in C^\lambda(T)$  tel que  $0 \leq \lambda < 1$  et  $p > \frac{1}{\alpha}$ . Alors l'opérateur*

$$A_\alpha : L^p(0, a) \longrightarrow C^{\mu'}([0, a])$$

*est compact pour chaque  $\mu' \in [0, \mu)$ , où  $\mu = \min\{\alpha - \frac{1}{p}, \lambda\}$ .*

**Preuve.**

Soit  $\lambda \in (0, 1)$  et  $B_R = \{u \in L^p(0, a) \mid \|u\|_p \leq R\}$ . Pour prouver que  $A_\alpha(B_R)$  est relativement compact dans  $C^{\mu'}([0, a])$  pour chaque  $\mu' < \mu$ , nous utilisons le Lemme 2.3.1.

Si  $u \in B_R$  nous avons, d'après le Théorème 2.1.7

$$\|A_\alpha u\|_\infty + a^\mu [A_\alpha u]_\mu \leq C(\alpha, p) a^{\alpha - \frac{1}{p}} (\|K\|_\infty + a^\lambda [K]_\lambda) R.$$

Par conséquent, du Lemme 2.3.1, on déduit que l'ensemble  $A_\alpha(B_R)$  est relativement compact dans  $C^{\mu'}([0, a])$  pour chaque  $\mu' < \mu$ .

Soit  $\lambda = 0$ . Par quelques manipulations similaires à celles faites dans la preuve du Théorème 2.1.3, nous obtenons pour chaque  $u \in B_R$

$$|(A_\alpha u)(y) - (A_\alpha u)(x)| \leq \frac{6}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{p-1}{\alpha p - 1}\right)^{1 - \frac{1}{p}} (\|K\|_\infty (y-x)^{\alpha - \frac{1}{p}} + \sup_t |K(y, t) - K(x, t)| \cdot a^{\alpha - 1/p}) R \quad (2.27)$$

Comme  $K \in C^0(T)$ , (2.27) donne l'équicontinuité de  $\{A_\alpha u\}$  et  $u$  dans  $C^0([0, t])$ .  $\square$

Maintenant, posons  $T = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq x \leq a\}$ .

**Théorème 2.3.3.** *Soit  $K \in C^0(T)$  et  $1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$ . Alors  $A_\alpha$  est compact comme un opérateur de  $L^p(0, a)$  à  $L^q(0, a)$  pour chaque  $q \in [1, \frac{p}{1-p\alpha})$ .*

La preuve de ce Théorème est essentiellement analogue à celle du Théorème 2.3.2 sauf pour certains arguments techniques.

Les lecteurs intéressés peuvent se référer à [37], voir aussi [25].

**Remarque 2.3.1.** *Le Théorème 2.3.3 n'est pas valable pour  $q = \frac{p}{1-p\alpha}$ , même si  $p \in (1, \frac{1}{\alpha})$  (pour  $p = 1$  et  $p = \frac{1}{\alpha}$ , nous avons vu (voir les remarques 2.1.2 et 2.1.3), que l'inclusion  $J^\alpha L^p \subset L^{\frac{p}{1-p\alpha}}$  n'est pas valable). Nous montrons ceci par un exemple donné par de [37]. Soit*

$$u_n(x) = \begin{cases} n^{1/p} & \text{pour } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{pour } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



avec  $p \in (1, \frac{1}{\alpha})$ . Nous avons

$$J^\alpha u_n(x) = \begin{cases} \frac{n^{1/p} x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} & \text{pour } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{n^{1/p}}{\Gamma(1+\alpha)} [x^\alpha - (x - \frac{1}{n})^\alpha] & \text{pour } \frac{1}{n} \leq x < 1 \end{cases}$$

Par suite

$$\|u_n\|_{L^p(0,1)} = 1,$$

et

$$\|J^\alpha u_n - J^\alpha u_m\|_{L^{\frac{p}{1-\alpha p}}(0,1)} \geq \frac{(1-\alpha p)^{\frac{1}{p}-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} [1 - (\frac{n}{m})^{1/p}] \quad (2.28)$$

pour  $m > n$ . On voit que  $(J^\alpha u_n)_n$

ne peut pas contenir une sous-suite convergente dans  $L^{\frac{p}{1-\alpha p}}(0,1)$ .



