REMERCIEMENTS

Nous voici arrivés en fin de licence, à la croisée de chemins : la fin d'une aventure et le début d'une nouvelle. Nous voudrions profiter de cet instant pour remercier tous ceux qui ont contribués à ce travail de prés ou de loin.

En premier lieu, nous tenons à remercier Dieu qui nous a aides a faire ce travail et de remercier les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce modeste travail Mademoiselle ***Fouzia Maref*** et Mademoiselle ***Ait Ouali Nadia***. C'est un grand honneur pour nous que vous ayez accepté de juger la qualité de notre production, nous espérons que vous apprécierez ce mémoire autant que nous avons eu plaisir à l'élaborer.

A celle sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour Mademoiselle ***Rachida Rouane***, dont les précieux conseils et les longues conversations nous ont apporté un véritable œil critique indispensable à la qualité de ce travail, et qui a su superviser ce travail afin que nous puissons vous le présenter aujourd'hui .

Nous remercions nos familles et nos amis qui ont su nous soutenir et nous encourager pour présenter ce travail aujourd'hui. Un grand merci à nos parents qui n'ont économisés aucun moyen pour me voir réussir, leur soutien, amour et foi en moi à modeler l'homme que je suis, et de voir la fierté dans leurs yeux est la plus belle des récompenses. c'est donc tout naturellement à eux que j'ai dédie ce mémoire.

Table des matières

Introduction

La théorie des martingales joue un rôle essentiel, et est devenue l'une des plus puissantes outils d'étude d'une multitude de processus stochastiques. Elle est très largement utilisée notamment en statistique mathématique, théorie de l'information, certains domaines de la physique, et en mathématiques financières. Plus récemment, des chercheurs commencent à s'intéresser à d'autres espaces que l'espaces L_p usuels avec $p \geq 1$. Par exemples, les espaces L_p avec $0 < p < 1$, les espaces de Hardy H_p $(0 < p < 1)$, est les espaces de Lorentz $L_{p,q}$. Ces espaces ne font pas partie en générale de l'étude classiques mais sont des applications variées. D'autre part, par rapport aux fonctions, les martingales peuvent mieux référer les processus, l'information et l'approchement. C'est la raisons principale pourquoi de chercheurs portent leurs attentions à la théorie des martingales.

Le concept de martingale a son origine dans l'étude des jeux : il modélise d'une part le caractère aléatoire d'un phénomène mais aussi son évolution dans le temps. On étudie ici le temps discret, c'est à dire lorsque le paramètre de temps est un entier. Il existe aussi une théorie des matringales en temps continu (lorsque le paramètre de temps est un réel positif), mais elle présente des difficultés techniques considérables dans sa forme la plus générale.

Dans ce travail, nous nous intéressons essentiellement à le théorème de la décomposition de Doob d'une sous martingale qu'est un des théorèmes les plus importants de la théorie de martingale. Le problème de la décomposition des sous martingales a été posé par Doob[1] dans son livre "Stochastic processus" (1953).

1. Joseph Leo Doob (1910-2004), mathématicien américain. Il a obtenu un doctorat en 1932 à Harvard. Le sujet de sa thèse était Boundary Values of Analytical Functions. Ses travaux ont eu pour cadre l'analyse, la théorie des probabilités. Il s'est attaché à développer des preuves mathématiques rigoureuses de résultats probabilistes. Il est un des pionniers de la théorie des martingales. Il a publié Stochastic Processes et Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. Ses travaux ont influencé ceux de Paul-André Meyer. Un résultat concernant les martingales est appelé décomposition de Doob-Meyer.

Doob a remarqué, dans le cas d'un ensemble de temps discret, que toute sous-martingale était la somme d'une martingale et d'un processus dont les trajectoires étaient des fonctions croissantes en temps.

Dans le premier chapitre, nous rappelrons tous les résultats d'espérance conditionnelle utilisée par la suite.

