

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DR MOULAY TAHAR DE SAÏDA
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et l'Informatique



Mémoire de Master

Spécialité : Analyse fonctionnelle et Applications

Option : Analyse

Intitulé

*Sur Les Equations Intégrales non Linéaires de
Fredholm*

Présenté par : Mohamed DAOUDI

Soutenu le : 17/06/2013

Devant le jury composé de :

Président :	H. M. DIDA	MCA (Université de Dr M.T. Saïda)
Rapporteur :	F. HATHOUT	MCA (Université de Dr M.T. Saïda)
Examineurs :	M. BELMEKKI	MCA (Université de Dr M.T. Saïda)
	A.AZZOUZ	MCB (Université de Dr M.T. Saïda)

Remerciements

Je voudrais remercier chaleureusement mon directeur de mémoire Mr. Fouzi HATHOUT, pour la façon dont il a encadré mon travail pour ces conseils et ces encouragements. Je le remercie pour la deuxième fois.

Je remercie également Mr. Hamou Mohammed DIDA, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire.

Je tiens à remercier aussi Mr. Mohammed BELMEKKI et Mr. Abdelhalim AZZOUZ qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Tous les remerciements aussi à mes parents qui m'ont suivi durant toutes mes années d'études.

Je saisi cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants qui m'ont initié aux mathématiques.

Je pense aussi à ceux et celles avec qui j'ai étudié. Pour finir, je remercie tous les amis et collègues qui m'ont soutenu et encouragé.

Table des matières

1	Préliminaires	6
1.1	L'espace L_2	6
1.2	L'espace $C^l(a, b)$	7
2	Equations intégrales linéaires de Fredholm	9
2.1	Equations intégrales linéaires de Fredholm	9
2.1.1	Définitions et exemples	9
2.2	Résolution de l'équations intégrales de Fredholm	12
2.2.1	Méthode de Fredholm	12
2.2.2	Méthode des noyaux itérés	13
2.2.3	Méthode dans le cas des noyaux dégénérés	15
3	Equations integrales non linéaires de Fredholm	18
3.1	Préliminaires et définitions	18
3.2	Equations intégrales non linéaires de Fredholm (Φ est linéaire)	19
3.2.1	F une série entière	20
3.2.2	F une fonction expnontielle	23
3.3	Equations intégrales non linéaires de Fredholm non homogènes	24
3.3.1	Cas où Φ est linéaire et \bar{F} dépent de K et φ	25
3.4	Equations intégrales non linéaires de Fredholm (Φ non linéaire)	29
3.4.1	Cas où K_φ est de type $K(x, y)A(x)B(y)$	31
3.4.2	Equations intégrales Algébriques	31
3.4.3	Noyau de M.Goursat.	37
3.5	Equations intégrales de deuxième degré	39

3.6	Equations intégrales transcendentes	41
3.6.1	Equations intégrales transcendeantes où $k(x, y) = 1$ et $f(x) = 0$	42
3.6.2	Equations intégrales transcendentes dégénérées	43
3.6.3	Noyau de M. Goursat	45
3.6.4	Nouvelle forme du jacobien	47
4	Equations intégrales déduite des équations différentielles	49
4.1	EDO d'ordre deux de type exponentielle	49
4.2	EDO d'ordre deux de type linéaire	51

Introduction

L'étude d'une certaine classe d'équations différentielles a pris un tel développement et s'est montrée si riche en conséquences qu'elle formera certainement dans l'avenir un des beaux axes de l'analyse.

Pour traiter le problème suivant

$$\int_{ab} N(xs)\varphi(s)ds \tag{1}$$

il faut que l'intégrale définie ait un sens.

C'est une opération parfaitement déterminée si l'on se donne le chemin d'intégration et la fonction $N(xs)$ qu'on l'appellerons son (noyau). Cela posé, considérons une relation quelconque entre $\varphi(s)$, ses dérivées de divers ordres et un certain nombre d'opérations telles que (1) et on propose de trouver une fonction satisfaisant à cette relation.

C'est un nouveau genre d'équation, plus générales que les équations différentielles puisqu'elles contiennent une opération de plus. Qui dans le cas général en est essentiellement différente; nous les désignerons sous le nom général d'équation intégrales.

D'après cette définition, une équation différentielle qui contient une opération intégrale sera une équation intégrale; l'opération de différentiation s'efface devant la nouvelle opération, absolument de la même manière que la résolution des équations ordinaires, algébriques ou transcendentes, passe en seconde ligne devant l'opération de différentiation; il n'y a donc aucune ambiguïté à craindre.

Le problème général que nous avons en vue est la résolution des équations intégrales.

Historiquement, la première équation intégrale résolue a été

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^x} = F(x) \quad (0 < x < 1)$$

rencontrée par d'ABEL dans un problème élémentaire de mécanique.

Longtemps après, un mathématicien russe N. SONINE étudia une équation de la même forme que celle d'ABEL mais un peu plus générale. SONINE épuisait pour ainsi dire la portée de l'artifice de calcul employé par ABEL et la question semblait close, l'orsque en 1896, M. VITO VOLTERRA dans une suite de notes présentées aux Académies des sciences de Turin et Rome, aborda avec un succès complet et par une méthode directe, qui puisait aux sources même de

l'analyse, l'étude générale de l'équation intégrale.

$$\int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x).$$

Les beaux résultats qu'il obtient. Furent immédiatement suivis par un brillant travail de M. IVAR FREDHOLM en 1900 sur l'équation intégrale

$$\varphi(x) + \int_0^1 N(xs)\varphi(s)ds = F(x).$$

dont l'importance pour l'analyse, a été particulièrement mise en évidence par I. FREDHOLM lui-même, D.HILLBERT et E. PICARD.

Dés lors, les travaux se succèdent sans interruption. Dans une suite de communications présentées à la société scientifique de Gottingen, D. HILLBERT prend comme instrument de démonstration, la résolution d'une certaine classe d'équations linéaires à une infinité de variables, met en évidence par une étude approfondie le rôle de la symétrie du noyau et en étudie des applications importantes.

En même temps, M .E PICARD signalait l'importance de cette équation intégrale en montrant les nombreuses applications dont elle est susceptible dans la Physique Matimatique.

On dit qu'une équation intégrale est linéaire, si elle est du premier degré par rapport aux opérations intégrales qu'elle contient.

Les types

$$\int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x) \tag{2}$$

$$\varphi(x) + \int_0^x N(xs)\varphi(s)ds = F(x) \tag{3}$$

dont l'opération intégrale a au moins une limite variable, seront appelés, équations intégrales de Volterra ou plus simplement équations de Volterra : l'équation (2) sera dite de première espèce, et (3) de seconde espèce.

$$\varphi(x) + \int_a^b N(xs)\varphi(s)ds = F(x) \tag{4}$$

$$\int_a^b N(xs)\varphi(s)ds = F(x) \tag{5}$$

seront appelées, équations intégrales linéaires de Fredholm ou plus simplement équations de

Fredholm; d'une façon analogue (4) et (5) seront désignées respectivement comme équations de première et seconde espèce.

Ces types caractérisent les nouveaux éléments analytiques; autour d'eux on peut facilement construire la théorie des autres cas linéaires rencontrés dans les applications et qui ont été considérés succesivement par divers auteurs.

Notre travail se compose de quatre chapitres.

Pour le première, il se compose des Préliminaires et des définitions nécessaires pour le reste du travail.

Dans le deuxième, on traite la résolution des équations intégrales de Fredholm dans le cas linéaire par la méthode de Fredholm, les noyaux itérés et le cas des noyaux dégénérés.

Le troisième chapitre est consacré au cas non linéaire. On donne les conditions d'existence de la solution et on étudie les solutions des équations intégrales non linéaires de Fredholm suivant des différentes formes des fonctions non linéaires F et Φ , des équations intégrales algébriques, des équations intégrales du deuxième degré et les équations intégrales transcendentes

Au quatrième et le dernier chapitre, On étudie les équations intégrales non linéaires de Fredholm déduites des équations différentielles et on se limite au cas d'équations du second ordre.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette section, on va faire un rappel nécessaire pour la suite des chapitres.

Définition 1.1 Une fonction non négative sur l'intervalle réel (a, b) est dite sommable sur (a, b) si

$$\int_a^b f(x)dx < \infty \text{ (finie)}$$

Une fonction de signe arbitraire est dite sommable sur (a, b) si

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

1.1 L'espace L_2

On considère dans toute la suite les notations suivantes

- 1/ $I = (a, b)$ l'intervalle fondamental.
- 2/ I_0 est l'intervalle $(0, a)$
- 3/ L'ensemble $\Omega = \{x \geq a, t \leq b\}$ est le carré fondamental.
- 4/ L'ensemble $\Omega_0 = \{x \geq 0, t \leq b\}$.

Définition 1.2 On dit qu'une fonction f est à carré intégrable sur (a, b) si

$$\int_a^b f^2(x)dx < \infty.$$

on note par $L_2(a, b)$ l'ensemble des fonctions à carré intégrable.

Propriété 1.3 Soient $f, g \in L_2(a, b)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $f * g \in L_2$ (" $*$ " est le produit de convolution)

2) $f + g \in L_2$

3) $\lambda f \in L_2$

4) $\left(\int_a^b fg(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

5) Le produit scalaire est défini par $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$

6) $a/ \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$

b/ $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

7) Soient $f_1 \dots f_n \in L_2$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx\right) = 0$, alors la suite (f_n) converge en moyenne quadratique vers f .

1.2 L'espace $C^l(a, b)$

L'espace $C^l(a, b)$ est l'espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre l sur (a, b) , sa norme est donnée par

$$\|f\| = \sum_{k=0}^l \max_{x \in (a, b)} |f^{(k)}(x)|, \quad \forall f \in C^l(a, b)$$

La convergence dans C^l signifie la convergence uniformément et de ces dérivées

$$f_n \xrightarrow[CS]{C^l} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{CU} f, f^1, \dots, f^l \rightarrow f$$

(CS :converge simple, CU :converge uniformément)

Définition 1.4 (fonction holomorphe) Soient U un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction de U vers \mathbb{C} . f est dérivable au sens complexe en $z \in U$ si

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe.

