Année: 2013 Né attribué par la bibliothéque

Théorie Spéctrale des Opérateurs auto-adjoint compacts

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplome de

Licence L.M.D.

Université Dr : Tahar Moulay de Saida

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse fonctionnelle

par

Sehoul **Z**ine elabidine / **M**oulekhalloua **M**okhtar

Sous la direction de

Encadreur : D^r **R.Nasri**

Soutenue le .../juin/2013 devant le jury composé de
Messieurs :

X. xxxxx	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Président
Y. Yyyyy	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Directeur de thèse
K. Kkkkk	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Examinateur
L. Lllll	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Examinateur

Remerciements

Introduction

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

1.1 Espace pré-Hilbertien

Une methode bien connue pour la difinition d'une norme sur un espace vectoriel consiste à introduire sur cet espace un produit scalaire.

1.1.1 Produit scalaire hermitien

Définition 1.1.1. *une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune de ses deux variables,*
c'est-à-dire : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x, x', y, y' \in E$

$$\begin{cases} \varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y) \ , \\ \varphi(x, \alpha y + \beta y') = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, y') \ . \end{cases}$$

Définition 1.1.2. *une forme bilinéaire φ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est dite symétrique (resp. antisymétrique) si,*

$$\forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)\ (resp.\ \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)).$$

Définition 1.1.3. *Une forme hermetienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, lineaire par rapport à la premiére variable et hermitienne, ceci veut dire que,* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et* $\forall x, x', y \in E$

$$\varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x', y)\ \ et\ \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}.$$

Remarque 1.1.1. *1. Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition 1.1.3. Pour tout $x, y, y' \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\varphi(x, \alpha y + \beta y') = \overline{\alpha}\varphi(x, y) + \overline{\beta}\varphi(x, y') \quad \text{et} \quad \varphi(x, x) \in \mathbb{R}.$$

2. Une forme hermitienne sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on l'appelle une forme bilinéaire symétrique.

Définition 1.1.4. *On dit qu'une forme hermitienne φ est*
-positive : *si $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geq 0$.*
-définie positive : *si $\forall x \in E \backslash \{0\},\ \varphi(x, x) > 0$.*
-non dégénérée : *si $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0$ (équivaut à $\exists\ x \in E\backslash\{0\}, /\varphi(x, x) = 0$).*
-dégénérée : *si $(\exists\ x \in E,$ tel que $x \neq 0$ et $\varphi(x, x) = 0)$.*

Exemple 1.1.1. *: On peut définir facilement touts les formes hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.*
En effet :
Soient $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une formes hermitienne sur $\mathbb{C}^n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $x = (x_1, ..., x_n)\,, y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$, alors on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i e_i\,,\ \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i=1}^n x_i\, \varphi(e_i,\ \sum_{j=1}^n y_j e_j) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j}\ \varphi(e_i\,,\ e_j) \end{aligned}$$

On pose $\alpha_{ij} = \varphi(e_i, e_j) \in \mathbb{C}, \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$, on a donc

$$\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j}\ \alpha_{ij}.$$

Réciproquement, une expression de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_i} \alpha_{ij} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \alpha_{ij} &= \overline{\alpha}_{ji} \\ x &= \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ y &= \sum_{j=1}^n y_j e_j \end{cases}$$

est évidement linéaire par rapport à la premiére variable x.
De plus,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \textstyle\sum_{i,j=1}^n x_i\, \overline{y}_j\, \alpha_{ij} &&= \overline{\textstyle\sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y}_j\, \overline{\alpha}_{ji}} \\ &= \overline{\textstyle\sum_{i,j=1}^n \overline{\overline{x}_i}\, \overline{y}_j\, \overline{\alpha}_{ji}} &&= \overline{\textstyle\sum_{i,j=1}^n \overline{x_i}\, y_j\, \alpha_{ji}} \\ &= \overline{\textstyle\sum_{i,j=1}^n y_j\, \overline{x}_i\, \alpha_{ji}} &&= \overline{\varphi(y, x)}. \end{aligned}$$

D'où φ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$.

Conclusion : Toutes les formes hermetiennes sur $\mathbb{C}^n$ sont de la forme

$$\varphi(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i\overline{y_j}\alpha_{ij} \qquad avec \qquad \alpha_{ij}=\overline{\alpha_{ji}} \qquad \forall i,j\in\{1,...,n\}.$$

Définition 1.1.5. *a)Un produit scalaire hermitien sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est une forme hermetienne sur E, positive et non dégénérée.*
b)Un produit scalaire sur $\mathbb{R}$-un espace vectoriel est une forme bilinéaire symétrique sur E, positive et non dégénérée.

Définition 1.1.6. *Un espace pré-Hilbertien complexe (resp.réel) est un $\mathbb{C}$-space vectoriel (resp. $\mathbb{R}$-space vectoriel) muni d'un produit scalaire hermitien (resp. produit scalaire). Le produit scalaire φ est alors noté $<x,y>$ et l'on pose $\|x\|=\sqrt{<x,y>}$.*

Proposition 1.1.1. ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)****(Cas complexe)*
Si H est un espace pré-Hilbertien complexe. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée :

$$\forall (x,y)\in H^2,\ |<x,y>|\leq \|x\|\|y\|.$$

Preuve. Fixons x et y dans H. Eliminons d'emblée le cas y = 0 qui est trivial.
Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$, alors pour $\lambda\in\mathbb{C}$, on pose $f(\lambda)=<\lambda x+y,\lambda x+y>$.
En développant l'expression de f , on trouve

$$f(\lambda)=|\lambda|^2<x,x>+\lambda<x,y>+\overline{\lambda<x,y>}+<y,y> \tag{1.1}$$

Comme f est une fonction positive pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, en particulier si $\lambda=-\frac{\overline{<x,y>}}{<x,x>}$, alors on a

$$-\frac{|<x,y>|^2}{<x,x>}+<y,y>\geq 0,$$

ce qui donne le résultat voulu. ∎

Proposition 1.1.2. ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)****(Cas réel)*
Si H est un espace pré-Hilbertien réel. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée :

$$\forall (x,y)\in H^2,\ |<x,y>|\leq \|x\|\|y\|.$$

Preuve. La preuve diffère un peu de celle du cas complexe. Le cas $x = 0$ étant trivial. On suppose désormais que $x \neq 0$. On pose alors $f(\lambda) =< \lambda x + y, \lambda x + y >$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'on constate que

$$f(\lambda) = \lambda^2 < x, x > +2\lambda < x, y > + < y, y > . \tag{1.2}$$

Comme <x,x > est strictement positif (puisque l'on a supposé que $x \neq 0$), la fonction f est un polynôme de degré 2 en λ qui reste positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Son discriminant réduit

$$\triangle' =|< x, y >|^2 - < x, x > . < y, y >,$$

est donc négatif, ce qui montre l'inégalité voulue. Les cas d'égalité correspondent $\triangle' = 0$ ce qui revient à dire que f peut s'annuler sur $\mathbb{R}$, i.e. il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_0 x + y = 0$.

■

Corollaire 1.1.1. *L'application de H dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in H$ associé $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur H, i.e tout espace pré-Hilbertien complexe ou réel est un espace vectoriel normé, (cette norme est appellée la norme associée au produit scalaire).*

Preuve. Il est clair que la fonction $x \mapsto \|x\|$ est bien définie sur H entier, positive, et qu'elle ne s'annule que si $x = 0$. Il est aussi immédiat que $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$. Reste à prouver l'inégalité triangulaire. Pour ce, on calcule

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + < x, y > + < y, x > +\|y\|^2$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $< x, y > + < y, x > \leq 2\|x\|\|y\|$ et l'on peut donc conclure

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

Proposition 1.1.3. *Dans tout espace pré-Hilbertien H,* ***l'identité du parallélogramme*** *suivante est vérifiée :*

$$\forall (x, y) \in H^2, \ \ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

ainsi que ***l'identité de polarisation :***

$$\forall (x, y) \in H^2, \ < x, y >= \frac{1}{4} \left(\ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2 \ \right).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, par définition de la norme, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathcal{R}e < x, y > + \|y\|^2,$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathcal{R}e < x, y > + \|y\|^2,$$

$$i\|x+iy\|^2 = i\|x\|^2 + 2\mathcal{I}m < x, y > + i\|y\|^2,$$

$$i\|x-iy\|^2 = i\|x\|^2 - 2\mathcal{I}m < x, y > + i\|y\|^2,$$

Additionner les deux égalités donne l'identité du parallélogramme. On constate aussi que

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\mathcal{R} < x, y > \quad \text{et} \quad i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4\mathcal{I}m < x, y >,$$

ce qui permet d'obtenir l'identité de polarisation. ■

Remarque 1.1.2. *Un espace vectoriel normé vérifiant l'identite du parallélogramme est un espace pré-Hilbertien.*

Proposition 1.1.4. *Soit H un espace pré-Hilbertien complexe et f une isométrie sur H : Alors on a*

$$\forall (x, y) \in H^2, \ < f(x), f(y)) >=< x, y > .$$

Preuve. La preuve est basée sur l'identité de polarisation et la définition d'une isométrie (i.e. f conserve la norme $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$). ■

1.2 Orthogonalité

Dans toute cette partie H désigne un espace pré-Hilbertien réel ou complexe.
La présence de produit scalaire dans un espace pré-Hilbertien permet de définir l'orthogonalité.

Définition 1.2.1. *On dit que deux éléménts x et y de H sont **orthogonaux** si $< x, y >= 0$. On note alors $x \perp y$.*

Théorème 1.2.1. *(de Pythagore). Si $x \perp y$, alors on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Preuve. On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathcal{R} < x, y > + \|y\|^2$. Or <x,y>=0, d'où le résultat. ■

Définition 1.2.2. *Pour tout $x \in H$, on définit l'orthogonal de x par la formule*

$$x^{\perp} = \{y \in H/ \ < x, y >= 0\}.$$

Plus généralement, pour tout sous-ensemble A non vide de H, on définit l'orthogonal de A par

$$A^{\perp} = \{y \in H/ \ \forall x \in A, \ < x, y >= 0\}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit H un espace préhilbertien et A un partie de H. Alors $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, et l'on a $A^{\perp} \cap A \subset \{0\}$.*

Preuve. Montrons d'abord que $A^{\perp}$ est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $A^{\perp}$ et $x \in H$, sa limite. On a pour tout $y \in A$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$| < x, y > | = | < x_n, y > + < x - x_n, y > | = | < x - x_n, y > | \leq \|x - x_n\| \|y\|.$$

Par convergence de la suite, le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela permet de conclure que $x \in A^{\perp}$.
Montrons maintenant que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de H.
Il est évident que $A^{\perp}$ contient 0. Il suffit donc de vérifier que$A^{\perp}$ est stable par combinaisons linéaires et ceci est une conséquence immédiate de la linéarité (ou de l'antilinéarité) du produit scalaire par rapport à chaque variable.
Enfin, si $A^{\perp} \cap A$ contient un élemément, alors x est orthogonal à lui même donc est nul. ■

Proposition 1.2.2. *Pour toute partie A d'un espace préhilbertien, on a $\bar{A} \subset (A^{\perp})^{\perp}$.*

Preuve. Il est évident que $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$. De plus, d'après la proposition 1.2.1, un orthogonal est toujours fermé, donc $(A^{\perp})^{\perp}$ doit contenir l'adhérence de A : ■

Remarque 1.2.1. *Si H est de dimension finie et A est un sous-espace vectoriel de H alors $A = (A^{\perp})^{\perp}$, Mais en dimension infinie, l'inclusion*

$$\bar{A} \subset (A^{\perp})^{\perp}$$

peut être stricte.
Nous reviendrons plus loin sur les cas d'égalitè.

Définition 1.2.3. *On dit qu'une famiil $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de H est orthogonal si l'on a*

$$\forall (i, j) \in I^2, \ (i \neq j) \Rightarrow < x_i, x_j >= 0.$$

On dit qu'une famiile $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de H est orthonormale si elle est orthogonale et si de plus $\|x_i\|$=1 pour tout $i \in I$.

Proposition 1.2.3. *[?] Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille orthogonale constituée de vecteurs tous non nuls. Alors cette famille est libre.*

Proposition 1.2.4. *[?] Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille orthonormale de H et $v \in Vect(e_1, ..., e_p)$. Alors*

$$v = \sum_{=1}^{n} < v, e_i > e_i$$

Théorème 1.2.2. *(Orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit $(a_1, ..., a_p)$ une famille libre de H. Alors il existe une unique famille orthonormal $(e_1, ..., e_p)$ telle que*
i)$\forall j \in \{1, ..., p\}$, $Vect(e_1, ..., e_p) = Vect(a_1, ..., a_p)$,
ii)$\forall j \in \{1, ..., p\}$, $< a_j, e_j > \in \mathbb{R}_*^+$.

Preuve. La démonstration est en fait presque plus intéressante que le résultat car elle fournit un algorithme permettant de construire $(e_1, ..., e_p)$ à partir de la famille $(a_1, ..., a_p)$.
Pour ce faire, on utilise une récurrence limitée. Tout d'abord, on pose $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$.
Ce vecteur est clairement de norme 1, son produit scalaire avec a_1 vaut $\|a_1\|$ donc est strictement positif, et bien sûr e_1 et a_1 engendrent la même droite vectorielle.
Supposons que l'on ait construit une famille orthonormale $(e_1, ..., e_k)$ vérifiant i) et ii) pour $j \in \{1, ..., k\}$.
Si $k = p$, la preuve est terminée.
Si $k \neq p$, on cherche e_{k+1} sous la forme

$$e_{k+1} = \lambda(a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq 0.$$

Prenons le produit scalaire de cette égalité avec e_j (Pour $j \in \{1, ..., k\}$) et pour e_{k+1} soit orthogonal à e_j, il est nécessaire et suffissant que

$$< e_{k+1}, e_j > + \alpha_j = 0.$$

Donc

$$e_{k+1} = \lambda(a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < e_{k+1}, e_j > e_i).$$

Comme $e_{k+1} \notin Vect(e_1, ..., e_k)$ (car $(a_1, ..., a_{k+1})$ est libre), donc Le terme entre parenthèses n'est pas nul.
Pour rendre e_{k+1} de norme 1, il suffit donc de choisir $\lambda = \|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < e_{k+1}, e_j > e_i\|^{-1}$.
En conséquence,

$$e_{k+1} = \frac{\lambda(a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < e_{k+1}, e_j > e_i)}{\|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < e_{k+1}, e_j > e_i\|}.$$

En prenant le produit scalaire de e_{k+1} avec cette égalité, on obtien de plus

$$1 = \frac{\lambda(< a_{k+1}, e_{k+1} >}{\|a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < e_{k+1}, e_j > e_i\|},$$

ce qui montre que $< a_{k+1}, e_{k+1} >$ est strictement positif. Ceci achèvé la preuve de l'existence.

