République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement et de la recherche scientifique

Université Dr Moulay Tahar de Saida

Faculté des sciences et de la technologie

Département de mathématiques et informatique

Mémoire de Licence

Spécialité probabilité et statistique

Thème

Le compactifié d'Alexandrov

Présenté par : Hennoune Halima

Soutenu le : 20 /06 /2013

Devant le jury composé de :

Dr .Fathi Madani	Président
Mlle. Nadia Ait Ouali	Examinatrice
Dr .Abdeldjabbar Kandouci	Encadreur

Année universitaire
2012/2013

Table des matières

Introduction

L'idée de la compactification n'est pas nouvelle : les mathématiciens Theodor Kaluza et Oskar Klein l'ont appliquée en essayant d'unifier l'électromagnétisme de Maxwell avec la gravitation d'Einstein. Ils ont introduit un espace-temps à cinq dimensions, dont une des dimensions spatiales est compactifiée, c'est-à-dire enroulée sur elle-même pour former un cercle, les quatre autres dimensions étant celles de l'espace-temps de la théorie de la gravitation d'Einstein. En appliquant la relativité générale dans cet espace-temps à cinq dimensions, Kaluza et Klein construisent une théorie qui contient la relativité générale d'Einstein dans l'espace-temps à quatre dimensions mais aussi la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell et un champ supplémentaire de spin zéro, appelé dilatation. Le fait que la théorie de Maxwell résulte de la compactification sur un cercle est intiment lié au fait que l'électromagnétisme est une théorie de jauge U(1), c'est-à-dire une théorie de jauge des rotations du cercle.

Un exemple simple de compactification dans un espace bidimensionnel est le tuyau d'arrosage : une dimension est enroulée sur elle-même pour former un cercle (on l'observe en sectionnant le tuyau), alors que l'autre s'étend sur une certaine distance et a deux bouts. Si l'on regarde de près ce tuyau, on voit un cylindre avec une surface à deux dimensions. Si au contraire on s'éloigne suffisamment, on ne voit qu'un fil ayant donc une seule dimension : le tuyau n'a plus d'épaisseur car la dimension enroulée n'est plus visible.

Qu'est-ce que la compactification ?

En 1976, Eugène Cremmer et Joël Scherk reprennent les idées de Kaluza et Klein pour les appliquer aux théories de supergravité, puis en 1979, Joël Scherk et John Schwarz les appliquent à la théorie des cordes. Dans cette dernière, il existe plusieurs façons de compactifier les 6 dimensions excédentaires : en formant des cercles, des tores ou des espaces plus compliqués comme les orbiforlds et les Calabi-Yau. Compactification sur une sphère dans les théories de Kaluza-Klein. Il s'agit d'une image intuitive : la feuille quadrillée représente l'espace-temps à quatre dimensions. Dans chaque point de l'espace-temps, les dimensions excédentaires sont compactifiées pour former une sphère.

La compactification peut être réalisée à l'aide d'objets mathématique plus compliqués, par exemple les orbifolds.

La compactification est une solution intéressante mais elle pose aussi de nombreux problèmes : - Le nombre de possibilités pour compactifier les 6 dimensions supplémentaires est immense, le nombre de théories des cordes possibles atteint donc lui aussi des chiffres astronomiques. À présent, on ne dispose pas encore de modèle simple et réaliste qui reproduirait la physique du Modèle Standard. Le jour où l'on en disposera, il faudra expliquer pourquoi la Nature a choisi tel type de compactification plutôt que tel autre. - La compactification produit une flopée de particules élémentaires non inclues dans le Modèle Standard. Ces particules élémentaires supplémentaires n'interagissent que par interaction gravitationnelle avec celles du Modèle Standard et forment ce qu'on appelle le secteur caché. Il sera extrêmement difficile de les mettre en évidence en utilisant la technologie des accélérateurs de particules actuels. Malgré ces impasses, les physiciens poursuivent avec persévérance leurs recherches sur la théorie des cordes.

Dans une théorie quantique des champs ou dans une théorie des cordes, la compactification Kaluza-Klein engendre un spectre de particules dont les impulsions sont des multiples entiers d'une quantité inversement proportionnelle au rayon du cercle de compactification. Ce phénomène peut se comprendre facilement dans le cas où la dimension compactifiée est un cercle : un cercle de rayon donné ne peut vibrer qu'avec des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale qui est inversement proportionnelle au rayon du cercle, de même qu'une corde de violon ne peut vibrer qu'avec des fréquences (harmoniques) multiples d'une fréquence fondamentale qui est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.

Il existe cependant dans ce spectre une autre contribution, spécifique aux théories des cordes. On définit sur la surface d'Univers des champs dont certains forment les coordonnées de l'espace-temps et d'autres sont compactifiés. Considérons une surface en forme de tube : en faisant faire au champ compactifié une rotation complète autour du tube, il peut retrouver sa valeur initiale. Mais on peut aussi le faire tourner deux fois avant qu'il retrouve sa valeur initiale, ou trois fois, quatre fois, et ainsi de suite. Ces enroulements, appelés « windings », apportent à l'énergie des particules des contributions multiples d'une quantité proportionnelle au rayon de compactification et au nombre d'enroulements. Une analogie utile est l'enroulement d'un ruban élastique autour d'un doigt : on peut faire un tour, deux tours, trois tours, et ainsi de suite. Plus il y a de tours et plus le diamètre du doigt est important, plus il faut rendre le ruban et donc plus l'énergie nécessaire pour les réaliser est importante.