Si cette limite existe pour tout point z de U et de plus f' est définie et continue sur U , alors,

on dit que f est holomorphe sur U . La condition de l'existence de la limite s'écrit aussi

$$f(z+h) - f(z) = f'(z).h + \alpha(h)|h|$$

$$\text{où } \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0.$$

Définition 1.5 (Fonction analytique) Soient $z_0 \in U$ un ouvert de C et une fonction $f : U \rightarrow C$. f est analytique en z_0

- si existe un nombre $r > 0$ tel que le disque $|z - z_0| < r$ soit contenu dans U

- si existe une série entière $\sum_{n \geq 0} \alpha_n w^n$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ tels que, pour $|z - z_0| < r$,

et on ait

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U .

Chapitre 2

Equations intégrales linéaires de Fredholm

2.1 Equations intégrales linéaires de Fredholm

L'équation de Fredholm de seconde espèce fournit un exemple très instructif de découverte mathématique, elle en a tous les très essentiels, tant par la nouveauté du résultat que par hardiesse du passage à la limite considérée comme un des plus beaux de l'analyse.

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 2.1 On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm du second espèce, l'équation de la forme

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnu, $K(x, t)$ est le noyau, f une fonction donnée et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La fonction $K(x, t)$ est défini sur le carré fondamental $\Omega = \{x \geq a, t \leq b\}$, de plus $K(x, t) \in L^2(\Omega)$.

Remarque 2.2 • Si $f \neq 0$ l'équation (2.1) est dite non homogène.

- Si $f = 0$ l'équation (2.1) est dite homogène.
- l'équation intégrale de type $\int_0^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$ est dite équation de Fredholm du première espèce où φ est la fonction inconnue.

Exemple 2.3 Soit la fonction

$$\varphi(x) = \sin \frac{x\pi}{2}$$

montrer que φ est une solution de l'équation

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt = \frac{x}{2} \quad (2.2)$$

avec

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2} & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2} & t \leq x < 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

(2.2) est une équation de Fredholm non homogène ($f(x) = \frac{x}{2}$) de paramètre $\lambda = \frac{\pi^2}{4}$ et de noyau $k(x,t)$

$$\begin{aligned} (2.3) &= \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} [\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt] \\ &= \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) - \frac{\pi^2}{4} \left[\int_0^x \frac{t(2-x)}{2} \sin \frac{\pi t}{2} dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2} \sin \frac{\pi t}{2} dt \right] \\ &= \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) - \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{2-x}{2} \int_0^x t \sin \frac{\pi t}{2} dt + \frac{x}{2} \int_x^1 (2-t) \sin \frac{\pi t}{2} dt \right] \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Exemple 2.4 Selon la loi de l'optique géométrique, l'image d'un objet est semblable à l'objet, si bien que l'image d'un segment est un segment, leurs longueurs étant en général différentes. Etant donné le système optique d'un dispositif P , choisissons les unités de mesure sur l'axes Ot et $O's$ de façon que pour deux points $T(t)$ et $S(s)$ qui se correspondent, on ait $s = t$.

Le point lumineux $T(t)$ de l'objet AB influe sur l'éclairement de tous les points de l'image $A'B'$, mais celui du point $S(s)$ est le plus grand. Ainsi, l'éclairement K est une fonction de s et de t , i.e. $K = K(s,t)$.

désignons par $\eta(t)$ la luminance de l'objet en t . la quantité $\eta(t)k(s,t)\Delta t$ donne alors une valeur approchée de la luminance de l'image au point $S(s)$ engendrée par l'élément Δt de l'objet lumineux. Ici $k(x,t)$ est définie par les propriétés optiques du dispositif.

En vertu du principe de superposition, la luminance de l'image au point $S(s)$ est approximativement donnée par la somme

$$\sum_k \eta(t_k)k(s,t_k)\Delta t_k, \quad (2.4)$$

Où la sommation s'étend sur tout l'objet (le segment AB). Soit l la longueur de ce segment. Passant à la limite dans (2.4) pour $\max \Delta t_k \rightarrow 0$, on obtient une répartition de la luminance

de l'image de la forme

$$g(s) = \int_0^l k(s,t)\eta(t)dt. \quad (2.5)$$

Selon la façon dont on pose le problème, on obtient à partir de (2.5) des équations intégrales de divers types. La fonction connue $k(x,t)$ est définie par le choix du dispositif. Si on s'est donné la luminance de l'image $g(s)$ et qu'on cherche une répartition de la luminance de l'objet telle qu'elle fournisse la luminance donnée de l'image, alors $g(s)$ est une fonction donnée et $\eta(s)$ la fonction inconnue, et l'équation (2.5) est donc une équation intégrale de Fredholm de première espèce.

La question suivante est très importante en physique dans quel les conditions, l'image est telle qu'on ait, à part la similitude géométrique de l'objet et de l'image, la similitude de leurs luminances.

Dans ce cas $g(s)$ et $\eta(s)$ sont proportionnelles, i.e.

$$g(s) = \frac{1}{\lambda}\eta(s),$$

et en substituant $\varphi(s)$ à $g(s)$ l'équation (2.5) devient

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_0^l k(s,t)\varphi(t)dt,$$

i.e. une équation intégrale homogène de Fredholm de seconde espèce où $\varphi(s)$ est la fonction inconnue. On se demande alors : le coefficient de proportionnalité peut être quelconque, et, dans la négative, pour quelles valeurs de λ le problème physique admet-il une solution,

Modifions la position physique du problème et exigeons que la différence entre la luminance d'un point de l'objet et celle du point correspondant de l'image ait partout une valeur $f(s)$ donnée à l'avance, i.e.

$$\eta(s) - g(s) = f(s). \quad (2.6)$$

L'équation (2.5), où on a porté $g(s)$ de (2.6), devient alors

$$f(s) = \eta(s) - \int_0^l k(s,t)\eta(t)dt.$$

c'est-à-dire une équation non homogène de Fredholm de seconde espèce, où la fonction inconnue

est $\eta(s)$.

2.2 Résolution de l'équations intégrales de Fredholm

Pour la résolution des équations intégrales de Fredholm, on prosède de deux méthodes la première par les déterminant de Fredholm et la seconde par les noyaux itérés.

2.2.1 Méthode de Fredholm

Soit l'équation de Fredholm est de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

sa solution est donnée sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda)f(t)dt$$

où la fonction

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

est la résolvante, sous une condition $D(\lambda) \neq 0$ (λ ne soit pas un pôle pour $R(x, t; \lambda)$)

Les déterminants sont donnés par les formules suivantes

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} B_n(x, t)\lambda^n$$

et

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} C_n(\lambda)\lambda^n$$

où les fonctions $B_n(x, t)$ et C_n sont données par

$$B_0(x, t) = K(x, t)$$

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n \text{ fois}} \begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

et

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_{n \text{ fois}} \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

Remarque 2.5 Le déterminant $D(x, t; \lambda)$ est appelé le déterminant de Fredholm.

$D(\lambda)$ est appelé le déterminant mineur de Fredholm.

Les déterminants convergent si $\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt$ est finie.

$R(x, t; \lambda)$ est une série analytique pour tout λ et $K \in L_2$

2.2.2 Méthode des noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm de type

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.7)$$

cherchons les solutions sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) \quad (2.8)$$

alors en remplace (2.8) dans l'équation (2.7), on aura

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(t) dt &= 0 \\
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b f(t) K(x, t) dt - \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(t) dt &= 0 \\
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b f(t) K(x, t) dt - \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(t) dt &= 0 \\
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b f(t) K(x, t) dt - \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(t) dt &= 0 \\
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(t) dt &= \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \\
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \sum_{n \geq 1} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt &= \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \\
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \sum_{n \geq 1} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt &= \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \\
\sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) - \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt &= \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \\
\sum_{n \geq 2} (\lambda^n \int_a^b K(x, t) \varphi_{n-1}(t) dt) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt &= \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \int_a^b K(x, t) f(t) dt \\
\varphi_2(t) &= \int_a^b K(x, t) \varphi_1(t) dt \\
\varphi_n(t) &= \int_a^b K(x, t) \varphi_{n-1}(t) dt
\end{aligned}$$

par comparaison, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) &= \sum_{n \geq 2} (\lambda^n \int_a^b K(x, t) \varphi_{n-1}(t) dt) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \\ \varphi_2(t) &= \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt \\ \varphi_3(t) &= \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt \\ \varphi_3(t) &= \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt \\ K_n(x, t) &= \int_a^b K(z, t) K_{n-1}(z, t) dz \\ \varphi_n(t) &= \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

$$K_0(x, t) = K(x, t)$$

La résolvante de l'équation de Fredholm est définie en fonction des noyaux itérés par

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n \geq 1} K_n(x, t) \lambda^{n-1}$$

cette série est convergente pour un rayon

$$|\lambda| < \frac{1}{b} = \frac{1}{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt}$$

la solution de l'équation de Fredholm est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \varphi_n(x) \\ \varphi(x) &= f(x) + \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \end{aligned}$$

2.2.3 Méthode dans le cas des noyaux dégénérés

On va voir maintenant une classe d'équations intégrales dont la résolution se ramène à celle d'équation algébrique de premier degré.

Définition 2.6 Une équation intégrale à noyau dégénéré est une équation où $k(x, t)$ est la somme d'un nombre finie de produit de deux fonctions, des fonctions en x seul par des fonctions

en t seul ie :

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t)$$

$k(x, t)$ est appelé le noyau dégénéré, a_i et b_i sont des fonctions continues dans le carré fondamental $a \leq x$ et $t \leq b$

Soit l'équation integrale suivante :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.9)$$

de noyau dégénéré suivant

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t)$$

On aura

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t) \right] \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.10)$$

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt = f(x)$$

posons

$$\int_a^b b_i(t)\varphi(t)dt = C_i$$

$$(2.9) \Leftrightarrow \varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x)C_i = f(x)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i a_i(x) \quad (2.11)$$

Où les C_i sont des constantes inconnues.