Dans le deuxième chapitre, on etudiera les martingales et le théorème de la décomposition de Doob, on donne une démonstration détaillée.

Enfin dans le dernier chapitre, on présentera quelques applications de ce théorème en domaine de mathématiques.

Chapitre 1

Généralité sur l'espérance conditionnelle

1.1 Espérances conditionnelles

1.1.1 Existence et unicité

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, une variable aléatoire X intégrable : $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, et une sous-tribu $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

Définition 1.1.1.1. *On appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée par $\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$, toute variable aléatoire Y intégrable vérifiant les deux conditions suivantes :*

i) Y et $\mathcal{B}$-mesuable,

ii) Pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\displaystyle\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$ (c'est-à-dire $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$)

On écrira probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A/\mathcal{B}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A/\mathcal{B})$.

Montrons l'existence et l'unisité de l'espérance conditionnelle :

L'Unicité

Si Y et Y' sont deux variables aléatoires intégrables vérifiant (i) et (ii), on a pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$=$\mathbb{E}(Y'\mathbb{1}_A)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit A :=$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{B}$. On a :

$$0 = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(Y'\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}((Y - Y')\mathbb{1}_A) \geq \varepsilon\mathbb{P}(A),$$

ce qui signifie que $\mathbb{P}(A) = 0$. Le choix de $\varepsilon > 0$ étant quelconque, on obtient $Y \leq Y'$ p.s. De même, $Y' \leq Y$ p.s. Donc $Y = Y'$ p.s. Ceci montre l'unicité. Strictement ditte, on doit écrire $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ p.s, mais l'expression "presque sur" est souvent omise. $\square$

Existence

Le preuve s'appuie sur le théorème de **Radone-Nikodym** : si μ et ν sont deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{B})$ telles que $\nu \ll \mu$ (c'est à dire pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$), alors il existe une fonction mesurable $f \geq 0$ telle que $\int_A f d\mu = \nu(A)$, quel que soit $A \in \mathcal{B}$. La fonction f est notée par $\frac{d\nu}{d\mu}$.
On suppose sans perte de généralité que $X \geq 0$ (sinon, on considèrera séparément $(X^+$ et $X^-)$). Soit μ la mesure sur $\mathcal{B}$ définie par $\mu(A) = \int_A X d\mathbb{P},\ A \in \mathcal{B}$. On a donc deux mesures $\mathbb{P}$ (ou plutôt la restriction de $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{B}$) et μ sur $\mathcal{B}$ telles que $\mu \ll \mathbb{P}$. Par le théorème de Radon-Nikodym, $\frac{d\mu}{d\mathbb{P}}$ est bien définie, qui est intégrable car μ est une mesure finie.
Or $\frac{d\mu}{d\mathbb{P}}$ est $\mathcal{B}$-mesurable telle que pour tout $A \in \mathcal{B}, \int_A X d\mathbb{P} = \mu(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P}$, ce qui prouve que $\frac{d\mu}{d\mathbb{P}}$ est vérifie les conditions (i) et (ii). $\square$

Remarque 1.1.1.1. *Heuristiquement on peut interpréter $\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ comme l'espérence de X en tenant compte des informaions apportées par la tribu $\mathcal{B}$: pour chaque $A \in \mathcal{B}$, on sait si A est réalisé au non.*

Proposition 1.1.1. *Soit X une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{B}$-mesurable sachant la tribu $\mathcal{B}$, X qui est $\mathcal{B}$-mesurable est considérée comme une constante :*

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) = X.$$

Preuve : Il est clair dans cette situation que X satisfait les conditions (i) et (ii). $\square$

Proposition 1.1.2. *Soit X une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire X et $\mathbb{1}_A$ sont indépendantes quel que soit $A \in \mathcal{B}$.*
Dans ce cas, le fait de savoir $\mathcal{B}$ n'apporte stictement rien sur X :

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X).$$

Preuve : On a $\mathbb{E}$(X) est une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{B}$-mesurable. Il nous suffit de vérifier la condition (ii). Soit $A \in \mathcal{B}$. Comme X et $\mathbb{1}_A$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)\mathbb{1}_A),$$

ce qui preuve (ii). □

L'espérance conditionnelle jouit de la plupart des propriétés de l'espérance.

