Année: 2013 Né attribué par la bibliothéque

Topologie Produit et topologie Quotient

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplome de

Licence L.M.D.

Université Dr : Tahar Moulay de Saida

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse fonctionnelle

par

Deghbadj **A**hlem

Sous la direction de

Encadreur : D^r **R.Nasri**

Soutenue le .../juin/2013 devant le jury composé de
Messieurs :

M. Kadi	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Président
R. Nasri	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	L'encadrant pédagogique
D. Djelloul	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Examinateur

Remerciements

Si nous sommes arrivés jusqu'a la, c'est grâce à mon Dieu le tout clément qui ma donnée la force et la patience afin de suivire mes études et de pouvoire achever ce modeste travail.

Ce travail n'a pas pu être concrétisé sans l'aide genéreuse de mon encadreur Dr.R.Nasri, Donc je le remercie beaucoup et je le doit exprimer ma gratitude et ma reconnaissance pour leur aides appréciables et leur sacrifice de son temps, ainsi pour ses précieux conseils et sa grande patience.

Je remercie les membres de jury pour leur amabilité de juger mon travail.

Je remercie tous les proffesseurs du départements de mathématique, et en particulier qui ma suivis durant mon cursus.

Enfin, Je remercie tous ceux qui ma aidé de prés ou de loin, et contribuer à la réalisation de ce travail.

Merci à tous

Introduction

Le premier exemple historique d'espace topologique est l'ensemble des nombres réels muni de sa topologie usuelle. Cet exemple est celui qui est à la base de la théorie des espaces topologiques.

La topologie générale est une branche des mathématiques qui fournit un vocabulaire et un cadre général pour traiter des notions de limite, de continuité, et de voisinage. Les espaces topologiques forment le socle conceptuel permettant de définir ces notions. Elles sont suffisamment générales pour s'appliquer à un grand nombre de situations différentes : ensembles finis, ensembles discrets, espaces de la géométrie euclidienne, espaces numériques à n dimensions, espaces fonctionnels plus complexes, mais aussi en géométrie algébrique. Ces concepts apparaissent dans presque toutes les branches des mathématiques ; ils sont donc centraux dans la vision moderne des mathématiques.

La topologie générale ne tente pas d'élucider la question très complexe de la « composition du continu » : elle part d'une approche axiomatique, en utilisant le vocabulaire de la théorie des ensembles ; autrement dit, elle suit une approche fondée sur la notion de structure (en l'occurrence, ici, une structure topologique), en faisant usage d'une axiomatique ensembliste. Les axiomes sont minimaux, et en ce sens c'est la structure la plus générale pour étudier les concepts cités. Ils ont été formalisés par Kolmogorov au début du XXe siècle.

La topologie générale définit le vocabulaire fondamental, mais permet aussi la démonstration de résultats non triviaux et puissants, tels que le théorème de Baire. Elle possède deux prolongements importants, permettant une analyse plus approfondie encore de la notion générale de « forme » : la topologie différentielle, généralisant les outils de l'analyse classique (dérivée, champs de vecteurs, etc.), et la topologie algébrique, introduisant des invariants calculables tels que les groupes d'homologie.

Ce mémoire est partagé en deux chapitres, dans le premier chapitre on donnera quelques notion et résultats élémentaires des espaces topologiques, esapaces métriques, base de topologie et comparaison de topologies, ensuite, on introduit la notion d'homémorphisme qui est une application bijective continue entre deux espaces topologiques dont la réciproque est continue et qui permet aussi de dire que deux espaces topolgiques sont le même vu différemment. Cette notion nous autorise de parler de la topolgie la moins fine pour laquelle toutes ces application sont continues (qui est la topolgie initiale).

Dans le deuxième chapitre intitulé topologie produit et topologie quotient, après avoir définir la topologie produit et quelques propriétés fondamentales, on mettre l'accent sur l'ensemble de Cantor et la topologie quotient.

Table des matières

Chapitre 1

Les espaces topologiques et les espaces métriques

Topologies :
On définit les notions de bases : espaces topologiques, ouverts, fermés, voisinages, applications continues et homéomorphismes. Les définitions sont des notions analogues que l'on connait dans $\mathbb{R}^n$. Le but est autant de généraliser des notions fondamentales comme la continuité que de mieux saisir leur sens profond, Ainsi la notion de fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'exprimer uniquement en termes d'ouverts ou de fermés ou de voisinages sans référente à la métrique de $\mathbb{R}$.

1.1 Espaces topologiques

On commence par une définition fondamentale

Définition 1.1.1. ***(espace topologique)***
Soit X un ensemble et désignons par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties. Une topologie sur X est un sous-ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, qui vérifie :

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ *;*

(2) si $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ *alors* $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ *;*

(3) si $U_1, ..., U_p \in \mathcal{T}$*, alors* $\bigcap_{i=1}^{p} U_i \in \mathcal{T}$*.*

Remarque 1.1.1. .
(a) les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de la topologie.
(b) les conditions (1), (2) et (3) ci-dessus sont les axiomes d'une topologie.
(c) on peut donc remplacer cette définition en disant qu'une topologie est une collection de sous-

ensemble de X, appelés ouverts, qui doivent vérifier que :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad l'ensemble\ vide\ et\ X\ sont\ des\ ouverts,\\
&(2) \quad une\ runion\ quelconque\ d'ouverts\ est\ un\ ouvert,\\
&(3) \quad une\ intersection\ finie\ d'ouverts\ est\ un\ ouvert.
\end{aligned}$$

(d) on écrire par fois $(X, \mathcal{T})$ pour préciser que l'on considére l'ensemble X muni de la topologie $\mathcal{T}$.

Voici quelques exemples, les trois premiéres sont plutôt formeles, le quatriéme est un exemple plus substantiel.

Exemples 1.1.1. .
Exemple 1. *X un ensemble quelconque $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. On l'appelle topologie grossiére : Elle contient le minimun possible d'ouverts, Les axiomes de topologie sont trivialement satisfaits.*
Exemple 2. *X un ensemble quelconque $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. On l'appelle topologie discrete, elle contient le maximun possible d'ouverts.*
Les axiomes de topologie sont évidement satisfaits.
Exemple 3. *$X = \{0, 1\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$. ce n'est ni la topologie discrete, ni la topologie grossiére.*
On vérifie facilement que les axiomes de topologie sont satisfaits, cet espace est appelé espace de Sierpinski.
Exemple 4. *On considére $\mathbb{R}^2$, muni de la distance Euclidienne*

$$x = \binom{x_1}{x_2},\ y = \binom{y_1}{y_2},\ d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Et on définit la boule ouverte de centre x, et de rayon $r > 0$ par :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \ \setminus (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2\}.$$

On définit une topologie $\mathcal{T}$ en disant que $U \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert ssi :

$$\forall\ x \in U\ \exists\ r > 0 \quad tel\ que\ \ B(x, r) \subset U$$

$$\mathcal{T} = \{U \subset \mathbb{R}^2 \ \setminus \forall\ x \in U, \exists\ r > 0, B(x, r) \subset U\}$$

Voyons que les axiomes d'une topologie donnés dans la définition(1.1.1) sont satisfaits :
(1) est immédiate.
(2) soit $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, $\forall\ x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ alors :

$$\exists\ i_0 \in I\ tel\ que\ x \in U_{i_0}.$$

Comme $U_{i_0} \in \mathcal{T}$ alors :

$$\exists\ r > 0,\ tel\ que\ B(x, r) \subset U_{i_0}.$$

donc

$$x \in B(x,r) \subset U_{i_0} \subset \cup_{i\in I} U_i.$$

Ceci montre bien que $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

(3) soient $U_1, ..., U_p \in \mathcal{T}$, *si* $x \in \cap_{i=1}^{p} U_i$ *alors :*

$$\forall\ i \in \{1,...,p\},\ x \in U_i.$$

donc :

$$\forall\ i \in \{1,...,p\},\ \exists\ r_i > 0,\ \textit{tel que } B(x,r_i) \subset U_i.$$

On pose $r = \min\{r_1, ..., r_p\} > 0$ *et alors :*

$$x \in B(x,r) \subset U_i,\ \forall\ i \in \{1,...,p\}.$$

donc :

$$x \in B(x,r) \subset (\cap_{i=1}^{p} U_i).$$

Ceci montre bien que $\bigcap_{i=1}^{p} U_i \in \mathcal{T}$.

Exemple 5. *L'exemple précédent se généralise sans autres à* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$

On définit la distance Euclidienne par :

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)) & \longmapsto & d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \end{array}$$

Et la boule ouverte de centre x *et de rayon* $r > 0$ *par :*

$$B(x,r) = \left\{\ y \in \mathbb{R}^n /\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < r^2\ \right\}.$$

La topologie correspondante sur $\mathbb{R}^n$ *est définie en disant que* U *ouvert si :*

$$\forall\ x \in U, \exists\ r > 0, B(x,r) \subset U.$$

i.e.

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} = \left\{\ U \subset \mathbb{R}^n \backslash\ \forall\ x \in U,\ \exists\ r > 0,\ B(x,r) \subset U\ \right\}.$$

Exemple 6. *Topologie Induite sur un sous-ensemble.*

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ *un espace topologique et* $A \subset X$ *un sous-ensemble. On définit une topologie* $\mathcal{T}_A$ *sur* A *en posant :*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \subset A /\ U \in \mathcal{T}_X\}.$$

Autrement dit, on prend comme ouverts de A *les intersections d'ouverts de* X *avec* A.

Exemple 7. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps commutatif,* n *un élément de* $\mathbb{N}$ *et* $A_n(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$, *un fermé de Zariski de* $A_n(\mathbf{K})$ *est une partie de la forme :*

$$F = \{x \in \mathbf{K}^n : \forall\ i \in I, P_i(x) = 0\}$$

avec $(P_i(x))_{i\in I}$ *une famille de polynômes sur* $\mathbf{K}^n$.

l'ensemble des fermés de Zariski est l'ensemble des fermées d'une unique topologie sur $A_n(\mathbf{K})$, *appelée la topologie de Zariski.*

1.1.1 Espaces Métriques

L'ensemble de $\mathbb{R}^n$ avec la distance Euclidienne ci-dessus se généralise aux espaces métriques.

Définition 1.1.2. ***(Espaces métriques)*** *Soit X un ensemble, une distance ou métrique sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $\forall\ x, y \in X\ ,\ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (s ?paration).

(2) $\forall\ x, y \in X,\ x = y \Rightarrow\ d(x,y) = 0$ (annulation pour la diagonale).

(3) $d(x,y) = d(y,x)$ (sym ?trie).

(4) $\forall\ x, y, z \in X\ ,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (In ?galit ? du triangle).

On dit que le couple (X,d) est un espace métrique.

Exercice 1.1.1. *Montrer que la distance Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ en fait un espace métrique.*

La définition de topologie sur $\mathbb{R}^2$ à partir de la distance Euclidienne (1.1.1(4)) se généralise aux espaces métriques.

Définition 1.1.3. ***(La topologie associée à une métrique)*** *Soit (X,d) un espace métrique, soient $x \in X$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est définie par :*

$$B(x,r) = \{y \in X \diagup d(x,y) < r\}\,.$$

Et on définit une topologie $\mathcal{T}$ sur X en disant que $U \subset X$ est ouvert si :

$$\forall\ x \in U\ ,\ \exists\ r > 0 \qquad \textit{tel que} \qquad B(x,r) \subset U$$

i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_d\ &= \{U \subset X \setminus \forall\ x \in U,\ \exists\ r > 0,\ B(x,r) \subset U\}\,. \\ &= \{\cup_{i \in I} B(x, r_i) \setminus J \subset I\}\,. \end{aligned}$$

La vérification que c'est une topologie se fait comme dans l'exemple (4)de(1.1.1) de $\mathbb{R}^2$.