■

Corollaire 1.2.1. *En dimension finie, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale. En particulier, tout espace pré-Hilbertien complèxe ou réel de dimension finie admet une base orthonormale.*

Preuve. Soit $(f_1, ..., f_p)$ une famille orthonormale de H (avec éventuellement $p = 0$).
On commence par compléter cette famille en une base $(f_1, ..., f_p, f_{p+1}, ..., f_n)$ de H. Le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt permet alors de transformer cette base en une base orthonormale de H. Clairement, les p premiers vecteurs de la base resteront inchangés.

■

Remarque 1.2.2. *D'après le corrolaire 1.2.1, on déduit que si H est de dimension finie et si A est un s.e.v. de H ; alors on a $dimA + dimA^{\perp} = dimH$.*

En efféctuant une récurrence complète, on obtient une version infinie du procèdé d'orthonormalisation de Schmidt.

Théorème 1.2.3. *(Version infinie d'Orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille libre de H. Alors il existe une unique famille orthonormal $(e_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que*
i)$\forall j \in \mathbb{N}$, $Vect(e_1, ..., e_p) = Vect(a_1, ..., a_p)$,
ii)$\forall j \in \mathbb{N}$, $< a_j, e_j > \in \mathbb{R}_*^+$.

1.2.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.4. *Un espace préhilbertien complet pour la topologie définie par sa norme est appelé espace de Hilbert.*

Exemples 1.2.1.

Exemple 1.2.1. *Tout espace préhilbertien réel ou complèxe de dimension finie est est complet. C'est donc un espace de Hilbert. En particulier , $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis du produit scalaire canonique*

$$< z, t > = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{t_i} \quad et \quad < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

respectivement est un espace de Hilbert.

Exemple 1.2.2. *(**Exercice**) L'ensemble $\ell^2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}/ \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2$ converge$\}$ des suites réelles ou complexes de carrés sommables muni du produit scalaire*

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\overline{y_n} \quad avec \quad (x, y) = ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}),$$

est un espace de Hilbert.

Solution de l'exercice :
$(\ell^2(\mathbb{C}), +, .)$ on muni par des opérations d'addition et de la multiplication par un scalaire

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En effet,
Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,alors ona

$$\sum_{=0}^{n} |x_n + y_n|^2 \leq 2(\sum_{=0}^{n} |x_n|^2 + \sum_{=0}^{n} |y_n|^2) < +\infty \;\; et \;\; |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda x_n|^2 < +\infty,$$

ce qui assure que $x + y \in \ell^2(\mathbb{C})$ et $\lambda x \in \ell^2(\mathbb{C})$.
Pour la structure pré- Hilbertienne, l'application ,

$$\begin{array}{lcll} <,> \quad : \ell^2(\mathbb{C}) \times \ell^2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} & est\ bien\ définie \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \longmapsto & < x, y >= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n, & \end{array}$$

puisque $|x_n\overline{y_n}| \leq \frac{1}{2}|x_n|^2 + \frac{1}{2}|y_n|^2$ et donc, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\overline{y_n}$ est absolument convergente .
Il est clair que l'application $< (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} >= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\overline{y_n}$ est une forme hérmitienne sur $\ell^2(\mathbb{C})$. De Plus, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, on a

$$< (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} >= \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \geq 0 \;\; et \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = 0 \Leftrightarrow x_n = 0, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquant $(\ell^2(\mathbb{C}), <,>)$ est un espace pré-Hilbertien et donc un espace vectoriel normé.
Sa norme associée est donnée par $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2}$.
Maintenant, on montre que $\ell^2(\mathbb{C})$ est complet. Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ un suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{C})$,

$$i.e., \quad \forall \varepsilon > 0, \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \; \forall p, q \in \mathbb{N} : \; p, q \geq N_\varepsilon \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |x_{p,n} - x_{q,n}|^2 < \varepsilon$$

avec $X_p = (x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{p,n})n_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$, $\forall p \in \mathbb{N}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, fixé , ona

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \; p, q \geq N_\epsilon \Longrightarrow |x_{p,n} - x_{q,n}|^2 < \epsilon,$$

ce qui entraîne que, la suite $(x_{p,n})_{p\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{C}$, *donc elle converge vers* $x_n \in \mathbb{C}$ *(*$\lim_{p\longrightarrow+\infty} x_{p,n} = x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$*), par conséquant on récuppère une suite* $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et montrons que* $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ *et que* $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* X *dans* $\ell^2(\mathbb{C})$.
Soient $k \in \mathbb{N}$, *et* $p, q \geq N_\epsilon$, *alors*

$$\sum_{n=1}^{k} |x_{p,n} - x_{q,n}| < \epsilon.$$

En passant à la limite quand $q \to +\infty$ *, on obtient :*

$$\sum_{n=1}^{k} |x_{p,n} - x_n|^2 < \epsilon \qquad \text{dès que} \quad p > N_\epsilon$$

puis que k *est arbitraire, alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{p,n} - x_n|^2 \leq \epsilon \quad \text{pour} \quad p \geq N_\epsilon.$$

Ceci montre que $(X_p - X) \in \ell^2(\mathbb{C})$, *pour* $p > N_\epsilon$ *et que* $X = (X - X_p) + X_p \in \ell^2(\mathbb{C})$.
D'autre part :

$$\|X_p - X\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_{p,n} - x_n|^2 \leq \epsilon \quad \text{si} \;\; p \geq N_\epsilon,$$

ce qui veut dire que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* X *dans* $\ell^2(\mathbb{C})$.

Exemple 1.2.3. *Nous verrons plus loin que pour toute partie mesurable* A*de* $\mathbb{R}^n$ *l'ensemble des classes d'équivalence (pour la relation d'égalité presque partout au sens de la mesure de Lebesgue) de fonctions mesurables sur* A *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *; de module au carré intégrable, muni du produit scalaire*

$$< f, g >= \int_A f(x)\overline{g(x)}d(x) \quad \text{est un espace de Hilbert.}$$

En revanche, même dans le cas A *compact,* $C(A; \mathbb{R}^n)$ *muni de ce même produit scalaire n'est pas complet (donner un contre-exemple).*

Exemple 1.2.4. *soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, alors l'espace* $L^2(X)$ *des fonctions* μ *mesurables de module au caré intégrable, muni du produit scalaire*

$$< f, g >= \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x) \quad \text{est un espace de Hilbert.}$$

Remarque 1.2.3. *Dans un espace préhilbertien l'addition, la multiplication par un scalaire, le produit scalaire et la norme sont des opérations (applications) continuent pour la topologié définie par la norme.*

Proposition 1.2.5. *[?] Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale d'un espace de Hilbert H. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge dand H si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ converge dans $\mathbb{R}$. Si cette dernière condition est vérifiée, on a alors l'**égalité de Parceval :***

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

1.3 Projecteurs orthogonaux

Dans cette section et les suivantes, sauf mention contraire, H désignera un espace de Hilbert réel ou complexe.

Théorème 1.3.1. *.Soit K un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique point $p_x \in K$ tel que*

$$\|x - p_x\| = d(x, K) = \inf_{y\in K} \|x - y\|.$$

*Le point p_x est appelé **projection** de x sur K. C'est l'unique point de K vérifiant*

$$\forall y \in K, \mathcal{R}e < x - p_x, y - p_x >\leq 0. \tag{1.3}$$

Preuve. : L'unicité de p_x provient du fait que si $p'_x \in K$ vérifie aussi $\|x - p'_x\| = d(x, K)$ alors on a d'aprés l'**identité de la médiane** (conséquence facile de l'identité du parallélogramme) :

$$\|x - p_x\|^2 + \|x - p'_x\|^2 = \frac{1}{2}\|p'_x - p_x\|^2 + 2\|x - \frac{p'_x + p_x}{2}\|^2,$$

et donc $p'_x \neq p_x$ entraînerait $\|x - \frac{p'_x+p_x}{2}\| < d(x, K)$. Comme, par convexité,le point $\frac{p'_x+p_x}{2}$ est dans K, cela contredirait la définition de $d(x, K)$.
Démontrons maintenant l'existence.Notons $d = d(x, K)$. Par définition de d, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de K telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x - x_n\| = d$. D'aprés l'identité de la médiane, on a pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 = \frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 + 2\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\|^2.$$

Par convexité de K, on a $\frac{x_n+x_m}{2} \in K$ donc $\|x - \frac{x_n+x_m}{2}\| \geq d$. En conséquence, on a

$$\frac{1}{2}\|x_n - x_m\|^2 \leq \|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2 - 2d^2,$$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy. Sa limite p_x appartient à K car K est fermé.
Il ne reste plue qu'à vérifier(1.3). Soit donc $y \in K$. Pour tout $t \in [0,1]$, le point $y_t = p_x + t(y - p_x)$ appartient à K. Donc on a

$$\|x - p_x\|^2 \leq \|x - y_t\|^2 = \|x - p_x\|^2 + t^2\|y - p_x\|^2 + 2t\mathcal{R}e < p_x - x, y - p_x > .$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit que $\mathcal{R}e < x - p_x, y - p_x > \leq 0$. Réciproquement ,si un point $x_0 \in K$ vérifie $\mathcal{R}e < x - x_0, y - x_0 > \leq 0$ pour tout $y \in K$ alors on a, compte-tenu de $\mathcal{R}e < x_0 - p_x, x - p_x > \leq 0$,

$$\|x_0 - p_x\|^2 = \mathcal{R}e < x_0 - p_x, x_0 - x > + \mathcal{R}e < x_0 - p_x, x - p_x > \leq 0.$$

Donc $x_0 = p_x$. ∎

Corollaire 1.3.1. *.Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Pour tout $x \in H$, la projection de x sur F est l'unique point p_x de F tel que $x - p_x \in F^\perp$.*

Preuve. : On sait déjà que p_x est l'unique point de F tel que

$$\forall z \in F, \mathcal{R}e < x - p_x, z - p_x > \leq 0.$$

Pour $y \in F$ fixé, en appliquant cette inégalité à $z = p_x - y$ puis à $z = p_x + y$, (et aussi à $z = p_x \pm iy$ dans le cas complexe), on obtient $< x - p_x, y >= 0$.
Soit p'_x un point de F tel que $x - p'_x \in F^\perp$. Comme $p'_x - p_x$ est dans F, on a

$$< x - p_x, p'_x - p_x >= 0 \ et \ < x - p'_x, p'_x - p_x >= 0.$$

En retranchant la deuxième égalité à la première, on trouve que $\|p'_x - p_x\|^2 = 0$. Donc $p_x = p'_x$.
Si F est un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert H, on a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$ mais il n'y pas de raison en général pour que l'on ait $F + F^\perp = H$. De même , on n'a pas nécessairement $F = (F^\perp)^\perp$: seule l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ est toujours vérifiée.
Dans la proposition ci-dessous, nous donnons une condition nécessaire suffisante pour que ces deux identités soient vérifiées. ∎

Proposition 1.3.1. *. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Les trois énoncés suivants sont équivalents :*
(i) F est fermé,
(ii) $H = F \oplus F^{\perp}$,
(iii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Preuve. :$(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons F fermé et montrons que $H = F + F^{\perp}$. Soit donc $x \in H$ et p_x la projection de x sur le s.e.v. fermé F. On a bien sûr $x = p_x + (x - p_x)$. Par définition de p_x et d'aprés le corollaire précédent, on a $p_x \in F$ et $x - p_x \in F^{\perp}$. En conséquence $x \in F + F^{\perp}$, ce qui assure que $H = F \oplus F^{\perp}$. $(ii) \Longrightarrow (iii)$: Soit x un élément de $(F^{\perp})^{\perp}$. Écrivons $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$.
On a donc

$$< x, z > = < y, z > + \|z\|^2.$$

Comme par hypothése x est orthogonal à $F^{\perp}$, le terme de gauche est nul. Mais comme $y \in F$ alors que $z \in F^{\perp}$, on a aussi $< y, z > = 0$. On conclut que $z = 0$, autrement dit $x \in F$. Donc $(F^{\perp})^{\perp} \subset F$. Comme l'autre inclusion est toujours vraie, on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
$(iii) \Longrightarrow (i)$: Par hypothése $F = (F^{\perp})^{\perp}$. Or un orthogonal est toujours fermé. Donc F est fermé. ■

Corollaire 1.3.2. *.Pour tout s.e.v. F d'un espace de Hilbert, on a $\overline{F} = (F^{\perp})^{\perp}$.*

Preuve.. Seule l'inclusion $(F^{\perp})^{\perp} \subset \overline{F}$ est à établir. Comme $\overline{F}$ est fermé, la proposition précédente assure que $((\overline{F})^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$. Mais sachant que $F \subset \overline{F}$, on a $F^{\perp} \supset (\overline{F})^{\perp}$ puis $(F^{\perp})^{\perp} \subset ((\overline{F})^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$.
Nous sommes maintenant en mesure de définir les projecteurs orthogonaux. ■

Définition 1.3.1. *Soit F un s.e.v. fermé de H. Le s.e.v. $F^{\perp}$ est appelé* ***supplémentaire orthogonal*** *de F. Tout élément x de H se décompose alors de maniére unique en*

$$x = y + z \qquad \text{avec} \qquad y \in F \qquad \text{et} \qquad z \in F^{\perp}.$$

Le vecteur y est la projection orthogonale de x sur F et l'application $x \longmapsto y$ est appelée ***projection orthogonale*** *ou* ***projecteur orthogonal*** *sur F.*

Remarque 1.3.1. . *Comme $F = (F^{\perp})^{\perp}$, le point z de la décomposition ci-dessus est égal à la projection orthogonale de x sur $F^{\perp}$.*
Sachant qu'un s.e.v. de dimension finie est fermé, on peut toujours lui associer un projecteur orthogonal. Cela motive les deux résultats suivants.