Ce mémoire est partagé en trois chapitres . Dans le premier chapitre, on présente quelques généralités et notions de base sur les espaces métriques, topologiques,compacité,locale compacité, etc ...

Les différents types de compactification sont mentionnés et étudiés au deuxième chapitre. En raison de leurs utilités, On se limite aux trois types de compactification, celle d'Alaxendrov, de Stone-Sech et de Bohr.

Au troisième chapitre, on présente le théoreme de compactification d'Alexandrov avec une démonstration détaillée ainsi que quelques applications de ce théorème en Mathématiques.

Chapitre 1

Quelques notions préliminaires

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 *soient E un ensemble non vide et $d : E \times E \to [0, +\infty[$ une application vérifiant les axiomes :*

$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparation)*

$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie)*

$\forall x, y, z \in E, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*(inégalité triangulaire).*

Une telle applicaton d s'appelle une distance ou métrique sur E et le couple (E, d) s'appelle un espace métrique.

1.2 Espaces topologiques

Définition 1.2.1 *On appelle espace topologique un couple (X, τ), où X est un ensemble non vide et τ est une famille de parties de X appelées ouverts vérifiant :*

1. *X et $\emptyset$ sont des ouverts (i.e. $\emptyset$ et X appartiennent à τ).*
2. *Toute réunion d'ouverts est un ouvert.*
3. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Exemples 1.2.1 *:*
- *la topologie grossière : c'est la topologie $\tau = \{\emptyset, X\}$*
- *La topologie discrète : tous les ensembles sont des ouverts (et des fermés)*

1.3 Voisinages

Définition 1.3.1 *Soit (X, τ) un espace topologique et soit $x \in X$,on appelle voisinage de x dans X toute partie de X contenant un ouvert qui contient x et on note $\mathcal{V}(x)$ la famille de tous les voisinages de x :*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subset X : \exists\ \theta \text{ ouvert tel que } x \in \theta \subset V\}$$

1.4 Limite , Adhérence , intérieur et continuité

1.4.1 L'adhérence

Définition 1.4.1 *soit* $A \in x$ *un sous-ensemble de* (X,d) *on définit l'adhérence de* A *notée* $\bar{A}$ *par :*
$\bar{A} = \{x \in X : \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq 0\}$

Remarque 1.4.1 $A \in \bar{A}$ *car si* $x \in A$ *alors* $\forall r > 0$ *,on a* $x \in B(x,r) \cap A$

Proposition 1.4.1 *1.* A *est fermé si et selement si* $A = \bar{A}$

2. $\bar{A} = \{x \in X : \exists$ *une suite* $(x_n) \subset A : \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x\}$
i-e $x \subset \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A : X_n \to x,$*quand* $n \to \infty$

Exemples 1.4.1 *L'adhérence de* $\mathbf{Q}$ *est* $\mathbf{R}$ *puisque tout nombre réel est limite d'une suite de nombre rationnels,et on a* $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$

1.4.2 La limite d'une suite

Définition 1.4.2 *soit* (X,τ) *un espace topologique ,soit* $((x_n)_{n\in\mathbf{N}})$ *une suite d'éléments de* X *et soit* $l \in X$ *,on dit que* l *est une limite de la suite* x_n *quand* n *tend vers l'infini si pour tout voisinage* v *de* l *dans* X *il existe un rang à partir du quel tous les termes de la suite sont dans* v *i-e :*
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Longleftrightarrow \forall v \in \mathcal{V}(l), \exists N_V \in \mathbf{N}, \forall n \geq N_V : x_n \in v$

Remarque 1.4.2 *soit* (E,d) *un espac métrique,pour toute partie* A*de* X *tout point* $x \in X$*,on a :*
$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

1.4.3 Continuite

Définition 1.4.3 *soit* (X,τ) *et* (X',τ') *deux espaces topologiques et soit* $a \in X$ *on dit qu'une fonction* $f \in \mathbf{F}(X,X')$ *est continue au point* a *si l'image réciproque* $f^{-1}(v')$ *de tout voisinaqe* v' *de* $f(a)$ *est un voisinage de* a *et on écrit :*
f *est continue au point* $a \Longleftrightarrow \forall v' \in \mathcal{V}(f(a))$ *on a* $f^{-1}(v') \in \mathcal{V}(a)$

1.4.4 L'interieur

Définition 1.4.4 *on définit l'interieur d'une partie* A *d'un espace métrique* (E,d) *comme étant le plus grand ouvert contenent dans* A *telque* $\dot{A} = \cup\theta, \theta \subset A$ *est un ouvert*

Exemples 1.4.2 *Dans* $\mathbf{R}$*,muni de la distance usuelle* $A = [0,1[$*,alors* $\bar{A} = [0,1]$ *et* $\dot{A} =]0,1[$

1.5 La topologie induite

Définition 1.5.1 *La topologie induite est une topologique définie sur toute partie* Y *d'un espace topologique* X *,c'est l'ensemble des traces sur* Y *des ouverts de* X *. Autrement dit , un ouvert pour la topologie induite de* X *sur* Y *s'écrit sous la forme :* $\Theta \cap Y$ *avec* Θ *ouvert de* X*.*