Propriétés 1.1.1. *1. Si X et Y sont deux variabes aléatoire intégrable, alors :*

$$\mathbb{E}((aX + bY)/\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(Y/\mathcal{B}).$$

2. Si en plus $X \geq Y$, alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) \geq \mathbb{E}(Y/\mathcal{B})$. En particulier, $X \geq 0$ implique $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) \geq 0$.

3. Si $\mathcal{H}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$, alors

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{B}] = \mathbb{E}(X/\mathcal{B}).$$

Preuve :(1) et (2) se vérifient par définition.
Montrons (3). Il est clair que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathrm{X}/\mathcal{H})/\mathcal{B}]$ est bien définie, car par définition, $\mathbb{E}(X/\mathcal{H})$ est intégrable. Remarquons que $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{B}]$ est $\mathcal{B}$-mesurable, ce qui donne la propriété (i). Pour (ii), soit $A \in \mathcal{B}$, et on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})/\mathcal{B}]\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A),$$

car $A \in \mathcal{H}$. Ceci donne la propriété (ii), et conferme donc que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X/\mathcal{H})|\mathcal{B}] = \mathbb{E}(X/\mathcal{B}).$$

□

Théorème 1.1.1. *Si X est une variable aléatoire intégrable, alors*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X).$$

Preuve : Ceci est une concéquence de la propriété (ii), en prenant $A = \Omega$. $\square$

Théorème 1.1.2. *Si X et Y sont deux variable aléatoire telles que Y et XY soient intégrables, et si X est $\mathcal{B}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(XY/\mathcal{B}) = X\mathbb{E}(Y/\mathcal{B})$.*

Preuve : Sans perte de généralité, on suppose que Y et XY sont positives (sinon, on considèrera leurs parties positive et négative, séparément).
L'identité est vraie si X est une fonction indécatrice : soit $A \in \mathcal{B}$, alors $\mathbb{1}_A\mathbb{E}(Y/\mathcal{B})$ est une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{B}$-mesurable,telle que pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A\mathbb{E}(Y/\mathcal{B})\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{A\cap B}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y \mathbb{1}_B),$$

se qui implique que $\mathbb{1}_A\mathbb{E}(Y/\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A Y/\mathcal{B})$.
Par combinaison linéaire, l'identité reste vraie pour toute fonction étagée X qui est $\mathcal{B}$-mesurable : pour tout $B \in \mathcal{B}$

$$\int_B X\mathbb{E}(Y/\mathcal{B})d\mathbb{P} = \int_B XY d\mathbb{P}.$$

Le théorème de convergence monotone conferme alors que l'identité fonctionne encore si X est positiv et $\mathcal{B}$-mesurable. En particulier, en prenant $B = \Omega$ on déduit que $X\mathbb{E}(Y/\mathcal{B})$ est intégrable. Par définition elle vaut $\mathbb{E}(XY/\mathcal{B})$. $\square$

Il reste à étudier les passages à la limite. En fait, on a les mêmes résultats que pour l'espérance ordinaire.

Proposition 1.1.3. *[2] Soit X_n une suite de variables aléatoires .*

(i) Si $0 \leq X_n \nearrow X$, $\mathbb{E}(X_n/\mathcal{B}) \nearrow \mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ p.s.

(ii) Si $0 \leq X_n$, $\mathbb{E}(\underline{lim}\ X_n/\mathcal{B}) \leq \underline{lim}\ \mathbb{E}(X_n/\mathcal{B})$ p.s.