Proposition 1.3.2. . *Soit F un s.e.v. de dimension finie, et $(e_1, ..., e_n)$ une base orthogonormale de F.*
Le projecteur orthogonal p sur F est donné par la formule :

$$\forall x \in F, p(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i. \tag{1.4}$$

Preuve. : Notons p le projecteur défini par la formule(1.4). Il est clair que $Imp = F$ et que $Kerp = F^{\perp}$. La proposition est donc démontrée.
En combinant ce résultat avec la définition de la projection d'un point sur F en termes de distance, on obtient le résultat suivant. ∎

Corollaire 1.3.3. . *Soit F un s.e.v. de E de dimension finie. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de F . Alors on a*

$$\forall x \in E, d(x, F) = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i \right\|.$$

De plus l'unique point de F où cette distance est atteinte est $p(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

1.4 Deux résultats importants sur les espaces de Hilbert

Dans le théoréme ci-dessous, nous allons établir qu'il existe une isométrie bijective entre l'espace de Hilbert H et son dual topologique H'.Cette propriété est bien connue en dimension finie. Elle demeure vraie pour les espaces de Hilbert.C'est une conséquence facile du théoréme suivant :

Théorème 1.4.1. *(de représentation de Riesz-Fréchet). Soit H un Hilbert. Alors pour tout $f \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que*

$$\forall y \in H, f(y) =< y, x > . \tag{1.5}$$

De plus, $\|x\| = \|f\|_{H'}$.

Preuve. : Tout d'abord, si $f(y) =< y, x >=< y, x' >$ pour tout $y \in H$, alors on a

$$\forall y \in H, < y, x - x' >= 0,$$

et donc $x - x' = 0$. Cela donne l'unicité.
L'existence dans le cas $f = 0$ est évidente (prendre $x = 0$). Supposons maintenant que $f \in H' \backslash \{0\}$. Alors $Kerf$ est un hyperplan fermé de H et admet donc un supplémentaire orthogonal $(Kerf)^{\perp}$ qui n'est pas réduit à $\{0\}$. Fixons un vecteur x_0 non nul de $(Kerf)^{\perp}$. On a donc $f(x_0) \neq 0$ et on constate que

$$\forall y \in H, y - \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0 \in Kerf.$$

En conséquence, on a

$$\forall y \in H, < y, x_0 >= \frac{f(y)}{f(x_0)} \|x_0\|^2.$$

Il ne reste plus qu'à poser $x = \frac{x_0 \overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2}$ pour établir(1.5).
Enfin, puisque $f(y) =< y, x >$ pour tout $y \in H$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que $|f(y)| \leq \|x\| \|y\|$, et donc $\|f\|_{H'} \leq \|x\|$. Mais comme $f(x) = \|x\|^2$, on a en fait $\|f\|_{H'} = \|x\|$.
■

Théorème 1.4.2. *(de Lax-Milgram). Soit H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue sur H. On suppose que a est **coercive**, c'est-à-dire qu'il existe $c_0 > 0$ tel que*

$$\forall x \in H, \mathcal{R}e\, a(x, x) \geq c_0 \|x\|^2.$$

Alors pour tout $f \in H'$ il existe un unique $x \in H$ vérifiant

$$\forall y \in H, a(y, x) = f(y).$$

Preuve. : L'unicité de x est une conséquence facile de la coercivité. Démontrons l'existence. Comme a est, par hypothése, continue, pour tout $x \in H$, l'application

$$y \longrightarrow a(y, x)$$

est une forme linéaire continue sur H. En conséquence, le théoréme de Riesz-Fréchet assure l'existence d'un unique élément A_x de H tel que

$$\forall y \in H, a(y, x) =< y, A_x > .$$

Il est clair que l'application $A : x \longrightarrow A_x$ est linéaire dans le cas réel et antilinéaire dans le cas complexe. De plus, par continuité de a, il existe un réel positif C tel que

$$\forall x \in H, \|A_x\|^2 =< A_x, A_x >= a(A_x, x) \leq C\|A_x\|\|x\|.$$

Cela assure que l'application A est continue de H dans H.
Par ailleurs, toujours d'aprés le théoréme de Riesz-Fréchet, il existe un $x_0 \in H$ tel que

$$\forall y \in H, f(y) =< y, x_0 > .$$

Nous sommes donc ramenés à la résolution de l'équation $A(x) = x_0$.
Pour $\rho > 0$ considérons l'application

$$S_\rho : \begin{cases} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & x + \rho(x_0 - A(x)). \end{cases}$$

Clairement à ρ fixé résoudre $A(x) = x_0$ revient à trouver un point fixe pour S_ρ. On a pour tout $(x, x') \in H^2$,

$$\|S_\rho(x) - S_\rho(x')\|^2 = \|x - x'\|^2 + 2\rho\mathcal{R}e < x - x', A(x' - x) > +\rho^2\|A(x' - x)\|^2.$$

Donc, en notant c la norme de l'application linéaire A et en utilisant la coercivité de a,

$$\forall (x, x') \in H^2, \|S_\rho(x) - S_\rho(x')\|^2 \leq (1 - 2\rho c_0 + \rho^2 c^2)\|x - x'\|^2.$$

On choisit $\rho > 0$ suffisamment proche de 0 pour que $1 - 2\rho c_0 + \rho^2 c^2 < 1$. Le calcul ci-dessus montre alors que S_ρ est contractante . Comme H est un espace métrique complet (car c'est un Hilbert), le théoréme du point fixe permet de conclure qu'il existe un unique $x \in H$ tel que $S\rho(x) = x$. ∎

1.5 Bases hilbertiennes et espaces de Hilbert séparables

Définition 1.5.1. . *On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace de Hilbert H est* ***total*** *si le sous-espace vectoriel $VectA$ engendré par A est dense dans H.*

Proposition 1.5.1. . *Soit A un sous-ensemble de H. Alors A est total si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.*

Preuve. : Supposons d'abord que A soit total. Soit $x \in A^\perp$. Alors par linéarité du produit scalaire par rapport à la premiére variable, on déduit que x est aussi orthogonal à toute combinaison linéaire d'éléments de A, donc à $Vect A$ qui, par hypothése est dense dans H. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $Vect\, A$ qui converge vers x. On a bien sûr $< x, x_n >= 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, on en conclut que $\|x\|^2 = 0$. Donc $x = 0$.
Réciproquement, supposons que $A^\perp = \{0\}$. Alors on a $(A^\perp)^\perp = H$. Mais il clair que $A^\perp = (Vect\, A)^\perp$. En conséquence, on a

$$\overline{Vect\, A} = ((Vect\, A)^\perp)^\perp = (A^\perp)^\perp = H.$$

Donc A est total. ∎

Remarque 1.5.1. . *Comme cas particulier trés important, on obtient le fait qu'un s.e.v. F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*
*Rappelons qu'un espace topologique est dit **séparable** s'il contient une partie dénombrable dense.*

Attention : Ne pas confondre séparable et séparé ! Tout espace de Hilbert est séparé car muni de la topologie associée à une norme, mais on peut construire des espaces de Hilbert qui ne sont pas séparables.

Proposition 1.5.2. . *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement si il admet un sous-ensemble total dénombrable.*

Preuve. : La partie directe est triviale.
Réciproquement, soit A un sous-ensemble total dénombrable de l'espace de Hilbert H considéré. Alors on vérifie aisément que l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A à coefficients rationnels (cas réel) ou à parties réelles et imaginaires rationnelles (cas complexe) est dense dans H. Cet ensemble est dénombrable, donc H est bien séparable. ∎

Définition 1.5.2. . *Soit H un Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **base hilbertienne** de H si*
(i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de H,
(ii) l'ensemble $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est total.

Proposition 1.5.3. . *Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne.*

Preuve. : Si l'espace de Hilbert H admet une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors l'ensemble constitué par ces vecteurs est total et dénombrable. Donc H est séparable.
Réciproquement, supposons H séparable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable dense de H. Quitte à supprimer des élément de cette suite, on peut se ramener au cas où cette famille est linéairement indépendante : il suffit de raisonner par récurrence en supprimant de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout vecteur qui est combinaison linéaire des précédent. La famille ainsi obtenue est libre, et dénombrable non finie (sinon H serait de dimension finie).
Notons $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ cette famille. **Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt** permet alors de construire à partir de $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait

$$Vect(e_0,...,e_n)=Vect(b_0,...,b_n).$$

Vérifions que l'ensemble $\{e_k, k\in\mathbb{N}\}$est total. Soit $x\in H$ et $\varepsilon>0$. Comme $\{b_k, k\in\mathbb{N}\}$ est total, il existe $n\in\mathbb{N}$ et $y\in Vect(b_0,...,b_n)=Vect(e_0,...,e_n)$ tel que $\|x-y\|\leq\varepsilon$.
Cela achéve la démonstration. ∎

Proposition 1.5.4. *. Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors pour tout $x\in H$, on a*

$$x=\sum_{n\in\mathbb{N}}<x,e_n>e_n \quad et \quad \|x\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|<x,e_n>|^2 \quad (\textbf{\textit{égalité de Parseval}}).$$

Réciproquement, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de ℓ^2 alors $\sum\alpha_n e_n$ converge dans H et l'on a

$$\forall m\in\mathbb{N},\ <\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n, e_m>=\alpha_m.$$

Preuve. : Soit $x\in H$. Posons $x_n=\sum_{k=1}^n<x,e_k>e_k$. On a, d'aprés le théoréme de Pythagore,

$$<x,x_n>=\sum_{k=0}^n|<x,e_k>|^2=\|x_n\|^2.$$

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que $\|x_n\|_H\leq\|x\|_H$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En conséquence, la série $\sum|<x,e_k>|^2$ est convergente. La proposition (1.2.5) assure donc la convergence de $\sum<x,e_k>e_k$. De plus, en notant y la somme de cette série, on a

$$\|y\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|<x,e_n>|^2.$$

Il est aussi clair que $<y-x,e_k>=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est total, on en conclut que $y-x=0$.

Reste à démontrer la réciproque. La convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ est un cas particulier de la proposition (1.2.5). Maintenant, si la série converge, on a, par continuité

$$< \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k e_k, e_m >= \lim_{n\longrightarrow+\infty} < \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k, e_m >= \alpha_m.$$

■

Exercice 1.5.1. *: Sous les hypothéses de la proposition précédente, vérifier que*

$$\forall (x,y) \in H^2, < x, y >= \sum_{n\in\mathbb{N}} < x, e_n > \overline{< y, e_n >}.$$

Remarque 1.5.2. *:*

1. *La proposition ci-dessus fournit une isométrie bijective naturelle entre tout espace de Hilbert séparable et ℓ^2, une fois fixée une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il suffit de considérer*
$$\begin{cases} \ell^2 & \longrightarrow & H \\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \Sigma_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n e_n. \end{cases}$$
Par conséquent, l'étude des espaces de Hilbert séparables (les seuls qui apparaissent dans les applications) peut se ramener à celle de l'espace ℓ^2.

2. *On prendra garde au fait qu'une base hilbertienne n'est jamais une base algébrique : en reprenant les notations précédentes, il n'est pas vrai que tout vecteur de H peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour "la plupart" des vecteurs, il faut utiliser une infinité d'éléments de e_n.*

1.6 La convergence faible dans les espaces de Hilbert

L'un des problémes de base que l'on rencontre dans les espaces de Hilbert de dimension infinie comme l'espace L^2 des fonctions de carré sommable est que les ensembles bornés sont trés loin d'être d'adhérence compacte.À titre d'exemple, considérons la boule unité d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie H, et une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de H. D'apprés la formule de Parseval, pour tout élément x de H, la suite $< x, e_j >_{j\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable. Donc son terme général tend vers 0.Donc si la suite $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence,ce ne peut être que 0.Or $\|e_j\| = 1$ pour tout j. Donc 0 ne saurait être valeur d'adhérence d'une telle suite. Cette constation motive la définition suivante.

Définition 1.6.1. . *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments d'un espace de Hilbert* H *et* x *un élément de* H. *On dit que la* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge faiblement*** *vers* x *si*

$$\forall h \in H, \lim_{n\longrightarrow\infty} < h, x_n >=< h, x > .$$

On utilise alors la notation $x_n \rightharpoonup x$.

Remarque 1.6.1. . *Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'unicité de la limite faible. Dans le théoréme suivant, on donne quelques conséquences de la propriété de convergence faible.*

Théorème 1.6.1. . *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments d'un espace de Hilbert* H *et* x, y *deux éléments de* H. *On a alors :*

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est bornée et} \quad \|x\| \leq \liminf \|x_n\|; \tag{1.6}$$

$$x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x; \tag{1.7}$$

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\| = \|x\| \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x\| = 0; \tag{1.8}$$

$$(x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad y_n \rightharpoonup y) \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} < x_n, y_n >=< x, y > . \tag{1.9}$$

Preuve. : La preuve du premier point du théoréme découle du théoréme de Banach-Steinhaus.
En effet, notons T_n l'application définie sur H par $T_n(h) =< h, x_n >$. Il s'agit clairement d'une forme linéaire continue sur H. Par ailleurs, pour h fixé, la suite de terme général $(T_n)(h)$ est convergente. En conséquence, le théoréme de Banach-Steinhaus (ou plutôt le corollaire qui suit) assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que l'application linéaire limite $T : h \longrightarrow < h, x >$ est continue et vérifie

$$\|T\|_{H'} \leq \liminf \|T_n\|_{H'}$$

Mais, d'aprés le théoréme de Riesz-Fréchet, on a $\|T\|_{H'} = \|x\|_H$ et $\|T_n\| = \|x_n\|_H$, ce qui achéve la démonstration de la premiére propriété.
Le deuxiéme point résulte simplement du fait que

$$| < h, x_n > - < h, x > | \leq \|h\|\|x_n - x\|.$$

Pour le troisiéme point, il suffit d'écrére que

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\mathcal{R}e < x, x_n > +\|x\|^2.$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend faiblement vers x, on a

$$-2 \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{R}e < x, x_n >= -2\|x\|^2.$$

Cela assure(1.8).