# Chapitre 3

## Théorèmes d'existence et d'unicité

Dans ce chapitre, nous allons démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité pour des équations d'Abel linéaires et non linéaires. Nous traitons l'équation linéaire

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x,t)u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

en [4.1](#) et l'équation non linéaire

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x,t,u(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

en [4.2](#). Le lecteur peut se référer aux travaux suivants [31], [34], [35], [29], [27], [31].

### 3.1 Le cas linéaire

Dans les théorèmes suivants, nous utilisons les notations suivantes

$$C_*^\beta[0, a] = \{u \in C^\beta[0, a] / u(0) = 0\} \text{ pour } 0 < \beta < 1,$$

$$D^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} \text{ pour } 0 < \alpha < 1.$$

**Théorème 3.1.1.** *L'équation*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 \leq \alpha \leq a, \quad (3.1)$$

a une unique solution  $u \in C_*^\beta[0, a]$  avec  $0 < \beta < 1 - \alpha$  si et seulement si

$$f \in C_*^{\alpha+\beta}[0, a].$$

De plus  $u = D^\alpha f$  et

$$\|u\|_{C^\beta[0, a]} \leq C(\alpha, \beta)(1 + a^\beta)[f]_{\alpha+\beta} \quad (3.2)$$

où  $C(\alpha, \beta)$  est une constante dépendant de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Nous donnons ici seulement un résumé de la preuve.

**Preuve.**

L'unicité de la solution découle directement de l'équation, voir aussi [28]. En fait, en posant  $f = 0$  dans (3.1), nous avons

$$\int_0^x u(t)dt = J^{1-\alpha} J^\alpha u(x) = 0, \text{ ce qui implique que } u = 0 \text{ dans } [0, a].$$

En outre, s'il existe une solution  $u \in C_*^\beta[0, a]$  de (3.1), nous avons par Théorème 2.2.1

$$f = J^\alpha u \in C_*^{\alpha+\beta}[0, a] \quad .$$

Extension  $f \in C_*^{\alpha+\beta}[0, a]$  par le paramètre  $f(x) = 0$  pour  $-\infty < x < 0$ , nous avons  $u = D^\alpha f$  avec

$$D^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x (f(x) - f(t))(x-t)^{-\alpha-1} dt \quad . \quad (3.3)$$

L'équation (3.1.2) est due à l'intégration par parties suivante

$$\begin{aligned} D^\alpha f &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{d}{dt} (f(t) - f(x)) \frac{dt}{(x-t)^\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \quad . \end{aligned}$$

Pour plus de détails voir [16].

L'inégalité (3.2) peut être prouvée par un argument analogue à celui utilisé dans la preuve du Théorème 2.2.1.  $\square$

En utilisant les résultats de [16], d'autres théorèmes d'existence et l'unicité avec les estimations de type (3.2) sont obtenus dans l'espace  $L^p$  satisfaisant les conditions

de Lipschitz .Par exemple, Hardy et Littlewood ont prouvé que si  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\alpha < \beta \leq 1$  et

$$\int_0^a |f(x) - f(x-h)|^p dx = o(h^{p\beta}) \quad (3.4)$$

alors la solution  $u = D^\alpha f$  de l'équation  $J^\alpha u = f$  existe, avec  $u \in L^p(0, a)$  et

$$\int_0^a |u(x) - u(x-h)|^p dx = o(h^{p(\beta-\alpha)}) \quad .$$

**Théorème 3.1.2.** *Soit  $X$  un espace de Banach et  $A : X \longrightarrow X$  un opérateur linéaire borné. Supposons que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n f$  est convergente dans  $X$  pour tout  $f \in X$ . Alors, pour tout  $g \in X$  donné, l'équation*

$$(I - A)u = g \quad , \quad (3.5)$$

où  $I$  est l'opérateur identité, admet une unique solution donné par

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A^n g \quad . \quad (3.6)$$

**Preuve.**

(a) Unicité :

Supposons que l'équation (3.5) admet deux solutions  $u_1, u_2$ . Pour  $u = u_2 - u_1$ , nous avons  $u = Au$ , donc  $u = A^n u$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or comme la série  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n u$  est convergente alors on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n u = 0$ , donc  $u = 0$  et  $u_1 = u_2$

(b) Existence :

$u = \sum_{n=0}^{\infty} A^n g$  est une solution de (3.5) car

$$(I - A)u = \lim_{N \rightarrow \infty} (I - A) \sum_{n=0}^N A^n g = \lim_{N \rightarrow \infty} (g - A^{N+1}g) = g.$$