- La résolution de l'équation intégrale (2.9) se ramène à la recherche des constantes C_i , $i = 1 \dots n$

-On remplace la solution (2.11) dans l'équation (2.10)

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{n=1}^n C_i a_i(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^n a_i(x)b_i(t) \right] \cdot [f(t) + \lambda \sum_{n=1}^n C_i a_i(t)] dt &= 0 \\ \lambda \sum_{n=1}^n C_i a_i(x) - \lambda \int_a^b [\varphi(t) \sum_{n=1}^n a_i(x)b_i(t) + \lambda \sum_{n=1}^n a_i(x)b_i(t) \cdot \sum_{n=1}^n C_i a_i(t)] dt &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^n a_i(x) \cdot A_i = 0$$

puisque les a_i sont linéairement indépendantes donc les $A_i = 0$

$$\begin{aligned} A_i &= C_i - f_i - \lambda \sum_{k=1}^n C_K J_{iK} \\ f_i &= \int_a^b b_i(t) f(t) dt \\ J_{iK} &= \int_a^b b_i(t) a_k(t) dt \end{aligned}$$

Alors

$$C_i - \sum_{K=1}^n C_K J_{iK} = f_i \tag{2.12}$$

Pour résoudre le système (2.12) les C_i sont données par

$$C_i = \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

et

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} C_1(1 - \lambda J_{11}) & -\lambda C_2 J_{12} & \cdots & -\lambda C_n J_{1n} \\ -\lambda C_1 J_{21} & C_2(1 - \lambda J_{22}) & \cdots & -\lambda C_2 J_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda C_n J_{n1} & \cdots & \cdots & C_n(1 - \lambda J_{nn}) \end{vmatrix}$$

d'où la solution est donnée par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^n C_i a_i(x)$$

Remarque 2.7 Les a_i et b_i sont des fonctions supposées continues pour que le noyau $k(x, t)$ soit continu dans le carré fondamental.

Chapitre 3

Equations integrales non linéaires de Fredholm

3.1 Préliminaires et définitions

Le premier type d'équations intégrales d'ordre supérieur, qui apparaît d'une façon naturelle, est de la forme

$$\Phi [x, \varphi(x)] + \int F [x, y, \varphi(y)] dy = 0$$

où $\varphi(x, y)$ et $F(x, y, z)$ sont deux fonctions données. Ce sont les équations intégrales non linéaires ordinaires

M.E.Schmidt a considéré l'équation du type suivant

$$\varphi(x) + \int N(x, s)\varphi(s)ds + \dots + \int N(x, s_1, \dots, s_n)\varphi(s_1)\alpha_1 h(s_1)\beta_1 \dots \varphi(s_m)\alpha_m h(s_m)\beta_m ds_1 \dots ds_m = 0,$$

où α_i et β_i étant des entiers positifs et les N et h des fonctions données. Ce sont les équations non linéaires à puissances intégrales.

M.V.Volterra a imaginé des équations intégrales dans les quelles figurent des compositions ou des puissances itérées de la fonction inconnue. Par exemple

$$F(x, y) = \sum a_\alpha \beta_1 \dots \beta_m F^\alpha \Phi_1^{\beta_1} \dots \Phi_n^{\beta_n},$$

les coefficients a étant des constantes, les $\Phi_i(x, y)$ des fonctions données et la puissance itérée

F^m étant par définition l'intégrale multiple :

$$F^m = \int \dots \int F(x, s_1)F(s_1, s_2)\dots F(s_{m-1}, y)ds_1ds_2\dots ds_{m-1}.$$

Ce sont les équations intégrales d'ordre itératif supérieur.

Dans tous les cas, les limites des intégrales peuvent être constantes ou variables.

On va étudier les équations intégrales non linéaires suivantes

$$\Phi [x, \varphi (x)] + \int_a^b \bar{F} [x, y, \varphi (y)] dy = 0. \quad (3.1)$$

Si les fonctions données $\Phi (x, z)$ et $\bar{F}(x, y, z)$ sont des séries entières en z , le problème se ramène à celui des équations à puissances intégrales.

En introduisant un paramètre λ et en réduisant l'intervalle (a, b) à l'intervalle $(0, 1)$.

3.2 Equations intégrales non linéaires de Fredholm (Φ est linéaire)

On considère l'équation intégrale (3.1) où les fonctions Φ et \bar{F} sont de type

$$\Phi [x, \varphi (x)] = \varphi(x) \text{ et } \bar{F} [x, y, \varphi (y)] = k(x, y)F [y, \varphi(y)]$$

respectivement, où la fonction $k(x, y)$ est le noyau.

Alors (3.1) sera de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y)F [y, \varphi(y)] dy \quad (3.2)$$

On va étudier la résolution suivant les formes particulières de la fonction non linéaire F .

3.2.1 F une série entière

On suppose que la fonction F est une série entière en puissance de φ , elle est de la forme

$$F(y, \varphi) = \sum_{n \geq 0} b_n(x) \varphi^n = b_0(y) + b_1(y)\varphi + \cdots + b_n(y)\varphi^n + \cdots, \quad (3.3)$$

où les coefficients b_i étant des fonctions données, finies et intégrables, et la série étant régulière pour $0 \leq y \leq 1$ et $|\varphi| < \rho$.

Existence de la solution en série entière

On cherche un développement en série ordonné suivant les puissances entières du paramètre λ et satisfaisant à l'équation (3.2).

En posant

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} a_n(x) \lambda^n = \lambda a_1(x) + \lambda^1 a_1(x) + \cdots + \lambda^n a_n(x) + \cdots, \quad (3.4)$$

en substituant cette experession dans l'équation (3.2), on aura

$$\sum_{n \geq 1} a_n(x) \lambda^n = \lambda \int_0^1 k(x, y) F \left[y, \sum_{m \geq 1} a_m(x) \lambda^m \right] dy$$

en tenant compte de l'équation (3.4), l'équation (3.2) devient

$$\sum_{n \geq 1} a_n(x) \lambda^n = \lambda \int_0^1 k(x, y) \sum_{n \geq 0} b_n(x) \left(\sum_{m \geq 1} a_m(x) \lambda^m \right)^n dy$$

et en identifiant les deux membres, en obtient les égalités

$$\begin{cases} a_1(x) = \int_0^1 k(x, y) b_0(y) dy, \\ a_2(x) = \int_0^1 k(x, y) b_1(y) \alpha_1(y) dy, \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (3.5)$$

En général, le coefficient du terme en λ^n dans $\varphi^p(y)$ ($p \leq n$) est

$$a_{n,p} = \sum a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p},$$

i_1, i_2, \dots, i_p étant un arrangement avec répétition des nombres $1, 2, \dots, n$ pris p à p et tel que $i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$.

On a, en particulier

$$a_{n,1} = a_n \langle y \rangle, \quad a_{n,n} = a_1^n \langle y \rangle.$$

On trouve donc

$$a_{n+1}(x) = \int_0^1 k(x, y) [b_1 a_n + b_2 a_{n,2} + \dots + b_p a_{n,p} + \dots + b_n a_1^n] dy.$$

Convergence de la serie entière

Démontrons que la série ainsi obtenue, et qui satisfait formellement à l'équation (3.2), est convergente au voisinage de $\lambda = 0$.

On remplace la série (3.3) par une série majorante

$$B_0 + B_1 \varphi + \dots + B_n \varphi^n + \dots, \\ B_n \geq |b_n(y)| \quad \text{pour } 0 \leq y \leq 1,$$

et le noyau $k(x, y)$ par une fonction $k_1(x, y)$ positive pour x et y compris entre 0 et 1 et telle qu'on ait dans ce domaine

$$|k(x, y)| \leq k_1(x, y).$$

On cherche à satisfaire la nouvelle équation

$$\Phi(x) = \lambda \int_0^1 k_1(x, y) \sum_{n \geq 0} B_n \varphi^n(y) dy \tag{3.6}$$

$$= \lambda \int_0^1 k_1(x, y) [B_0 + B_1 \varphi(y) + \dots + B_n \varphi^n(y) + \dots] dy \tag{3.7}$$

par une série de la forme

$$\Phi(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda^n A_n(x) = \lambda A_1(x) + \lambda^2 A_2(x) + \dots + \lambda^n A_n(x) + \dots, \tag{3.8}$$

en tenant compte de l'équation (3.8), l'équation (3.6) devient

$$\sum_{n \geq 1} \lambda^n A_n(x) = \lambda \int_0^1 k_1(x, y) [B_0 + B_1 \varphi(y) + \cdots + B_n \varphi^n(y) + \cdots] dy$$

On trouve, les équations

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \int_0^1 k_1(x, y) B_0 dy, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{n+1}(x) &= \int_0^1 k_1(x, y) [B_1 A_n + \cdots + B_p A_{n,p} + \cdots + B_n A_1^n] dy \end{aligned}$$

d'où, on conclut, de proche en proche,

$$A_1(x) \geq |a_1(x)|, \dots, A_n(x) \geq |a_n(x)|, \dots$$

La série (3.8) est donc majorante pour la série (3.4).

Si $F(y, \varphi)$ est holomorphe pour $|\varphi| < \rho$, $0 \leq y \leq 1$ et si N est le maximum de son module dans ce domaine, on peut prendre comme majorante de F la fonction est

$$\frac{N_\rho}{\rho - \varphi}.$$

On suppose en outre que $|k(x, y)| \leq M$ pour $0 \leq x, y \leq 1$.

Tout revient à démontrer que l'équation intégrale

$$\Phi(x) = \lambda \int_0^1 \frac{MN_\rho}{\rho - \Phi(y)} dy \tag{3.9}$$

admet une solution holomorphe en λ autour de $\lambda = 0$.

Or l'équation (3.9) montre que Φ ne dépend pas de x . On peut donc poser $\Phi = C(\lambda)$ et on a l'équation

$$c = \frac{\lambda MN_\rho}{\rho - c}$$

d'où on a une solution nulle pour $\lambda = 0$, et

$$C = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\lambda MN_\rho}}{2}.$$

Cette solution étant holomorphe pour $4MN|\lambda| < \rho$, la série (3.4) est absolument et uniformément convergente pour

$$|\lambda| < \frac{\rho}{4MN} \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.10)$$

et le module de $\varphi(x)$ reste inférieur à ρ . Le développement (3.3) est donc valable et convergent, la somme de cette série φ représente dans tout le domaine (3.10) une solution de l'équation (3.1)(3.2).