Exemples 1.1.2. *.*
Exemple 1. *L'exemple de base est une fois de plus $\mathbb{R}^n$ muni de la distance Euclidienne et sa topologie associée.*
Exemple 2. *Un exemple plus surprenant est celui de la métrique discrete :*
Soit X un ensemble quelconque et définissons $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x{=}y \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Les conditions (1),(2) et (3) de (1.1.2) sont immédiates, pour l'inégalité du triangle :
si x=y : il n'à rien à vérifier

$$d(x,z) = 0 \leqslant \underbrace{d(x,y)}_{\geqslant 0} + \underbrace{d(y,z)}_{\geqslant 0}.$$

si $x \neq y$ *: alors* $x \neq y \vee y \neq z$ *et donc :* $d(x,y) + d(y,z) \geqslant 1 = d(x,z)$.
On montre maintenant que la topologie associée à la métrique discrete est la topologie discrete(1.1.1(2)).
En effet :

soit $U \subset X$ *un ensemble quelconque est soit* $x \in U$*, puisque,* $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset U$.

On à donc :

$$\forall x \in U,\ \exists r = \frac{1}{2} > 0,\ x \in B(x, \frac{1}{2}) \subset U.$$

d'où : U *ouvert*
Ainsi, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X)$.

Exemple 3. : *Une pseudo-distance(ou ecart) sur un ensemble* X *est une application* $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ *vérifiant les axiomes (2),(3) et (4) des distances.*

– *On définit les pseudo-boules pour tous* $x \in X$ *et* $\epsilon > 1$ *on note :*

$$B(x,\epsilon) = \{y \in X / d(x,y) < \epsilon\}$$

Exemple 4. *Les applications* d *de* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *suivantes sont des distances sur* $\mathbb{C}$ *respectivement appellées distance SNCF et distance de PEIGNE :*

$$d(x,y) = \begin{cases} \mid x - y \mid & \textit{si } x \textit{ et } y \textit{ sont colin ?aires sur } \mathbb{R} \\ \mid x \mid + \mid y \mid & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} \mid x - y \mid & \textit{si } Re(x) = Re(y) \\ \mid Im(x) \mid + \mid Im(y) \mid + \mid Re(x) - Re(y) \mid & \textit{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.1.2. .

(1) soit (X,d) *un espace métrique. Les boules ouvertes elles-mêmes sont des ouverts.*
En effet si $x \in B(y,r)$ *alors :*

$$d(x,y) < r.$$

On prend donc :

$$l \leqslant \underbrace{r - d(x,y)}_{>0}.$$

Vérifions que $B(x,l) \subset B(y,r)$, *si* $z \in B(x,l)$, *i.e.* $d(z,x) < l$.
et alors :

$$\begin{aligned} d(y,z) &\leqslant d(y,x) + d(x,z) \\ &< d(y,x) + l < r \end{aligned}$$

(2) Toute les topologies ne proviennent pas d'une métrique. l'exemple la plus simple est celui de la topologie grossiére sur un ensemble avec au moins deux éléments :
Si d *est une distance quelconque sur* X *et* $x, y \in X$, *posons* $r = d(x,y)$, *alors* $B(x,r)$ *est un ouvert comme en vient de le voir et il contient* x *mais pas* y. *Mais un tel ouvert n'existe pas dans la topologie grossiére.*

1.1.2 Base de topologie

Une fois de plus, L'inspération vient de l'espace $\mathbb{R}^2$, Où on à construit une topologie à partir des boules ouvertes.

Définition 1.1.4. ***(Base de topologie)***
Soit X *un ensemble, On dit qu'un ensemble* $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ *de parties de* X *est une base de topologie si :*

(1) $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B}$ *tel que* $\quad x \in B$.

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *et* $x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ *tel que* $\quad x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Définition 1.1.5. ***(Topologie associée à une base)***
Soit $\mathcal{B}$ *une base de topologie sur l'ensemble* X. *La topologie* $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ *associée à cette base est définie en prenant comme ouverts les réunions quelconques d'éléments de la base. i.e.*

$$\mathcal{T}_\mathcal{B} = \{\cup_{i \in I} B_i \setminus B_i \in \mathcal{B},\ i \in I\}$$

Remarque 1.1.3. .
(1) si on prend $I = \emptyset$, *On obtient l'ensemble vide.*
(2) il est équivalent de prendre $\mathcal{T}_\mathcal{B}$

$$\mathcal{T}_\mathcal{B} = \{U \subset X \ \diagup \forall x \in U,\ \exists B_x \in \mathcal{B}\ :\ x \in B_x \subset U\}.$$

(3) reste à voir que $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ *est effectivement une topologie.*
(1)il suit de (1) de la définition (1.1.4)que $X \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$, *et on à vu(ou précisé) que* $\emptyset \in \mathcal{T}_\mathcal{B}$ *comme réunion de la famille vide d'éléments de la base.*
donc l'axiome (1) de (1.1.1) est satisfait.
l'axiome (2) vient du fait que la réunion d'une famille de réunions d'éléments de base est une réunion d'éléments de base :
soit $\{U_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{T}_\mathcal{B}$ *ie :* $U_j = \cup_{i_j \in I_j} B_{i_j}$.

$$\cup_{j \in J} U_j = \cup_{j \in J} \cup_{i_j \in I_j} B_{ij} = \cup_{j \in J, i_j \in I_j} B_{ij} \in \mathcal{T}_\mathcal{B}.$$

Enfin, pour l'axiome(3), il suffit de prendre deux ouverts et voir que leur intersection est encore un ouvert :

$$\cup_{i\in I}B_i \ \ ,\cup_{j\in J}B_j \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}.$$

$$(\cup_{i\in I}B_i)\cap(\cup_{j\in J}B_j)=\cup_{(i,j)\in I\times J}(B_i\cap B_j).$$

et il suit de (2) de la définition(1.1.4) que $B_i \cap B_j$ *est réunion d'éléments de la base.*

Exemple 1.1.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique.*
On pose : $\mathcal{B}_d = \{boules\ ouvertes\} = \{B \subset X\ /\ B\ est\ une\ boule\ ouverte\}$. $\mathcal{B}_d$ *c'est une base de topologie.*
pour la condition(1.1.4(1)) :

$$si\ x \in X\ ,\ \exists B(x,r)\in\mathcal{B}_d\ tel\ que\ x\in B(x,r).$$

pour la condition (1.1.4(2))

$$soient\ B(a_1,r_1),B(a_2,r_2)\in\mathcal{B}_d\ \ et\ x\in B(a_1,r_1)\cap B(a_2,r_2).$$

On pose

$$l\leqslant \min(r_1-d(x,a_1),r_2-d(x,a_2))>0.$$

et alors

$$\exists\ B(x,l)\in\mathcal{B}\ tel\ que\ B(x,l)\subset B(a_1,r_1)\cap B(a_2,r_2),\ \ car\ y\in B(x,l).$$

c'est-à-dire :

$$d(x,y)<l.$$

donc : $\forall i \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned} d(y,a_i) &\leqslant d(y,x)+d(x,a_i)<l+d(x,a_i)\\ &<\min(r_1-d(x,a_1),r_2-d(x,a_2))+d(x,a_1)\\ &<r_i-d(x,a_i)+d(x,a_i)=r_i \end{aligned}$$

Parfois des bases différentes peuvent engendrer les mêmes topologies ; c'est le cas si les bases sont équivalentes au sens suivant.

Définition 1.1.6. ***(Bases équivalentes)***
Soit X *un ensemble et* $\mathcal{B},\mathcal{B}^{'}$ *deux bases de topologies sur* X *: On dit qu'elles sont équivalentes si :*
1. $\forall B^{'}\in\mathcal{B}^{'}$ *et* $x\in B^{'}$, $\exists B_x\in\mathcal{B}$ *tel que* $x\in B_x\subset B^{'}$.
et inversement
2. $\forall B\in\mathcal{B}$ *et* $x\in B$, $\exists B^{'}_x\in\mathcal{B}^{'}$ *tel que* $x\in B^{'}_x\subset B$.

Exercice 1.1.2. *Si* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}^{'}$ *sont équivalentes alors* $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}=\mathcal{T}_{\mathcal{B}^{'}}$.

Exemple 1.1.2. ***(Métriques équivalentes)***
(1) On dit que deux métriques d_1 et d_2 sur le même ensemble X sont équivalentes s'il existe deux constantes K_1 et K_2 telle que

$$\begin{cases} d_1(x,y) \leqslant K_1 d_2(x,y) \\ d_2(x,y) \leqslant K_2 d_1(x,y) \end{cases} \quad \forall x, y \in X.$$

Si c'est le cas, les bases de topologie $\mathcal{B}_1 = \{B_{d_1} /\ B_{d_1}$ boule ouverte par rapport ? $d_1\}$, $B_2 = \{B_{d_2} /\ B_{d_2}$ boule ouverte par rapport? ? $d_2\}$ constituées par les boules ouvertes associées à d_1 et d_2 respectivement sont équivalentes.
En effet :
si $B_{d_1}(a,r)$ désigne une boule ouverte définie à l'aide de d_1 et $x \in B_{d_1}(a,r)$, alors :

$$\exists\ B_{d_2}(x,l) \in \mathcal{B}_2.$$

où

$$l = (r - d_1(x,a))\frac{1}{K_1}.$$
$$B_{d_2}(x,l) \subset B_{d_1}(a,r).$$

car :

$$\begin{cases} B_{d_1}(x,(r - d_1(x,a))) \subset B_{d_1}(a,r) \\ B_{d_2}(x,l) \subset B_{d_1}(x,(r - d_1(x,a))) \end{cases}$$

Comme on peut échanger les rôles de d_1 et d_2, On à bien que les deux bases sont équivalentes.
(2) Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ il y a d'autres métriques qui sont naturelles :

$$\begin{array}{rcl} d_\infty, d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n)) & \longmapsto & d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n \mid x_i - y_i \mid, d_\infty(x,y) = \max_{1\leqslant i \leqslant n} \mid x_i - y_i \mid \end{array}$$

et on désignant par d_2 la métrique euclidienne, On vérifie que :

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant n\ d_\infty(x,y) \tag{1.1}$$

Ce qui fait que toutes ces métriques sont équivalentes et donc déffinissent la même topologie sur $\mathbb{R}^n$.
Par contre, la métrique discrete n'est pas équivalentes à ces métriques.

Exercice 1.1.3. *Si on note $B_i(0,r)$ la boule de centre "0" et de rayon r par rapport à la métrique d_i, $i = 1, 2, \infty$ pour $n = 2$.*

1. *Montrer que $B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_1(0,2)$.*
2. *représenter ces boules.*

Solution 1.1.1. *1.On déduit de (1-1)des inclusions*

$$B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_1(0,2).$$

qui sont représentées sur la figure (1-1).

1.1.3 Comparaison de topologies

Définition 1.1.7. *soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur le même ensemble X. On dit que $\mathcal{T}_2$ et plus fine que $\mathcal{T}_1$ si :*

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2.$$

C'est-à-dire : si tout ouvert pour $\mathcal{T}_1$ est aussi ouvert pour $\mathcal{T}_2$.

Exemples 1.1.3. .

1. la topologie discrete $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X)$ est plus fine que toute autre topologie.

2. la topologie grossiére $\mathcal{T}_{Gro} = \{\emptyset, X\}$ est moins fine que toute autre topologie.
On peut ecrire pour toute topologie $\mathcal{T}$ sur X :

$$\mathcal{T}_{Gro} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{dis}$$

3. la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (ie :celle induite par la distance euclidienne) est plus fine que la topologie de Zariski sur $\mathbb{R}^n$ (de même pour $\mathbb{C}$).