La démonstration de la derniére propriété est trés simple. Il suffit d'écrire que

$$| < x_n, y_n > - < x, y > | \leq | < x_n - x, y_n > | + | < x, y_n - y > |$$

$$\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + | < x, y_n - y > |.$$

Le théoréme précédent affirme que la $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, on a

$$| < x_n, y_n > - < x, y > | \leq \mathcal{C}\|x_n - x\| + | < x, y_n - y > |,$$

d'où la proposition. ∎

Proposition 1.6.1. . *En dimension finie, la convergence faible est équivalente à la convergence forte.*

Preuve. : D'aprés le théoréme précédent, la convergence forte entraîne toujours la convergence faible. Réciproquement, supposons que l'espace hilbertien H soit de dimension finie et donnons nous une base orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ de H, et une suite faiblement convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit x sa limite faible. On a

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} | < e_i, x_n - x > |^2.$$

Par convergence faible, on a $\lim_{n\longrightarrow\infty} < e_i, x_n - x >= 0$ pour tout $i \in \{1, ..., p\}$. Donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Donnons un autre cas où les notions de convergence forte et faible se rejoignent : ∎

Proposition 1.6.2. . *Soit C un ensemble* ***convexe*** *de l'espace de Hilbert H. Alors les deux énoncés suivents sont équivalents :*

- *l'ensemble C est fermé,*
- *pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente d'éléments de C, la limite faible x est dans C.*

Preuve. : Sachant que toute suite fortement convergente est faiblement convergente, l'implication réciproque est évidente.
Supposons donc C fermé et considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers $x \in H$. Il s'agit de démontrer que x est dans C. Comme C est convexe fermé, le point x admet une projection p_x sur C. Cette projection est l'unique point de C tel que

$$\forall y \in C,\ \mathcal{R}e < x - p_x, y - p_x > \leq 0.$$

En appliquant cette relation à $y = x_n$ puis en faisant tendre n vers l'infini (c'est ici qu'intervient l'hypothése de convergence faible). on obtient

$$\|x - p_x\|^2 \leq 0.$$

En conséquence $x = p_x \in C$.
En dimension finie, le théoréme de Riesz aussure que toute suite bornée admet une sous-suite converente. Le théoréme suivant (dont les applications notamment en EDP sont multiples) assure que la propriété demeure vraie pour la convergence faible dans n'importe quel espace de Hilbert. ■

Théorème 1.6.2. ***(de compacité faible)****. De toute suite bornée d'un espace de Hilbert, on peut extraire une sous-suite faiblement convergent.*

Preuve. : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace de Hilbert H. Notons M une borne strictement positive de la suite. Pour simplifier, supposons dans un premier temps que H soit séparable. Nous écartons d'emblée le cas de la dimension finie qui est convert par le théoréme de Riesz et fixons une base hilbertienne $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de H. Pour montrer la convergence faible de la suite, nous allons faire appel une fois de plus au procédé d'extraction diagonal de Cantor. la suite $< e_0, x_n >_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$. Il existe donc un élément λ_0 de $\mathbb{K}$ et une extraction φ_0 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ tels que l'on ait

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} < e_0, x_{\varphi_0(n)} >= \lambda_0.$$

Supposons construites une suite finie $(\varphi_j)_{1\leq j\leq m}$ de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite finie $(\lambda_j)_{1\leq j\leq m}$ de scalaires telles que, pour tout $j \leq m$, on ait

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} < e_j, x_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_j(n)} >= \lambda_j.$$

La suite $< e_{m+1}, x_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_m(n)} >_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$. Il existe donc une fonction strictement croissante φ_{m+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et un élément λ_{m+1} de $\mathbb{K}$ tels que

$$\forall j \leq m+1,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} < e_j, x_{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_{m+1}(n)} >= \lambda_j$$

Finalement, si l'on pose $\psi(n) = \varphi_0 \circ ... \circ \varphi_n(n)$, toutes les suites $< e_j, x_{\psi(n)} >_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
Soit V le sous-espace vectoriel engendré par tous les e_j, c'est-a-dire l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) de e_j. Puisque $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, l'ensemble V est dense dans H. Considérons l'application linéaire L définie par

$$L : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & \lim_{n\longrightarrow\infty} < y, x_{\psi(n)} > . \end{cases}$$

Notons que la définition de L ne pose pas de probléme puisque tout élément de V est combinaison linéaire finie des e_j et que la suite $< e_j, x_{\psi(n)} >$ converge pour chaque $j \in \mathbb{N}$. De plus, L est continue car, pour tout y de V, nous avons

$$|L(y)| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|)\|y\| \leq M\|y\|$$

En vertu du théoréme (**??**), la densité de V nous permet alors de prolonger la forme linéaire L à l'espace H tout entier . Notons $\tilde{L}$ la forme linéaire continue sur H ainsi obtenue.
D'aprés le théoréme de Riesz-Fréchet, il existe un élément x de H tel que

$$\forall y \in H, \tilde{L}(y) =< y, x > .$$

Ainsi nous avons en particulier que

$$\forall y \in V, \lim_{n\longrightarrow\infty} < y, x_{\psi(n)} >=< y, x > .$$

Il reste à démontrer la convergence pour tout $z \in H$. Fixons donc $z \in H$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de V dans H, il existe $y \in V$ tel que $2(M + \|x\|)\|y - z\| \leq \varepsilon$. En écrivant que $< z, x_{\psi(n)} - x >=< y, x_{\psi(n)} - x > + < z - y, x_{\psi(n)} - x >$, et en se souvenant que la suite est bornée par $M > 0$, on obtien

$$| < z, x_{\psi(n)} - x > | \leq | < y, x_{\psi(n)} - x > | + \varepsilon/2.$$

Pour n assez grand, on aura donc $| < z, x_{\psi(n)} - x > | \leq \varepsilon$. Cela achéve la démonstration de la convergence faible de $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour terminer, considérons le cas d'un espace de Hilbert H non séparable. On définit alors F comme étant l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'espace préhilbertien F est un espace de Hilbert car est un fermé d'un espace de Hilbert. Il est bien sûr séparable, par construction. La démonstration précédente assure l'existence d'une sous-suite

$(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'un élément x de F tels que $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers x pour la convergence faible sur F .

Soit maintenant $y \in H$ quelconque. Sachant que $H = F \oplus F^{\perp}$ (car F est fermé). on peut écrire $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F$ et $y_2 \in F^{\perp}$. Il est alors clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $< y, x_{\psi(n)} >=< y_1, x_{\psi(n)} >$ et que $< y, x >=< y_1, x >$. On a donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} < y, x_{\psi(n)} >=< y, x > .$$

Cela achéve la démonstration du cas général.

Comme application, donnons le résultat suivant qui généralise un théoréme bien connu en dimension finie (voir le cours de calcul différentiel de licence) : ■

Théorème 1.6.3. . *Soit H un espace de Hilbert et A un convexe fermé non vide de H. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(A;\mathbb{R})$. On suppose que φ est convexe et vérifie*

$$\lim_{x\in A_{\|x\|\longrightarrow+\infty}} \varphi(x) = +\infty.$$

Alors φ est minorée et atteint son minimum absolu : il existe $a \in A$ tel que

$$\forall x \in A, \varphi(x) \geq \varphi(a).$$

Preuve. : Soit $m = \inf_{x\in A} \varphi(x)$. Supposons par l'absurde que

$$\forall x \in A, \varphi(x) > m.$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \varphi(x_n) = m.$$

Comme φ tend vers l'infini à l'infini, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergent en vertu de théoréme de compacité faible. Notons a la limite de cette sous-suite.

Pour $x \in A$ notons $A_x = \{y \in A|\varphi(y) \leq \varphi(x)\}$. Cet ensemble est convexe fermé car φ est convexe continue, et il contient les termes de la suite $(x_{\psi(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, donc a en vertu de la proposition (**??**). On a donc en particulier $\varphi(a) \leq \varphi(x)$. En d'autres termes, φ atteint sa borne inférieure. Cela achéve la preuve du théoréme. ■

1.7 Application à l'espace L^2 et aux séries de Fourier

Dans toute cette section, nous ferons appel à des notions classiques de théorie de l'intégration vues en cours de licence (On dit que la série Σu_n est **absolument convergente**).

1.7.1 Les espaces L^p

Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure non nulle.Pour $p \in [1, +\infty[$, on note

$$\mathcal{L}^p(A;\mathbb{R}) = \left\{ f : A \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \ \ \textit{Lebesgue mesurable et} \int_A |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

L'application

$$f \longmapsto \|f\|_{L^p} = \left(\int_A |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

a toutes les propriétés d'une norme sauf celle qui stipule que $\|f\|_{L^p} = 0$ si et seulement si $f = 0$.

En effet $\|f\|_{L^p} = 0$ entraine seulement que $f = 0$ presque partout. De ce fait $\|.\|_{L^p}$ n'est qu'une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(A;\mathbb{K})$.

Pour pallier ce grave défaut, on considére les classes d'équivalence des fonction de $\mathcal{L}^p(A;\mathbb{K})$ pour la relation d'équivalence d'égalité presque partout au sens de la mesure de Lebesgue. On note $L^p(A;\mathbb{K})$ (ou plus simplement L^p en l'absence d'ambiguité) l'ensemble de ces classes d'équivalence et en pratique, on confond les éléments de L^p (qui sont des classesd'équivalence de fonctions) avec leurs représentants (qui sont des fonctions de puissanse p-iéme sommable).

Théorème 1.7.1. . *Pour tout $p \in [1 + \infty[$, l'espace $L^p(A;\mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_{L^p}$ est complet.*

Preuve. : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^p(A;\mathbb{K})$. On veut montrer que cette suite converge dans $L^p(A;\mathbb{K})$.

Tout d'abord remarquons que l'on peut construire par récurrence une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_{L^p} \leq 2^{-n}.$$

Si l'on pose $u_n = f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}$, on constate donc que la série $\sum u_n$ vérifie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^p} < \infty.$$

Si l'on parvient à démontrer que $\sum u_n$ converge dans $L^p(A;\mathbb{K})$ alors on en déduira que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. En d'autres termes, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$aura une valeur d'adhérence. Mais comme c'est aussi une suite de Cauchy, on pourra finalement conclure que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Reste donc à établir que $\sum u_n$ converge. Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} |u_k| \right\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|_{L^p} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_{L^p}.$$

Donc, d'aprés le théoréme de convergence monotone,

$$\int_A \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)|\right)^p dx < \infty.$$

Cela assure que $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ est fini presque partout sur A et appartient à $L^p(A;\mathbb{K})$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ converge aussi pour presque tout $x \in A$ et appartient à $L^p(A;\mathbb{K})$.
Reste à montrer la convergence de $\sum_{k=0}^{n} u_k$ vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ dans $L^p(A;\mathbb{K})$. Pour cela, il suffit d'écrire que

$$\int_A \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right|^p dx = \int_A \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right|^p dx.$$

L'intégrand du membre de droite tend vers 0 presque partout et est majoré par la fonction $(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|)^p$ qui est intégrable. En conséquence, le théoréme de convergence dominée permet de conclure que le membre de gauche tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Autrement dit, $\sum u_k$ est convergente dans $L^p(A;\mathbb{K})$.
Afin d'aborder l'étude des séries de Fourier, nous aurons aussi besion du résultat de densité suivant. ∎

Théorème 1.7.2. . *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble $\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{K})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ à **support compact**(C'est-à-dire nulles en dehors d'un compact de $\mathbb{R}$) est dense dans $L^p(\mathbb{R},\mathbb{K})$. De plus, si $f \in L^p(\mathbb{R};\mathbb{K})$ est nulle en dehors de l'intervalle $[a,b]$ alors on peut trouver une suite de fonctions continues f_n sur $\mathbb{R}$ nulles en dehors de $[a,b]$ telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0.$$

Preuve. : Soit $f \in L^p(\mathbb{R},\mathbb{K})$. On veut construire une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{K})$ qui converge vers f dans L^p. À l'aide du théoréme de convergence dominée, il est facile de voir que pour toute fonction f dans L^p, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{|x| \geq n} |f(x)|^p dx = 0.$$

En conséquence, il suffit de traiter le cas où f est à support compact.
Traitons d'abord le cas $p = 1$. Supposons donc que $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{K})$ est nulle en dehors d'un intervalle $[a,b]$. Rappelons qu'on appelle **fonction simple** toute combinaison linéaire de fonctions de type 1_A avec A borélien de mesure finie et que, par construction de l'intégrale de Lebesgue, on peut trouver une suite de fonctions simples nulles en dehors de $[a,b]$ qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R};\mathbb{K})$. Il suffit donc de montrer le résultat de densité dans le cas

$f = 1_B$ avec B borélien borné. Mais par construction de la mesure de Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un ouvert Ω de $\mathbb{R}$ contenant B et tel que

$$0 \leq \mu(\Omega) - \mu(B) = \int_{\mathbb{R}} (1_\Omega(x) - 1_B(x))dx \leq \varepsilon.$$

Donc il suffit de traiter le cas où B est un ouvert borné de $\mathbb{R}$. On utilise ensuite le fait que tout ouvert borné de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts bornés et deux à deux disjoints.
En effet, pour $x \in B$, on note I_x la réunion de tous les intervalles contenant x et inclus dans B. Comme B est ouvert et tous les I_x sont connexes et contiennent x, l'ensemble I_x est un connexe ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans B. C'est donc un intervalle ouvert. Il est aussi aisé de vérifier que si x et y sont deux points de B alors ou bien $I_x = I_y$, ou bien $I_x \cap I_y = \varnothing$. Cela permet de définir la relation d'équivalence suivante :

$$x \sim y \quad si \quad I_x = I_y.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on constate que chaque classe d'équivalence pour la relation $\sim$ contient un nombre rationnel. En conséquence, si l'on choisit un nombre rationnel x_n dans chaque classe d'équivalence, on peut écrire

$$B = \bigcup_n I_{x_n}.$$

La réunion est finie et dénombrable puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Enfin, par construction, les intervalles sélectionnés sont deux à deux disjoints. Cela permet d'écrire que

$$1_B = \sum_n 1_{I_{x_n}}.$$

Comme 1_B est dans $L^1(\mathbb{R};\mathbb{K})$, le théoréme de convergence dominée assure que la série ci-dessus converge au sens de la norme $\|.\|_{L^1}$. Cela permet de se ramener au cas où B est réunion finie d'intervalles. Enfin, comme le résultat que nous souhaitons démontrer est stable par combinaison linéaire, il suffit de considérer le cas où B est un intervalle ouvert borné.
En résumé, il s'agit finalement de montrer que la fonction $1_{]a,b[}$ peut être approchée au sens de la norme $\|.\|_{L^1}$ par une suite de fonctions continues nulles en dehors de $[a,b]$. Pour cela, on peut considérer (pour n suffisamment grand) les fonctions f_n continues affines par morceaux, nulles en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[a+2^{-n}, b-2^{-n}]$. Un calcul évident (ou même un dessin) permet de vérifier que

$$\|1_{]a,b[-f_n}\| = 2^{1-n},$$

d'où le résultat dans ce cas particulier, et donc le théoréme dans le cas $p = 1$.
Traitons maintenant que le cas $p \in]1, +\infty[$. Soit donc une fonction f de $L^p(\mathbb{R};\mathbb{K})$ à support compact. Quitte à séparer f en partie réelle et partie imaginaire, on peut se restreinder au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Maintenant, si f est à valeurs réelles alors on peut écrire

$$f = f^+ - f_- \quad avec \quad f^+ = \sup(0, f) \quad et \quad f^- = \sup(0, -f),$$

et l'on a f dans $L^p(\mathbb{R};\mathbb{R})$ si et seulement si f_- et f_+ le sont. Donc on peut se limiter au cas où f est dans L^p et est positive et nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, notons $f_N = \inf(f, N)$. On a

$$\mu(f^{-1}(]N, +\infty[)) = \int_{\{x\in\mathbb{R}/1<|f(x)|^p/N^p\}} 1dx \leq \frac{1}{N^p}\|f\|^p_{L^p}.$$