1.6 Homéomorphisme

Définition 1.6.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques . On appelle homéomorphisme toute bijection f de X dans Y bicontinue (i.e. f et f^{-1} sont continues).*

Remarque 1.6.1 *S'il existe un homéomorphisme de X sur Y, on dit que X et Y sont homéomorphes.*

1.7 La densité

Définition 1.7.1 *Soient E un espace topologique et F une partie de E. On dit que F est dense dans E si $\overline{F} = E$ .i.e. les éléments de E sont les limites des suites d'éléments de F et on écrit $\forall x \in E, \exists (x_n)_n \subset F : \; x_n \to x$ quand $n \to \infty$.*

Exemple :
$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pour la topologie usuelle .i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n)_n \subset \mathbb{Q} : x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

1.8 Espaces topologiques compacts

1.8.1 Espace topologique séparé

Définition 1.8.1 *On dit qu'un espace topologique (X, τ) est séparé si pour tout couple de points $x, y \in E, x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y) : V \cap W = \emptyset$.*

Remarque 1.8.1 *Il suit directement de la définition que dans un espace séparé les points sont des fermés : si $x \in X$ et $y \in X \setminus \{x\}$, alors $x \neq y$ et $y \in U_y \subset X \setminus \{x\}$.*

Exemples 1.8.1

1. *Tout espace métrique (X, d) est séparé : si $x, y \in X$ et $x \neq y$, alors $r = d(x, y) > 0$ et on peut prendre $U_x = B(x, \frac{r}{2}), U_y = B(y, \frac{r}{2})$.*
2. *Si X est muni de la topolgie grossière et contient au moins deux éléments , il n'est pas séparé.*
3. *L'espace de Sierpinski $\mathcal{S} = \{0, 1\}$, muni de la topologie $\tau = \{\{0\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$ n'est pas séparé : tout ouvert qui contient 1 contient aussi 0.*

Voici quelques propriétés des espaces séparés :

1. Si X est séparé et $A \subset X$ est muni de la topologie induite , alors A est séparé.

2. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces non vides. Alors

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ est séparé } \Leftrightarrow X_i \text{ est séparé}$$

1.8.2 Espaces compacts

Définition 1.8.2 *Soit X un espace topologique . Un recouvrement de X par des ouverts est une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X tels que :*

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Définition 1.8.3 *un espace topologique (X, τ) est un espace compact s'il est séparé et vérifie l'axiome de Borel-Lebegue suivant :*

De tout recouvrement infini de X, on peut en extraire un recouvrement fini, i.e. si $X = \bigcup_{i\in I} V_i$, avec $V_i \in \tau, \forall i \in I$, alors $\exists V_{i_1}, V_{i_2}, \cdots, V_{i_n}$: $X = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$.

Remarque 1.8.2 *Les auteurs anglosaxons n'utilisent pas toujours la "séparation" dans cette définition !. En français, on parle d'espaces quasi-compacts.*

Exemple :

1. $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle n'est pas compact.
2. Un sous ensemble fini est toujours compact ; si une suite (x_n) converge vers x , alors l'ensemble $K = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est compact.

Notons aussi que la compacité est une propriété intrinsèque de K. On peut remplacer la topologie de E par la topologie induite sur K. Ceci n'est pas vrai pour la propriété d'être fermé par exemple.

Remarque 1.8.3 *En passant aux complémentaires, on peut reformuler cette condition en termes de fermés : si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de X telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, alors il existe un sous ensemble fini $J \subset I$ tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$. Autrement dit, si l'intersection d'une famille de fermés est vide, il existe une sous-famille dont l'intersection est vide.*

On peut aussi donner la version suivante de la définition , utilisant les ensembles complémentaires :

Proposition 1.8.1 *Soit $K \subset E$, espace topologique. Cette partie K est compacte si et seulement si pour tout ensemble de parties fermées dont l'intersection ne coupe pas K , alors il existe déjà une intersection finie qui ne coupe pas K*

Dans la pratique, on se trouve souvent dans la situation où X est un sous espace d'un espace Y , et que le recouvrement de X est donné par une famille $(V_i)_{i\in I}$ d'ouverts de Y ; strictement parlant, le recouvrement de X est la famille $(V_i \cap X)_{i\in I}$. La condition de compacité de X s'exprime alors en disant qu'il existe $J \subset I$ fini tel que $X \subset \cup_{i\in J} V_i$. En termes de fermés, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de Y, la compacité de X s'exprime en disant que si $X \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset$, alors il existe $J \subset I$ fini tel que $X \cap (\bigcap_{i\in J} F_i) = \emptyset$.

Commentaire : En particulier, si X est compact et $U_1 \subset U_2 \cdots \subset U_n \subset \cdots$ est une suite croissante d'ouverts tels que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} U_i$, alors il existe n_0 tel que $X = U_n,\ \forall n \geq n_0$.

De même, toujours si X est compact et si $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ est une suite décroissante de fermés dont l'intersection est vide , alors il existe n_0 tel que $F_n = \emptyset, \ \forall n \geq n_0$.

Proposition 1.8.2 *Soit $K \subset E$, espace topologique. Cette partie K est compacte si et seulement si pour tout ensemble de parties fermées dont l'intersection ne coupe pas K , alors il existe déjà une intersection finie qui ne coupe pas K*

Voici quelques propriétés élémentaires des espaces compacts.