4. la topologie induite par la distance SNCF est strictement plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

5. Deux topologies ne sont pas forcément comparables, si l'on prend $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}\}$. On à ni $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ et ni $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

1.2 Applications continues, Homéomorphismes

1.2.1 Continuité

Définition 1.2.1. *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, et $f : X \to Y$; $x \longmapsto f(x)$ une application .*
On dit que f est continue au point x_0 si :

$$\forall\ V \in \mathcal{T}_Y(f(x_0) \in V),\ \exists U \in \mathcal{T}_X(x_0 \in U) : f(U) \subset V.$$

Autrement dit :
pour tout ouvert V de Y contenant $f(x_0)$, on peut trouver un ouvert U de X contenant x_0, dont l'image par f est contenue dans V.
$*$ On dit que f est continue(tout court) si elle est continue pour tout $x_0 \in X$.
On va montrer que dans le cas des espaces métriques, en particulier $\mathbb{R}^n$ avec la métrique euclidienne, On retrouve la définition classique de continuité.

Proposition 1.2.1. *soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue au point x_0, au sens de la définition précédente, pour la topologique associées aux métriques d_X respectivement d_Y, si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \delta_\varepsilon \ , \text{ tel que } d_X(x, x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Preuve. Supposons que f soit continue au sens de (1.2.1). Soit $\varepsilon > 0$ donn ?e ; puisque $B_Y(y, \varepsilon)$ est un ouvert contenant y, il existe un ouvert U de X,

$$x \in U \text{ et } f(U) \subset B_Y(y, \varepsilon).$$

puisque U est ouvert et $x \in U$,

$$\exists \ \delta > 0 : \ B_X(x, \delta) \subset U.$$

Alors

$$f(B_X(x, \delta)) \subset f(U) \subset B_Y(y, \varepsilon).$$

Cette inclusion équivaut à dire :

$$d_X(x, x^{'}) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x^{'})) < \varepsilon$$

C'est-à-dire la continuité au sens classique.
Réciproquement, soit $V \ni y$ un ouvert de Y. Par définition des ouverts associés à une métrique,

$$\exists \ \varepsilon > 0 : \ B_Y(y, \varepsilon) \subset V.$$

Par hypothèse, il existe δ_ε tel que :

$$d_X(x, x^{'}) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), f(x^{'})) < \varepsilon.$$

Ce qui implique que :

$$f(B_X(x, \delta_\varepsilon)) \subset V.$$

Ceci montre la continuité de f au point x, au sens de (1.2.1) ∎

Exemples 1.2.1. .
Exemple1. *On retrouve évidement toutes les fonctions continues au sens classique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, tells que :*

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \rightarrow & \mathbb{R} \\ x \mapsto & f(x) = x^2 \end{array} , \quad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R}^2 \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto & f(x, y) = x^2 + y^2 \end{array}$$

Exemple2. *si X est muni de la topologie discrete, toute application $f : X \rightarrow Y$ est continue.*
Exemple3. *si Y est muni de la topologie grossiére, toute application $f : X \rightarrow Y$ est continue.*
Exemple4. *une application constante*

$$\begin{array}{rl} f : X \rightarrow & Y \\ x \mapsto & f(x) = cste \end{array}$$

est toujours continue car :

$$\forall\ V \in \mathcal{T}_Y,\ f(x) = cste,\ alors\ \exists\ U = X \ni x:\ f(X) = cst \subset V.$$

Exemples 1.2.2. *La continuité d'une application dépend des topologies que l'on considére. par exemple : soit* $X = \{0,1\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}\}$.
L'application

$$\begin{aligned} Id : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow &\quad (X, \mathcal{T}_1) \\ x \mapsto &\quad Id(x) = x \end{aligned}$$

est évidemment continue.
Alors que la même application, mais avec des topologies différentes

$$\begin{aligned} Id : (X, \mathcal{T}_1) &\longrightarrow (X, \mathcal{T}_2) \\ x &\longmapsto Id(x) = x \end{aligned}$$

n'est pas continue au point 1, car

$$\exists V = \{1\} \in \mathcal{T}_2\ ,\ 1 \in V\ ,\ \forall\ U \in \mathcal{T}_1\ 1 \in U\ \ (U = \{0,1\}).$$

$$U = Id(U) \not\subset V = \{1\}.$$

par contre Id *est continue au point "0". La continuité globale d'une application revient à dire qu'elle respecte les topologies par image inverse.*
C'est-à-dire :

Proposition 1.2.2. *soient* X *et* Y *des espaces topologies et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. alors :*

$$f\ continue \Longleftrightarrow \forall\ V \in \mathcal{T}_Y,\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X.$$

Preuve. si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et $V \in \mathcal{T}_Y$, soit $U = f^{-1}(V)$ et $x \in U$.
puisque f est continue au point x, $(f(x) \in V)$:

$$\exists\ U_x \in \mathcal{T}_X,\ x \in U_x\ \ :\ \ f(U_x) \subset V.$$

Ce qui implique que :

$$U_x \subset f^{-1}(V) = U.$$

Alors : $$f^{-1}(V) = U = \cup_{x \in U} U_x.$$
est une réunion d'ouvert, donc ouvert.
Réciproquement, soit $x \in X$ et $V \ni f(x)$ un ouvert de Y, Alors par hypothèse :

$$U = f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X,\ x \in U \text{ et } f(U) \subset V.$$

f est donc continue au point x au sens de(1.2.1). ∎

Remarque 1.2.1. .
1. Il faut faire attention à l'ambiguité de la notation f^{-1} *o ?* $f : X \longrightarrow Y$ *est une application.*

D'autre part, sans aucune hypothèse sur f, On peut définir une application, que l'on note f^{-1} qui va des parties de Y dans les parties de X et qui à $B \subset Y$ associé son image inverse par f :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \ \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) = \{x \in X \setminus \ f(x) \in B\} \end{array}$$

D'autre part, si l'on suppose que f est bijective, son inverse est une vraie application de Y dans X, qui l'on note aussi $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.
Notons que si $B \subset Y$, l'image de B par f^{-1}, notée $f^{-1}(B)$ coïncide avec l'image inverse par f de B, notée aussi $f^{-1}(B)$.

2. Il suit de cette proposition que si $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue et que l'on remplace $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$ par des topologies $\mathcal{T}'_X, \mathcal{T}'_Y$ avec $\mathcal{T}'_X$ plus fine que $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}'_Y$ moins fine que $\mathcal{T}_Y$.

Soit en symboles : $\quad \mathcal{T}_X \subset \mathcal{T}'_X$ *et* $\mathcal{T}'_Y \subset \mathcal{T}_Y$ *alors :*

$$f : (X, \mathcal{T}'_X) \to (Y, \mathcal{T}'_Y) \text{ est encore continue.}$$

3. En générale, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert.

Par exemple en prenons

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = x^2 \end{array}$$

Alors $f(]-1,1[) = [0,1[$ qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exemples 1.2.3. .

Exemple1. *soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue. l'ensemble $U = \{y \in \mathbb{R} \setminus y \neq 0\}$ est ouvert car, $\forall y \in U$. $(y \neq 0)$.*

1. *si $y > 0$, $\exists r = \mid y \mid = y$, $B(y,r) =]0, 2y[\subset U$.*
2. *si $y < 0$, $\exists r = \mid y \mid = -y$, $B(y,r) =]2y, 0[\subset U$.*

– Il en suit que :

$$f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus f(x) \neq 0\} \text{ est ouvert.}$$

par exemple : soit

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) = ((a_1,a_2),(b_1,b_2)) & \longmapsto f(a,b) = det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \end{array}$$

Le fait que $\{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \ f(x) \neq 0\}$ est ouvert a par conséquence que si $a = (a_1,a_2), b = (b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ sont deux vescteurs linéairement indépendant, Ce qui équivaut à dire que $f(a,b) \neq 0$, alors les paires de vecteurs proches de (a,b) le sont aussi, Voici quelques propriétés générales des applications continues.

Proposition 1.2.3. *Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications continues.*

1. *La composition $g \circ f : X \to Z$ est continue.*
2. *Soit $A \subset X$, si On muni A de la topologie induite par celle de X, La restriction f/A de f à A est continue.*
3. *Soit $B \subset Y$ tel que $f(x) \subset B$, si on muni B de la topologie induite, $f : X \to B$ est continue.*

Preuve.

1. Si $W \in \mathcal{T}_Z ; g^{-1}(W) \in \mathcal{T}_Y$ car g est continue, donc $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ et dans $\mathcal{T}_X$ car f est continue.
2. si $V \in \mathcal{T}_Y$, $(f \ /A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ et $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X car f est continue, et alors $f^{-1}(V) \cap A$ est ouvert dans A par définition de la topologie induite.
3. Il suffit de remarquer que, puisque

$$f(X) \subset B,\ si\ V \in \mathcal{T}_Y,\ f^{-1}(V) = f^{-1}(B \cap V).$$

■

1.2.2 Homéomorphismes

Nous allons définir la notion d'homéomorphisme, qui est celle d'équivalence au sens des topologies.

Définition 1.2.2. *(Homéomorphisme).*
Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. *f est continue.*
2. *f est un bijection, dont l'inverse est noté $f^{-1} : Y \to X$.*
3. *l'application $f^{-1} : Y \to X$ est continue.*

Définition 1.2.3. *On dit que les espaces topologies X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme $f : X \to Y$.*
Un des buts de la topologie est de pouvoir dire quand deux espaces sont homéomorphes.

Exemples 1.2.4. .
Exemple 1.

$$\begin{cases} S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ x^2 + y^2 = 1\}. & \textit{le cercle.} \\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ \sup\{\mid x \mid, \mid y \mid\} = 1\} & \textit{le car ?.} \end{cases}$$

le cercle et le caré sont homéomorphe car il existe

$$\begin{array}{rccl} f : & S^1 & \longrightarrow & C \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (x,y) \times \frac{1}{\sup\{|x|,|y|\}} \end{array} \quad \textit{est un homeomorphisme.}$$

dont l'inverse

$$f^{-1} = g : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & S^1 \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) \end{array}$$

Exemple 2. *On reprend l'exemple de* $X = \{0,1\}$ *avec les topologies* $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}\}$
L'application

$$f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases} \end{array} \quad \textit{est un homeomorphisme.}$$

Exemple 3. *Si on a une bijection continue, ce n'est pas forcement un homéomorphisme.*
par exemple : On prend l'espace $X = \{0,1\}$, *avec la toplogie* $\mathcal{T}_1$ *et avec la topologie grossiére* $\mathcal{T}_g$.
Alors $Id : (X, \mathcal{T}_g) \to (X, \mathcal{T}_1)$ *est continue, mais* $(Id)^{-1} = Id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_g)$ *ne l'est pas.*

Exemple 4. *L'application*

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & f(t) = (\sin(\pi t), \cos(\pi t)) \end{array}$$

est continue, bijective, mais son inverse n'est pas continue(Exercice).

1.2.3 Ouverts, Fermés, Voisinages

En plus des ouverts, il y a d'autres sous-ensembles qui jouent un rôle pour un espace topologie, les Fermés et les voisinages des points, à l'aide desquels on peut aussi exprimer la continuité d'une application.

En fait il y a plusieurs façons équivalentes de se donner une topologie : en se donnant la famille des ouverts, comme on l'a fait déja, ou bien en se donnant la famille des fermés, ou encore les voisinages de chaque point.

Fermés :

Définition 1.2.4. *(sous-ensemble fermés). Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. On dit que* $A \subset X$ *est ferm ?s si* $\complement_X A$ *est ouvert.*

Exemple 1.2.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique, et considérons la topologie associée à cette métrique. Alors :*
Si $x \in X$, *le sous-ensemble de* X *réduit au point* x, *que l'on note* $A = \{x\}$ *est fermé.*
En effet : si $x' \in \complement_X A = X - \{x\}$

cela veut dire que : $x \neq x^{'}$.
et alors :

$$B_d(x^{'}, d(x, x^{'})) \subset X - \{x\}. \qquad (x \in B_d(x^{'}, d(x, x^{'})) \ car \ d(x, x^{'}) \geqslant d(x, x^{'})).$$

Proposition 1.2.4. *(propriétés fondamentales des fermés). Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Alors on a :*

(1) $\emptyset$ *et* X *sont des fermés.*

(2) *si* $\{A_i\}_{i \in I}$ *est un famille de fermés, alors* $\cap_{i \in I} A_i$ *est un fermé.*

(3) *si* $A_1, ..., A_p \subset X$ *sont des fermés, alors* $\cup_{i=1}^{p} A_i$ *est un fermé.*

Preuve. La preuve consiste à passer au complémentaires et utiliser les points correspondant de la définition(1.1.1). ■

La notation d'adhérence(ou dit aussi fermeture) permet de mieux comprendre la notation de fermé.