Donc $\lim_{N\longrightarrow+\infty} \mu(f^{-1}(]N, +\infty[)) = 0$. Une fois de plus par convergence dominée, on en déduit que $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p.
On peut donc se limiter au cas où f est positive, bornée et nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$. Il est alors évident que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues à support compact (inclus dans $[a, b]$ si f est nulle en dehors de $[a, b]$) qui converge vers f dans L^1. Soit

$$g_n = \sup(0, \inf(f_n, \|f\|_{L^\infty})).$$

On constate que $|g_n - f| \leq |f_n - f|$. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues à support compact tendant vers f dans L^1 et vérifiant de plus $0 \leq g_n \leq \|f\|_{L^\infty}$. Sachant que

$$\|f - g_n\|^p_{L^p} = \int_a^b |f(x) - g_n(x)|^p dx = \int_a^b |f(x) - g_n(x)||f(x) - g_n(x)|^{p-1}dx,$$

on en conclut que

$$\|f - g_n\|^p_{L^p} \leq \|f\|^{p-1}_{L^\infty}\|f - g_n\|_{L^1}.$$

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^p. ■

1.7.2 Séries de Fourier

Nous supposons désormais que $p = 2$. Visiblement, $\|.\|_{L^2}$ est la norme associée au produit scalaire

$$< f, g >= \int_A f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.10}$$

On en déduit le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.7.3. . *Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, l'ensemble $L^2(A;\mathbb{K})$ muni du produit scalaire défini en (1.10) est un espace de Hilbert.*
Nous supposons désormais que $A = [a,b]$. Pour des raisons qui apparaitront un peu plus loin, nous munissons $L^2([a,b];\mathbb{K})$ du produit scalaire

$$< f, g >= \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \quad avec \quad T = b-a,$$

ce qui évidemment ne change rien aux propriétés topologiques énoncées jusqu'à présent.

Théorème 1.7.4. . *L'ensemble $L^2([a,b];\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert séparable et les fonction e_p définies par*

$$e_p : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{ipwt} \end{array} \right. \quad avec \quad w = \frac{2\pi}{T} \quad et \quad p \in \mathbb{Z}$$

forment une base hilbertienne de $L^2([a,b];\mathbb{C})$.

Preuve. : Par définition du produit scalaire et de la suite $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, on pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$,

$$< e_p, e_q >= \frac{1}{T}\int_a^b e^{i(p-q)wt}dt.$$

En calculant l'intégrale, on vérifie que $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale.
Pour montrer que cette famille constitue une base hilbertienne, il suffit d'établir que l'orthogonal de $\{e_n/n \in \mathbb{Z}\}$ est réduit à $\{0\}$. Soit donc $f \in L^2([a,b];\mathbb{C})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, < f, e_n >= 0. \tag{1.11}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Si l'on prolonge f par 0 en dehors de $[a,b]$, on obtient une fonction de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. D'aprés le théoréme de densité de la section 1.12.1 il existe donc $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ nulle en dehors de $]a,b[$ et telle que $\|f-g\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $g(a) = g(b) = 0$, on peut prolonger g en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ par périodicité puis la considérer comme une fonction $\tilde{g}$ définie sur l'ensemble(cet ensemble est celui des classes d'équivalence de réels pour la relation de congruance modulo T :dire que $x = y$ dans $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ signifie que $x - y$ est un multiple de T) $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.
L'ensemble $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$ est un ensemble métrique compact. toute fonction e_n, on peut associer son représentant $\tilde{e}_n$ sur $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques de période T (c'est-à-dire le s.e.v. engendré par les $\tilde{e}_n$) est clairement stable par conjugaison, combinaison linéaire et multiplication. De plus, il contient

les fonction constantes et sépare les points (exercice : vérifier cette derniére propréité). Le théoréme de Stone-Weierstrass (cas complexe) assure donc la densité de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z};\mathbb{C})$. En conséquence, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|g-P\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
On a donc finalement $\|f-P\|_{L^2} \leq \varepsilon$ avec P polynôme trigonométrique. Écrivons que

$$\|f\|_{L^2}^2 =< f, f-P > + < f, P > .$$

D'aprés (1.11), on a $< f, P >= 0$. Une application immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure donc que

$$\|f\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Le raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on peut conclure que $f = 0$. Donc $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([a,b];\mathbb{C})$. Comme conséquence immédiate, on obtient le fait que $L^2([a,b];\mathbb{C})$ est séparable.
Maintenant que nous savons que $L^2([a,b];\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert séparable et que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en est une base hilbertienne, la proposition (**??**) nous donne le résultat suivant. ■

Corollaire 1.7.1. *. Soit $a < b$ et $w = 2\pi/(b-a)$. Toute fonction f de $L^2([a,b];\mathbb{C}$ peut se décomposer de façon unique en*

$$f = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)e_p \quad avec \quad e_p(t) = e^{ipwt}, \quad c_p(f) =< f, e_p >= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{-ipwt} f(x)dt, \quad (1.12)$$

et l'on a l'identité de Bessel-Parseval suivante :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(f)|^2.$$

Réciproquement, pour toute suite $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la série $\sum \gamma_p e_p$ converge dans $L^2([a,b];\mathbb{C})$ vers une fonction f telle que $c_p(f) = \gamma_p$.

Remarque 1.7.1. *: L'égalité (1.12) doit être comprise dans le sens suivant :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{p=-n}^{n} c_p(f)e^{ipwt} = f$$

au sens de la norme de $L^2([a,b];\mathbb{C})$ (appelée parfois ***norme de la convergence en moyenne quedratique****). Cela entraîne bien sûr la convergence en presque tout point. Pour avoir vraiment une convergence en tout point, il faut faire des hypothéses nettement plus fortes sur f (vues en L3 dans le cours suites et séries de fonctions).*
En identifiant les fonction T périodiques à leur restriction sur un intervalle d'amplitude T (par exemple [0,T]), le corollaire ci-dessus donne :

Corollaire 1.7.2. *.Toute fonction f périodique de période T et de carré sommable sur $[0,T]$ peut se décomposer de façon unique en*

$$f = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)e^{ipwt} \quad \textit{avec} \quad c_p(f) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-ipwt}f(t)dt, \quad \textit{et} \quad w = \frac{2\pi}{T},$$

l'égalité ayant lieu au sens de la convergence des sommes partielles de $-n$ à n dans $L^2([0,T];\mathbb{C})$. De plus on a l'identité de Bessel-Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(f)|^2.$$

Chapitre 2

Opérateurs compacts sur les espaces de hilbert

2.1 Opérateur compacts

Dans toute cette section , H_1 et H_2 sont des espaces de Hilbert,et l'ou note $\overline{B}_{H_1}$ et $\overline{B}_{H_2}$ leur boule unité respective.

Définition 2.1.1. *on dit qu'une application linéaire T de H_1 dans H_2 est compacte si l'image de la boule unité de H_1 par T est relativement compacte dans H_2*

Notation 2.1.1. *on note $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 dans le cas $H_1 = H_2 = H$,on adopte la notation condensée $\mathcal{K}(H)$.*

Retenons la caractérisation suivante,fort utile,des applications linéaires compactes (appelées aussi **opérateurs compacts**).

Proposition 2.1.1. *une application linéaire T de H_1 dans H_2 est comacte si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H_1,la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence dans H_2.*

Preuve. supposons que T soit compact et considérons une quelconque suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H_1.soit $M > 0$ une borne de cette suit.la suite $(T(M^{-1}x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans $T(\overline{B}_{H_1})$ dont l'adhérence est compacte.On peut donc extraire de $(T(M^{-1}x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.Il en va de méme pour $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Récipriquement,soit$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élments de l'adhérence de $T(\overline{B}_{H_1})$. Il existe une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T(\overline{B}_{H_1})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|y_n - z_n\| \leq 2^{-n}.$$

par hypothése,la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adherence.donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. ∎

Proposition 2.1.2. *l'ensemble $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ est un s, e, v fermé de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$*

Preuve. tout d'abord,si $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ alors $T(\overline{B}_{H_1)}$ est un borné de H_2 car est relativement compact dans H_2.Cela assure que $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. le fait que $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ soit stable par combinaison linéaire est facile *á* établir (raisonner avec des suit extraites).Bien *sûr* $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ n'est pas vide (car contient l'application linéaire nulle par exemple) donc $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ est bien un s,e,v de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.
Soit maintenant $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts qui tend vers T dans $\mathcal{L}(H_1, H_2)$. soit $\varepsilon > 0$.Il s'agit de montrer que $T(\overline{B}_{H_1})$ peut étre recouvert par un nombre fini de boules de H_2 de rayon ε . Fixons un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|T - T_{n_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\varepsilon}{3}$.Comme T_{n_0} est un opérateur compact, il existe une famille finie $(x_{1,.........,X_N})$ d'éléments de $\overline{B}_{H_1}$ telle que

$$T_{n_0}(\overline{B}_{H_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{H_2}(T_{n_0}(x_i), \frac{\varepsilon}{3})$$

Fixons $x \in \overline{B}_{H_1}$ et $i \in \{1, ..., N\}$ tel que $\|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_i)\|_{H_2} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. En écrivant que $\|T(x) - T(x_i)\|_{H_2} \leq \|T(x) - T_{n_0}(x)\|_{H_2} + \|T_{n_0}(x) - T_{n_0}(x_i)\|_{H_2} + \|T_{n_0}(x_i) - T(x_i)\|_{H_2}$. on conclut que

$$T(\overline{B}_{H_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{H_2}(T(x_i), \varepsilon).$$

ce qui achéve la preuve de la compacité de T . ∎

Proposition 2.1.3. *: la composée d'un opérateur compact et d'une application linéaire continue (dans un sens ou dans l'autre) est encore un opérateur compact.*

Preuve. : soit H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert,$T_1 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ et $T_2 \in \mathcal{K}(H_2, H_3)$. comme T_1 est continu,il existe c > 0 tel que $T_1(c\overline{B}_{H_1}) \subset \overline{B}_{H_2}$.Par compacité de T_2. on en déduit que $T_2 \circ T_1(c\overline{B}_{H_1})$ est relativement compact dans H_3.Il en est bien *sûr* de *même* pour $T_2 \circ T_1(c\overline{B}_{H_1})$. Donc $T_2 \circ T_1$ est un opérateur compact . le cas $T_1 \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ est laissé en exercice . ∎

Définition 2.1.2. *:On dit que $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est un opérateur* ***de rang fini*** *si dim Im $T < \infty$.*

Proposition 2.1.4. *:Un opérateur de rang fini est comact .*

Preuve. : Il suffit de remarquer que si T est de rang fini alors $T(\overline{B}_{H_1})$ est un borné de l'espace vectoriel de dimension finie Im T , donc est relativement compact . ■

Théorème 2.1.1. *: Une application linéaire entre espace de Hilbert est compacte si et seulement si elle est la limite d'une suite d'oprateurs de rang fini .*

Preuve. : La partie directe est facile : un opéraeur de rang fini étant compact et l'ensemble des opérateurs compacts étant un fermé de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, une limite d'une suite d'opérateurs de rang fini est bien un opérateur compact .
Montrons la réciproque, soit donc $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, $\grave{A} n \in \mathbb{N}$ fixé , il éxiste un nombre fini N_n de points x_i^n de H_1 tels que

$$T(\overline{B}_{H_1}) \subset \bigcup_{i=1}^{N_n} B_{H_2}(T(x_i^n), 2^{-n}).$$

Notons G_n le s,e,v (fermé car de dimension finie) engendré par $(T(x_1^n), ..., T(x_{N_n}^n))$, p_n le projecteur orthogonal sur G_n et $T_n = p_n \circ T$.Par construction,T_n est continu et de rang fini . De plus,compte tenu de $p_n(T(x_i^n)) = T(x_i^n)$,

$$\forall x \in H_1, \forall i \in \{1, ..., N_n\},\ \|T_n(x) - T(x)\|_{H_2} \leq \|p_n(T(x)) - T(x_i^n)\|_{H_2} + \|T(x_i^n) - T(x)\|_{H_2}$$

si x est dans $\overline{B}_{H_1}$, on peut choisir $i \in \{1, ..., N_n\}$ de telle sorte que $T(x)$ soit dans $B_{H_2}(T(x_i^n), 2^{-n})$. Alors,comme un projecteur orthogonal est toujours de norme inférieure ou égaleà 1 (i.e en effet , si p est un projecteur orthogonal de l'espace de Hilbert H alors le théoréme de Pythagore assure que pour tout $x \in H$, on a $\|x\|^2 = \|p(x)\| + \|x - p(x)\|^2$ et donc $\|p(x) \leq \|x\|)$, on obtient finalement ,

$$\forall x \in \overline{B}_{H_1}, \|T_n(x) - T(x)\|_{H_2} \leq 2^{1-n}.$$

En conséquence,la suite d'opérateurs de rang fini $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers T . ■

Exemple 2.1.1. *: soit $a < b$ deux réels.Rappelons que l'ensemble $L^2 = L^2([a, b]; \mathbb{C})$ muni du produit scalaire*

$$< f, g >_{L^2} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\overline{g}(t)dt$$

et un espace de Hilbert séparable,et que $(e_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ *avec* $e_p(t) = e^{ipwt}$ *et* $w = 2\pi/(b-a)$ *est une base hilbertienne . Autrement dit , toute fonction* f *de* L^2 *s'écrit*

$$f = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)e_p \quad avec \quad c_p(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)e^{-ipwt}dt$$

et l'on a d'aprés l'égalité de parseval,

$$< f, g >_{L^2} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)\overline{c_p(g)}.$$

soit H^1 *l'ensemble des fonctions f de* L^2 *telles que*

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}}(1 + w^2p^2)|c_p(f)|^2 < \infty.$$