Proposition 1.8.3 *[1] Soit X un espace compact , alors*

1. *$\forall x \in X$ et $F \subset X$ fermé, il existe des ouverts $U_x, U_F \subset X$ tels que $x \in U_x, \ F \subset U_F$ et $U_x \cap U_F = \emptyset$.*
2. *Soient $F_1, F_2 \subset X$ deux fermés. Il existe des ouverts $U_1, U_2 \subset X$ tels que $F_1 \subset U_1, F_2 \subset U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Signalons qu'un espace topologique séparé vérifiant la propriété que l'on peut séparer un point et un fermé est appelé *régulier.* Aussi, un espace topologique dans lequel on peut séparer deux fermés disjoints est appelé *normal.* Ainsi, la proposition précédente peut se résumer en disant que tout espace compact est normal.

Théorème 1.8.1 *Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact et Y séparé, alors $f(X)$ est compact.*

Corollaire 1.8.1 *Soit $f : X \to Y$ une application continue, bijective, où X est compact et Y séparé. Alors f est un homémorphisme.*

1.8.3 Compacts dans les espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique. La notion de compact dans ce cas paut s'exprimer en termes de limites de suites.

Définition 1.8.4 *Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite dans l'espace X. On appelle valeur d'adhérence de cette suite , tout élément de l'ensemble $\cap_{N=1}^{\infty} F_N$, où $F_N = \overline{\{x_n, \ n \geq N\}}$.*

Définition 1.8.5 *Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite dans l'espace X. désignons par $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$, alors on dit que la suite $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Proposition 1.8.4 *Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ une suite dans l'espace X. Alors $a \in X$ est une valeur d'adhérence de cette suite si et seulement s'il existe une suite extraite de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Théorème 1.8.2 *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'espace métrique (E, d) est compact*
2. *Toute suite dans X possède au moins une valeur d'adhérence*
3. *De toute suite dans X on peut extraire une suite qui converge.*

Corollaire 1.8.2 *Soient X un espace compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes. i.e.*

$$\exists a, b \in X \ : \ f(a) = inf(|f(x)|, x \in X), \ f(b) = sup(|f(x)|, x \in X).$$

Corollaire 1.8.3 *Tout espace métrique compact est complet et séparable.*

PREUVE : Pour la séparabilité. Du recouvrement de cet espace E par les boules $B(a, \frac{1}{n})$ où a parcourt E , on peut extraire un recouvrement fini. notons C_n les centres de ces boules. Alors $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ est dénombrable et dense. En effet, pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point de C_n et donc de D tel que $d(x, x_n) \leq \frac{1}{n}$.

Pour la complétude. Ceci se déduit du fait qu'une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence et converge donc.

1.9 Espaces localement compacts

Définition 1.9.1 *Un espace topologique (X, τ) est dit localememt compact s'il est séparé et tout point de X admet un voisinage compact.*

Par exemple , l'espace $\mathbb{R}^n$ est localement compact, car pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, la boule fermée $\{a \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq 1\}$ est compacte. Aussi, si X est compact , il est voisinage de chacun de ses points, donc X est localement compact.

Dans la définition de localement compact , on exige l'existence d'un voisinage compact pour tout point ; mais cela implique en fait l'existence de beaucoup de voisinages compacts de chaque point :

Proposition 1.9.1 *Soit X un espace topologique localement compact. Alors, pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x , il existe un voisinage compact $V^{'}$ de x tel que $V^{'} \subset V$.*

Pour la preuve, on passe par les deux lemmes suivants :

Lemme 1.9.1 *Soient X un espace compact, $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}_x$ un voisinage de x. Alors, il existe un voisinage compact $V^{'} \subset V$ de x.*

PREUVE : Soit $V_0 \subset V$ un ouvert tel que $x \in V_0$. Alors $X \setminus V_0$ est un fermé, et x n'appartient pas à $X \setminus V_0$, il existe donc des ouverts disjoints U_V et U_x, $U_V \supset X \setminus V_0, x \in U_x$. posons $V^{'} = \overline{U_x}$; c'est un voisinage de x fermé , donc compact et $V^{'} \cap (X \setminus V_0) = \emptyset$, ce qui fait que $V^{'} \subset V_0 \subset V$.

Lemme 1.9.2 *Soient X un espace compact, $x \in X$ et $V \in \mathcal{V}_x$ un voisinage de x. Alors, il existe un voisinage compact $V^{'} \subset V$ de x.*

Remarque 1.9.1 *Si X est compact et $a \in X$, il suit du lemme précédent que $X \setminus \{a\}$ est localement compact. En effet, si $x \in X \setminus \{a\}$, l'ensemble $X \setminus \{a\}$ est un voisinage de x dans X , qui contient donc un voisinage compact V de x dans X. Comme $X \setminus \{a\}$ est ouvert dans X, V est aussi un voisinage de x dans $X \setminus \{a\}$, il est compact.*

La construction du compactifié d'Alexandrov qu'on verra ultérieurement montre que tous les espaces localement compacts apparaissent ainsi.