3.2.2 F une fonction exponentielle

Maintenant, on suppose que la fonction non linéaire F est de la forme

$$F[y, \varphi(y)] = \sum_{i=0}^n \frac{\varphi^i}{i!} = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^n}{n!} + \dots = e^{\varphi(y)} \quad (3.11)$$

En tenant compte de l'équation (3.11), l'équation (3.2) devient

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y) \sum_{i=0}^n \frac{\varphi^i(y)}{i!} dy.$$

Si $F(y, \varphi)$ est holomorphe pour $|\varphi| < \rho$, $0 \leq y \leq 1$ et si N est le maximum de son module dans ce domaine, on peut prendre comme majorante de F la fonction

$$\frac{N\rho}{\rho - e^\varphi}$$

On suppose en outre $|k(x, y)| \leq M$ pour $0 \leq x, y \leq 1$.

Tout revient à démontrer que l'équation intégrale

$$\Phi(x) = \lambda \int_0^1 \frac{MN\rho}{\rho - e^{\varphi(y)}} dy \quad (3.12)$$

admet une solution holomorphe en λ autour de $\lambda = 0$.

Or l'équation (3.12) montre que Φ ne dépend pas de x . On peut donc poser $\Phi = C(\lambda)$ et l'on a l'équation

$$c = \frac{\lambda MN\rho}{\rho - c}$$

d'où la solution nulle pour $\lambda = 0$

$$C = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\lambda MN\rho}}{2}.$$

Cette solution étant holomorphe pour $4Me^\varphi |\lambda| < \rho$, la série (3.11) est absolument et uniformément convergente pour

$$|\lambda| < \frac{\rho}{4Me^\varphi} = \rho' \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.13)$$

et le module de $\varphi(x)$ reste inférieur à ρ . Le développement (3.11) est donc valable et la somme de cette série φ représente dans tout le domaine (3.13) une solution de l'équation (3.1)(3.2), ρ peut être pris aussi grand qu'on veut. Le rayon de convergence ρ' est maximum pour $\rho = 1$.

Remarque aussi que l'équation intégrale (3.2) admet une seule solution holomorphe autour de $\lambda = 0$.

3.3 Equations intégrales non linéaires de Fredholm non homogènes

dans cette section , on va étudier deux cas d'équations non homogènes des équations intégrales non linéaires de Fredholm.

Définition 3.1 *Une équation intégrale non linéaire de fredholm non homogène est de type*

$$\Phi [x, \varphi(x)] = \lambda \int_a^b \bar{F} [x, y, \varphi(y)] dy + f(x), \quad (3.14)$$

où f étant une fonction donnée finie et intégrable dite le second membre et les fonctions Φ et \bar{F} sont non linéaires.

3.3.1 Cas où $\bar{\Phi}$ est linéaire et \bar{F} dépend de K et φ

L'étude autour du voisinage de zéro

dans cette partie l'équation (3.14) devient

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, y) F[\varphi(y)] dy + f(x), \quad (3.15)$$

pour étudier la solution on va poser

$$\varphi(x) = \Psi(x) + f(x) \quad (3.16)$$

donc l'équation (3.16) sous écrit

$$\Psi(x) = \lambda \int_a^b k(x, y) F[\varphi(y)] dy \quad (3.17)$$

comme $F(\varphi)$ une fonction entière en φ l'équation (3.17) prend la forme

$$\Psi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y) \left[(f) + \Psi F'(f) + \dots + \frac{1}{n!} \Psi^n F^{(n)}(f) + \dots \right] dy$$

et l'on est ramené au cas de l'équation (3.2).

L'équation intégrale (3.15) admet donc autour de $\lambda = 0$ une solution holomorphe et une seule se réduit à $f(x)$ pour $\lambda = 0$.

Pour $F(\varphi) = \varphi$ on a l'équation linéaire de Fredholm.

L'étude autour du voisinage différent de zéro

Dans cette seconde partie l'équation (3.14) devient

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y) F[y, \varphi(y)] dy + f(x), \quad (3.18)$$

On va étudier la solution autour d'une valeur quelconque de λ , où $F(x, z)$ est une fonction entière en z .

On peut énoncer le théorème fondamental suivant

Théorème 3.2 Soit $\varphi_0(x)$ une fonction réelle ou complexe, dont le module reste fini pour x

paragraphe 3,

$$u_n(x) = \lambda_0 \int_0^1 k(x, y) \left[\frac{F^n}{2!} a_{n,2} + \frac{F^n}{3!} a_{n,3} + \cdots + \frac{F^{(n)}}{n!} a_1^n \right] dy + \quad (3.22)$$

$$\int_0^1 k(x, y) \left[F' a_{n-1} + \frac{F^n}{2!} a_{n-1,2} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}}{(n+1)!} a_1^{n-1} \right] dy \quad (3.23)$$

Si λ_0 n'est pas une racine du déterminant de Fredholm formé avec le noyau $k(x, y)F'_\varphi(y, \varphi_0)$ et si $\Gamma(x, y, \lambda)$ est le noyau résolvant correspondant, les équations (3.21) donnent

$$a_n(x) = \lambda_0 \int_0^1 \Gamma(x, y, \lambda) u_n(y) dy + u_n(x). \quad (3.24)$$

On obtient ainsi, de proche en proche, tous les coefficients du développement (3.20) déterminés d'une manière unique.

Il reste à démontrer que cette série est convergente pour μ suffisamment petit. On va employer la méthode de M.Schmidt.

Avec les hypothèses faites sur $F(x, \varphi)$, $k(x, y)$ et λ_0 , toute les expressions

$$\int_0^1 k(x, y) F^{(i)}(\varphi_0) dy \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

qui interviennent dans le développement (3.22), ainsi que la fonction $\Gamma(x, y, \lambda)$, restent finies pour voisin de λ_0 et $0 \leq x \leq 1$.

On peut donc écrire pour ce domaine

$$\left| \int_0^1 k(x, y) F^{(i)}(\varphi_0) dy \right| < p \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad |\Gamma(x, y, \lambda)| < M, \quad (3.25)$$

P et M étant deux nombres positifs déterminés. On pose pour abrégé

$$\begin{cases} \sum_n(a) &= \frac{a_{n,2}}{2!} + \frac{a_{n,3}}{3!} + \cdots + \frac{a_1^n}{n!} \\ \sum'_n(a) &= a_{n-1} + \frac{a_{n-1,2}}{2!} + \cdots + \frac{a_1^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases}$$

et on désigne par \bar{a}_i le maximum du module de $a_i(y)$ pour $0 \leq y \leq 1$. La formule (3.22) donne

$$u_n(x) < P \left[|\lambda_0| \sum_n(\bar{a}) + \sum'_n(\bar{a}) \right] \quad (3.26)$$

3.4 Equations intégrales non linéaires de Fredholm (Φ non linéaire)

On considère l'équation intégrale (3.1) où les fonctions Φ et \bar{F} sont de type

$$\Phi[x, \varphi(x)] = \Phi[x, \varphi(x)] \text{ et } \bar{F}[x, y, \varphi(y)] = k(x, y)F[y, \varphi(y)]$$

Où la fonction $k(x, y)$ est le noyau, alors (3.1) sera de la forme

$$\Phi[x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 k(x, y)F[y, \varphi(y)] dy, \quad (3.31)$$

Pour simplifier, on suppose le noyau $k(x, y)$ une fonction continue et $\Phi(x, z), F(x, z)$ des séries entières en z pour $0 \leq x, y \leq 1$.

Soit pour $\lambda = \lambda_0, \varphi = \varphi_0(x)$ une solution de cette équation finie et continue pour toutes valeurs de x comprises entre 0 et 1.

En posant

$$\lambda = \lambda_0 + u, \quad \varphi = \varphi_0 + \psi,$$

on a

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi) &= \Phi(x, \varphi_0) + \psi \Phi'(x, \varphi_0) + \dots, \\ F(x, \varphi) &= F(x, \varphi_0) + \psi F'(x, \varphi_0) + \dots, \end{aligned}$$

les dérivées étant prises par rapport à φ .

En introduisant ces développements dans l'équation (3.31), on voit que la forme intégrale linéaire en ψ , indépendante de μ , est

$$\Phi'(x, \varphi_0)\psi(x) - \lambda_0 \int_0^1 k(x, y)F'[y, \varphi_0]\psi(y)dy.$$

On distingue trois cas

- Si l'expression $\Phi'_\varphi[x, \varphi_0(x)]$ est différente de zéro pour $0 \leq x \leq 1$, on dit que la solution $\varphi_0(x)$ est de seconde espèce.
- Si $\Phi'_\varphi[x, \varphi_0(x)]$ s'annule pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1, sans être identique-

ment nulle dans cet intervalle, la solution sera dite de troisième espèce.

- Si $\Phi'_\varphi [x, \varphi_0(x)] = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, on dit que $\varphi_0(x)$ est une solution de première espèce.

Dans le premier cas, le noyau de la forme intégrale linéaire peut s'écrire

$$k_{\varphi_0}(x, y) = k(x, y) F' [y, \varphi_0] \frac{1}{\Phi' [x, \varphi_0(x)]}. \quad (3.32)$$

On suppose d'abord $\Phi(x, \varphi_0) = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$.

L'équation (3.31) est satisfaite pour $\lambda = 0$ et $\varphi = \varphi_0$; comme la fonction déterminante de Fredholm $D(\lambda)$ est égale à 1 pour $\lambda = 0$, il résulte, d'après le théorème de Schmidt, que l'équation (3.31) admet une solution holomorphe et une seule $\varphi(x, \lambda)$ se réduisant à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = 0$.

Il s'ensuit que, pour $\lambda = 0$, l'équation intégrale (3.31) admet un nombre de solutions au moins égal à celui des racines de l'équation $\Phi(x, z) = 0$, finies et continues pour $0 \leq x \leq 1$.