Définition 1.2.5. *(Adhérence d'un ensemble). Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset X$*. On définit l'adhérence ou fermeture* $\bar{A}$ *de* A *par :*

$$\bar{A} = \{x \in X \setminus \forall \ U \in \mathcal{T}, \ x \in U, \ alors \ U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Autrement dit,
x est dans l'adhérence de A si tout ouvert U qui contient x rencontre A.

Exemple 1.2.2. *si on prend* $A = [0, 1[\subset \mathbb{R}, \ \bar{A} = [0, 1]$.

Proposition 1.2.5. *(Propriétés de l'adhérence). Soit X un espace topologique et $A \subset X$.*
(1) $\overline{A}$ *est fermé.*
(2) A *est fermé* $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.
(3) Si $A \subset B$*, alors* $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(4) $\overline{A}$ *est le plus petit fermé qui contient A :* $\overline{A}$ *est fermé et si* $F \subset X$ *est fermé et* $F \supset A$*, alors* $F \supset \overline{A}$.
(5) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Preuve..
(1) Si $U \subset X$ est ouvert et $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$, alors $U \cap A \neq \emptyset$, en effet, si $x \in U \cap \overline{A}$, il suit de la définition de $\overline{A}$ que $U \cap A \neq \emptyset$, Si $x \in X \backslash \overline{A}$, cela veut dire qu'il existe un ouvert U_x tel que $U_x \cap A = \emptyset$, $U_x \ni x$, mais alors $U_x \cap \overline{A} = \emptyset$, et donc $x \in U_x \subset X \backslash \overline{A}$, ce qui fait que $X \backslash \overline{A} = \cup_{x \in X \backslash \overline{A}} U_x$ est réunion d'ouverts, donc ouvert.
(2) Si A est fermé alors $U = X \backslash A$ est ouvert, et $U \cap A = \emptyset$, donc si $x \in U$, $x \notin \overline{A}$, et il en suit que $A = \overline{A}$. La réciproque resulte de (1).
(3) Si $x \in \overline{A}$ et $U \ni x$, $U \subset X$ ouvert, alors $U \cap B \supset U \cap A = \emptyset$, et donc $x \in \overline{B}$.
(4) Si $F \subset X$ est fermé et $A \subset F$, alors d'aprés ce qui précède $\overline{A} \subset \overline{F} = F$.

(5) $\overline{A}$ est fermé d'aprés (1), donc $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ d'aprés (2).

C'est à cause de la propriétés (4) ci-dessus, que l'on appelle $\overline{A}$ la fermeture de A.
A l'aide de la notion de limite d'une suite dans un espace métrique, qui imite la notion analogue dans $\mathbb{R}$, on peut donner une caractérisation utile de l'adhérence dans ces espaces. ■

Définition 1.2.6. *(Limite d'une suite). Soit (X, d) un espace métrique et $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite dans X et $a \in X$. On dit que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, ou bien qu'elle posséde a pour limite, noté $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, si :*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \textit{tel que}\ (n \geqslant N_\varepsilon\ \Rightarrow\ d(x_n, a) < \varepsilon).$$

Proposition 1.2.6. *(Adhérence dans les espaces métriques). Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.*
Alors

$$\overline{A} = \{x \in X\ /\ \textit{il existe une suite}\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A\ \textit{tel que}\ \lim_{n\to\infty} a_n = x\}.$$

Preuve. Si $x \in \overline{A}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ et il est clair que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. *Si* $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ *et* $r > 0$,
La continuité peut s'exprimer en termes de fermés. ■

Proposition 1.2.7. *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application.*
On a :

$$f : X \to Y\ \textit{est continue} \Leftrightarrow\ \forall\ F \subset Y\ \textit{fermé de}\ Y,\ f^{-1}(Y) \subset X\ \textit{est fermé dans}\ X.$$

Preuve. Si $F \subset Y$ est fermé, Y/F est ouvert, et il résulte de (1.2.2) que $f^{-1}(Y/F) = X/f^{-1}(F)$ est ouvert et donc $f^{-1}(F)$ est fermé. ■

Exemple 1.2.3. *Le sous-ensemble $\{0\} \subset \mathbb{R}$ est fermé d'aprés (**??**). Donc, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue, $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = 0\}$ est fermé. Si on reprend la fonction*

$$f(a_1; a_2, b_1, b_2) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

on en déduit que l'ensemble des paires de vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^2$ qui sont linéairement dépendants est un fermé. Il suit alors de la proposition (1.2.6) que si on a deux suites de vecteurs $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$ telles que a_n et b_n sont linéairement dépendants (c'est-à-dire $f(a_n, b_n) = 0$), alors si $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, on a encore a et b sont linéairement dépendants.

On peut définir de maniére symétrique à l'adhérence, l'interieur d'un sous-ensemble A d'un espace topologique X par

$$int(A) = \{x \in A\ /\ \exists\ U_x \subset A,\ U_x\ \textit{ouvert et}\ U_x \ni x\}.$$

Il suit de cette définition que $int(A)$ est le complémentaire de l'adhérence du complémentaire de A. on a des propriétés symétriques de celles de (1.2.5) : $int(U)$ est ouvert si et seulement si $A = int(A)$, $int(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A, et $int(int(A)) = int(A)$.

Frontiére d'un sous-ensemble

Définition 1.2.7. *Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On définit la frontiére, ou bord, de A ainsi :*

$$Fr(A) = \{x \in X \ / \ \forall \ U_x \subset X \text{ ouvert t.q. } U_{x \ni x,\ U_x \cap A} \neq \emptyset \text{ et } U_x \cap (X/A) \neq \emptyset\}.$$

On utilise aussi les notations ∂A ou $\dot{A}$ pour désigner la frontiére (ou bord) de A.

Exemples 1.2.5. *(1) Soit $X = \mathbb{R}^2$ et $B(0,1) = \{(x,y) \ / \ x^2 + y^2 < 1\}$. Alors*

$$\partial B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2 + y^2 = 1\}.$$

(2) Prenons encore $X = \mathbb{R}^2$, mais $A = \overline{B}(0,1) = \{(x,y) \setminus x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. On a encore

$$\partial \overline{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2 + y^2 = 1\}.$$

(3) Si $X = \mathbb{R}^2$ et $A = B(0,1) \cup \{(2,0)\}$:

$$\partial A = \{(x,y) \setminus x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2,0)\}.$$

Proposition 1.2.8. *Soit X un espace topologique et $A \subset X$.*
(1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X/A)}$.
(2) ∂A est fermé dans X.
(3) $\overline{A} = \partial A \cup int(A)$.

Preuve. (1) résulte immédiatement de la d ?finition de ∂A.
(2) est une conséquence de (1).
(3) remarquons que $\overline{A} \supset \partial A$ *et* $\overline{A} \supset A \supset int(A)$, donc $\overline{A} \supset \partial A \cup int(A)$. D'autre part, si $x \in \overline{A}$ et U_x est un ouvert contenant x, alors $U_x \cap A \neq \emptyset$, et si $x \notin int(A)$, nécessairement $U_x \cap (X/A) \neq \emptyset$, donc $x \in \partial A$, il en suit que $\overline{A} \subset \partial A \cup int(A)$, et donc finalement $\overline{A} = \partial A \cup int(A)$. ∎

Voisinages :

Définition 1.2.8. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in X$. On dit que $V \subset X$ est un voisinage de x s'il existe un ouvert U_x tel que $x \in U_x \subset V$. On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.*

Proposition 1.2.9. *(Propriétés fondamentales des voisinages).*

(1) Si $V \in \mathcal{V}_x$ et $V^{'} \supset V$, alors $V^{'} \in \mathcal{V}_x$.

(2) Si $V_1, ..., V_N \in \mathcal{V}_x$, *alors* $V_1 \cap ... \cap V_N \in \mathcal{V}_x$.

(3) Si $V \in \mathcal{V}_x$, *il existe* $U \subset V$, $U \ni x$, *tel que* $U \in \mathcal{V}_{x'}$, $\forall x^{'} \in U$.

Preuve..
(1) Si $V \in \mathcal{V}_x$, $\exists\, U$ ouvert. $x \in U \subset V$, et donc $x \in U \subset V \subset V^{'}$, ce qui fait que $V^{'} \in \mathcal{V}_x$.
(2) Si $V_1, .., V_N \in \mathcal{V}_x$, il existe U_h, $h = 1, ..., N$ tel que $x \in U_h \subset V_h$, $h = 1, ..., N$, et donc $x \in U_1, ..., U_N \subset V_1, ..., V_N$ et comme $U_1 \cap ... \cap U_N$ est un ouvert, cela montre que $V_1 \cap ... \cap V_N \in \mathcal{V}_x$.
(3) Si $V \in \mathcal{V}_x$. on sait qu'il existe U ouvert tel que $x \in U \subset V$. Du fait que U est ouvert, $U \in \mathcal{V}_{x'}$, $\forall\, x^{'} \in U$. ■

Remarquons que dire que $U \subset X$ est ouvert revient à dire que $U \in \mathcal{V}_x$, $\forall\, x \in U$, cela permet de retrouver la famille des ouverts à partir de la famille des voisinages $\mathcal{V}_x$, $x \in X$.
A l'aide des voisinages, on peut caractériser la continuité d'une application en un point :

Proposition 1.2.10. *Soient* X *et* Y *des espaces topologiques,* $f : X \to Y$ *une application et* $x \in X$, $y = f(x)$. *Alors :*

$$f \text{ est continue au point } x \;\Leftrightarrow\; (V \in \mathcal{V}_y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x).$$

Preuve. Si f est continue au point x et que $V \in \mathcal{V}_y$, il existe un ouvert $V^{'} \subset V$, $V^{'} \ni y$. d'aprés la définition de continuité (1.2.1), il existe un ouvert U de X, $U \ni x$. tel que $f(U) \subset V^{'}$, ce qui fait que $f^{-1}(V) \supset U \ni x$ est bien un voisinage de x.
Réciproquement, soit $W \subset Y$ un ouvert, $W \ni y$. En particulier, $W \in \mathcal{V}_y$. donc par hypothèse $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_y$. ce qui implique qu'il existe un ouvert U de X, $U \ni x$ et $U \subset f^{-1}(W)$, d'o? il suit que $f(U) \subset W$, donc f est bien continue au point x. ■

Application ouvertes, fermées :
On a vu dans (1.2.2) qu'une application $f : X \to Y$ est continue si est seulement si pour tout ouvert V de Y, $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X, et dans (**??**) un résultat analogue pour les fermés. On a vu aussi dans l'exemple (1.2.1(3)) qu'en général l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas un ouvert. Il en est de même pour les fermés, par exemple, si $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dénote l'application $p_1(x_1, x_2) = x_1$, si en prend le fermé $A = \{(x_1, x_2)/x_1 \cdot x_2 - 1 = 0\}$, $p_1(A) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.9. *(Applications ouvertes, fermées). Soient* X *et* Y *des espaces topologiques. On dit que l'application* $f : X \to Y$ *est ouverte si*

$$\forall\, U \subset X \text{ ouvert},\ f(U) \text{ est ouvert dans } Y.$$

On dit que f *est fermés si*

$$\forall\, F \subset X \text{ fermé},\ f(U) \text{ est fermé dans } Y.$$

Proposition 1.2.11. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un homéomorphisme.*
2. *f est bijective, continue et ouverte.*
3. *f est bijective, continue et fermée.*

Preuve. Si f est bijective designons par $g : Y \to X$ son inverse. Alors, si $A \subset X$, $g^{-1}(A) = f(A)$. Il suffit d'appliquer 1.2.2 et 1.2.1. ∎

1.3 Topologie initiale

Définition 1.3.1. *Soit X un ensemble, soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow Y_i$ une application, La topologie initiale sur X d ?finie par $(f_i)_{i\in I}$ est la topologie la moins fine rendant continue les applications f_i, pour $i \in I$.*

Exemples 1.3.1. .
Exemple 1. *(Topologie image réciproque)*
si X est un ensemble, si $(Y, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si $f : X \longrightarrow Y$ est une application, alors la topologie image réciproque $f^{-1}(\mathcal{T})$ est la topologie initiale sur X définie par f.
Exemple 2. *(Topologie définie par une famille de pseudo-distances)*
soit X un espace topologique, dont la topologie est définie par une famille de pseudo-distances $(d_i)_{i\in I}$, alors cette topologie $\mathcal{T}_1$ coïncide avec la topologie initiale $\mathcal{T}_2$ sur X définie par la famille d'applications $(f_{\alpha,x_0} : x \longmapsto d_\alpha(x, x_0))_{x_0\in X,\alpha\in\mathcal{A}}$ de X dans $[0, +\infty[$ c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continue les applications pseudo-distances à un point.