Lemme 1.9.3 *Soient X un espace topologique , $x \in X$ et V un voisinage de x dans X et $W \subset V$ un voisinage de x dans V. Alors W est un voisinage de x dans X.*

Preuve : Soit $V_0 \subset V$ un ouvert de X tel que $x \in V_0$, et soit $G \subset V$ un ouvert de V tel que $x \in G \subset W$. Il existe un ouvert E de X tel que $E \cap V = G$. posons $W_0 = E \cap V_0$; c'est un ouvert de X, et $x \in W_0 \subset G \subset W$, ce qui montre que W est un voisinage de x dans X.

Preuve(de la Proposition (1.9.1)) : Soient V un voisinage de x et K un voisiange compact de X. Alors $V \cap K$ est un voisinage de x dans K ; il suit du lemme (1.9.1) qu'il existe un voisinage compact $V' \subset V \cap K$ de x dans K. Il suit du lemme (1.9.3)

Voici une proposition qui nous dit que dans un espace localement compact , dans une certaine mesure , la topologie est déterminée par les sous-espaces compacts.

Proposition 1.9.2 *Soit X un espace localement compact. Alors $F \subset X$ est fermé si et seulement si pour tout compact $K \subset X, F \cap K$ est fermé.*

Preuve : Si F est fermé , $F \cap K$ est fermé car c'est l'intersection de deux fermés de X. Réciproquement, supposons que $F \cap K$ soit fermé pour tout compact $K \subset X$ et soit $x \in X \setminus F$. Soit V un voisinage compact de x ; alors $V \cap F$ est fermé et il existe un voisinage W de x dans V tel que $W \cap (F \cap V) = \emptyset$. Comme on l'a vu dans le lemme (1.9.3), W est aussi un voisinage de x dans X, et $W \cap F = \emptyset$, ce qui montre que F est fermé dans X.

On a aussi le résultat important suivant de séparation du à Urysohn :

Théorème 1.9.1 *[4] Soient E un espace localement compact et $K \subset \Theta$ avec K compact et Θ ouvert. Alors il existe une fonction continue de E dans $[0, 1]$ telle que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in K \\ 0 & si \quad x \in \Theta^c \end{cases}$$

1.9.1 Applications propres

Définition 1.9.2 *Soient X et Y deux espaces localement compacts et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est propre si elle est continue et de plus :*

$$\forall K \subset Y compact, \ f^{-1}(K) \subset X estcompact$$

Proposition 1.9.3 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques localement compacts, $f : X \to Y$ une application continue. f est propre si et seulement si f est propre si et seulement si la condition suivante est vérifiée : Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ qui n'admet pas de valeur d'adhérence dans X , la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence dans Y .*

Preuve :
Supposons que f soit propre ; soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite et supposons qu'on puisse extraire de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in Y$. Alors $K = \{f(x_{n_k}), \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact, donc $f^{-1}(K)$ aussi ; mais $f^{-1}(K) \supset (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ce qui implique qu'on peut aussi extraire une suite qui converge de la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, donc finalement de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement, si la condition sur les valeurs d'adhérence est satisfaite , soit $K \subset Y$ un compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(K)$ une suite ; si elle ne possède pas de valeur d'adhérence, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ non plus, d'après la condition, contredisant le fait que K est compact.

Définition 1.9.3 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^k$ tend vers l'infini si $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \infty$, soit explicitement :*
$$\forall R > 0 \exists N_R : \ n \geq N_R \Rightarrow \|x_n\| \geq R.$$

Voici une condition très utile pour vérifier si une application est propre :

Corollaire 1.9.1 *Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ une application continue . Alors f est propre si est seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ qui tend vers l'infini, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^p$ tend vers l'infini.*

Exemples 1.9.1

1. *L'application $sin(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n'est pas propre, car l'image inverse du compact $\{0\}$ est l'ensemble $\{k.\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, qui n'est pas compact.*

2. *L'exponentielle $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas propre : la suite $x_n = -n$ tends vers l'infini , mais son image (e^{-n}) tend vars 0.*

3. *La même exponentielle, regardée comme application $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est propre, car c'est un homémorphisme , l'inverse étant le logarithme naturel.*

Et voici une bonne raison de s'intéresser aux applications propres :

Théorème 1.9.2 *Soient X, Y deux espaces localement compacts et $f : X \to Y$ une application propre. Alors f est fermée (i.e. l'image directe de tout fermé de X est un fermé dans Y).*

Preuve :
Soit $F \subset X$ fermé et $K \subset Y$ compact. Alors $f^{-1}(K)$ est compact, donc $F \cap f^{-1}(K)$ est aussi compact. Mais alors $f(F) \cap K = f(F \cap f^{-1}(K))$ est compact comme image directe par une fonction continue d'un compact, donc fermé dans Y. Il suit alors de la proposition 1.9.2 que $f(F)$ est fermé dans Y.

Corollaire 1.9.2 *Si X, Y deux espaces localement compacts et $f : X \to Y$ une application bijective propre, alors f est un homémorphisme.*

Chapitre 2

Les différents types de compactification

En topologie, la compactification est un procédé général de prolongement d'un espace topologique comme sous espace dense d'un espace compact. Le prolongement est appelé **le compactifié**.

L'existence d'un tel prolongement implique que l'espace doit être régulier, en fait même complètement régulier. Autrement dit :

Le couple (Y, φ) où Y est un espace compact et $\varphi : X \to Y$ est un homéomorphisme prolongeant (intégrant) X dans Y tel que $\overline{\varphi(X)} = Y$, est appelé une compactification de l'espace X.