□

**Remarque 3.1.1.** *Remarquons que si la série  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$  converge en norme, alors*

$$\|u\|_X \leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right\|_{L(X)} \cdot \|f\|_X \quad (3.7)$$

En utilisant le théorème précédent, nous pouvons prouver l'existence et d'unicité de solutions pour l'équation  $A_\alpha u = f$ , où

$$(A_\alpha v)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x,t)v(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (3.8)$$

Nous considérons cette équation avec les hypothèses suivantes sur  $K$  :

$$K \in C^0(T), \quad \text{où } T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq x \leq a\}, \quad (3.9)$$

$$K(x,x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in [0, a] \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} \in L^\infty(T). \quad (3.11)$$

**Théorème 3.1.3.** *Si  $K \in C^0(T)$  satisfait les hypothèses (3.9), (3.10) (3.11) et  $f$  est une fonction vérifiant*

$$D^\alpha f \in L^p(0, a) \quad (3.12)$$

alors l'équation

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x,t)u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (3.13)$$

admet une unique solution  $u \in L^p(0, a)$ , satisfaisant l'inégalité

$$\|u\|_{L^p(0,a)} \leq C(Ma, p) \|D^\alpha f\|_{L^p(0,a)} \quad (3.14)$$

où  $M = \sup_T \left| \frac{\partial K}{\partial x} \right|$  et  $C(Ma, p)$  est une constante.

**Preuve.**

Supposons que  $K$  satisfait (3.10) alors

$$A_\alpha u = J^\alpha(I - B_\alpha) \quad (3.15)$$

où  $I$  est l'opérateur identité dans  $L^p(0, a)$  et  $B_\alpha$  est définie par

$$(B_\alpha u)(x) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \{v(t) \int_t^x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{H(\xi, t)}{(\xi - t)^{1-\alpha}} \right) \frac{d\xi}{(x - \xi)^\alpha} \} dt \quad (3.16)$$

avec  $H(x, t) = K(x, t) - K(t, t)$ . La formule (3.15) est une conséquence du calcul suivant.

$$\begin{aligned} (A_\alpha u)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{H(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} u(t) dt \\ &= J^\alpha u + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{H(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} u(t) dt \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur  $D^\alpha$  on obtient, après un changement de l'ordre de l'intégration,

$$(D^\alpha A_\alpha)u(x) = u(x) + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^x \left\{ u(t) \int_t^x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{H(\xi, t)}{(\xi-t)^{1-\alpha}} \right) \frac{d\xi}{(x-\xi)^\alpha} \right\} dt$$

donc la formule (3.15). Maintenant, nous prouvons que (3.13) est équivalente à l'équation

$$(I - B_\alpha)u = D^\alpha f \quad (3.17)$$

Posons

$$L(x, t) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_t^x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{H(\xi, t)}{(\xi-t)^{1-\alpha}} \right) \frac{d\xi}{(x-\xi)^\alpha} \quad (3.18)$$

nous pouvons utiliser le Théorème (3.1.2) pour résoudre l'équation (3.17). Nous devons analyser la convergence de la série

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.19)$$

où  $u_0 = D^\alpha f$  et  $u_n = B_\alpha^n u_0$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Prenant la récurrence suivante

$$u_n = B_\alpha u_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \quad (3.20)$$

et compte tenu de (3.18), commençant par donner une estimation pour  $|L(x, t)|$ . De

$$L(x, t) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_t^x (x-\xi)^{-\alpha} (\xi-t)^{\alpha-1} \{(\alpha-1)(\xi-t)^{-1} H(\xi, t) + H_\xi(\xi, t)\} d\xi$$

et

$$|(\alpha-1)(\xi-t)^{-1} H(\xi, t) + H_\xi(\xi, t)| \leq 2M$$

qui découle de (3.11), on obtient

$$|L(x, t)| \leq 2M \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_t^x (x - \xi)^{-\alpha} (\xi - t)^{\alpha-1} d\xi = 2M$$

où l'intégrale ici représente la fonction bêta (voir [36]). Ainsi, à partir de (3.18) et

$$(B_\alpha v)(x) = \int_0^x L(x, t)v(t)dt,$$

on obtient

$$|(B_\alpha v)(x)| \leq 2M \int_0^x |v(t)|dt \quad \text{pour } v \in L^p(0, a) \quad . \quad (3.21)$$

La convergence de la série (3.19) et, par conséquent, la validité de Théorème 3.1.3 est une conséquence immédiate du lemme suivant.