∗ *En particulier, la topologie d'un espace métrique (X, d) est la topologie initiale définie par la famille d'applications $(x \longmapsto d(x, x_0))_{x_0\in X}$ de X dans $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rend continue les applications de distance à un point.*

Exemple 3. *(Topologie définie par une famille de semi-normes)*
soit X un espace vectoriel réel ou complexe, et $(\| \,.\, \|_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille de semi-normes sur X, la topologie définie par la famille $(\| \,.\, \|_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ sur X est la topologie initiale définie par la famille d'applications $(f_{\alpha,x_0} : x \longmapsto \| x - x_0 \|_\alpha)_{x_0\in X,\alpha\in\mathcal{A}}$, de X dans $[0, +\infty[$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continue ces applications.

∗ *la topologie définie par $(\| \,.\, \|_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est exactement la topologie de X définie par la famille de pseudo-distances $d_\alpha(x, x_0) = \| x - x_0 \|$, en particulier, elle est engendrée par les pseudo-boules :*

$$B_\alpha(x_0, \epsilon) = \{x \in X : \| x - x_0 \|_\alpha < \epsilon\} \; x_0 \in X \;,\; \epsilon > 0 \;,\; \alpha \in \mathcal{A}$$

Exemple 4. *(Topologie étroite)*
soit X un espace topologique, notons $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes positives de probabilité sur X, notons $\mathcal{C}_b^0(X)$ l'espace vectoriel réel des applications continues bornées de X dans $\mathbb{R}$,

La topologie étroite sur $\mathcal{M}(X)$ est la topologie initiale définie par la famille d'application $\mu \longmapsto \mu(f)$ lorsque f parcourt $\mathcal{C}_b^0(X)$.

1.4 Topologie finale

Définition 1.4.1. *Soit X un ensemble, soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologique et $\forall i \in I$ soit $f_i : Y_i \longrightarrow X$ une application, La topologie finale sur X est la topologie la plus fine sur X rendant continues toutes les applications f_i, et elle définie par les parties u de X tq :$\forall i \in I$ la partie $f_i^{-1}(u)$ soit un ouvert de Y_i.*

Exemples 1.4.1. .
Exemple 1. *(Topologie somme disjointe)*
La somme disjointe d'une famille d'ensembles $\{X_i\}_{i\in I}$ est définie par :

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}\{(x,i)\backslash\ i \in I,\ x \in X_i\}.$$

Cette définition revient à prendre la réunion de copies disjointes de chaque X_i. En effet, il se pourait que pour un $i \neq j$, $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, mais, même si $x \in X_i \cap X_j$, $(x,j) \neq (x,j)$. Donc, si on définit $\varphi_j \to \coprod_{i\in I} X_i$ par $\varphi_j(x) = (x,j)$, $j \in I$, alors φ_j est une bijection de X_j sur $X_j^{'} = \{(x,j)\ /\ x \in X_j\}$, et les $X_j^{'}$ sont effectivement disjoint, même si les X_j l'étaient pas.
On suppose maintenant que l'on a une famille $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ d'espaces toplogiques et aimerait mettre une topologie sur $\coprod_{i\in I} X_i$ qui ait de bonnes propriétés.

Définition 1.4.2. *(Topologie somme disjointe). La topologie somme disjointe sur $\coprod_{i\in I} X_i$ est définie par*

$$\mathcal{T} = \{U \subset \coprod_{i\in I} X_i\ /\ \varphi_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i\ \forall\ i \in I\}.$$

Théorème 1.4.1. *(Propriétés fondamentales de la topologie somme disjointe).*
(1) C'est une topologie au sens de (1.1.1).
(2) Les applications $\varphi_j : X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$ sont continues, ouvertes et fermées, ce sont en fait des homéomorphismes sur

$$\varphi_j(X_j) = \{(x,j) \in \coprod_{i\in I}\ /\ x \in X_j\}.$$

(3) Soit Y un espace topologique et $f : \coprod_{i\in I} X_i \to Y$ une application. Alors

$$f \text{ est continue } \Leftrightarrow\ f \circ \varphi_j : X_j \to Y \text{ est continue } \forall\ j \in I.$$

(4) La topologie somme disjointe est la plus fine parmi celles pour lesquelles les φ_j, $j \in I$ sont continues.

Preuve..
(1) Il est clair que $\emptyset$ *et* $\coprod_{i\in I} X_i$ *appartiennent à* $\mathcal{T}$. *Les axiomes (2) et (3) sont une conséquence de ce que les* $\mathcal{T}_i$ *sont les topologies et des deux propriétés suivantes, de nature ensembliste, de l' opération* φ_j^{-1} *:*
a) si on a une famille $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de sous-ensembles de* $\coprod_{i\in I} X_i$*, alors :*

$$\varphi_j^{-1}(\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda) = \cup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_j^{-1}(U_\lambda).$$

b) si $U_1, ..., U_N \subset \coprod_{i\in I} X_i$,

$$\varphi_j^{-1}(U_1 \cap ... \cap U_N) = \varphi_j^{-1}(U_1) \cap ... \cap \varphi_j^{-1}(U_N).$$

(2) La proposition (1.2.2) montre que les φ_i, $i \in I$, *sont continues.*
Si $U \subset X_i$ *est ouvert, voyons que* $\varphi_i(U)$ *est ouvert. En effet :*

$$\varphi_i^{-1}(\varphi_i(U)) = \begin{cases} U & si\ i = j \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

et donc c'est un ouvert pour la topologie que l'on a défini sur $\coprod_{i\in I} X_i$.
Si $F \subset X_j$ *est fermé, soit* $A = (\coprod_{i\in I} X_i)\backslash\varphi_j(F)$. *Alors*

$$\varphi_i^{-1}(A) = \begin{cases} X_j\backslash F & si\ i = j \\ X_i & sinon \end{cases}$$

et donc A *est ouvert pour la topologie que l'on a défini sur* $\coprod_{i\in I} X_i X_i$, *ce qui fait que* $\varphi_j(F)$ *est fermé.*
Il résulte de (1.2.11) que les φ_j *sont des homéomorphismes sur leur image.*
(3) Si $f : \coprod_{i\in I} X_i \to Y$ *est continue, pour tout* $j \in I$ *la composition* $f \circ \varphi_j$ *est aussi continue d'aprés (1.2.3(2)).*
Supposons que $\varphi \circ f$ *soit continue* $\forall\ j \in I$ *et soit* $V \subset Y$ *un ouvert. Alors* $\varphi_j^{-1}(f^{-1}(V))$ *est ouvert dans* X_j, $\forall\ j \in I$, *ce qui veut bien dire que* $f^{-1}(V)$ *est ouvert dans* $\coprod_{i\in I} X_i$, *donc* f *est continue.*
(4) Soit $\mathcal{T}'$ *une topologie sur* $\coprod_{i\in I} X_i$ *pour laquelle les* φ_j *sont continues,* $\forall\ j \in I$. *Si* $U' \in \mathcal{T}'$, *on a donc que* $\varphi_j^{-1}(U')$ *est ouvert dans* X_j, $\forall\ j \in I$, *ce qui fait que* $U' \in \mathcal{T}$. *On a donc bien* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, *c'est-à-dire que* $\mathcal{T}'$ *est moins fine que* $\mathcal{T}$. ■

Chapitre 2

Topologie produit et topologie quotient

2.1 Topologie produit

2.1.1 Définition et propriétés fondamentales

Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles, On définit le produit de cette famille par :

$$\prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \setminus x_i \in X_i\}$$

La notation $(x_i)_{i\in I}$ indique donc une famille d'éléments, où x_i est un élément de X_i. dans le cas d'une famille finie ou dénombrable $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ on peut représenter les éléments du produits par des suites $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, avec $x_h \in X_h$. Mais dans le cas général, I est un ensemble quelconque et une telle représentation n'a pas de sens.
Notons que si l'un des X_i est vide, alors $\prod_{i\in I} X_i$ est aussi vide. On suppose dorénavant que les X_i sont non vides.
Les projections sur les coordonnées, que l'on connait dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ont pour analogue les projections canoniques dans un produit quelconque :

Définition 2.1.1. *(projections canoniques).*
Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Pour tout $j \in I$ on définit la projection canonique par :

$$\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j \ , \ \pi\ _j((x_i)_{i\in I}) = x_j.$$

Dans le cas du produit d'une famille finie d'ensemble, π_h est simplement la projection sur le h-iéme facteur.

On suppose maintenant que chaque X_i *est muni d'une topologie* $\mathcal{T}_i$ *et on va définir une topologie sur* $\prod_{i\in I} X_i$ *en définissant d'abord une base de topologie, dont les éléments s'appelleront rectangles, et seront vaguement analogues aux rectangles du plan de côtés paralléles aux axes.*

Définition 2.1.2. *(Rectangles).*
On appelle rectangles de $\prod_{i\in I} X_i$ *tout sous-ensemble défini de la maniére suivante. On se donne un sous-ensemble fini* $J \subset I, J = \{j_1, ..., j_N\}$ *et pour tout* $j \in J$ *on se donne un ouvert* U_j *de* X_i*. Le rectangle correspondant à ces données est défini par :*

$$\mathrm{R}(U_{j_1}, U_{j_2}, ..., U_{j_N}) = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \setminus x_{j_h} \in U_{j_h}, h = 1, ..., N\}.$$

On note aussi plus simplement $\mathrm{R}(U_j, j \in J)$*, ou encore :*

$$(\prod_{j\in J} U_j) \times (\prod_{i\in I\setminus J} X_i).$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, si on prend des intervalles ouverts* $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$*,* $\mathrm{R}(I_1, I_2) = I_1 \times I_2$ *est effectivement ce qu'on appelle un rectangle en géométrie élémentaire.*
En particulier, on peut prendre comme famille un seul ouvert $U_j \subset X_j$*, et alors* $\mathrm{R}(U_j) = \{(x_i)_{i\in I} \setminus x_j \in U_j\}$ *désignera le rectangle correspondant.*

Lemme 2.1.1. *Les rectangles de* $\prod_{i\in I} X_i$ *forment une base de topologie. au sens de la définition (1.1.4).*
Nous devons vérifier les axiomes (1) et (2) d'une base de topologie(1.1.4).
Pour (1), il suffit de prendre $J = \emptyset$*, de sorte que le rectangle correspondant est* $\prod_{i\in I} X_i$*.*
Vérifions(2) ; soient $J, J' \subset I$ *deux sous-ensembles finis,* $\{U_j\}_{j\in J}$ *et* $\{U_{j'}\}_{j'\in J'}$ *deux familles d'ouvert,* $U_j \subset X_j$ *et* $U'_{j'} \subset X_{j'}$*. Si* $h \in J \cup J'$*, on pose :*

$$U''_h = \begin{cases} U_h \cap U'_h & si\ h \in J \cap J' \\ U_h & si\ h \in J \setminus J' \\ U'_h & si\ h \in J' \setminus J \end{cases}$$

et alors

$$\mathrm{R}(U_j, j \in J) \cap \mathrm{R}(U'_{j'}, j' \in J') = \mathrm{R}(U''_h, h \in J \cup J').$$

On appelle topologie produit celle engendrée par les rectangles.