Il n'est pas difficile de montrer (exercice : le faire) que H^1 *muni du produit scalaire*

$$< f, g >_{H^1} = \sum_{p\in\mathbb{Z}}(1 + w^2p^2)c_p(f)\overline{c_p(g)}$$

est aussi un espace de Hilbert séparable, et que la suite constituée des vecteurs $\frac{e_p}{\sqrt{1+w^2p^2}}$ *en est une base hilbertienne. Enfin,il est évident que* $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}$ *pour tout* $f \in H^1$. *Il n'est pas difficile de démontrer à l'aide du théoréme de Dirichlet pour les séries de Fourier que si f et g admettent un prolongement périodique de classe* C^1 *et* C^2 *par morceaux alors*

$$< f, g >_{H^1} = < f, g >_{L^2} + < f', g' >_{L^2} .$$

On verra dans le cour d'EDP que H^1 *est l'ensemble des éléments des éléments de* L^2 *dont la dérivée au sens des distributions appartient à* L^2. *L'espace* H^1 *est appelé* ***espace de sobolev.***

Proposition 2.1.5. *: L'application identité de* H^1 *dans* L^2 *est compacte.*

Preuve. : Notons $T(f) = f$ pour $f \in H^1$. comme $\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1}$, l'application T est linéaire continue. Nous allons montrer que T est limite d'opérateurs de rang fini. Cela donnera le résultat voulu
pour $f \in H^1$, nous posons donc

$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f)e_p.$$

Il est évident que T_n est de rang fini (son image est le s,e,v de dimension $2n + 1$ engendré par $(e_{-n}, ..., e_n)$). De plus, pour tout $f \in H^1$, on a en vertu de l'égalité de parseval,

$$\begin{aligned}\|f-T_n(f)\|_{L^2}^2 &= \Sigma_{|p|>n}|c_p(f)|^2\\ &\leq (1+w^2n^2)^{-1}\Sigma_{|p|>n}(1+w^2p^2)|c_p(f)|^2,\\ &\leq (1+w^2n^2)^{-1}\|f\|_{H^1}^2.\end{aligned}$$

Cela assure la convergence de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers T. ■

2.2 Opérateurs adjoints

Dans toute cette section, H_1 et H_2 désignent deux espaces de Hilbert.On dira que T : $H_1 \longrightarrow H_2$ est un **opérateur borné** de H_1 dans H_2 si T est une application linéaire continune de H_1 dans H_2. La définition ci-dessous généralise aux espaces de Hilbert la notion d'endomorphisme adjoint vue en $L2$ dans le cadre des espaces euclidiens.

Théorème 2.2.1. *: Soit T un opérateur borné de H_1 dans H_2. Il existe un seul opérateur borné T^* de H_2 dans H_1 vérifiant*

$$\forall (f,g)\in H_1\times H_2, < T(f),g >_{H_2} = < f, T^*(g) >_{H_1}.$$

*L'opérateur T^* est appelé **opérateur adjoint** de T , et l'on a $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)}$.*

Preuve. : *À* $g \in H_2$ fixé, considérons la forme linéaire L sur H_1 définie par $L_g(f) =< T(f), g >$. D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans H_2,
$|L_g(f)| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}\|g\|_{H_2}\|f\|_{H_1}$. Donc L_g est continue.le théoréme de représentation de Riesz-Fréchet assure donc l'existence d'un unique élément $T^*(g)$ de H_1 tel que

$$\forall f\in H_1, < T(f),g >_{H_2} = < f, T^*(g) >_{H_1}.$$

De plus,ce *même* théoréme donne $\|T^*(g)\|_{H_1} = \|L_g\|_{H_1'} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}\|g\|_{H_2}$. Vérifions la linéarité de l'application $g \longmapsto T^*(g)$. Pour $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$ et $(g_1,g_2)\in H_2^2$,on a par définition de T^*, ,

$$\begin{aligned}\forall f\in H_1, < f, T^*(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2) >_{H_1} &= < T(f), \lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2 >_{H_2},\\ &= \overline{\lambda_1} < T(f), g_1 >_{H_2} + \overline{\lambda_2} < T(f), g_2 >_{H_2},\\ &= \overline{\lambda_1} < f, T^*(g_1) >_{H_1} + \overline{\lambda_2} < f, T^*(g_2) >_{H_1},\\ &= < f, \lambda_1 T^*(g_1)+\lambda_2 T^*(g_2) >_{H_1}.\end{aligned}$$

Donc $T^*(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2) = \lambda_1 T^*(g_1)+\lambda_2 T^*(g_2)$.
Reste *à* montrer que T et T^* ont la *même* norme . On *dèjà* vu que

$$\forall g\in H_2, \|T^*(g)\|_{H_1} \leq \|T\|_{\ell(H_1,H_2)}\|g\|_{H_2}.$$

Donc $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)}$.
Mais en utisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de l'adjoint, on obtient

$$\|T(f)\|_{H_2}^2 = | < T(f), T(f) >_{H_2} | = | < f, T^*(T(f)) > | \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)} \|f\|_{H_1} \|T(f)\|_{H_2},$$

ce qui assure visiblement que $\|T\|_{\mathcal{L}(H_1,H_2)} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(H_2,H_1)}$. ∎

Remarque 2.2.1. *: Retenons également que $(T^*)^* = T$.En effet,par définition de $(T^*)^*$, on apour tout $(f,g) \in H_1 \times H_2$*

$$< g, (T^*)^*(f) >_{H_2} = < T^*(g), f >_{H_1} .$$

Mais en prenant le conjugué de cette égalité et en utilisant la sesquilinéarité , on obtient

$$< (T^*)^*(f), g >_{H_2} = < f, T^*(g) >_{H_1} .$$

Par définition de T^*,le membre de gauche vaut $< T(f), g >$. Donc on a $(T^*)^*(f) = T(f)$.

Exemple 2.2.1. *: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction bornée sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.Prenons $H = L^2(I, \mathbb{C})$. Il est clair que l'application linéaire $T : f \longmapsto af$ est linéaire continue de H dans H.En effet , d'aprés l'inégalité de Hölder ,*

$$\forall f \in H, \|T(f)\|_{L^2}^2 = \int_I |a(x)f(x)|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty}^2 \|f\|_{L^2}^2.$$

De plus,on a

$$\forall (f,g) \in H^2, < T(f), g > = \int_I a(x)f(x)\overline{g(x)}dx = \int_I f(x)\overline{\overline{a}(x)g(x)}dx.$$

Donc T^* est l'opérateur de multiplication par la fonction $\bar{a}$.

Définition 2.2.1. *: On dit qu'une application linéaire $T : H_1 \longmapsto H_2$ est* ***faiblement continue*** *si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1^{\mathbb{N}}$, on a $x_n \rightharpoonup x$ implique $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$.*
La définition de l'adjoint va nous permettre de montrer que pour les applications linéaires , la continuité faible est équivalente à la continuité forte .

Proposition 2.2.1. *: Une application linéaire est continue si et seulement si elle est* ***faiblement continue***

Preuve. : Soit $T : H_1 \longrightarrow H_2$ continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$. On a donc pour tout $y \in H_2$,

$$< T(x_n), y >_{H_2} = < x_n, T^*(y) >_{H_1} \rightharpoonup_{n\to+\infty} < x, T^*(y) >_{H_1} = < T(x), y >_{H_2} .$$

Donc T est failbement continue.
Réciproquement, supposons T faiblement continue. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H_1 telle que $(x_n, T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers (x, y) dans $H_1 \times H_2$. Alors on a aussi $x_n \rightharpoonup x$ et donc $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$. Mais par hypothése $T(x_n) \rightharpoonup y$, et donc a fortiori $T(x_n) \rightharpoonup y$. Par unicité de la limite faible , on en déduit que $y = T(x)$. En conséquence, le graphe de T est fermé . Comme H_1 et H_2 sont complets, le théoréme du graphe fermé premet de conclure que l'opérateur T est continu .
Examinons maintenant l'effet d'un opérateur compact sur la convergence faible. ∎

Proposition 2.2.2. *Soit T un opérateur continu de l'espace de Hilbert H_1 dans l'espace de Hilbert H_2. les deux énoncés suivants sont équivalents :*
(i) : L'opérateur T est compact .
(ii) : Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1^{\mathbb{N}}$,on a $(x_n \rightharpoonup x) \Rightarrow (T(x_n) \to T(x))$.

Preuve. : Supposons d'abord que T soit compact . Soit $(x_n) \in H_1^{\mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente vers $x \in H_1$. Un opérateur compact étant continu , on a $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ d'aprés la proposition précédente . Mais toute suite faiblement convergente est bornée.Donc $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite fortement convergente . La limite de cette sous-suit ne peut *être* que $T(x)$. Finalement $(T(x_n))_n$ est *à* valeur dans le compact $\overline{T(\overline{B}_{H_1})}$ et a pour unique valeur d'adhérence $T(x)$. Donc la suite toute entière converge fortement vers $T(x)$.
Réciproquement supposons que la propriété (ii) soit vérifiée . Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une quelconque suite bornée de H_1. Alors il existe $x \in H_1$ et une sous-suite$(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup x$. D'aprês l'hypothèse, on a donc $T(x_{\varphi(n)}) \to T(x)$. En consèquence,l'opèrateur T est compact . ∎

Proposition 2.2.3. *: Soit T une application linéaire continue de H_1 dans H_2. Alors T est compact si et seulement si T^* est compact .*

Preuve. : Supposons que $T : H_1 \to H_2$ soit compact. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite faiblement convergente d'éléments de H_2. Notons y sa limite faible . Comme T^* est faiblement continu car linéaire continu , on a $T^*(y_n) \rightharpoonup T^*(y)$. Donc , par compacité de T on a aussi

$(T(T^*(y_n))) \to T(T^*(y))$ Par ailleurs ,

$$\|T^*(y_n)\|^2_{H_1} =< T^*(y_n), T^*(y_n) >_{H_1} =< y_n, T(T^*(y_n)) >_{H_2} \to < y, T(T^*(y)) >_{H_2} = \|T^*(y)\|^2_{H_1}$$

car $y_n \rightharpoonup y$ et $T(T^*(y_n)) \to T(T^*(y))$.
On a donc $\grave{a}$ la fois $\|T^*(y_n)\|_{H_1} \to \|T^*(y)\|_{H_1}$ est $T^*((y_n) \rightharpoonup T^*(y)$, ce qui $entra\hat{\imath}ne$ $T^*(y_n) \to T^*(y)$. Donc T^* est compact .
La réciproque se démontre en appliquant le raisonnement précédent $\grave{a}$ T^* et en utilisant le fait que $(T^*)^* = T$. ∎

2.3 Alternative de Fredholm

Pour simplifer , on suppose dans toute cette section que $H_1 = H_2 = H$ espace de Hilbert (i.e Mais la proposition suivante demeure valable si $H_1 \neq H_2$.).

Proposition 2.3.1. *Soit T un opérateur borné sur H . On a les propriétés suivantes.*
(i) $KerT = (ImT^*)^\perp$,
(ii) $KerT^* = (ImT)^\perp$,
(iii) $\overline{ImT} = (KerT^*)^\perp$,
(iv) $\overline{ImT^*} = (KerT)^\perp$.

Preuve. : Le fait que $(T^*)^* = T$ assure que les propriétés (i) et (ii) (resp.(iii) et (iv)) sont équivalentes . Nous nous bornerons donc $\grave{a}$ la démonstration de (i) et de (iii).
$-\underline{Dmonstrationde(i)}$: Soit $x \in KerT$ et $z \in ImT^*$. Fixons $y \in H$ tel que $z = T^*(y)$. Puisque $T(x) = 0$, on a

$$< x, z >=< x, T^*(y) >=< T(x), y >= 0.$$

Donc $x \in (ImT^*)^\perp$.
Réciproquement,soit $x \in (ImT^*)^\perp$. Alors pout tout $y \in H$, on a

$$0 =< x, T^*(y) >=< T(x), y > .$$

Donc $T(x) = 0$. Donc $(ImT^*)^\perp \subset KerT$.
-Démonstration de (iii) : En prenant l'orthogonal de l'égalité (ii), on obtient

$$(KerT^*)^\perp = ((ImT)^\perp)^\perp.$$

Or dans un espace de Hilbert , tout sous-espace vectoriel F vérifie $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$, d'ou le résultat .

Notation. dans tout ce qui suit , I désigne l'opérateur identité de H défini par $I(x) = x$. ■

Théorème 2.3.1. *(Alternative de Fredholm).Soit T un opérateur compact sur l'espace de Hilbert H . Alors les propriétés suivantes sont vérifiées .*
(i) $Ker(I - T)$ est de dimension finie .
(ii) $Im(I - T)$ est fermé .
(iii) Alternative de Fredholm : $Ker(I - T) = \{0\}$ si et seulement si $Im(I - T) = H$.