On a le théorème de M. Schmidt général suivant dans le plan de la variable complexe λ , en dehors de l'origine :

Théorème 3.3 *Si les fonctions $\Phi(x, z)$ et $F(x, z)$ sont entières en z pour $0 \leq x \leq 1$ et si l'équation*

$$\Phi [x, \varphi (x)] = \lambda \int_0^1 k(x, y) F [y, \varphi (y)] dy \quad (3.33)$$

avec les hypothèses de l'équation (3.31) admet pour $\lambda = \lambda_0$ la solution finie et de deuxième espèce $\varphi = \varphi_0(x)$; pour un déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ formé avec le noyau $k_{\varphi_0}(x, y)$ est différent de zéro pour $\lambda = \lambda_0$. L'équation (3.33) admet une solution et une seule $\varphi(x, y)$ holomorphe en λ autour de λ_0 et se réduisant identiquement à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = \lambda_0$.

Les deux premières conditions étant remplies, si le déterminant $D(\lambda)$ est nul pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$, le théorème de Schmidt on apprend qu'il y a ramification autour de λ_0 et $\varphi_0(x)$ est une solution limite ou de croisement. Pour λ voisin de λ_0 , l'équation intégrale (3.31) admet au moins deux solutions finies et deuxième espèce $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, qui tendent vers $\varphi_0(x)$ l'orsque λ tend vers λ_0 .

3.4.1 Cas où K_φ est de type $K(x, y)A(x)B(y)$

Dans cette partie on prend la fonction $K_\varphi(x, y)$ de la forme particulière $k(x, y)A(x)B(y)$, sous laquelle se présente le noyau donné $k(x, y)$ serait symétrique et défini. Le noyau (3.32) est alors symétrisable et toutes ses constantes caractéristiques sont réelles. Donc si l'équation (3.32) admet une solution finie $\varphi_0(x)$ pour une valeur λ_0 en dehors de l'axe réel, cette solution est régulière autour de λ_0 .

Le théorème de M.Schmidt ne nous apprend rien sur les solutions de première ou troisième espèce.

On remarque que si $\Phi(x, \varphi)$ est de premier degré en φ , toutes les solutions de l'équation (3.31) sont du même espèce.

Si $k(x, y) = 0$ pour $y > x$, on a l'équation de type de Volterra. Comme dans ce cas le noyau (3.32) n'admet aucune constante caractéristique, l'équation intégrale ne peut pas admettre des solutions limites ou de croisement.

3.4.2 Equations intégrales Algébriques

Définition 3.4 On appelle équation intégrale algébrique une équation de la forme

$$P_m [x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 k(x, y) P_n [y, \varphi(y)] dy \quad (3.34)$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} P_m &= A_m(x)\varphi^m + A_{m-1}(x)\varphi^{m-1} + \dots + A_0(x), \\ P_n &= B_n(y)\varphi^n + B_{n-1}(y)\varphi^{n-1} + \dots + B_0(y). \end{aligned}$$

Si ces polynomes admettent une solution commune $\varphi(x)$, celle -ci est solution de l'équation intégrale (3.34) quel que soit λ .

De même, si pour une racine $\varphi_0(x)$ de $P_m = 0$, on a identiquement

$$\int_0^1 k(x, y) P_n [y, \varphi_0(y)] dy = 0, \quad (3.35)$$

$\varphi_0(x)$ est une solution de l'équation (3.34) quel que soit λ .

En particulier pour l'équation linéaire de Fredholm, on a

$$P_m = \varphi(x) - f(x), \quad p_n = \varphi(y)$$

et si les données $k(x, y)$ et $f(x)$ sont liées par la relation

$$\int_0^1 k(x, y)f(y)dy = 0,$$

$f(x)$ est une solution de l'équation intégrale quel que soit λ ; c'est d'ailleurs la seule, dans le cas où λ n'est pas une constante caractéristique du noyau $k(x, y)$.

Définition 3.5 Si pour $0 \leq x \leq 1$ on a $A_i(x) = 0$ ($i > 1$) et $A_1(x) \neq 0$, l'équation (3.34) est dite de seconde espèce.

On suppose $A_m(x) \neq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ et considère les solutions $\varphi_i(x)$ de deuxième espèce, c'est-à-dire telles que la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} p_m [x, \varphi_i(x)]$$

ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre 0 et 1.

Si la fonction $p_m(x, \varphi)$ est un polynôme en x et φ comme $A_m(x) \neq 0$, toutes les solutions $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_m^0$ de l'équation

$$P_m(x, \varphi) = 0$$

restent finies.

Pour avoir des solutions de deuxième espèce de l'équation (3.34), correspondant à $\lambda = 0$, il suffit de prendre les fonctions $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_v^0$ ($v \leq m$), qui n'ont aucun point critique le long du segment $(0, 1)$ de l'axe réel.

En général, si n est le nombre des solutions $\varphi_i^0(x)$ de l'équation (3.34), finies et de deuxième espèce, le théorème de Schmidt nous apprend que cette équation intégrale admet n solutions $\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \lambda)$ holomorphes en λ autour de l'origine et qui tendent respectivement vers $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0$ lorsque λ tend vers zéro.

Equation intégrale Algébrique non homogène

dans cette partie, on va étudier l'équation non homogène des équations intégrales non linéaires de Fredholm.

Définition 3.6 Une équation intégrale Algébrique non homogène est de type

$$P_m [x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 k(x, y) P_n [y, \varphi(y)] dy + f(x) \quad (3.36)$$

où f étant une fonction donnée finie et intégrable dite le second membre.

Cas où p_m est linéaire et $K \cdot p_n$ de type $A(x)B(y)\varphi^2(y)$

On considère l'équation intégrale (3.35) où les fonctions Φ et \bar{F} sont de type

$$P_m [x, \varphi(x)] = \varphi(x) \text{ et } P_n [y, \varphi(y)] = A(x)B(y)\varphi^2(y)$$

alors l'équation (3.36) sera la forme d'équation intégrale élémentaire

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)B(y)\varphi^2(y)dy + f(x). \quad (3.37)$$

En posant

$$t = \lambda \int_0^1 B(y)\varphi^2(y)dy, \quad (3.38)$$

l'équation (3.37) donne

$$\varphi(x) = tA(x) + f(x)$$

et l'équation (3.38) devient

$$t = \lambda(at^2 + bt + c),$$

Où les coefficients a, b, c étant des constantes déterminées.

Soient $t_1(\lambda)$ et $t_2(\lambda)$ les solutions de cette dernière équation ; l'une d'elles est holomorphe autour de $\lambda = 0$ et s'annule avec λ , admet ce point comme pôle simple.

En dehors de l'origine les deux branches restent finies et admettent dans tout le plan deux points critiques algébriques simples

$$\lambda = \frac{1}{b \pm 2\sqrt{ac}}. \quad (3.39)$$

Comme on a

$$a = \int_0^1 B(y)A^2(y)dy, \quad c = \int_0^1 B(y)f^2(y)dy,$$

et d'après l'inégalité de Schwartz

$$\left[\int_0^1 AB f dy \right]^2 < \int_0^1 BA^2 dy \int_0^1 B f^2 dy,$$

il résulte que les deux points critiques (3.39) sont réels.

Remarque 3.7 *le noyau de l'équation (3.37) est symétrisable.*

Pour $c = 0$, les deux solutions sont holomorphes en dehors de $\lambda = 0$.

Cas où p_m est linéaire et \bar{F} dépend de K et P_n

On considère l'équation intégrale (3.34) où les fonctions Φ et \bar{F} sont de type

$$\Phi[x, \varphi(x)] = \varphi(x) \text{ et } \bar{F}[x, y, \varphi(y)] = A(x)B(y)P_n[y, \varphi(y)] dy$$

elle prend la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)B(y)P_n[y, \varphi(y)] dy, \quad (3.40)$$

c'est une équation intégrale de seconde espèce de degré $n > 1$, dans laquelle

$$P_n(y, \varphi) = A_0(y) + A_1(y)\varphi + \dots + A_n(y)\varphi^n.$$

En posant $\varphi(x) = tA(x)$, la fonction t doit satisfaire à l'équation algébrique adjointe

$$t = \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n), \quad (3.41)$$

dans laquelle

$$\alpha_i = \int_0^1 A_i(y)B(y)A^i(y)dy \dots (i = 0, 1, \dots, n). \quad (3.42)$$

La résolution de l'équation intégrale (3.40) se ramène ainsi à celle de l'équation algébrique (3.41).

Si $\alpha_n \neq 0$, pour chaque valeur $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ l'équation (3.42) détermine n valeurs t_1, t_2, \dots, t_n pour t , en général distinctes

L'équation (3.40) admet donc en général et au plus n solutions distinctes de la forme

$$\varphi_i(x, \lambda) = t_i(\lambda)A(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.43)$$

holomorphes en λ autour de λ_0 .

Si on a

$$\alpha_0 = \int_0^1 A_0(y)B(y)dy \neq 0,$$

la théorie des fonctions algébriques nous apprend que les différentes branches $t_i(\lambda)$ ne peuvent admettre comme pôle que l'unique point $\lambda = 0$. En ce point une seule solution de l'équation (3.41) s'annule; toutes les autres sont infinies.

En posant $t = \frac{1}{\tau}$, cette équation devient

$$\lambda\alpha_0\tau^n + (\lambda\alpha_1 - 1)\tau^{n-1} + \dots + \lambda\alpha_n = 0. \quad (3.44)$$

Pour $\lambda = 0$, on a donc $n - 1$ racines τ nulles. On peut voir facilement par la méthode de puiseux la distribution de ces racines en cycles. Comme dans l'équation (3.44), les coefficients du terme en λ et du terme en τ^{n-1} sont différents de zéro, les $n - 1$ racines, nulles pour $\lambda = 0$, forment un seul système circulaire autour de l'origine.