Les Compactifications(des sous-ensembles ouverts dans un plan) ont été étudiées en premier lieu par Caratheodory en 1913 dans le cardre des fonctions analytiques ; plutôt, des constructions similaires ont été utilisées dans différentes théories des nombres réels. L'existence d'une plus grande compactification était établie plutot par Cech en 1937 et par M.H.stone en 1937.

2.1 La compactification d'Alaxandrov

Définition 2.1.1 *Soit X un espace topologique localement compact mais non compact. On peut en ajoutant un point à X , obtenir un espace compact ,pour cela on considère $\widetilde{X} = X \cup \{w\}$ et on définit une topologie de la manière suivante :*

L'ensemble des ouverts de $\widetilde{X}$ est constitué par les ouverts de X et les sous-ensembles de la forme $\{w\} \cup K^c$ où K^c est le complémentaire dans X d'un compact K de X.

On vérifie que l'on définit bien ainsi une topologie sur $\widetilde{X}$ et que la topologie initiale sur X est identique à la topologie induite sur X par cette topologie sur $\widetilde{X}$, enfin on vérifie que $\widetilde{X}$ muni de cette topologie est un espace compact.

L'espace $\widetilde{X}$ s'appelle alors le compactifié d'Alexandrov de l'espace localement compact X et w s'apelle le point à l'infinie de $\widetilde{X}$ et se note également $\{\infty\}$.

2.2 La compactification de Stone-cech

La compactification Cech-Pierre a été introduite par Cech dans 1937 et par MH pierre dans 1937.

Les problèmes liés à la compactification de Cech-Stone sont beaucoup plus intéréssés aux espaces discrets.

Définition 2.2.1 *Soit X un espace topologique, le compactifié de stone-cech de X noté βX est un espace compact Y avec une application i de X vers Y tel que pour tout espace compact Z et toute application continue f de X vers Z, il existe une application continue unique g de Y vers Z $f = goi$.*

Tout fonction continue f de X dans Y avec Y est un espace compact admet une unique extension continue dans βX
c-à-d pour toute fonction $f : X \rightarrow Y$ continue il existe une fonction continue $\hat{f} : \beta X \rightarrow Y$ telque

$$\hat{f} o h_x = f$$

avec h_x est un homéomorphisme de X noté $h_x(X)$

Une deuxiéme définition de βX peut être donnée comme suit :
nous appelons $A \subset X$ un ensemble zéro si pour une fonction continue à valeurs réelles sur X ,$A = \{x \in X \; f(x) = 0\}$.
En clair ,pour un tout à fait réguliére l'espace X , la collecte Z de zéra-ensembles formant une base pour l'ensemble de fermés de X , qui est chaque ensemble fermé est une intersection de zéro-ensemble de X .

L'application allant de X vers son image dans βX est un haméomorphisme si et seulement si X est un espace de Tychonoff.
Cette application est un homéomorphisme vers un soue-espace ouvert de βX si et seulement si X est localement compact.

Corollaire 2.2.1 *Chaque paire de sous-ensemble complet séparé d'un espace Tychonoff X a des fermés disjoints dans βX.*

Si une compactification αX d'un espace Tychonoff X a la propriété que chaque paire de sous-ensemble complet séparé de l'espace X a des fermés disjoints dans αX ,alors αX est équivalent à la compactification de Stone-Cech de X.

Pour chaque sous-ensemble M fermé d'un espace normale X ,$\overline{M}$ est une compactification de M équivalent à βM

Pour chaque sous -ensemble d'ouvert et de fermé d'un espace Tychonoff , $\overline{M}$ (la compactification de M équivalent à βM) est un ouvert et fermé.

Pour chaque espace Tychonoff X , un espace T telque $X \subset T \subset \beta X$ alors

$$\beta T = \beta X$$

.

Remarque 2.2.1 *Un espace Tychonov est un espace topologique utilisé comme contre exemple , c'est le produit $[0, w_1] \times [0, w]$ de deux espaces topologiques associés à des ordinaux*

2.3 La compactification de Bohr

Définition 2.3.1 *La compactification de Bohr existe et est unique à isomorphisme prés , il s'agit d'une application discrète théorème de Tychonoff.*

Nous noterons compactification de Bohr de G par Bohr(G).

Compte tenu d'un groupe topologique G ,la compactification de Bohr de G est un groupe topologique séparé compact Bohr(G) et un homomorphisme continue $b : G \to$ Bohr(G).

qui est universel en ce qui concerve homomorphisme en groupe de Hausdorff compact, ce qui signifie que si K est un autre groupe topologique de Hausdorff compact et $f : G \to K$ est une représentation continue , alors il y a une représentation continue unique $Bohr(f) : Bohr(G) \to K$ telque $f = Bohr(f)ob$

Chapitre 3

Théorème de compactification d'Alexandrov et Applications

3.1 Théorème de compactification d'Alexandrov

Théorème 3.1.1 *si X est un espace topologique non compact mais localement compact , il existe un espace topologique $\tilde{X}$ compact appelé compactifié d'Alexandrov de X tel que :*
- *X est dense dans $\tilde{X}$*
- *X est homéomorphe à un sous espace topologique de $\tilde{X}$*

On pose $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$, on définit $\widetilde{\tau}$ l'ensemble constitué par :

- les ouverts de X
- des $\widetilde{X} \backslash K$,ou K est un compact de X

Preuve : :
La preuve est partagée en trois étapes :

Etape 1 :

Montrons que $\widetilde{\tau}$ définit bien une topologie sur $\widetilde{X}$

L'ensemble des ouverts de X est bien stable par intersection finie et par réunion quelconque , et l'ensemble des complémentaires de compacts de X dans $\widetilde{X}$ est bien lui aussi stable par intersection finie et réunion quelconque (rappelons qu'une réunion finie de compacts est compacte et qu'une intersection quelconque de compacts est compacte , comme fermé d'un compact).