**Lemme 3.1.1.** *Pour  $0 \leq x \leq a$  et  $n \in \mathbb{N}$  nous avons*

$$\|u_n\|_{L^p(0,x)} \leq c_n(p)(2Mx)^n \|u_0\|_{L^p(0,x)} \quad (3.22)$$

avec  $c_n(p) = p^{-n/p}(n!)^{-1/p}$  si  $1 \leq p < +\infty$ ,  $c_n(\infty) = 1/n!$  .

**Preuve.**

Avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (en particulier  $\frac{1}{p} = 0$  et  $q = 1$ , si  $p = \infty$ ) on obtient pour  $v \in L^p(0, a)$  et  $0 \leq t \leq x \leq a$ , par (3.21) et l'inégalité de Hölder,

$$|(B_\alpha v)(t)| \leq 2M \|v\|_{L^p(0,t)} t^{1-\frac{1}{p}}. \quad (3.23)$$

en utilisant la formule de récurrence sur  $u_n$  et en posant  $v = u_0$  on obtient,

$$\|u_1\|_{L^p(0,x)} \leq 2M \|u_0\|_{L^p(0,x)} p^{-1/p} x \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u_1\|_{L^\infty(0,x)} \leq 2M \|u_0\|_{L^\infty(0,x)} x \quad \text{pour } p = \infty$$

Ces inégalités montrent que l'inégalité(3.22) est valable pour  $n = 1$ . Supposant que c'est vrai aussi pour un indice  $n = m \geq 1$ , on obtient par (3.23),

$$|u_{m+1}(t)| \leq 2M \|u_m\|_{L^p(0,t)} t^{1-\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq x \leq a;$$

$$\|u_{m+1}\|_{L^p(0,x)} \leq (2M)^{m+1} c_m(p) \|u_0\|_{L^p(0,x)} \cdot \|w\|_{L^p(0,x)}$$



avec  $w(t) = t^m t^{1-\frac{1}{p}}$  et

$$\|w\|_{L^p(0,x)} = \frac{x^{m+1}}{(p(m+1))^{1/p}} \text{ dans le cas } 1 \leq p < \infty.$$

Dans le cas  $p = \infty$  nous utilisons (3.21) avec  $|v(t)| \leq \|v\|_{L^\infty(0,t)}$ . On obtient, compte tenu de la définition de la  $c_n(p)$ , le résultat souhaité

$$\|u_{m+1}\|_{L^p(0,x)} \leq (2Mx)^{m+1} c_{m+1}(p) \|u_0\|_{L^p(0,x)}.$$

Le lemme étant démontré, nous voyons que l'unique solution de (3.13) est donnée par (3.19) et nous pouvons identifier la constante  $c(Ma, p)$  dans la formule (3.14) du Théorème 3.1.2. La formule (3.22) nous permet de prendre

$$c(Ma, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(P) (2Ma)^n$$

En particulier, nous avons  $c(Ma, \infty) = \exp(2Ma)$ . □

La condition (3.4) implique que  $D^\alpha f \in L^p(0, a)$  pour  $1 \leq p < +\infty$ . D'autre part, si  $p = +\infty$ ,  $f(0) = 0$  et  $f' \in L^r(0, a)$ ,  $r > \frac{1}{1-\alpha}$ , alors  $D^\alpha f \in L^\infty(0, a)$ .

En effet, une intégration par parties donne

$$D^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t) dt}{(x-t)^\alpha} = J^{1-\alpha} f',$$

et d'après le Théorème 3.1.3, nous trouvons  $D^\alpha f \in C^{1-\alpha-\frac{1}{r}}[0, a]$ , d'où  $D^\alpha f \in L^\infty(0, a)$ . Des résultats d'existence et d'unicité peuvent être prouvés aussi dans les espaces  $C^m[0, 1]$ . La preuve du théorème suivant est analogue à celle de Théorème 3.1.2.