On en déduit pour les solutions (3.43), de l'équation intégrale (3.40), les résultats suivants :

- Autour de $\lambda = 0$, une seule des branches $\varphi_i(x, \lambda)$ est holomorphe et s'annule avec λ ; toutes les $n - 1$ autres sont infinies à l'origine et admettent $\lambda = 0$ comme point de ramification et forment autour de lui un seul système circulaire.
- Pour $\lambda \neq 0$, les fonctions algébriques t_i , définies par l'équation (3.41), ne peuvent admettre comme points singuliers que des points critiques algébriques. Pour les obtenir, on élimine t entre les deux équations

$$\begin{aligned} t &= \lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n), \\ I &= \lambda(\alpha_1 + 2\alpha_2 t + \dots + n\alpha_n t^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Soit Δ le résultat ainsi obtenu ; il est un déterminant d'ordre $2n - 1$ et se réduit à

$$\Delta = \lambda^{n-1} D_n(\lambda),$$

D_n étant un polynome de degré n . Si $\alpha_n \neq 0$ et $n > 1$, on trouve

$$D_n(0) = (-1)^n [(n-1)\alpha_n]^{n-1} \neq 0.$$

Il existe donc n valeurs singulières $\lambda_s (s = 1, 2, \dots, n)$ différentes de zéro, distinctes ou confondues.

Pour chaque valeur λ_s , l'équation (3.41) admet au moins une racine multiple. ces valeurs particulières de t sont les racines de l'équation

$$(n-1)\alpha_n t^n + \dots + \alpha_2 t^2 - \alpha_0 = 0, \quad (3.46)$$

qu'on obtient en éliminant λ entre les équations (3.41) et (3.45) .

Comme, d'après la théorie de l'élimination pour toute racine multiple de (3.46), les équations (3.41) et (3.45) devraient avoir plusieurs racines communes en λ , ce qui est évidemment absurde, il résulte que l'équation (3.46) a toutes ces racines simples.

D'autre part, les dérivées par rapport à t des équations (3.45) et (3.46) s'annulent pour les mêmes valeurs de $t \neq 0$ et différente des racines de l'équation(3.46). Par suite, si pour une valeur de λ , l'équation (3.41) a une racine multiple en t , cette racine est certainement double.

On a le même résultat, Si l'on suppose $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{i-1} = 0$ et $\alpha_i \neq 0$. D'où la conclusion :

Toutes les branches $\varphi_i(x, \lambda)$ et les solutions de l'équation intégrale (3.40) ont comme points singuliers, en dehors de $\lambda = 0$, des points critiques de biramification dans tout le plan de la variable complexe λ .

3.4.3 Noyau de M.Goursat.

On suppose maintenant le noyau $k(x, y)$ de l'équation intégrale est de la forme

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^p X_i(x)Y_i(y). \quad (3.47)$$

Ils ont été considérés pour la première fois par M. Goursat.

Le nombre de leurs constantes caractéristiques peut être mis sous la forme (3.47), p étant fini et au moins égal à n .

Soit l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y)P_n[y, \varphi_0(y)] dy + f(x) \quad (3.48)$$

dans laquelle $k(x, y)$ a la forme (3.47) et

$$P_n(y, \varphi) = A_0(y) + A_1(y)\varphi + \cdots + A_n(y)\varphi^n,$$

avec $A_n(y) \neq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$.

En posant

$$t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y)P_n[y, \varphi(y)]dy,$$

la solution de l'équation (3.48) prend la forme

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{i=0}^p X_i(x)t_i(\lambda) + f(x),$$

les fonctions t_i étant solutions du système adjoint d'équations algébriques à coefficients constants

$$t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y)P_n[y, \sum_{j=0}^p X_j(y)t_j + f(y)]dy. \quad (3.49)$$

Par suite, toute solution de l'équation intégrale (3.48) est fonction algébrique de λ . Elle a un nombre fini de points singuliers dans tout le plan et ces points sont des pôles ou des points critiques algébriques.

Comme pour $\lambda = 0$, on a $t_1 = t_2 = \cdots = t_p = 0$, les équations (3.49) admettent un système

et un seul de solutions $t_i(\lambda)$, holomorphes autour de l'origine et s'annulant avec λ . Toutes les autres solutions, infinies à l'origine, ont $\lambda = 0$ comme pôle au point critique l'ordre négatif.

Pour $\lambda \neq 0$ on sait, d'après le théorème de Bezout, que les équations (3.49) admettent n^p systèmes de solutions finies au plus.

En considérant encore les équations homogènes formées à l'aide des groupes de degrés n de chacune des équations (3.49), on voit que toute solution finie pour n valeurs $\lambda_0 \neq 0$ reste finie dans tout le plan en dehors de l'origine. Les points singuliers sont donc des points critiques algébriques d'ordre positif.

Pour les obtenir, il suffit de former le déterminant fonctionnel Δ des équations (3.49) et de résoudre l'équation

$$S(\lambda) = 0,$$

obtenue en éliminant t_1, t_2, \dots, t_p entre les équations (3.49) et l'équation algébrique de degrés p en λ et $p(n-1)$ en t

$$\Delta(\lambda, t_1, t_2, \dots, t_p) = 0.$$

La règle de fouret donne une limite supérieure des nombres des valeurs singulières.

Remarquons encore que pour $n > 1$, les solutions holomorphes autour de $\lambda = 0$ ne sont pas des fonctions entières de λ , les ordres de grandeur des deux membres de l'équation (3.48) n'aient pas, en général, égaux pour φ infiniment grand.

On peut donc énoncer les conclusions suivantes :

1° Toute solution de l'équation intégrale algébrique (3.48), dans laquelle le noyau a la forme (3.47), est une fonction algébrique de λ ;

2° Autour de $\lambda = 0$, une solution et une seule est holomorphe ; elle s'annule pour $\lambda = 0$. Toute les autres branches ont $\lambda = 0$ comme pôle ou point de ramification d'ordre négatif.

3° Pour $\lambda \neq 0$, l'équation (3.48) admet en général et au plus n^p solutions de la forme

$$\varphi(x) = X_1(x)t_1(\lambda) + \dots + X_p(x)t_p(\lambda) + f(x).$$

4° Toutes ces solutions n'admettent comme points singuliers $\lambda \neq 0$ que les points critiques de deuxième ordre, c'est-à-dire qu'autour de toute solution limite ou de croisement $\varphi_0(x, \lambda)$ il y a birimification.

5° Si $n > 1$, toute solution, holomorphe autour de l'origine, admet au moins un point de

ramification dans le plan de la variable complexe λ .

Cas de $p = \infty$

Si le noyau de l'équation intégrale (3.48) a la forme

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^p X_i(x)Y_i(y),$$

en employant le même procédé, on ramène la résolution de cette équation à celle d'un système adjoint d'équations implicites en nombre infini et à une infinité d'inconues

$$t_i = \lambda S_i(t_1, t_2, \dots, t_m, \dots) \quad (i = 1, 2, \dots, \infty),$$

les S_i étant des polynomes de degré n par rapport à chacune des lettres t .

M.R.d'ahémar, en prenant pour simplifier le cas de l'équation intégrale de deuxième degrés

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{\infty} X_i Y_i \right] \varphi^2(y) dy = f(x),$$

et en employant la méthode des approximations successives de M.Picard, a démontré que cette équation admet une solution holomorphe autour de $\lambda = 0$.

On a démontré au paragraphe 3, dans un cas plus général, à l'aide des majorantes.

3.5 Equations intégrales de deuxième degré

Une équation intégrale de deuxième degré est une équation intégrale de la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y) \varphi^2(y) dy + f(x), \quad (3.50)$$

dans laquelle $k(x, y)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et intégrables.

Si $f(x) \neq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, on peut toujours ramener cette équation à la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y) \varphi^2(y) dy + 1, \quad (3.51)$$

et en posant

$$S_\varphi = \lambda \int_0^1 k(x, y) \varphi^2(y) dy, \quad (S = S_1),$$

on a la suite des approximations successives

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, \\ \varphi_1 &= 1 + \lambda S, \\ \varphi_2 &= 1 + \lambda S + 2\lambda^2 SS + \lambda^3 SS^2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

En général,

$$\varphi_n = 1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n + R_n = P_n + R_n,$$

les a étant des fonctions de x et R_n un polynome en λ de degrés $2^n - 1$, contenant λ^{n+1} en facteur.

Dans toutes les fonctions φ_i , pour $i > n$, le groupe des termes de degrés au plus égal à n en λ est le polynome P_n de φ_n .

La proposition est visiblement vraie pour $n = 1, 2, 3$. Supposons-la vraie jusqu'à n , on a alors

$$\varphi_{n+1} = 1 + \lambda S(P_n + R_n)^2,$$

et, puisque par hypothèse,

$$P_n = P_{n-1} + a_n\lambda^n,$$

on peut écrire

$$\varphi_{n+1} = 1 + \lambda S(P_{n-1} + a_n\lambda^n + R_n)^2.$$

Par suite, tous les termes de φ_{n+1} de degrés au plus égal à n en λ se trouvent dans l'expression λSP_{n-1}^2 ; mais ceux-ci sont précisément les termes de degrés au plus égal à n dans φ_n .

Quant aux termes en λ^{n+1} de φ_{n+1} , ce sont ceux de λSP_n^2 . On les obtient tous en faisant l'opération λS sur la somme des produits

$$a_n \times 1 + a_{n-1}a_1 + \dots + a_1a_{n-1} + 1 \times a_n$$

des coefficients des termes équidistants des extrêmes dans le polynôme P_n .

La solution de l'équation intégrale (3.51) est donc donnée par le développement

$$\varphi(x, \lambda) = 1 + \lambda S + 2\lambda^2 SS + \lambda^2(4SSS + SS^2) + \dots \quad (3.52)$$

uniformement convergent pour λ suffisamment petit et $0 \leq x \leq 1$.

Si le noyau $k(x, y)$ est réel et positif pour x et y compris entre 0 et 1, tous les coefficients de la série (3.52) sont réels et positifs, et on sait que le premier point singulier de ce développement est sur l'axe réel du côté des λ positifs.

Dans le cas de $f(x)$ quelconque, on trouve la solution

$$\varphi(x, \lambda) = f(x) + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n + \dots \quad (3.53)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 k(x, y)f^2(y)dy = Sf^2, \\ a_2 &= 2S(fSf^2), \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et en général

$$a_n = S(a_{n-1}f + a_{n-2}a_1 + \dots + fa_{n-1}),$$

comme on voit aussi par identification, en cherchant à satisfaire à l'équation (3.50) par un développement de la forme (3.53).

3.6 Equations intégrales transcendantes

Définition 3.8 Dans l'équation (3.14), si on suppose que

$$F[y, \varphi(y)] = e^{\varphi(y)},$$

on définit l'équation transcendante par

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 k(x, y) e^{\varphi(y)} dy + f(x), \quad (3.54)$$

qu'on l'appelle une équation intégrale exponentielle.