Il suffit donc de vérifier que la réunion (resp. l'intersection) d'un ouvert de X et d'un complémentaire de compact de X est bien un ouvert de X ou un complémentaire de compact de X . Pour cela, soit U un ouvert de X ,et K un compact de X de complémentaire V ,$U \cap V$ est l'intersection d'un ouvert avec $\widetilde{X} \backslash K$ qui est un ouvert ,donc c'est un ouvert de X ,et $U \cup V$ est le complémentaire de $K \cap U$,avec U' le complémentaire de U dans $\widetilde{X}$

Etape 2 :

Montrons que $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ est un espace compact.

Pour montrer que $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ est un espace compact, il faut montrer qu'il est séparé et qu'il vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue

- Montrons que $\widetilde{X}$ est séparé ,on peut séparer deux points de X par des ouverts , puisque X est séparé.
  montrons maintenant qu'on peut séparer un point $x \in X$ de ∞ .On se donne pour cela K un voisinage compact de x ,ce qui peut se faire puisque X est localement compact Int$K$ et $\widetilde{X} \backslash K$ sont des ouverts séparant x et ∞.

- Montrons que $\widetilde{X}$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue ,c'est à dire que de tout recouvrement d'ouverts de $\widetilde{X}$ on peut extraire un recouverement fini.

  Soit $X = \cup U_i, i \in I$,avec les U_i sont des ouverts ,un certain U_{i_0} contient ∞ son complementaire est compact, et recouvert par les U_j ,pour $j \neq i_0$,on peut donc le recouvrir par les U_j ,pour $j \in J$ fini ,L'ensemble des U_i pour $i \in J \cup i_0$ est un recouverement fini de $\widetilde{X}$

Etape 3 :

Montrons que X est homéomorphe à un sous espace de $\widetilde{X}$.

Pour cela, considérons l'application $\varphi : X \to \widetilde{X}$ définie par $\varphi(x) = x$, cette application est un prolongement d'un homémorphisme dont l'image $\varphi(X) = X$ est dense dans $\widetilde{X}$.

Théorème 3.1.2 *Soient X et Y des espaces localement compacts, notons $\widetilde{X} = X \cup w_X$ (resp.) $\widetilde{Y} = Y \cup w_Y$ le compactifié de X (resp. Y). On a donc*

1. *L'application continue $f : X \to Y$ est propre si et seulement si son extension $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$ et $\widetilde{f}(w_X) = w_Y$, est continue.*

2. *$\widetilde{X}$ est essentiellement unique, dans le sens que si on a une application $\varphi : X \to Z$, avec Z compact, qui est un homémorphisme sur son image et telle que $Z \setminus \varphi(X) = \{z_0\}$ (i.e. un point) , alors l'application $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to Z$, définie par $\widetilde{\varphi}/X = \varphi$, $\widetilde{\varphi}(w_X) = z_0$ est un homémorphisme.*

PREUVE :

1. Soit $U \subset \widetilde{Y}$ un ouvert . Si $U \subset Y$, $\widetilde{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$; sinon, $U = (Y \setminus K) \cup \{w_Y\}$, et alors $f^{-1}(U) = (X \setminus f^{-1}(K)) \cup \{w_X\}$. Il en resulte que $\widetilde{f}$ est continue si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert de X pour tout ouvert $U \subset Y$ et $f^{-1}(K)$ est compact dans X pour tout compact K de Y, c'est à dire si et seulement si f est propre.

2. Il est clair que φ est une bijection . Pour voir qu'elle est continue , soit $U \subset Z$ un ouvert. Si $U \subset \varphi(X), \widetilde{\varphi}^{-1}(U) = \varphi^{-1}(U)$ est ouvert dans X, donc aussi dans $\widetilde{X}$, parce que φ est continue. Si $z_0 \in U, Z \setminus U = K$ est compact et ne contient pas z_0 , donc $\widetilde{\varphi}^{-1}(U) = \widetilde{\varphi}^{-1}(Z \setminus K) = \widetilde{X} \setminus \varphi^{-1}(K)$, qui est ouvert de $\widetilde{X}$, car $\varphi^{-1}(K)$ est un compact de X parce que $\varphi : X \to Z \setminus \{z_0\}$ est un homémorphisme. Donc $\widetilde{\varphi}$ est continue et bijective, et alors d'après le corollaire (1.8.1)

3.2 Applications

3.2.1 Application 1

:

on définie géométriquement $P : \mathbf{R}^2 \to S^2$ de la façon suivante :
à tout point A de $\mathbf{R^2}$ (identifié à $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times 0 \subseteq \mathbf{R^3}$) P associe le point d'intersection de la droite D_A passant par A et $W = (0, 0, 1)$ avec la sphére :

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3}, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, (P(A) \neq W)$$

telque S^2 est un espace compact car S^2 est fermé dans $\mathbf{R}^3$ donc dans $(] - 1, +1[)^3$ qui est compact donc est compact .
on a :

$$P(x, y) = (2x/1 + x^2 + y^2, 2y/1 + x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 1/1 + x^2 + y^2)$$

est continue.
P étant continue ,et est un homéomorphisme de $\mathbf{R^2}$ donc P est un compactifié d'Alexandrov de $\mathbf{R^2}$.