Théorème 2.1.1. *(Propriétés fondamentales de la topologie produit).*
(1) Les projections canoniques $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ *,* $\pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$*, sont continues et ouvertes.*
(2) Soit Y *un espace topologique et* $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ *une application. Alors*

$$f \text{ est continue} \Leftrightarrow \pi_i \circ f : Y \to X_i \text{ est continue } \forall i \in I.$$

(3) La topologie produit est la moins fine pour laquelle les $\pi_i, i \in I$*, sont continues.*

Preuve..

(1) Soit $j \in I$ et voyons que π_j est continue : si $U_j \subset X_j$ est ouvert, $\pi_j^{-1}(U_j) = \mathrm{R}(U_j)$, o ? $\mathrm{R}(U_j)$ qui est bien un ouvert de $\prod_{i\in I} X_i$.

Voyons que π_j est ouverte. Puisque tout ouvert de $\prod_{i\in I} X_i$ est réunion de rectangles, il suffit de voir que l'image par π_j d'un rectangle est un ouvert de X_j. Considérons donc le rectangle $\mathrm{R} = \mathrm{R}(U_h, h \in H)$; s'il existe $h \in H$ avec $U_h = \emptyset$, alors $\pi_j(\mathrm{R}) = \emptyset$, sinon

$$\pi_j(\mathrm{R}) = \begin{cases} U_j & \text{si } j \in H\,; \\ X_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc dans tous les cas on trouve un ouvert de X_j.

(2) Si f est continue, il suffit de (1) ci-dessus et de la proposition(1.2.3(1))

Réciproquement, si $f \circ \pi_i$ est continue $\forall i \in I$, soit $\mathrm{R}(U_j, j \in J)$ un rectangle. En posant $\mathrm{R}_j = \mathrm{R}(U_j)$ on ? :

$$\mathrm{R}(U_j, j \in J) = \bigcap_{j\in J} \mathrm{R}_j = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j).$$

et donc

$$f^{-1}(\mathrm{R}(U_j, j \in J)) = f^{-1}(\bigcap_{j\in J} \mathrm{R}_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(\pi_j^{-1}(U_j)) = \bigcap_{j\in J} (\pi_j \circ f)^{-1}(U_j).$$

qui est ouvert puisque $\pi_j \circ f$ est continue par hypothèse. Puisque tout ouvert de $\prod_{i\in I} X_i$ est réunion de rectangles, il en suit que f est continue.

(3) Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$ pour laquelle les $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ sont continues. Si $U_j \subset X_j$ est ouvert, on doit avoir $\pi_j^{-1}(U_j) = \mathrm{R}(U_j) \in \mathcal{T}'$. Il en suit que tout rectangle $\mathrm{R}(U_j, j \in J) = \bigcap_{j\in J} \mathrm{R}(U_j)$ appartient à $\mathcal{T}'$ et donc aussi tout ouvert de la topologie produit. ∎

Exemples 2.1.1. .

(1) On aimerait vérifier que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ co ?ncide avec la topologie produit de n copies de $\mathbb{R}$, muni de la métrique $d(u,v) =\mid u - v \mid, u, v \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^n$ on peut définir la topologie usuelle à partir de la métrique $d_\infty(x,y) = \sup\{\mid x_i - y_i \mid \backslash i = 1, ..., n\}$. Une boule pour cette métrique est un produit d'intervalles :

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \mid x_i - a_i \mid < r\} =]a_1 - r, a_1 + r[\times ... \times]a_n - r, a_n + r[.$$

c'est un rectangle, au sens de la définition(2.1.2), donc un ouvert pour la topologie produit. D'autre part, les projections $\pi_i : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}, \pi_i(x) = x_i$ sont continues pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$, donc d'aprés(2.1.1(3)) tout ouvert pour la topologie produit l'est aussi pour la topologie usuelle. Donc ces deux topologies coïncident.

(2) Soit $A_n = \{0,2\}, n \in \mathbb{N}$, muni de la topologie discrete. L'espace produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ n'est pas un espace discret, car, par exemple, l'ensemble réduit au point $(0, 0, ..., 0, ...)$ n'est pas un ouvert. On

montrera dans(2.1.2) que cet espace est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

(3) Soit $OZ = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3\}$ *(axe* OZ*) et soit* $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus\ x > 0\}$*. Lespace* $\mathbb{R}^3 \setminus OZ$ *est homéomorphe à* $S^1 \times \mathbb{R}^2_+$ *(muni de la topologie produit, cela va de soi), où*

$$S^1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^3 \setminus\ x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

est le cercle unité centré en 0. Pour le voir, posons :

$$\text{pour } ((u,v),(x,0,z)) \in S^1 \times \mathbb{R}^2_+\ ,\ f((u,v),(x,0,z)) = (u \cdot x, v \cdot x, z).$$

$$\text{et pour } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus OZ,\ g(x,y,z) = ((\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}),(\sqrt{x^2+y^2},0,z)).$$

On vérifie que les applications f *et* g *sont continues et inverses l'une de l'autre.*

(4) Un cas particulier de surface de révolution ce définit à partir de la donnée $S = S(d,\alpha,\Gamma)$ *d'une droite* d*, appelées axe de révolution, d'un plan* α *qui contient* d*, et d'une courbe* Γ*, que l'on appelle génératrice, contenue dans* α*. La surface* S *est obtenue en faisant tourner la génératrice, dans son plan* α*, autour de l'axe de révolution(voir figure 2.1.). choisissons des axes de coordonnées de sorte que* $d = OZ$*,* $\alpha = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3\}$*. Si on suppose que* Γ *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2_+$*, alors* S *est homéomorphe au produit* $S^1 \times \Gamma$*. Pour le voir, il suffit de remarquer que l'hypothèse que* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2_+$ *assure que l'homéomorphisme* f *de l'exemple précédent se restreint en un homéomorphisme entre* $S^1 \times \Gamma$ *et* S*.*

(5) Un exemple de surface de révolution est le tore, qui est obtenu en prenant pour Γ *un cercle. Lorsque* Γ *ne rencontre pas l'axe de rotation, le tore est homéomorphe au produit* $S^1 \times S^1$*. (En topologie, lorsqu'on parle de tores, il s'agit toujours du cas où* $\Gamma \cap d = \emptyset$*).*

2.1.2 Des propriétés de la topologie produit

Tranches :

Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $x^0 = (x^0_i)_{i\in I} \prod_{i\in I} X_i$ un élément fixé. Pour $j \in I$, on définit la tranche par x^0 paralléle à X_j par :

$$T(j,x^0) = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i \setminus x_i = x^0_i si\ i \neq j\}.$$

Par exemple, si on prend deux copies de $\mathbb{R}$, numérotées 1 et 2, la tranche correspondant à $i = 2$ et $x^0 = (a_1, a_2)$ dans le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est la droite horizontale passant par le point (a_1, a_2). L'application

$$\varphi_{j,x^0} : X_j \to \prod_{i\in I} X_i\ ,\ x_j \mapsto \begin{cases} x^0_i & \text{si } i \neq j\,; \\ x_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une bijection sur la tranche $T(j,x^0)$; on a même mieux :

Proposition 2.1.1. *φ_{j,x^0} est un homéomorphisme de X_j sur $\mathrm{T}(j,x^0)$.*

Preuve. $\pi_j \circ \varphi_{j,x^0}$ est l'identité sur X_j, et pour $i \neq j, \pi_i \circ \varphi_{j,x^0}$ est la constante x_i^0 ; il suit de (2.1.1(2)) que φ_{j,x^0} est continue.
Si $U_j \subset X_j$ est un ouvert, $\varphi_{j,x^0}(U_j) = \mathrm{R}(U_j) \cap T(j,x^0)$, qui est bien un ouvert pour la topologie induite par $\prod_{i\in I} X_i$ sur la tranche $T(j,x^0)$.
φ_{j,x^0} est donc une bijection de X_j sur $T(j,x^0)$ qui est continue et ouverte ; donc c'est un homéomorphisme. ■

Remarque 2.1.1. *On à vu dans le cas de la somme disjointe que l'on à des applications φ_j : $X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$, qui sont des homéomorphismes sur leur images, tout comme les tranches φ_{j,x^0} de ce paragraphe.*
Cependant, les φ_j sont ouverts et fermées, alors que les φ_{j,x^0} sont ouvertes, mais peuvent ne pas être fermées. Prenons par exemple l'espace de Sierpinski $\mathcal{S} = \{0,1\}$, avec la topologie $\{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}\}$; alors la tranche $\mathrm{T} = \{(x,0), x \in \{0,1\}\} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ n'est pas fermée : par exemple, parce que son complémentaire est $\{(x,1), x \in \{0,1\}\}$, donc la projection sur le deuxiéme facteur est $\{1\}$, qui n'est pas ouvert, malgré que la projection soit une application ouverte.

Métrisabilité :
Soit $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques, Posons :

$$d_n^{'}(x,y) = \inf\{d_n, \frac{1}{n}\}.$$

On vérifie que c'est encore une métrique sur X_n, et qu'elle définit la même topologie sur X_n que d_n.
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et posons :

$$\delta((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\{d_n^{'}(x_n, y_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

On vérifie que δ est une métrique sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Proposition 2.1.2. *La topologie produit sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est la même topologie associée à la métrique δ.*

Preuve. Soit $a = (a_1, ..., a_n, ...) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $r > 0$. Alors, si $N = \sup\{n \setminus \frac{1}{n} \geqslant r\}$. la boule de centre a, et de rayon r pour la métrique δ s'écrit :

$$B_\delta(a,r) = \{x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \setminus d_n^{'}(x_n, a_n) < r, n \leqslant N\}.$$

et donc cette boule coéncide avec le rectangle $\mathrm{R}(B_1(a_1,r), ..., B_N(a_N,r))$ où $B_n(a_n,r)$ est la boule dans X_n de centre a_n, et de rayon r, pour la métrique $d_n^{'}$. Il en suit que les ouverts associées à la métrique δ et ceux de la topologie produit coïncide. ■

Proposition 2.1.3. *Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces discrets, chaque X_i contenant au moins 2 éléments, et supposons que I soit de cardinalité strictement supérieure au dénombrable. Alors la topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$ ne provient pas d'une métrique.*

Preuve. Dans un espace métrique X, pour tout $x \in X$ on à :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n}) = \{x\}.$$

nous allons montrer qu'une telle suite d'ouverts n'existe pas dans un produit qui vérifie les hypothèses de la proposition.
En effet, soit $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts non vides. Alors V_n contient au moins un rectangle non vide $\mathrm{R}(U_j, j \in J_n)$, o ? $J_n \subset I$ est un sous-ensemble fini ; il en suit que $\pi_i(V_n) = X_i$ si $i \in I \setminus J_n$. L'ensemble $J = \cup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ est au plus dénombrable, donc $I \setminus J$ est non vide ; or si $i \in I \setminus J$, $\pi_i(\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n) = X_i$ et comme les X_i contiennent au moins deux éléments, $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ n'est jamais réduit à un seul point. ∎ **Amplification :**

Proposition 2.1.4. *Soient $\{X_i\}_{i\in I}$ et $\{Y_i\}_{i\in I}$ deux familles d'espaces topologiques, indexées par le même ensemble I. Soit $\{f_i : X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ une famille d'applications continues. Alors l'application : :*

$$F : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i \ , \ F((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I}.$$

est continue.