Preuve. : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $Ker(I - T)$. On a donc $x_n = T(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais T est un opérateur compact donc la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(T(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Cela assure que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
On en deduit que tout ensemble borné de $Ker(I - T)$ est relativement compact . Donc $Ker(I - T)$ est de dimension finie (cf th . de Riesz).
Pour montrer (ii),nous considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $((I - T)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in H$. Il s'agit de démontrer que $y \in Im(I - T)$.
Soit z_n la projection orthogonale de x_n sur le sous-espace vectoriel fermé $Ker(I - T)$. On a donc $d(x_n, Ker(I-T)) = \|x_n - z_n\|$ et $(I-T)(x_n - z_n) = (I-T)(x_n)$. Notons $x'_n = x_n - z_n$. si l'on parvient $\grave{a}$ démontrer que la suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors on obtient $y \in Im(I-T)$.
En effet , par compacité de T , il existera une extraction φ telle que $T(x'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui $entra\hat{i}nera$ aussi la convergence de $(x'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Supposons par l'bsurde que $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas borné. Alors il existe une extraction φ telle que $(\|x'_{\varphi(n)}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite strictement positive tendant vers l'infini . Soit $w_n = x'_{\varphi(n)}/\|x'_{\varphi(n)}\|$. Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty}(I - T)(w_n) = 0. \tag{2.1}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée , on peut supposer , quitte $\grave{a}$ extraire $\grave{a}$ nouveau une sous-suite que $(T(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.L'égalité(2.1) implique alors que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers un élément w appartenant $\grave{a}$ $Ker(I - T)$. Mais, par construction $w_n \in Ker(I - T)^{\perp}$ donc $w \in Ker(I - T)^{\perp}$, *d'où* $w = 0$. Comme tous les ω_n sont de norme 1, on doit avoir $\|w\| = 1$, ce qui est impossible .
Démontrons (iii). Supposons d'abord que $Ker(I - T) = \{0\}$. Supposons par l'absurde que $(I - T)$ ne soit pas surjectif. Notons $E_1 = Im(I - T)$, puis $E_2 = (I - T)(E_1)$, etc. D'aprés

(ii),$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de s.e.v. fermés de H. Comme $(I-T)$ est injectif et non surjectif, la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (au sens de l'inclusion).En effet , si tel n'était pas le cas, il existerait un indice $n_0 \geq 1$ tel que $(I-T)(E_{n_0}) = (I-T)(E_{n_0}-1) = E_{n_0}$ mais E_{n_0} strictement inclus dans $E_{n_{0-1}}$. cela contredirait l'injectivité .
Finalement donc la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante,et l'on peut appliquer le théorème de Riesz du chapitre 1. On obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1, x_n \in E_n \quad et \quad d(x_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$$

Pour n>m, on a

$$T(x_n) - T(x_m) = \underbrace{(I-T)(x_m) - (I-T)(x_n) + x_n}_{\in E_{m+1}} - x_m.$$

Donc $\|T(x_n) - T(x_m)\| \geq \frac{1}{2}$ et $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a donc pas de valeur d'adhérence.Cela contredit la compacité de T.
Réciproquement,supposons que $Im(I-T) = H$. Alors la proposition précédente montre que $\mathrm{Ker}(I-T^*) = \{0\}$. Mais l'opérateur T^* est aussi compact , donc en appliquant le raisonnement ci-dessus *à* T^* au lieu de T , on obtient $Im(I-T^*) = H$ puis , en passant *à* l'orthogonal, $Ker(I-T) = \{0\}$. ■

Proposition 2.3.2. *soit T un opérateur compact sur l'espace de Hilbert H . Alors on a*

$$dim(Ker(I-T)) = (Ker(I-T^*)).$$

Preuve. : Comme T et T^* sont compacts , on sait *déjà* que les deux s.e.v considérés sont de dimension finie . Notons d et d^* leurs dimensions respectives.
Comme $Im(I-T)$ est fermé, on peut décomposer H en

$$H = (Im(I-T))^{\perp} \oplus Im(I-T) = Ker(I-T^*) \oplus Im(I-T).$$

Suppsons par l'absurde que $d < d^*$. Il existe alors une application linéaire Λ continue injective (mais non surjective)de $Ker(I-T)$ dans $Ker(I-T^*)$. Soit $S = T + \Lambda \circ P$ *où* P désigne le projecteur orthogonal sur $Ker(I-T)$. Clairement S est compact car somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de rang fini . Par ailleurs , si $(I-S)(x) = 0$ alors

$$(I-T)(x) = \Lambda \circ P(x).$$

Mais le membre de gauche appartient *à* $Im(I-T)$ alors que le membre de droite appartient au sous-espace $Ker(I-T^*)$ qui lui est orthogonal.Donc $\Lambda(P(x)) = 0$ puis $P(x) = x = 0$ par injectivité de Λ et parce que $x \in Ker(I-T)$. Donc, en vertu de l'alternative de Fredholm, $(I-S)$ est bijective . Soit donc $y \in Ker(I-T^*)\backslash Im\Lambda$ et $x \in H$ tel que $(I-S)(x) = y$. on a

$$(I-S)(x) = \underbrace{(I-T)(x)}_{\in Im(I-T)} - \underbrace{\Lambda(P(x))}_{\in Ker(I-T^*)} = y.$$

Comme $Im(I-T) \cap Ker(I-T^*) = \{0\}$ et $y \in Ker(I-T^*)$, cela $cntra\hat{i}ne$ que $(I-T)(x) = 0$. puis $y \in Im\Lambda$, ce qui est contraire $\grave{a}$ l'hypothése sur y . Concluison : $d \geq d^*$.
L'autre inégalité se démontre en appliquant ce qui précéde $\grave{a}$ T^*. ∎

2.4 spectre des opérateurs

Définition 2.4.1. *: Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et T un endomorphisme de E.On appelle :*
- ***spectre** de T l'ensemble $\sigma(T)$ des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $T - \lambda I$ ne soit pas bijectif de E dans E,*
- ***spectre ponctuel** de T l'ensemble $\sigma_p(T)$ des valeurs propres de T,*
- ***ensemble résolvant** de T le complémentaire $\rho(T)$ du spectre $\sigma(T)$.*

Remarque 2.4.1. *: En dimension finie, on a bien sûr $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. c'est une conséquence triviale du théoréme du rang . En dimension infinie en revanche, l'ensemble $\sigma_p(T)$ peut être strictement inclus dans $\sigma(T)$ (par exemple pour $E = \mathbb{R}[X]$) et $T : P \longmapsto XP$, on a $0 \in (\sigma(T)\backslash\sigma_p(T))$.*

Proposition 2.4.1. *soit E un Banach sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{K}$ borné par $\|T\|_{\mathcal{L}(E)}$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}(E)}$. On a

$$T - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}T).$$

Du fait que $\|\lambda^{-1}T\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$,la série $\Sigma(\lambda^{-1}T)^k$ est absolument convergente donc convergente car E est un Banach (voir la section 3.4) .On vérifie aisément que la somme de cette série est un isormophisme continu de E qui est l'inverse de $I - \lambda^{-1}T$. En conséquence $I - \lambda^{-1}T$ est inversible et donc $\lambda \notin \sigma(T)$.
Montrons maintenant que $\mathbb{R}\backslash\sigma(T)$ est un ouvert. Soit donc $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\sigma(T)$. on a

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I + (\lambda_0 - \lambda)I.$$

Par hypothése, l'endomorphisme $S = T - \lambda_0 I$ est inversible . Son inverse est continu (*grâce* au théorème de Banach). En raisonnant comme précédemment, que $T - \lambda I$ est également inversible dés que $|\lambda_0 - \lambda| \|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$.
On peut maintenant conclure que $\sigma(T)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc un compact . ■

Théorème 2.4.1. *: Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{K}(H)$.*
(i) Si H est de dimension infinie alors $0 \in \sigma(T)$.
(ii) Si $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ alors λ est valeur propre de T de multiplicité finie .
(iii) Si $\sigma(T)$ contient une suite d'éléments deux à deux distincts alors cette suite tend vers 0.

Preuve. : (i) Supposons que $0 \notin \sigma(T)$. Alors T est inversible d'inverse continu (*grâce* au théorème de Banach). En conséquence, $I = T^{-1} \circ T$ est compact car composée d'un opérateur compact et d'un opérateur continu . Donc $\overline{B}_H = I(\overline{B}_H)$ est compacte . Le théorème de Riesz assure alors que H est de dimension finie .
(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Si λ n'est pas valeur propre de T alors $I - \lambda^{-1}T$ est injectif, donc aussi surjectif d'aprés l'alternative de Fredhom. Donc $\lambda \notin \sigma(T)$.Dans le cas contraire, on a vu que λ est de multiplicité finie.
(iii) Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux *à* deux distincts de $\sigma(T)$. On sait que cette suit est bornée donc admet une valeur d'adhérence.Quitte *à* extraire, on peut supposer que $\lambda_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite λ.
Fixons pour tout $n \in \mathbb{N}$, un vecteur e_n de norme 1 tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$. On montre aisément (comme en dimension finie) que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.Posons $E_n = vect(e_0, ..., e_n)$. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de s.e.v. fermés de H. Appliquons le théoréme de Riesz : il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1, x_n \in E_n \quad et \quad d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

En écrivant que

$$\frac{T(x_n)}{\lambda_n} - \frac{T(x_m)}{\lambda_m} = \underbrace{\frac{T(x_n) - \lambda_n x_n}{\lambda_n} - \frac{T(x_m) - \lambda_m x_m}{\lambda_m} - x_m}_{\in E_{n-1}} + x_n,$$

on en déduit que $\|\lambda_n^{-1}T(x_n) - \lambda_{x_n}^{-1}T(x_m)\| \geq \frac{1}{2}$ pour $n > m$.
Donc la suite $(\lambda_n^{-1}T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence. Comme T est compact , cela est incompatible avec le fait que $\lambda \neq 0$. Donc $\lambda = 0$. ■

2.5 Les opérateurs auto-adjoints

Définition 2.5.1. *: On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un **opérateur auto-adjoint** si $T = T^*$, c'est-à-dire :*

$$\forall (x,y) \in H^2, < T(x), y >=< x, T(y) > .$$

-Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si T est auto-adjoint alors pour tout $x \in H$, $< T(x), x >$ est réel (*même* si H est un espace de Hilbert complexe).
Comme en dimension finie avec les endomorphismes symétriques,on peut définir les notions de positivité et de négativité pour les opérateurs auto-adjoints.

Définition 2.5.2. *: On dit qu'un opérateur auto-adjoint T est **positif** si*

$$\forall x \in H, < T(x), x >\geq 0.$$

*On dit qu'il est **défini positif** si l'inégalité ci-dessus est stricte pour $x \neq 0$.*
*On dit que T est **négatif** (resp.**défini négatif**) si -T est positif (resp, défini positif).*

Proposition 2.5.1. *: Si T est opérateur auto-adjoint alors toutes ses valeurs propres sont réelles . Si de plus il est positif (resp.défini positif) alors toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).*

Preuve. : Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $x \neq 0$ tel que $T(x) = \lambda x$. Montrons d'abord que si T est auto-adjoint alors λ est réelle . On a

$$\lambda \|x\|^2 =< \lambda x, x >=< T(x), x >=< x, T(x) >=< x, \lambda x >= \overline{\lambda} \|x\|^2,$$

donc $\lambda = \overline{\lambda}$.
Si de plus T est défini positif alors on a

$$\lambda \|x\|^2 =< T(x), x >> 0,$$

d'où le résultat. Les autres cas se traitent de facon similaire. ∎

Proposition 2.5.2. *: Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert réel. Notons*

$$m = \inf_{\|x\|=1} < T(x), x > \quad et \quad M = \sup_{\|x\|=1} < T(x), x > .$$

Alors $\sigma(T)$ est inclus dans l'intervalle [m,M],et contient m et M .

Preuve. : Concentrons-nous sur la borne supérieure M,la démonstration pour m étant similaire. De la définition de M, on déduit que $< T(x), x > \leq M\|x\|_H^2$ pour tout $x \in H$. Pour $\lambda > M$,on a donc

$$\forall x \in H, < \lambda x - T(x), x > \geq (\lambda - M)\|x\|^2. \tag{2.2}$$

Introduisons la forme bilinéaire a défine par

$$\forall (x, y) \in H^2, a(x, y) =< \lambda x - T(x), y > .$$

Elle est clairement continue et symétrique (car T est borné auto-adjoint),et coercive *grâce à* (2.2).En conséquence , le théoréme de Lax-Milgram assure que pour tout $z \in H$ il existe un unique $x \in H$ tel que

$$\forall y \in H, < \lambda x - T(x), y >= a(x, y) =< z, y > .$$

Cela montre la bijectivité de $\lambda I - T$ .Donc $\lambda \notin \sigma(T)$.
Montrons maintenant que $M \in \sigma(T)$. Soit $b(x, y) =< Mx - T(x), y >$.la forme b est bilinéaire symétrique positive et l'on dispose donc de l'inégalité de Cauchy-Schwaez suivante (i.e qui se montre comme dans le cas classique en considérant le discriminant de la fonction $\lambda \mapsto b(x - \lambda y, x + \lambda y)$) :

$$\forall (x, y) \in H^2, |b(x, y)| \leq \sqrt{b(x, x)b(y, y)}.$$

En prenant $y = Mx - T(x)$ et en exploitant la continuité de b , on déduit que

$$\forall x \in H, \|Mx - T(x)\|_H \leq C\sqrt{< Mx - T(x), x >}.$$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suit d'éléments de H de norme 1 telle que $< T(x_n), x_n >$ converge vers M. l'inégalité ci-dessus assure que $T(x_n) \longrightarrow Mx_n$. Si l'on suppose (par l'absurde) que $M \notin \sigma(T)$ alors on a $(MI - T)^{-1}$ continu et

$$x_n = (MI - T)^{-1}(MI - T)(x_n).$$

et donc $x_n \longrightarrow 0$, ce qui contredit le fait que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.Donc $M \in \sigma(T)$. ■

Corollaire 2.5.1. *: Sur un espace de Hilbert réel , le seul opérateur auto-adjoint T tel que* $\sigma(T) = 0$ *est l'opérateur nul .*

Preuve. : D'aprés la proposition précédente , on a $m = M = 0$, et donc $< T(x), x >= 0$ pour tout $x \in H$. Cela *entraîne* la nullité de T .
En dimensin finie , il est bien connu que tout endomorphisme symétrique admet une base orthonormale de vecteurs propres . En dimension infinie , ce théoréme fondamental se généralise aux opérateurs auto-adjoints compacts comme suit : ■

Théorème 2.5.1. *(spectral) Soit H un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie , et T un opérateur auto-adjoint compact sur H.Il existe alors une base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres de T.*

Preuve. : D'aprés le théoréme (2.4.1), le spectre $\sigma(T)$ de T est borné et a au plus un point d'accumulation ($\grave{a}$ savoir 0) . Il est donc fini ou dénombrable (i.e en effet, comme $\sigma(T)$ est compact,pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\sigma(T) \cap (]-\infty, -1/n] \cup [1/n, +\infty[)$ a un nombre fini d'éléments). Soit $E_\lambda = Ker(T - \lambda I)$ le sous-espace propre de T pour la valeur propres λ.On vérifie (comme dans le cas de la dimension finie) que les sous-espaces propres sont en somme directe orthogonale . Notons F le s.e.v. engendré par tous les vecteurs prores de T , et montrons que F est dense dans H .Il est clair que F est stable par T.le s.e.v. $F^\perp$ est aussi stable par T. En effet, comme T est autoadjoint et $T(F) \subset F$,

$$\forall (x, y) \in F^\perp \times F, < T(x), y >=< x, T(y) >= 0.$$

On peut donc définir l'application linéaire T_0 induite par T sur $F^\perp$. Notons que $F^\perp$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert H.C'est donc un Hilbert . Par ailleurs, l'opérateur T_0 est clairement compact auto-adjoint sur $F^\perp$ car T est compact auto-adjoint.
Remarquons enfin que $\sigma(T_0)$ ne peut pas contenir d'élément non nul . En effet , dans le cas contraire , cet élément serait une valeur propre de T_0 et donc de T aussi . Tout vecteur propre, associé devrait donc se trouver dans F,ce qui est impossible puisque $F \cap F^\perp = \{0\}$.
Donc $\sigma(T_0) = \{0\}$.D'aprés le corollaire précédent,on a donc $T_0 = 0$.
Donc $F^\perp \subset KerT \subset F$ puis $F^\perp = \{0\}$. Autrement dit,F est dense dans H.
On sait par ailleurs que chaque sous-espace propre correspondant $\grave{a}$ une valeur propre non nulle est de dimension finie , donc posséde une base orthonormale . Si 0 est valeur propre, l'espace E_0 est ou bien de dimension finie et donc admet une base orthonormale . ou bien Hilbert séparable (car s.e.v.farmé de H Hilbert séparable) donc admet une base hilbertienne . pour construire une base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres de T, il suffit donc de considérer la réunion (au plus dénombrable) des bases orthonormales (ou hilbertiennes) de tous les sous-espaces propres de T . ■