**Théorème 3.1.4.** *Soit  $K \in C^{m+1}[0, a]$  avec  $T$  comme dans (3.9) et supposons que*

$$K(x, x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in [0, a]. \quad (3.24)$$

*Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0, a]$  avec*

$$D^\alpha f \in C^m([0, a]). \quad (3.25)$$

*Alors l'équation*

$$A_\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x, t) u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

admet une unique solution  $u$  dans  $C^m[0, a]$  et

$$\|u\|_{C^m([0,a])} \leq c(M_{m+1}, a) \|D^\alpha f\|_{C^m([0,a])} \quad (3.26)$$

où  $M_{m+1} = \|K\|_{C^{m+1}[0,a]}$  et  $c(M_{m+1}, a)$  une constante dépendant de  $M_{m+1}$  et  $a$ .

## 3.2 Le cas non-linéaire

Nous allons maintenant dans cette partie étudier l'existence et l'unicité de solution d'une équation d'Abel non linéaire. Cette équation est du type général (voir aussi [15], [35])

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{K(x, t, u(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (3.27)$$

où  $K : T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions données et  $u : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  est inconnue. Le lecteur doit se rappeler la définition de  $T$ , à savoir  $T = \{(x, t) / 0 \leq t \leq x \leq a\}$  avec  $0 < \alpha < 1$ .

Dans le théorème suivant nous aurons besoin de trois hypothèses sur la fonction  $K(x, t, w)$ , à savoir

–

$$K \in C^1(T \times \mathbb{R}). \quad (3.28)$$

– Il existe une constante  $M < +\infty$  tel que

$$\left| \frac{\partial K}{\partial x}(x, t, w) - \frac{\partial K}{\partial x}(x, t, \bar{w}) \right| \leq M|w - \bar{w}| \text{ pour chaque } (x, t) \in T \text{ et pour } w, \bar{w} \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

–

$$\frac{\partial K}{\partial w}(x, x, w) \geq c > 0 \text{ pour } (x, w) \in [0, a] \times \mathbb{R} \text{ avec } c \text{ constante} \quad (3.30)$$

**Théorème 3.2.1.** *Supposons que (3.28), (3.29), (3.30) satisfaites et  $f$  vérifiant la condition*

$$J^{1-\alpha} f \in C^1[0, a], \quad J^{1-\alpha} f(0) = 0. \quad (3.31)$$

alors l'équation (3.27) admet une unique solution continue. De plus, si (3.31) est satisfaite pour  $f = f_1$  et  $f = f_2$  et  $u_1, u_2$  sont les solutions correspondantes de (3.27) alors l'inégalité

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0,a)} \leq c_1(\alpha) \exp\{c_2(\alpha)Ma\} \|D^\alpha f_1 - D^\alpha f_2\|_{L^\infty(0,a)} \quad (3.32)$$

est vraie avec  $c_1(\alpha), c_2(\alpha)$  des constantes ne dépendant pas de  $f_1, f_2$ .

**Preuve.**

En appliquant à (3.27) l'opérateur  $J^{1-\alpha}$  nous obtenons l'équation équivalente suivante

$$\int_0^x H(x, t, u(t)) dt = J^{1-\alpha} f(x) \quad (3.33)$$

où

$$H(x, t, w) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_t^x \frac{K(y, t, w) dy}{(x-y)^\alpha (y-t)^{1-\alpha}} \text{ pour } (x, t) \in T, w \in \mathbb{R} \quad (3.34)$$

Cette fonction a les trois propriétés suivantes :

$$H \in^1 (T \times \mathbb{R}). \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \text{ est Lipschitz-continue par rapport à } w. \quad (3.36)$$

avec la même constante de Lipschitz que  $\frac{\partial H}{\partial x}$  dans (3.29).

$$\frac{\partial H}{\partial w}(x, x, w) \geq c(\alpha) > 0 \text{ où } c(\alpha) \text{ est une constante dépendant de } \alpha. \quad (3.37)$$

(3.36) et (3.37) peuvent être facilement prouvées en utilisant la représentation paramétrique

$$H(x, t, \xi) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\lambda^{1-\alpha} (1-\lambda)^\alpha} K(\lambda(x-t) + t, t, \xi) d\lambda. \quad (3.38)$$

En dérivant des deux côtés de (3.33), on obtient l'équation intégrale (avec  $H_x = \frac{\partial H}{\partial x}$ )

$$H(x, x, u(x)) + \int_0^x H_x(x, t, u(x)) dt = D^\alpha f(x) \quad (3.39)$$

ce qui est équivalent à l'équation (3.33). Si  $u$  est une solution continue de (3.33), on obtient (3.39) par la différentiation.