Preuve. Appelons respectivement $\pi_j^X : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ et $\pi_j^Y : \prod_{i\in I} Y_i \to Y_j$ les projections canoniques. Alors $\pi_j^Y \circ F = f_i \circ \pi_j^X$, ce qui montre que $\pi_j^Y \circ F$ est la composition de deux application continues, donc est continue, ceci pour tout $j \in I$. Il suit alors de (2.1.1(2)) que F est continue. ∎

Proposition 2.1.5. *Soient $\{X_i\}_{i\in I}$ et $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ deux familles d'espaces topologiques. Supposons qu'il existe une bijection $\varphi : I \to \Lambda$, et pour tout $i \in I$ un homéomorphisme $f_i : X_i \to Y_{\varphi(i)}$. Alors l'application :*

$$\psi : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda, \qquad \textit{définie par} \qquad (\psi(x_i)_{i\in I})_\lambda = f_j(x_j) \ \textit{si} \ \varphi(j) = \lambda.$$

est un homéomorphisme.

Preuve. ψ est une bijection parce que les φ_j le sont, elle est continue par(2.1.4).
D'autre part, si $\mathrm{R}(U_j, j \in J)$ est un rectangle de $\prod_{i\in I} X_i, \psi(\mathrm{R}(U_j, j \in J)) = \mathrm{R}(f_j(U_j), j \in J)$ est un rectangle de $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$; donc ψ est aussi ouverte, et alors c'est un homéomorphisme.

Voici le phénomène d'amplification : ∎

Corollaire 2.1.1. *Soit X un espace topologique et posons $X_n = X, \ n \in \mathbb{N}, \ Y = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un homéomorphisme :*

$$\psi_k : Y \xrightarrow{\simeq} Y^k = \underbrace{Y \times ... \times Y}_{k-fois}$$

de Y avec le produit k-fois de Y avec lui-même.

Preuve. Les deux ensembles $\mathbb{N}$ et $\underbrace{\mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}}_{k-fois}$ sont dénombrables, il existe donc une bijection $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$.
D'autre part, Y^k est le produit de copies de X indexées par $\mathbb{N}^k$. Ce corollaire est alors une conséquence de(2.1.5), où le rôle de f_i est joué par l'application identité : $X \to X$. ∎

2.1.3 L'ensemble de Cantor

Voici une premiére approche heuristique de ce sous-ensemble de l'intervalle $[0,1]$. On applique l'opération qui consiste à ôter l'intervalle ouvert $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, soit le tiers du milieu, de l'intervalle $[0,1]$, appelons C_1 l'ensemble obtenu ainsi : il consiste en deux intervalles de longueur $\frac{1}{3}$, soit $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$. On recommence avec ces deux nouveaux intervalles, et ainsi de suite. A la limite, on obtiendra un ensemble $C \subset [0,1]$, appelé ensemble de cantor.
pour une approche plus rigoureuse, appelons $\omega_0(x) = \frac{1}{3}.x$ et $\omega_2(x) = \frac{1}{3}.x + \frac{2}{3}$ les homotéties de rapport $\frac{1}{3}$, de centre respectivement 0 et 1. Si on pose $C_0 = [0,1]$, on a $C_1 = \omega_0(C_0) \cup \omega_2(C_0)$, on définit par récurrence $C_{n+1} = \omega_0(C_n) \cup \omega_2(C_n)$, et alors $C = \cap_{n \geqslant 1} C_n$.
Soit $A_n = \{0,2\}$, $n \in \mathbb{N}$. Un élément de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $a_n = 0$ ou $a_n = 2$. Notons que la série à termes positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{3^n}$ converge dans $[0,1]$, car elle est dominée par $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{3^n} = 1$.

Théorème 2.1.2. *L'application :*

$$\varphi : \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \to [0,1] \ , \ \varphi((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

induit un homéomorphisme de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *sur l'ensemble de Cantor* C.

Preuve..
(1) φ est une bijection sur C.
Montrons d'abord que tout $x \in C_n$ s'écrit de maniére unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} \ , \ a_i \in \{0,2\} \ , \ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{3^n}.$$

(a) Unicité de l'écriture :
si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + r = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{3^i} + s \ , \ 0 \leqslant r, s \leqslant \frac{1}{3^n}.$$

supposons que $a_i = b_i$, $i = 1, ..., m-1$, où $m \leqslant n$, mais $a_m < b_m$, alors $a_m = 0, b_m = 2$ et $x = \underbrace{\frac{a_1}{3} + ... + \frac{a_{m-1}}{3^{m-1}}}_{=A} + \frac{a_{m+1}}{3^{m+1}} + ... + \frac{a_n}{3^n} + r$

$$< A + (\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}) + \frac{1}{3^n} = A + \frac{2}{3^{m+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} + \frac{1}{3^n} = A + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^n} \leqslant A + \frac{2}{3^m}.$$

et donc $x < A + \frac{2}{3^m}$; mais d'autre part :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{3^i} + s = A + \frac{2}{3^m} + \frac{b_{m+1}}{3^{m+1}} + ... + s \geqslant A + \frac{2}{3^m}$$

d'où contradiction.

(b) Existance de l'écriture :

Par induction sur n : si $x \in C_1$, ou bien $x = 0 + r$, ou bien $x = \frac{2}{3} + r,\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{3}$. Si on sait que tout $x^{'} \in C_n$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + r,\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{3^n}$, soit $x \in C_{n+1}$. Alors, ou bien :

$$x = \omega_0(x^{'}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^{i+1}} + \frac{r}{3}$$

ou bien

$$x = \omega_2(x^{'}) = \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^{i+1}} + \frac{r}{3}$$

et donc dans les deux cas x peut s'ecrire sous la forme voulue.

Comme conséquence, si $x \in C$, alors $x \in C_n$ pour tout n, et ce qui précéde montre que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + r\ ,\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{3^n}$$

cette écriture étant unique, En faisant $n \to \infty$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

les a_i étant déterminés de maniére unique par x, donc φ est bien une bijection sur C.

(2) φ est continue :

Montrons la continuité de φ au point $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Posons $x = \varphi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$$

Le rectangle de $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ correspondant aux ouverts $\{a_1\}, ..., \{a_N\}$ (rappelons que A_n est muni de la topologie discréte) s'écrit :

$$\mathrm{R}(a_1, ..., a_N) = \{(b_1, ..., b_i, ...) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \setminus a_i = b_i \ pour\ i = 1, ..., N\}.$$

et donc si $b \in \mathrm{R}(a_1, ..., a_n)$, alors

$$\mid \varphi(a) - \varphi(b) \mid \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon.$$

ce qui montre que $\varphi(\mathrm{R}(a_1, ..., a_N)) \subset B(x, \varepsilon)$.

(3)Montrons que φ est ouverte :

Soit $\mathrm{R}(a_{i_1},...,a_{i_k})$ un rectangle de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{R}(a_{i_1},...,a_{i_k})$. Soit $N = \max\{i_1,...,i_k\}$ et $W = B(\varphi(a), \frac{1}{3^{N+1}}) \cap C$; alors $\varphi(a) \in W$ et $W \subset \varphi(\mathrm{R}(a_{i_1},...,a_{i_k}))$, car si $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^{'}}{3^i} \in B(\varphi(a), \frac{1}{3^{N+1}}) \cap C$; n ?c ?ssaire $a_i^{'} = a_i,\ i = 1,...,N$, et donc $(a_i^{'}) \in \mathrm{R}(a_{i_1},...,a_{i_k})$, Ceci montre que $\varphi(\mathrm{R}(a_{i_1},...,a_{i_k}))$ est un ouvert de C et de lé il suit que φ est ouverte. ■

2.2 Topologie quotient

Définition 2.2.1. *Soit X un ensemble. Rappelons qu'une relation binaire sur X est un sous-ensemble* R *du produit $X \times X$; en général, on note $x\mathrm{R}y$ si $(x,y) \in \mathrm{R}$, et on dit que x est en relation avec y.*

Définition 2.2.2. *Une relation d'équivalence sur l'ensemble X est une relation binaire* $\mathrm{R} \subset X \times X$ *qui vérifie les trois axiomes :*

1. *$x\mathrm{R}x$ (refléxivité).*
2. *$x\mathrm{R}y \Rightarrow y\mathrm{R}x$ (symétrie).*
3. *$x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{R}z \ \Rightarrow\ x\mathrm{R}z$ (transivité).*

Par exemple, sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on peut définir la relation d'équivalence :

$$x\mathrm{R}y \ \Leftrightarrow\ x \equiv y \quad mod\ n.$$

où $x \equiv y$ mod n signifie que $x - y$ et un multiple de n.
On note souvent $x \sim y$ pour dire que (x,y) est dans une certaine relation d'équivalence.

Définition 2.2.3. *Une partition de l'ensemble non vide X est un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X (i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$) qui vérifie :*

1. *Si $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$, alors $\mathrm{C} \neq \emptyset$.*
2. *Si $\mathrm{C}, \mathrm{C}^{'} \in \mathcal{C}$, alors $\mathrm{C} \cap \mathrm{C}^{'} \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{C} = \mathrm{C}^{'}$.*
3. *por tout $x \in X$, il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ tel que $x \in \mathrm{C}$.*

A une relation d'équivalence est associée une partition de X de la maniére suivante : si $x \in X$, sa classe d'équivalence C_x est définie par

$$\mathrm{C}_x = \{y \in X \setminus\ x\mathrm{R}y\}.$$

Proposition 2.2.1. *Les classes d'équivalences associées à une relation d'équivalence* R *sur X forment une partition sur X. Réciproquement, une partition $\mathcal{C}$ de X est associée à la relation d'équivalence définie par*

$$x\mathrm{R}y \ \Leftrightarrow\ \exists \mathrm{C} \in \mathcal{C} \text{ tel que } x, y \in \mathrm{C}.$$

Preuve. Supposons que $C_y \cap C_z \neq \emptyset$,et soit $x \in C_y \cap C_z$, cela implique que xRy, xRz, et yRz, donc finalement $C_x = C_y = C_z$. Les classes d'équivalence sont donc disjointes, par définitions $C_x \ni x$, ce qui montre qu'elles sont non vides et que tout $x \in X$ est dans l'une d'elles.
La réciproque se vérifie sans peine.

On note X/R l'ensemble des classes d'équivalence associées à la relation R, on l'appelle ensemble quotient de X par la relation R. On a une application surjective $\pi : X \to X/R$, qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence, on l'appelle projection canonique. Parfois on note $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in X$. ■

Définition 2.2.4. *Soit $f : X \to Y$ une application et $\sim$ une relation d'équivalence sur X, on dit que f est compatible avec la relation $\sim$ si*

$$x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Si c'est le cas, on déduit de f une application $\bar{f} : X/\sim \to Y$ en posant $\bar{f}([x]) = f(x)$. En d'autre termes, $\bar{f}$ associé à une classe d'équivalence C l'image de n'importe quel représentant $x \in \mathrm{C}$ par f : le choix du représentant n'a pas d'importance puisque f est compatible avec $\sim$.

Exemples 2.2.1. .
(1) Sur $\mathbb{R}$ on peut définir la relation d'équivalence :

$$x \sim y \text{ si } x - y \in \mathbb{Z}.$$

La classe d'équivalence de x est $\{x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble $\mathbb{R}/\sim$ est en bijection avec le cercle S^1 : si $x \in \mathbb{R}$ et $[x]$ désigne sa classe dans $\mathbb{R}/\sim$, on pose

$$\varphi([x]) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)).$$

φ est bien définie parceque $\cos(2\pi x)$ et $\sin(2\pi x)$ sont compatible avec la relation $\sim$. On vérifie que φ est une bijection.