Remarque 2.5.1. *Si T est compact , auto-adjoint et défini positif , on peut de plus affirmer que chaque vecteur de la base hilbertienne construite ci-dessus correspond à valeur strictement positive .*

2.6 Quelques applications

2.6.1 Résolution d'une équation différentielle

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \begin{cases} u''=f \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}.$$

Lorsque f est continue sur [a , b],cette équation peut se résoudre explicitement . En effet , en intégrant une première fois , il vient , pour une constante C *à* déterminer

$$u'(t) = \int_a^t f(s)ds - C, \tag{2.3}$$

puis , en intégrant une deuxième fois , sachant que l'on veut que $u(a) = 0$,

$$u(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt - C(x-a).$$

La deuxième condition $u(b) = 0$ permet de déterminer C de manière unique . On obtient finalement :

$$u(x) = \int_a^x \int_a^t f(s)dsdt - \frac{x-a}{b-a}\int_a^b \int_a^b f(s)dsdt \tag{2.4}$$

On s'intéresse maintenant *à* l'opérateur T qui *à* f associe u . On munit $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ de la norme associée au produit scalaire

$$< g,h >= \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)h(x)dx.$$

Avec ce choix de norme , on a clairement , en vertu de l'inégalit*é* de Cauchy-Schwarz .

$$\forall g \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}), \|g\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^\infty}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la formule (2.4) , il est alors facile d'établir que T est borné de $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ dans $L^2 = L^2([a,b];\mathbb{R})$ les deux espaces étant munis de la norme définie ci-dessus . Par densité de $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ dans L^2 , on peut donc prolonger T en un opérateur borné de L^2 dans L^2 .On note encore T le prolongement obtenu .

Montrons que T est compact . Soit $\overline{B}$ la boule unité de L^2 et $f \in \overline{B}$. En utilisant l'égalité (2.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on constate que u' est continue.Donc u est C^1 sur [a , b].De plus , toujours $\grave{a}$ l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on montre l'existence d'un réel positif M indépendant de $f \in \overline{B}$ tel que $\|T(f)\|_{L^2} + \|(T(f))'\|_{L^2} \leq M$. En conséquence ,

$$T(\overline{B}) \subset \{g \in C^1([a,b];\mathbb{R}) / \|g\|^2_{L^2} + \|g'\|^2_{L^2} \leq M\}.$$

Dans le chapitre 5 on a vu que l'ensemble de droite est relativement compact dans $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ et donc a fortiori dans L^2. Donc T est bien un opérateur compact .
Vérifions ensuite que T est auto-adjoint .
En intégrant par parties deux fois et en utilisant (E).on a pour tout couple de fonctions f et g continues sur [a , b].

$$\begin{aligned} < T(x), g > &= \int_a^b T(f)(x)g(x)dx, \\ &= \int_a^b T(f)(x)(T(g))''(x)dx, \\ &= -\int_a^b (T(f))'(x)(T(g))'(x)dx, \\ &= \int_a^b (T(f))''(x)T(g)(x)dx, \\ &= < f, T(g) > . \end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ dans L^2 , l'égalité demeure vraie pour tout $(f,g) \in L^2 \times L^2$. Danc T est auto-adjoint. Remarquons aussi au passage que la troisime égalité ci-dessus appliquée avec $g = f$ montre que T est négatif . De plus , $\grave{a}$ l'aide de la formule (2.4), il n'est pas difficile de montrer que $KerT = \{0\}$. Donc toutes les valeurs propres de T sont strictement négatives .
le théoréme spectral assure donc qu'il existe une base hilbertienne de L^2 consitituée de vecteurs propres pour T. Comme les valeurs propres sont strictement négatives, on peut les chercher sous la forme $\lambda = -\alpha^{-2}$ avec $\alpha > 0$. Soit donc f un vecteur propre associé $\grave{a}$ une telle valeur propre . Comme $T(f) = \lambda f$ et $T(f)$ est de classe C^1 , il en est de *même* pour f .En conséquence f vérifie l'équation différentielle

$$(F) \qquad \begin{cases} f'' + a^2 f = 0, \\ f(a) = f(b) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de déterminer pour quelles valeurs de α le systéme (F) admet une solution non triviale.
la solution générale de $f'' + \alpha^2 f = 0$ s'écrit

$$f(t) = C\sin(\alpha t + \varphi) \qquad avec \qquad (C, \varphi) \in \mathbb{R}^2$$

Pour $C \neq 0$, les conditions $f(a) = f(b) = 0$ sont assurées si et seulement si

$$\alpha a + \varphi \equiv 0[\pi] \qquad et \qquad \alpha b + \varphi \equiv 0[\pi].$$

On en déduit que $\alpha = k\omega/2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi = -ak\omega/2$. Comme d'habitude, on a posé $\omega = 2\pi/(b-a)$. Enfin , on choisit $C = \sqrt{2}$ afin d'avoir $\|f\|_{L^2} = 1$.
Nous pouvons résumer les résultats obtenus ainsi :

Proposition 2.6.1. *: L'opérateur T défini ci-dessus est compact,auto-adjoint , et défini négatif . la suite des valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et la base hilbertienne correspondante $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont*

$$\lambda_k = -\frac{4}{k^2\omega^2} \qquad et \qquad f_k(t) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{k\omega(t-a)}{2}\right).$$

2.6.2 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Notons I l'intervalle [a , b] et Q le carré $[a,b] \times [a,b]$. Notons $L^2 = L^2(I,\mathbb{R})$ et $L^2(Q) = L^2(Q,\mathbb{R})$. On munit $L^2(I)$ du produit scalaire

$$< f, g >_{L^2(I)} = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

et $L^2(Q)$ du produit scalaire

$$< F, G >_{L^2(Q)} = \int_a^b \int_a^b F(x,y)G(x,y)dxdy.$$

Fixons une fonction $K \in L^2(Q)$. Pour $u \in C([a,b];\mathbb{R})$, on définit (formellement)

$$Tu(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy.$$

Lorsque K et u sont continues , cette expression définit une fonction continue . Vérifions que sous nos hypothéses , l'opérateur T est continu de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$. Tout d'abord , on peut vérifier *à* l'aide du théoréme de Fubini et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la fonction $(x,y) \longmapsto K(x,y)u(y)$ est intégrable sur Q . Donc Tu est une fonction mesurable . Ensuite , *grâce à* l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on a

$$\int_a^b \mid \int_a^b K(x,y)u(y)dy \mid^2 \leq \int_a^b (\int_a^b K^2(x,y)dy)(\int_a^b u^2(y)dy)dx = \|K\|^2_{L^2(Q)}\|u\|^2_{L^2(I)}.$$

Donc T est un opérateur borné de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$, et $\|T\|_{\ell(L^2(I))} \leq \|K\|_{L^2(Q)}$

Nous allons maintenant montrer que T est compact . Pour cela , nous allons écrire T comme limite d'une suite d'opérateurs de rang fini $\grave{a}$ l'aide d'une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2(I)$.

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Lemme 2.6.1. *: la famille tensorisée $(e_j \otimes e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie sur Q par*

$$(e_j \otimes e_k)(x,y) = e_j(x)e_k(y)$$

est une base hilbertienne de $L^2(Q)$.

Preuve. : Un calcul immédiat montre que $(e_j\otimes e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormale . Il s'agit maintenant de démontrer que cette famille est totale , et pour cela il suffit d'établir que le seul élément F de $L^2(Q)$ orthogonal $\grave{a}$ tous les $(e_j \otimes e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est 0.Supposons donc que

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \int_a^b \int_a^b F(x,y)e_j(x)e_k(y)dxdy = 0. \tag{2.5}$$

Considérons deux fonctions f et g continues sur I . soit $f \otimes g : (x,y) \longmapsto f(x)g(y)$.
Comme $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$, on peut écrire

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} < f, e_j >_{L^2(I)} e_j \qquad et \qquad g = \sum_{k\in\mathbb{N}} < g, e_k >_{L^2(I)} e_k$$

$o\grave{u}$ les égalités doivent $\hat{e}tre$ comprises au sens de la norme de $L^2(I)$.
Il est alors facile de vérifier que , au sens de la norme de $L^2(Q)$,

$$f \otimes g = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} < f, e_j >_{L^2(I)} < g, e_k >_{L^2(I)} e_j \otimes e_k.$$

Comme le produit scalaire dans $L^2(Q)$ est continu par rapport $\grave{a}$ ses deux arguments, l'identité (2.5) combinée au résultat de convergence ci-dessus prement de conclure que

$$\int_a^b \int_a^b F(x,y)f(x)g(y)dxdy = 0 \tag{2.6}$$

D'autre part , le s.e.v. $\mathcal{F}$ engendré par l'ensemble des fonctions de type
$(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ avec f et g continues sur I est stable par combinaison linéaire , multiplication , contient les fonctions constantes et sépare les points . Comme Q est un espace métrique compact , le théoréme de Stone-Weirstrass assure la densité de $\mathcal{F}$ dans $C(Q;\mathbb{R})$ au sens de la norme $L^\infty(Q)$ et donc , a fortiori , au sens de la noreme $L^2(Q)$. Mais comme

$C(Q;\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(Q;\mathbb{R})$ (démonstration similaire *à* celle de la densité de $C(I;\mathbb{R})$ dans $L^2(I;\mathbb{R})$), on en déduit que $\mathcal{F}$ est également dense dans $L^2(Q)$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $G \in \mathcal{F}$ tel que $\|F - G\|_{L^2(Q)} \leq \varepsilon$.*É*crivons que

$$\|F\|^2_{L^2(Q)} =< F, F - G >_{L^2(Q)} + < F, G >_{L^2(Q)} .$$

Comme G est combinaison linéaire de fonctions du type $f \otimes g$ avec f et g continues sur I , l'égalité (8.6) assure que le dernier terme ci-dessus est nul.En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(Q)$ afin de majorer le terme du membre de droite , on conclut que $\|F\|_{L^2(Q)} \leq \varepsilon$. Comme notre raisonnement est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $F = 0$. Donc $(e_j \otimes e_k)_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est totale .
Grâce à ce lemme , en vertu de l'égalité de Parseval dans $L^2(I)$ puis dans $L^2(Q)$, on peut donc écrire que

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \|T(e_j)\|^2_{L^2(I)} &= \textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} | < T(e_j), e_k >_{L^2(I)} |^2, \\
&= \textstyle\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} | \int_a^b \int_a^b K(x, y)e_j(y)e_k(x)dxdy|^2 \\
&= \|K\|^2_{L^2(Q)}.(2.6)
\end{aligned}$$

En observant que tout $f \in L^2(I)$ se décompose en

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} < f, e_j >_{L^2(I)} e_j,$$

il vient , par continuité de T ,

$$T(f) = \sum_{j\in\mathbb{N}} < f, e_j >_{L^2(I)} T(e_j).$$

Il est donc naturel de poser

$$\forall f \in L^2(I), T_n(f) = \sum_{j<n} < f, e_j >_{L^2(I)} T(e_j).$$

L'opérateur T_n obtenu est clairement borné sur $L^2(I)$ et de rang fini . Par ailleurs

$$\forall f \in L^2(I), (T - T_n)(f) = \sum_{j\geq n} < f, e_j >_{L^2(I)} T(e_j).$$

Donc , par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{L}^2$ et l'égalité de Parseval ,

$$\begin{aligned}
\|(T - T_n)(f)\|^2_{L^2(I)} &\leq (\textstyle\sum_{j\geq n} | < f, e_j >_{L^2(I)} | \|T(e_j)\|_{L^2(I)})^2, \\
&\leq \textstyle\sum_{j\geq n} | < f, e_j >_{L^2(I)} |^2 \sum_{j\geq n} |\|T(e_j)\||^2_{L^2(I)}, \\
&\leq \|f\|^2_{L^2(I)} \textstyle\sum_{j\geq n} \|T(e_j)\|^2_{L^2(I)}
\end{aligned}$$

La somme de la dernière ligne est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini . En conséquence , $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{L}(L^2(I))$ ce qui assure que T est compact .

Supposons de plus que la fonction K soit symétrique :

$$K(x,y) = K(y,x)$$

pour presque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
et vérifions que T est alors auto-adjoint .
Pour $(f,g) \in L^2(I) \times L^2(I)$, le théoréme de Fubini , le changement de variable $(x,y) \longmapsto (y,x)$ et le fait que $K(x,y) = K(y,x)$ permettent d'écrire que

$$\begin{aligned} < Tf, g >_{L^2(I)} &= \int_a^b \int_a^b K(x,y) f(y) g(x) dy dx, \\ &= \int_a^b \int_a^b K(y,x) f(x) g(y) dx dy, \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x,y) g(y) f(x) dx dy, \\ &= < f, Tg >_{L^2(I)} . \end{aligned}$$

Donc T est bien auto-adjoint .
Résumons le résultat obtenu . ■

Proposition 2.6.2. *: Soit $K \in L^2(Q)$ tel que $K(x,y) = K(y,x)$. L'opérateur de Hilbert-Schmidt T défini de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$ par*

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

est compact auto-adjoit et admet donc une base hilbertienne de vecteurs propres .
Remarque . Si l'on choisit pour $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la base hilbertienne associée à la suite de valeurs propres $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de T , on obtient, grâce à (2.6),

$$\begin{aligned} \|K\|^2_{L^2(I)} &= \sum_j \|T(f_j)\|^2_{L^2(I)}, \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j^2. \end{aligned}$$