3.2.2 Application 2

:

(S', d_u) et (N', d') sont tous les deux des compactifiés d'Alexandrov métriques de (S, d_u) et (N, d_u) (où , $S = \{1/n, n \in \mathbf{N}^\star\}$,$S' = S \cup \{0\}$,$N' = N \cup \{0\}$ et $d'(n, \infty) = \{1/n + 1, n \in \mathbf{N}\}$ car :

(S, d_u) et (N, d_u) sont des métrique localement compacts homéomorphes (tout espace discret est localement compact,et pour toute injection $f : E \to F$ ou E un ensemble et F un espace métrique alors

$$f : (E, D_F) \to (F(E), d)$$

est un homéomorphisme)

on a (S, d_u) est un compactifié d'Alexandrov de (S, d_u) puisque (S', d_u) est métrique compact et $S' - \{0\} = S$
on utilise alors le fait que (S', d_u) est homéomorphe à (N', d') pour en déduire que (N', d') est aussi un compactifié d'Alexandrov de (S, d_u)

3.2.3 Application 3

:

Les sphéres S_1^1 et S_∞^1 de $\mathbf{R^2}$ sont des compactifiés d'Alexandrov dans $\mathbf{R}$, ou

$$S_1^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R^2}/|x| + |y| = 1\}$$

et

$$S^1_\infty = \{(x,y) \in \mathbf{R} / \sup(|x|,|y|) = 1\}$$

3.2.4 Application 4

(La projection stéréographique)

Soit $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ la shère et $N = (0,0,1)$ le pôle nord. La projection stéréographique σ_N depuis le pôle nord est définie comme suit :

$$\sigma_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 \text{ telle que}$$

$\sigma_N(P) =$ intersection de la droite par N et P avec le plan horizontal défini par $z = 0$ (voir la figure).

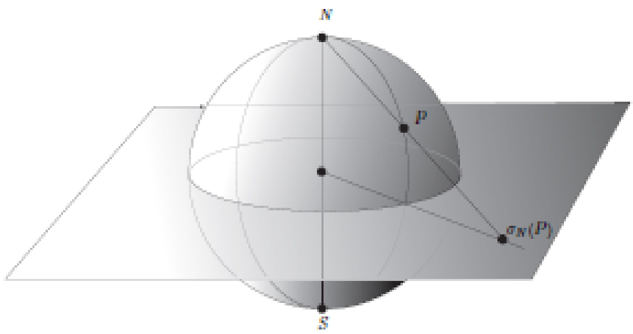

FIGURE 3.1: La projection stéréographique depuis le pôle nord

En coordonnées :

$$\sigma_N(x,y,z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$$

Pour le voir , si on pose $\sigma_N(x,y,z) = (u,v,0)$, on doit avoir :

$$\begin{array}{rcl} (u,v,0) & = & (0,0,1) + \lambda((x,y,z) - (0,0,1)) \\ & \Rightarrow & 0 = 1 + \lambda(z-1) \\ & \Rightarrow & \lambda = \frac{1}{1-z} \\ & \Rightarrow & u = \lambda.x = \frac{x}{1-z}, \; v = \lambda.y = \frac{y}{1-z} \end{array}$$

σ_N admet un inverse , que l'on calcule en exprimant x,y,z , liés par la relation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, en fonction de u,v ; il s'écrit :

$$\sigma_N^{-1}(u,v) = (\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1})$$

Donc $\sigma_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ est un homémorphisme sur son image. Ce qui présente la sphère S^2 comme le compactifié d'Alexandroff du plan , le pôle nord jouant le rôle du point à l'infini.

Conclusion :

1. La compactification est une notion topologique qui peut intervenir dans plusieurs situations en absence de la compacité.

2. La liste des types introduit dans ce mémoire n'est pas exhaustive,il y a beaucoup d'autres types de compactification ayant des applications en physique ,en topologie algébrique qui se basent sur des notions de mathématiques de haut niveau.

3. La propriété de compactification a l'avantage de combler le déficit d'absence de compacité en prolongeant l'espace topologique initial dans un espace plus grand dans le quel on a la propriété de compacité.

Bibliographie

[1] Felice Ronga. Topologie et Géométrie. Genève, MMVI ap.J-C.

[2] Ryszard Engelking. General Topology. Sigma Series in Pure mathematics Volume 6. Heldermann Verlag Berlin.1989.

[3] Elisabeth Burroni. La topologie des espaces métriques.Collection Mathématiques à l'universitéISBN 2-7298-2564-9.

[4] Benoît Perthame. Topologie et analyse différentielle. Novembre 10, 2007.

[5] Yves Sonntag.Topologie et analyse fonctionnelle.Colletion à l'université.1998.