3.6.1 Equations intégrales transcendeantes où $k(x, y) = 1$ et $f(x) = 0$

Si on a

$$k(x, y) = 1 \text{ et } f(x) = 0$$

L'équation (3.54) prend la forme élémentaire

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 e^{\varphi(y)} dy \quad (3.55)$$

Par suit, φ est fonction de λ seul et on a

$$\varphi = \lambda e^{\varphi} \quad (3.56)$$

En construisant cette courbe, on voit qu'il y a deux cas

1/cas ($\lambda < 0$)

Pour chaque valeur réelle et négative de λ , l'équation (3.55) admet une seule solution réelle.

2/ cas ($\lambda > 0$)

Si $\lambda > 0$, il y a deux régions distinctes.

- Pour $\lambda < \frac{1}{e}$, l'équation (3.55) admet deux solutions réelles.
- Pour $\lambda = \frac{1}{e}$, on a la solution limite $\varphi = 1$.
- Pour $\lambda > \frac{1}{e}$, les deux solutions deviennent imaginaires.

Toute valeur de $\lambda \neq \frac{1}{e}$, la solution φ est holomorphe en λ . Autour de $\lambda = \frac{1}{e}$, il y a ramification.

On vérifie facilement le théorème de Schmidt. la fonction déterminante étant dans ce cas

$$D(\lambda) = 1 - \lambda e,$$

$\lambda = \frac{1}{e}$ est bien une constante caractéristique du noyau

$$k(x, y) F'_{\varphi_1} = e^{\varphi_1} = e.$$

3.6.2 Equations intégrales transcendentes dégénérées

Dans cette partie on a

$$k(x, y) = A(x) B(y)$$

Si on prend

$$f(x) = 0$$

L'équation (3.54) devient

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x) B(y) e^{\varphi(y)} dy, \quad (3.57)$$

Où les fonctions données $A(x)$, $B(y)$ étant réelles et intégrables.

En posant

$$t = \lambda \int_0^1 B(y) e^{\varphi(y)} dy,$$

la méthode des constantes indéterminées donne

$$\varphi(x) = tA(x)$$

avec l'équation adjointe

$$t = \lambda \int_0^1 B(y) e^{tA(y)} dy = \lambda L(t). \quad (3.58)$$

$A(x) = B(x)$ (**noyau symétrique**) dans ce cas $L' > 0$, $L''' > 0$ et les fonctions L et L'' s'annulent pour une seule valeur réelle de t .

Soit $L(\tau) = 0$, $L''(\theta) = 0$, et on suppose pour fixer les idées

$$\tau < 0, \quad L(0) = \int_0^1 A(y) dy > 0.$$

La courbe représentée par l'équation (3.58) admet, dans ce cas, deux asymptotes $t = \tau$ et $\lambda = 0$. En prenant t pour abscisse, λ croît de 0 à $+\infty$ pour $-\infty < t < \tau$; pour $t > \tau$, λ croît de $-\infty$, s'annule pour $t = 0$, passe par un maximum λ_1 , pour $t = t_1 > 0$ et décroît ensuite jusqu'à 0

pour $t > t_1$.

Par suite, l'équation exponentielle (3.57), avec $A = B$, admet

- Pour $\lambda < 0$, une seule solution réelle ;
- Pour $0 \leq \lambda < \lambda_1$, trois solutions réelles ;
- Pour $\lambda < \lambda_1$, une seule solution réelle.
- Pour $\lambda = \lambda_1$, il y a une solution régulière en λ et une solution limite de biramification.

$A(x) \neq B(x)$ (**noyau non symétrique**) Toutes les valeurs t_i qui rendent λ maximum ou minimum sont données par les racines de l'équation

$$\int_0^1 B(y) [tA(y) - 1] e^{tA(y)} dy = 0.$$

Soit λ_i la valeur de λ correspondant à $t = t_i$. Si $L(0) \neq 0$ et si $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ sont les zéros réels de $L(t)$, la courbe (3.58) admet les asymptotes $\lambda = 0$ et $t = \tau_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$). λ s'annule pour $t = 0, -\infty$ et $+\infty$, et en supposant le plan dévisé en plusieurs régions par asymptotes $t = \tau_i$, la courbe reste de même côté de l'axe des t dans chacune de ces régions, sauf dans celle qui contient l'origine.

D'où les conclusions suivantes :

- Pour λ voisin de zéro, l'équation intégrale exponentielle (3.57) admet une solution et une seule s'annulant avec λ ;
- Pour $\lambda \neq 0$, cette équation a en général plusieurs solutions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_u(x)$, toutes de la forme $t(\lambda)A(x)$.
- Pour les valeurs singulières $\lambda = \lambda_i$, est un maximum de l'ordonnée de la courbe (3.58), lorsque λ , en croissant, passe par la valeur λ_i , le nombre de solutions réelles de l'équation (3.57) diminue de deux unités, deux de ces solutions se confondent en une seule pour $\lambda = \lambda_i$ et devient imaginaires pour $\lambda > \lambda_i$. Au contraire, si λ_i est un minimum, lorsque λ passe par λ_i en croissant, le nombre des solutions réelles de l'équation (3.57) augmente de deux unités.
- Pour $\lambda = \pm\infty$, on a une autre espèce de solutions limites $\varphi = \tau_i A(x)$.

Si $L(0) = 0$, on peut avoir $L'(0) = 0$ ou $L'(0) \neq 0$. Dans les deux cas, il existe un nombre positif h , tel que pour $-h < \lambda < +h$ l'équation (3.57) n'admet aucune solution réelle (sauf

$\varphi = 0$ pour $\lambda = 0$).

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)B(y)F[\varphi(y)] dy$$

La même méthode permet de résoudre l'équation intégrale non linéaire

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 A(x)B(y)F[\varphi(y)] dy,$$

dans laquelle F est une fonction entière de φ . La solution est

$$\varphi(x) = t(\lambda)A(x),$$

$t(\lambda)$ étant la fonction implicite définie par l'équation adjointe

$$t = \lambda \int_0^1 B(y)F[tA(y)] dy.$$

3.6.3 Noyau de M. Goursat

Soi l'équation intégrale transcendante

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sum_{i=1}^p A_i(x)B_i(y)F[\varphi(y)] dy, \quad (3.59)$$

dans laquelle $F(\varphi)$ est une fonction entière en φ et le noyau de M. Goursat est de type

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^p A_i(x)B_i(y)$$

En posant

$$t_i(\lambda) = \lambda \int_0^1 B_i(y)F[\varphi(y)] dy,$$

on trouve comme solution l'expression

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^p t_i(\lambda)A_i(x), \quad (3.60)$$

les fonctions t_i étant définies par le système adjoint

$$\{t_i = \lambda \int_0^1 B_i(y) F [A_1(y)t_1 + A_2(y)t_2 + \cdots + A_p(y)t_p] dy \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (3.61)$$

dans lequel les seconds membres sont des séries entières, à coefficients constants, en t_1, t_2, \dots, t_p .

Si l'on pose

$$C_{ij} = \int_0^1 B_i(y) A_j(y) F'_\varphi (A_1 t_1 + A_2 t_2 + \cdots + A_p t_p) dy,$$

le déterminant fonctionnel du système (3.61) est

$$D = \begin{vmatrix} \lambda C_{11} - 1 & \lambda C_{12} & \cdots & \lambda C_{1p} \\ \lambda C_{21} & \lambda C_{12} - 1 & \cdots & \lambda C_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda C_{p1} & \lambda C_{p2} & \cdots & \lambda C_{pp} - 1 \end{vmatrix}. \quad (3.62)$$

Les équations (3.61) sont vérifiées pour $\lambda = t_1 = t_2 = \cdots = t_p = 0$ et pour ces valeurs on a $D = (-1)^p$. Ces équations admettent donc un système de solutions

$$t_1 = t_1(\lambda), \quad t_2 = t_2(\lambda), \quad \dots, \quad t_p = t_p(\lambda) \quad (3.63)$$

holomorphes en λ autour de l'origine et s'annulant avec λ . Dans le même domaine de λ , l'équation intégrale (3.59) admet la solution régulière et nulle pour $\lambda = 0$:

$$\varphi(x) = t_1(\lambda) A_1(x) + t_2(\lambda) A_2(x) + \cdots + t_p(\lambda) A_p(x). \quad (3.64)$$

En général, si pour $\lambda = \lambda_0$, le système (3.61) admet les solutions $t_1^0, t_2^0, \dots, t_p^0$ et si le jacobien $D = D(\lambda, t_1, t_2, \dots, t_p)$ est différent de zéro pour ces valeurs, l'équation intégrale (3.59) admet une solution régulière autour de λ_0 et se réduisant en ce point à

$$\varphi_0(x) = t_1^0 A_1(x) + t_2^0 A_2(x) + \cdots + t_p^0 A_p(x). \quad (3.65)$$

En éliminant t_1, t_2, \dots, t_p entre les équations (3.61) et (3.62), on obtient une équation en λ donnant toutes les valeurs singulières.

3.6.4 Nouvelle forme du jacobien

En posant

$$X_i = B_i, \dots, Y_i = F'_\varphi(A_1 t_1 + A_2 t_2 + \dots + A_p t_p), \quad (3.66)$$

les fonctions C_{ij} prennent la forme

$$C_{ij} = \int_0^1 X_i Y_j dy,$$

et, d'après un calcul développé par M. Goursat dans le cas de l'équation de Fredholm. Le déterminant (3.62) devient

$$D = \sum_{v=0}^p \frac{(-1)^{p-v}}{v!} \int_0^1 \dots \int_0^1 \Delta_v dx_1 dx_2 \dots dx_v,$$

Δ_v étant un déterminant d'ordre v , dont la première colonne est formée par les éléments

$$\begin{cases} X_1(x_1) Y_1(x_1) + X_2(x_1) Y_2(x_1) + \dots + X_v(x_1) Y_v(x_1), \\ X_1(x_2) Y_1(x_1) + X_2(x_2) Y_2(x_1) + \dots + X_v(x_2) Y_v(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_1(x_v) Y_1(x_1) + X_2(x_v) Y_2(x_1) + \dots + X_v(x_v) Y_v(x_1), \end{cases}$$

et les autres colonnes s'en déduisent en remplaçant dans les fonctions Y_i , la variable x_1 par x_2, x_3, \dots, x_v .