(2) Si $f : X \to Y$ est une application, on définit la relation $x \sim x'$ si $f(x) = f(x')$. Les classes d'équivalence s'appellons les fibres de f, ce sont les ensembles $f^{-1}(y)$, où $y \in f(X)$. Envidemment, f est compatible avec $\sim$, et l'application $\bar{f} : X/\sim \to Y$ qu'on en déduit est injective. On peut représenter ces espaces et application par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Si f est surjective, alors $\bar{f}$ est bijective.

(3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2$. *Les fibres de* f *sont les cercles centrés à l'origine, y compris le cercle dégénéré de rayon 0, qui consiste en l'origine.*

(4) Si $A \subset X$, *on peut définir la relation d'équivalence :*

$$x\mathrm{R}y \ \Leftrightarrow\ x \in X \setminus A \text{ et } x = y\ ,\ \text{ou bien } x, y \in A.$$

Les classes d'équivalence sont donc de la forme :

$$\mathrm{C}_x = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in X \setminus A \\ A & \text{si } x \in A \end{cases}$$

L'espace quotient est noté d'habitude $X \setminus A$. *La projection canonique* $\pi : X :\to X \setminus A$ *envoi le sous-ensemble* A *sur un seul point, la classe d'équivalence* A, *elle est injective sur* $X \setminus A$.
On suppose maintenant que X *est un espace topologique, et que l'ensemble sous-jacent est muni d'une relation d'équivalence* R. *On aimerait munir l'espace quotient* X/R *d'une topologie, ayant des bonnes propriétés.*

Définition 2.2.5. *(Topologie quotient). Soit* X *un espace topologique,* R *une relation d'équivalence sur* X *et* $\pi : X \to X/\mathrm{R}$ *la projection canonique associée. On pose :*

$$U \subset X\ /\mathrm{R} \text{ est ouvert} \Leftrightarrow\ \pi^{-1}(U) \text{ est ouvert dans } X.$$

Notons que $\pi^{-1}(U) = \cup_{\mathrm{C} \in U} \mathrm{C}$ *et donc* $U \subset X/\ \mathrm{R}$ *est dite ouvert si la réunion des classes d'équivalence qui le constituent est un ouvert de* X. *Aussi, il revient au même de définir la topologie quotient en disant que* $F \subset X/\mathrm{R}$ *est fermé si et seulement si* $\pi^{-1}(F)$ *est fermé dans* X.

Théorème 2.2.1. *(Propriétés fondamentales de la topologie quotient)*
Soit X *un espace topologique et* R *une relation d'équivalence sur* X, *on muni* X/R *de la topologie quotient. Alors :*
(1) La topologie quotient est la plus fine pour laquelle la projection canonique $\pi : X \to X\ /\mathrm{R}$ *est continue.*
(2) Soit Y *un espace topologique et* $f : X \to Y$ *une application compatible avec* R. *On pose* $\bar{f}([x]) = f(x)$, *ce qui revient à définir* $\bar{f}$ *par la relation* $f = \bar{f} \circ \pi$, *que l'on peut représenter sur le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \nearrow & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Alors :

$$f \text{ est continue} \Leftrightarrow \bar{f} \text{ est continue.}$$

(3) Si l'application f *est ouverte, alors* $\bar{f}$ *est aussi ouverte, Si* f *est fermée, alors* $\bar{f}$ *est aussi fermée.*

Preuve..
(1) est une conséquence immédiate de la topologie quotient.
(2) Si $\bar{f}$ est continue, f est continue car $f = \bar{f} \circ \pi$, composition de deux application continue. Réciproquement, si f est continue et $V \subset Y$ un ouvert, $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(V)) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(V) = f^{-1}(V)$, est un ouvert de X parce que f est continue, donc $\bar{f}^{-1}(V)$ est un ouvert de X/R par définition de la topologie quotient.
(3) soit $U \subset X/R$ un ouvert. Alors $\bar{f}(U) = f(\pi^{-1}(U))$, qui est ouvert parce que $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X et que f est ouverte.

Dans les exemples qui suivent, il faut imaginer les relations d'équivalence comment permettant d'identifier les points qui sont dans une même classe d'équivalence. Aussi, lorsqu'on définit la relation, on omet généralement d'indiquer les points qui sont isolés leur classe d'équivalence, c'est le cas par exemple pour le ruban de Môbius ci-aprés. ■

Exemples 2.2.2. .
(1) On peut reprendre l'exemple(2.2.1(1)) à la lumiére de ce théorème. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ *est continue et compatible avec la relation de(2.2.1(1)), soit* $x \sim x^{'}$ *si* $x - x^{'} \in \mathbb{Z}$. *En fait,* f *est a pour image le cercle* S^1*, et on va la regarder comme telle :* $f : \mathbb{R} \to S^1$ *est une application surjective. Elle induit donc une application continue* $\bar{f}$ *:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{R}/\sim & & \end{array}$$

qui est en fait bijective. D'autre part, on vérifie que f *est ouverte, et alors* $\bar{f}$ *l'est aussi d'aprés(2.2.1(3)),* $\bar{f}$ *est donc un homéomorphisme.*
Remarquons que la projection canonique dans cet exemple n'est pas fermée : si elle l'était, f *le serait aussi, car* $f = \bar{f} \circ \pi$ *et* $\bar{f}$ *étant un homéomorphisme est fermée, et la composition d'applications fermées est évidement une application fermée. Or si on prend* $A = \{n - \frac{1}{n} \setminus n \in \mathbb{N}\}$,

$$f(A) = \{(\cos(2\pi(1 - \frac{1}{n})), \sin(2\pi(1 - \frac{1}{n}))),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

et donc $1 = \lim_{n\to\infty}(\cos(2\pi(1 - \frac{1}{n})), \sin(\cos(2\pi(1 - \frac{1}{n}))))$ *appartient à* $\overline{f(A)}$, *mais* $1 \notin f(A)$. *donc* f *n'est pas fermée, et* π *non plus.*
Par contre π *est ouverte, si* $U \subset \mathbb{R}$ *est un ouvert,* $\pi^{-1}(\pi(U))$ *est la réunion des translatés de* U *par des éléments de* $\mathbb{Z}$*, c'est donc un ouvert de* $\mathbb{R}$*, et il en resulte, par définition de la topologie quotient, que* $\pi(U)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}/\sim$.

(2) Appelons $g : [0,1] \to S^1$ *la restriction de l'application* f *de l'exemple précédent à* $I = [0,1]$*, alors* $g(0) = g(1)$. *La relation d'équivalence associée au sous-ensemble* $\partial I = \{0,1\}$ *est donc la*

*même que celle associée à g comme dans l'exemple(**??**(2)). On a donc un diagramme commutatif d'applications continues :*

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & S^1 \\ \downarrow & \nearrow & \\ I/\partial I & & \end{array}$$

et $\overline{g}$ est de nouveau un homéomorphisme, car on peut vérifier que g est fermée. On dit que le cercle est obtenu à partir de l'intervalle $[0,1]$ en identifiant 0 et 1.

(3) L'exemple précédent se généralise en dimention supérieur. Regardons le cas de la sphére de dimention deux :

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Si $s, t \in [0,1]$, on pose $\varphi = 2\pi s$, $\theta = \pi t$, de sorte que $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Définissons $g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ par :

$$g(s,t) = (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

On peut vérifier que g induit un homéomorphisme :

$$\bar{g} : [0,1] \times [0,1] \diagup\!\sim \ \xrightarrow{\simeq} S^2.$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par : $(0,t) \sim (1,t), (s,0) \sim (s^{'},0)$ et $(s,1) \sim (s^{'},1)$, $\forall s, s^{'} \in [0,1]$.

(4) Le ruban simple est défini comme le quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$ par la relation $(0,t) \sim (1,t)$ (sous-entendu : $(s,t) \sim (s,t)$ si $s \neq 0,1$).

(5) Le ruban de Môbius, imaginé par le mathématicien allemand A.F.Môbius en 1858, à l'age de 68 ans, est défini comme le quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification : $(0,t) \sim (1, 1-t)$.

(6) Le tore peut être redéfini comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par les identifications $(s,0) \sim (s,1)$ et $(0,t) \sim (1,t)$. L'application $f : [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times S^1$, $f(s,t) = ((\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)))$ induit un homéomorphisme de $[0,1] \times [0,1]/\sim$ avec $S^1 \times S^1$.

(7) La bouteille de Klein (F.Klein, 1882) est définie comme quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par les identifications : $(s,0) \sim (s,1)$ et $(0,t) \sim (1, 1-t)$.

(8) Le plan projectif peut être défini comme le quotient de $[0,1] \times [0,1]$ *par la relation* $(s,0) \sim (1-s,1),\ (0,t) \sim (1,1-t)$.

Les identifications de ces cinq derniers exemples sont représentées sur la figure(2.4).
On reviendra sur la représentation des espaces définis ci-dessus lorsqu'on disposera de la notation de compact.
Pour terminer, on introduit la notation d'ensemble saturé, qui permet de dire quand la projection canonique est ouverte ou fermée.

Définition 2.2.6. *Soit* X *un ensemble muni d'une relation d'équivalence* R *et soit* $A \subset X$*. Le saturé de* A *par rapport à* R*, est la réunion de toutes les classes d'équivalence qui rencontrent* A*, soit :*

$$\cup_{x \in A} \mathrm{C}_x.$$

Le saturé de A *peut donc s'écrire* $\pi^{-1}(\pi(A))$*, où* $\pi : X \to X/\mathrm{R}$ *désigne la projection canonique, la projection suivante en resulte aussitôt :*

Proposition 2.2.2. *Soit* X *un espace topologique,* R *une relation d'équivalence sur* X*. La projection canonique* $\pi : X \to X/\mathrm{R}$ *est ouverte si et seulement si le saturé de tout ouvert de* X *est ouvert, elle est fermée si et seulement si le saturé de tout fermée de* X *est fermée.*

Exemples 2.2.3. .
(1) Dans l'exemple(2.2.2(2)), le saturé de $[0, \frac{1}{2}[$*, qui est ouvert, est* $[0, \frac{1}{2}[\cup \{1\}$*, qui n'est pas ouvert, la projection canonique n'est donc pas fermée. Par contre, on voit facilement que le saturé d'un fermé de* $[0,1]$ *est fermé, donc la projection canonique est fermée.*
(2) sur $[-2,2]$ *considérons la relation d'équivalence :*

$$x \sim x^{'} \ si\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \ ou\ -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

On vérifie que l'application :

$$\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}^2\ ,\ \varphi(t) = \begin{cases} (x^2, 0) & si\ 1 \leqslant 2\ ou\ -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -(\cos(\pi t), \sin(\pi t)) & sinon. \end{cases}$$

est fermée et donc elle induit un homéomorphisme $\overline{\varphi}$ *de* $[-2,2]/\!\sim$ *sur le sous-ensemble du plan constitué par* $S^1 \cup [1,4]$*(voir le figure 2.6).*
Dans cet exemple, le saturé de $A \subset [-2,2]$ *est la réunion de* A *avec* $A^{'} = A \cap [-2,-1] \cup [1,2]$ *et son symétrique* $A^{''} = \{x \in [-2,2]\ \setminus\ -x \in A^{'}\}$*. Il en résulte que si* A *est fermé, son saturé l'est aussi, donc la projection canonique* $\pi : [-2,2] \to [-2,2]/\!\sim$ *est fermée, Par contre, elle n'est pas ouverte : le saturé de l'ouvert* $[-2,0[$ *est* $[-2,0[\cup [1,2]$*, qui n'est pas ouvert.*

Bibliographie

[1] Frédéric Paulin :Topologie,analyse et calcul différentielle.*cours de troisiéme année de licence école Normale Supérieure*(2008-2009)

[2] Francis Nier,Dragos Iftimie :Introduction à la Topologie.*Licence de Mathématiques Université de Rennes 1*