Inversement, si  $u$  est une solution continue de (3.39) nous obtenons par intégration

$$\int_0^x H(x, t, u(x)) dt - J^{1-\alpha} f(x) = 0,$$

à l'aide de la continuité de  $H$  et de l'hypothèse  $J^{1-\alpha} f(0) = 0$ .

Maintenant, le théorème de Dini pour des fonctions implicites donne l'existence

d'une fonction  $\varphi$  ayant les trois propriétés suivantes

$$\varphi \in C^1([0, a] \times I), \text{ ou } I \text{ est l'image de } [0, a] \times \mathbb{R} \text{ sous la fonction } H(x, x, w). \quad (3.40)$$

$$\text{pour chaque } x \in [0, a] \text{ et } z \in I \text{ nous avons} \quad (3.41)$$

$$H(x, x, \xi) = z, \text{ ssi } \xi = \varphi(x, z).$$

$$0 < \varphi_z(x, z) \leq \frac{1}{c(\alpha)} \text{ pour chaque } x \in [0, a] \text{ et } z \in I. \quad (3.42)$$

Nous prouvons uniquement (3.42). Par (3.41) on a  $H(x, x, \varphi(x, z)) = z$  et par différentiation, on obtient

$$H_w(x, x, \varphi(x, z))\varphi_z(x, z) = 1$$

à partir de laquelle, en utilisant (3.37), on obtient (3.42).

Nous voyons que l'équation (3.39) est équivalente à

$$u(x) = \varphi(x, D^\alpha f(x) - \int_0^x H_x(x, t, u(x))dt). \quad (3.43)$$

et cette équation peut être résolu par la méthode des approximations successives en posant

$$u_0(x) = 0$$

$$u_n(x) = \varphi(x, D^\alpha f(x) - \int_0^x H_x(x, t, u_{n-1}(x))dt) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Nous montrons que cette suite de fonctions converge vers une fonction continue  $u$  solution de (3.43). Pour  $n \geq 1$  nous avons

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &\leq \frac{1}{c(\alpha)} \left| \int_0^x (H_x(x, t, u_n(x)) - \int_0^x H_x(x, t, u_{n-1}(x)))dt \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{c(\alpha)} \int_0^x |u_n(t) - u_{n-1}(t)|dt \end{aligned}$$

où  $M$  est la constante de Lipschitz de  $H_x(x, t, w)$  qui est la même que celle de  $K_x$ . Par suite, par récurrence on a

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left( \frac{Mx}{c(\alpha)} \right)^n \|u_1\|_{L^\infty(0, a)} \quad (3.44)$$

pour chaque  $n \geq 0$ , et nous reconnaissons la convergence de la suite  $(u_n)$  vers une fonction continue  $u$ . Les propriétés de continuité de  $\varphi$  et de  $H$  font de  $u$  une solution

de l'équation intégrale.

Pour obtenir l'unicité et l'estimation (3.32), nous considérons des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  satisfaisant (3.31) et les solutions  $u_1$  et  $u_2$  de (3.27) pour  $f = f_1$  et  $f = f_2$  respectivement. Alors

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \frac{1}{c(\alpha)} \{ |D^\alpha f_1(x) - D^\alpha f_2(x)| + M \int_0^x |u_1(t) - u_2(t)| dt \}$$

donc

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \frac{1}{c(\alpha)} \{ \|D^\alpha f_1 - D^\alpha f_2\|_{L^\infty(0,a)} + M \int_0^x |u_1(t) - u_2(t)| dt \}$$

Par l'inégalité de Gronwall (voir la remarque 3.2.1), on obtient l'estimation

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \frac{e^{\frac{Mx}{c(\alpha)}}}{c(\alpha)} \|D^\alpha f_1 - D^\alpha f_2\|_{L^\infty(0,a)}$$

ce qui implique l'unicité et (3.32).

Dans la démonstration précédente, nous avons appliqué le Lemme de Gronwell suivant

**Lemme 3.2.1.** *Lemme de Gronwall* : Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions continues définies sur  $[0, a]$  et soit  $c$  un nombre réel non négatif. Supposons pour  $0 \leq x \leq a$ , l'inégalité

$$v(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)dt.$$

est vérifiée. Alors,

$$v(x) \leq c \exp\left(\int_0^x u(t)dt\right) \text{ pour } 0 \leq x \leq a.$$

Pour une preuve de ce Lemme voir [25].