D'après la forme (3.66) des fonctions Y_i , on remarque que, dans la colonne de rang i du déterminant Δ_v , on peut mettre en facteur l'expression

$$F'_\varphi[A_1(x_i) t_1 + A_2(x_i) t_2 + \dots + A_p(x_i) t_p]$$

et en employant la notation abrégée de M. Fredholm, on peut écrire

$$\Delta_v = K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_v \\ x_1, x_2, \dots, x_v \end{pmatrix} \prod_{i=1}^v F'_\varphi[A_1(x_i) t_1 + \dots + A_p(x_i) t_p].$$

En tenant compte de la formule (3.60), le jacobien (3.62) devient donc

$$D(\lambda, t_1, t_2, \dots, t_p) = \sum_{v=0}^p (-1)^{p-v} \frac{\lambda^v}{v!} \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_v \\ x_1, x_2, \dots, x_v \end{pmatrix} \prod_{i=1}^v F'_\varphi[\varphi(x_i)] dx_1 \dots dx_v.$$

Cette expression n'est que le déterminant de Fredholm correspondant au noyau $K(x, y) F'_\varphi[\varphi(y)]$.

On voit ainsi que le théorème de M. Schmidt pour l'équation intégrale transcendante (3.59) se réduit au théorème classique appliqué au système adjoint de fonctions implicites (3.61).

Chapitre 4

Equations intégrales déduite des équations différentielles

4.1 EDO d'ordre deux de type exponentielle

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda e^y = 0, \quad (4.1)$$

ou λ est une constante positive et on propose de trouver la solution $y(x)$ satisfaisant aux conditions $y(x) = 0$, $y'(0) = m > 0$.

On va trouver que cette solution nulle pour $x = 0$, s'annule pour $x = b > 0$.

Au lieu des conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = m$, on peut se donner $y(0) = 0$ et $y(b) = 0$. Sous cette forme le problème revient à la recherche des solutions de l'équation intégrale exponentielle

$$y(x) = \lambda \int_0^b G(x, \xi) e^{y(\xi)} d\xi, \quad (4.2)$$

dans laquelle b est un nombre positif donné et $G(x, \xi)$ désigne la fonction de Green :

$$\begin{cases} G(x, \xi) = \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} & \text{pour } \xi < x, \\ G(x, \xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} & \text{pour } \xi > x. \end{cases}$$

En multipliant l'équation différentielle (4.1) par $2\frac{dy}{dx}$ et en intégrant entre 0 et x , avec les

conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = m$, on obtient

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - m^2 + 2\lambda(e^y - 1) = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{m^2 - 2\lambda(e^y - 1)}. \quad (4.3)$$

Si l'on veut avoir la solution qui commence par être positive pour $x > 0$, on doit prendre le signe + devant le radical.

En posant alors

$$t = 1 + \frac{m^2}{2\lambda},$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\lambda} \sqrt{t - e^y},$$

d'où

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{t - e^y}}. \quad (4.4)$$

Comme, d'après (4.1), $\frac{d^2y}{dx^2}$ est négatif, la courbe $y = y(x)$ tourne sa concavité vers les y négatifs.

La fonction y croit jusqu'à la valeur maximum

$$y = \log t,$$

où elle arrive effectivement pour

$$x = x_1 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\log t} \frac{dy}{\sqrt{t - e^y}}$$

En posant $e^y = u$, on voit que

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_1^t \frac{du}{u\sqrt{t - u}}.$$

est une quantité finie.

Pour $x > x_1$, y décroît et on doit prendre le signe – devant le radical dans la formule (4.3).

La courbe est symétrique par rapport à la droite $x = x_1$ et y redevient nul pour

$$x = b = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_1^t \frac{du}{u\sqrt{t - u}}. \quad (4.5)$$

L'équation fonctionnelle (4.4) définit la solution $y(x)$ de l'équation (4.1) qui reste positive entre 0 et b et s'annule aux extrémités de cet intervalle.

La formule (4.5) donne b en fonction de t (ou de m) et de λ .

En posant $t - u = v^2$, on trouve

$$b = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_0^{\sqrt{t-1}} \frac{2dv}{t-v^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda t}} \log \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t-1}}{\sqrt{t} - \sqrt{t-1}},$$

ou encore

$$b = 2\sqrt{\frac{2}{\lambda t}} \log \left[\sqrt{t} + \sqrt{t-1} \right]. \quad (4.6)$$

Pour $t = 1$ ($m = 0$), on a $b = 0$.

Pour $t > 1$, comme $u^2 > 2(u-1)$ et, comme pour $u \geq 1$,

$$\frac{1}{u} < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{u-1}},$$

on a

$$\int_1^t \frac{du}{u\sqrt{t-u}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^t \frac{du}{\sqrt{(u-1)(t-u)}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

et la formule (4.5) donne

$$b < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}. \quad (4.7)$$

Pour $t = \infty$ ($m = \infty$), on a $b = 0$.

Par suite, lorsque le coefficient angulaire m varie entre 0 et $+\infty$, b passe par un maximum.

4.2 EDO d'ordre deux de type linéaire

Soit l'équation linéaire du second d'ordre de type

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad (4.8)$$

et posent $b_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$. Cette équation admet, comme intégrale nulle en 0 et en b et positive ou nulle pour $0 < x < b$, la solution $y = 0$ pour $b \leq b_1$ et $y = \sin(x\sqrt{\lambda})$ pour $b = b_1$.

En comparant l'équation linéaire (4.8) avec l'équation exponentielle (4.1), l'inégalité (4.7) donne $b < b_1$.

On reprend la formule (4.6) et soit β le maximum de b . On a

$$b = \frac{2\sqrt{2} \log(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})}{\sqrt{\lambda} \sqrt{t}}$$

et

$$\frac{db}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{t\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{\sqrt{t-1}} - \frac{\log(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})}{\sqrt{t}} \right].$$

- Pour $t = 1$, on a $b'_t = \infty$.
- Pour $t > 1$, b'_t est positif tant qu'on a

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{t} \log(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) < 1.$$

Or la fonction $\varphi(t)$, nulle pour $t = 1$, croît avec t pour $t > 1$, et, pour $t = 3, 2766\dots$, on a $\varphi(\tau) = 1$, $b'_t = 0$. Pour $t > \tau$, b'_t est négatif et pour $t = +\infty$, on a de nouveau $b'_t = 0$.

- Pour $t = \tau$, b passe par un maximum

$$\beta = \frac{h}{\sqrt{\lambda}}, \quad h = 1,8745\dots \quad (4.9)$$

- Pour $b = \beta$, le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est $\mu = 2,338\dots\sqrt{\lambda}$.
Soit $\lambda = 1$. Pour $m < \mu$, la courbe $y = y(x)$ part de l'origine, présente un maximum $y = \log t$ et vient couper de nouveau l'axe des x en un point B d'abscisse $b < \beta$. Lorsque m croît, t , b et l'ordonnée maximum de la courbe croissent; le point B , sur l'axe des x , s'approche du point B_1 , d'abscisse β .
- Pour $m = \mu$, B est en B_1 . Pour $m > \mu$, l'ordonnée maximum de la courbe croît toujours, mais b diminue; le point B revient vers l'origine. On retrouve donc, après M.Picard, comme nombre des solutions de l'équation différentielle (4.1) s'annulent en $x = 0$ et $x = b$:
 - Pour $b < \beta$, deux solutions C_1, C_2 ;
 - Pour $b = \beta$, une seule solution C ;
 - Pour $b > \beta$, aucune solution. Lorsque B tend vers B_1 les deux solutions C_1, C_2 tendent vers la solution limite C .

Si on suppose b comme donnée et λ variable, pour chaque valeur de λ , les formules (4.9) et

(4.6) déterminent les quantités t et β . En pose

$$\lambda_1 = \frac{h^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{\sqrt{\lambda_1}} = b. \quad (4.10)$$

En comparant les formules (4.10), (4.9) et en tenant compte des conclusions du paragraphe précédent, on voit que :

- 1 Si $\lambda < \lambda_1$, on a $b < \beta$ et l'équation différentielle (4.1) admet deux solutions s'annulant pour $x = 0$ et $x = b$;
- 2 Si $\lambda = \lambda_1$, les deux solutions se confondent ;
- 3 Si $\lambda > \lambda_1$, on a $\beta < b$ et l'équation (4.1) n'admet plus de solution s'annulant en 0 et b .

On en déduit pour l'équation intégrale exponentielle (4.2)

$$y(x) = \lambda \int_0^b G(x, \xi) e^{y(\xi)} d\xi$$

les conclusions suivantes :

- a/ Pour chaque valeur de λ comprise entre 0 et $\lambda_1 = \frac{(1,8745\dots)^2}{b^2}$, cette équation a deux solutions réelles et distinctes. Ces courbes C_1 et C_2 , de forme parabolique, tournent leur concavité vers les y négatifs et passent par les points $x = 0$ et $x = b$ de l'axe des x .
- b/ Lorsque λ tend vers λ_1 , ces deux courbes tendent vers une position limite C comprise entre C_1 et C_2 .
- c/ Pour $\lambda = \lambda_1$, on a la solution limite C .
- d/ Pour $\lambda > \lambda_1$, l'équation intégrale n'admet plus de solution réelle.

Bibliographie

- [1] M.G.BRATU, Sur les équations intégrales non linéaires. Bulletin de la S.M.F tome 42 (1914) p113-142.
- [2] M.G.BRATU, Sur l'équation intégrale exponentielle (C.R.Acad.Sc, t.CLII, 18 avril 1911, p 1048).
- [3] E.GOURSAT, Sur un cas élémentaire de l'équation de F redholm (Bull. Soc.Math, t. XXXV, 1907, p. 163)
- [4] M.KRASNOV, A. KISSELEV ET G. MAKARENKO, Sur l'équation intégrale problèmes et exercices, édition Mir Moscou 1977