# Bibliographie

- [1] N.H. Abel :Solution de quelques problèmes h l'aide d'intégrales definies. Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiana 1823, 11-27.
- [2] N.H. Abel : Résolution d'un problème de mécanique. Journal fir die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von Crelle, Bd. I, Berlin 1826, 97-101.
- [3] H.L. Royden : Real analysis. MacMillan Publishing Co., New York 1968.
- [4] M. Abramowitz and I.A. Stegun : Handbook of mathematical functions. Dover Publications, New York 1972.
- [5] R.A. Adams : Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.
- [6] K. Aki and P.G. Richards : Quantitative seismology, Vol. II. W.H. Freeman and Company, San Francisco 1980.
- [7] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Polya : Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge 1978.
- [8] A. Kufner, O. John, S. Fu6ik : Function spaces. Noordhoff International Publishing, Leyden 1977.
- [9] G. Talenti : Sulle equazioni integrali di Wiener-Hopf. Boll. Un. Mat. It. (4), 7, Supp. fast. 1 (1973), 18-118.
- [10] A. Erddlyi : On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms. Quart. J. Math. (Oxford)11 (1940), 293-303.
- [11] H. Kober : On fractional integrals and derivatives, Quart. J. (Oxford) 11 (1940), 193-211.
- [12] G. Kowalewski : Integralgleichungen. Walter de Gruyter, Berlin 1930.

- 
- [13] W. Rudin : Real and complex analysis. 2nd ed., McGraw-Hill, New York 1974.
- [14] E.C. Titchmarsh : Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford, Clarendon Press, 1937.
- [15] H.W. Branca : The nonlinear Volterra equation of Abel's kind and its numerical treatment. Computing 20, (1978), 307-324.
- [16] G.H. Hardy and J.E. Littlewood : Some properties of fractional integrals. Math. Zeitschrift 27 (1928), 565-606.
- [17] P. O'Neil : Convolution operators and  $L(p,q)$  spaces. Duke Math. Journ. 30 (1963), 129-142.
- [18] E.M. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, Princeton 1970.
- [19] E. Harboure, R.A. Macias and C. Segovia : A two weights inequality for the fractional integral when  $p = n/a$ . Proceedings of the American Mathematical Society 90 (1984).
- [20] A. Kufner, O. John, S. Fu6ik : Function spaces. Noordhoff International Publishing, Leyden 1977.
- [21] H. König : Grenzordnungen von Operatorenidealen I, II. Math. Ann. 212, 51-77 (1974).
- [22] W. Rudin : Functional analysis. 9th ed.. Tata McGraw-Hill, New Delhi 1985.
- [23] A.E. Taylor D.C. Lay : Introduction to functional analysis. Second edition. John Wiley Sons, New York 1980.
- [24] D.S. Mitrinovi : Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin 1970.
- [25] S.G. Mikhlin : Mathematical physics : an advanced course. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970.
- [26] F. John, L. Nirenberg : Comm. Pure and Appl. Math. 1,t (1961) pp.415-426.
- [27] F.G. Tricomi : Integral equations. Interscience Publishers, London 1957.
- [28] L. Tonelli : Su un problema di Abel. Math. Ann. 99 (1928), 183-199.
- [29] J.D. Tamarkin : On integrable solutions of Abel's integral equation. Annals of Math. (2) 31 (1930), 219-229.



- 
- [30] V.I. Smirnov : A course of higher mathematics. Vol. V. Pergamon Press, Oxford 1964.
- [31] K.E. Atkinson : An existence theorem for Abel integral equations. SIAM J. Math. Anal. 5 (1974), 729-756.
- [32] L. Biacino : Soluzioni negli spazi di Lebesgue dell' equazione integrale di Abel. Ricerche di Matematica, Vol. XXXIII, fasc. 2 °, 1984.
- [33] H. König : Grenzordnungen von Operatorenidealen I, II. Math. Ann. 212, 51-77 (1974).
- [34] G. Kowalewski : Integralgleichungen. Walter de Gruyter, Berlin 1930.
- [35] T. Meis : Eine spezielle Integralgleichung erster Art. Tagung fiber numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Lecture Notes) Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1976.
- [36] M. Abramowitz and I.A. Stegun : Handbook of mathematical functions. Dover Publications, New York 1972.
- [37] M.A. Krasnoselskii, P.P. Zabreiko, E.I. Pustynnik and Sobolevskii : Integral operators in space of summable functions. Noordhoff International Publishing, Leyden 1976.