(iii) Si $|X_n| \leq V$ avec $V \in L^1$ et si $X_n \to X$ p.s., $\mathbb{E}(X_n/\mathcal{B}) \to \mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ p.s.

1.2 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

Lorsque la tribu est engendrée par une variable aléatoire (pas nécessairement à valeurs réelles), l'espérance conditionnelle a des propriétés particulières. Cela aide sur tout à simplifier le calcul dans des cas pratiques.

Définition 1.2.1. *Si $\mathcal{B}$ est engendrée par une variable Z (à valeurs dans un espace mesurable quelconque), et si X est une v.a. réelle intégrable, alors on écrira $\mathbb{E}(X/Z)$ au lieu de $\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$. Si $Z = (Z_1, Z_2, ...)$, on écrira aussi $\mathbb{E}(X/Z_1, Z_2, ...)$.*

Soit Z une v.a. valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Soit $A \in \sigma(\mathrm{Z})$. Par définition il existe $B \in \mathcal{E}$ telle que $A = \{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in B\}$; autrement dit, $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B(Z)$.
Donc toute fonction étagée qui est $\sigma(Z)$-mesurable s'écrit comme une fonction étagée ($\mathcal{E}$-mesurable) de Z. Par un passage à la limite, si ξ est une v.a. réelle intégrable et $\sigma(Z)$-mesurable, elle s'écrit comme $\xi = h(Z)$, où $h : E \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne. Prenons $\xi = \mathbb{E}(X/Z)$ et on obtient

$$\mathbb{E}(X/Z) = h(Z).$$

L'unicité de l'espérance conditionnelle nous assure que si h_1 est une fonction borélinne telle que $\mathbb{E}(X/Z) = h_1(Z)$, alors $h_1 = h, \quad \mathbb{P}_Z$-p.p.

Exemple 1 :

Soit X et Y deux v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées, telle que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Alors $\mathbb{E}(X/X+Y) = \frac{X+Y}{2}$.

En fait, si $\mathbb{P}_{(X,Z)} = \mathbb{P}_{(Y,Z)}$, alors $\mathbb{E}(X/Z) = \mathbb{E}(Y/Z)$. Pour voir cela, on observe d'abord que $\mathbb{E}(X/Z)$ est une v.a. intégrable et $\sigma(Z)$-mesurebe.
De plus, pour tout $A \in \sigma(Z)$, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/Z)\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_A)$.
On sait qu'il existe une fonction boréliene h telle que $\mathbb{1}_A = h(Z)$, ce qui nous donne $\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Xh(Z)) = \mathbb{E}(Yh(Z)) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$. D'où $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/Z)\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$.
Par conséquent, $\mathbb{E}(X/Z) = \mathbb{E}(Y/Z)$.
Pour revenire à l'exemple $Z = X + Y$, il suffit de remarque que : $\mathbb{P}_{(X,X+Y)} =$

$\mathbb{P}_{(Y,X+Y)}$, car $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_{(Y,X)}$. Donc $\mathbb{E}(X/X+Y) = \mathbb{E}(Y/X+Y)$. Or, $\mathbb{E}(X+Y/X+Y) = X+Y$, on obtient $\mathbb{E}(X/X+Y) = \frac{X+Y}{2}$.

Théorème 1.2.1. *Soient X et Z deux variable aléatoire indépendantes, et soit φ une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}[|\varphi(X,Z)|] < \infty$. Soit $h(Z) = \mathbb{E}(\varphi(X,Z))$. Alors*

$$h(Z) = \mathbb{E}(\varphi(X,Z)/Z).$$

Remarque 1.2.1. *Le sens du théorème est intuitivement clair. Si l'on cherche la valeur de $\mathbb{E}(\varphi(X,Z)Z)$, comme Z est mesurable par rapport à $\sigma(Z)$, on peut la considérer comme une constente, disons z. Dans ce cas, $\mathbb{E}(\varphi(X,z)/Z)$ devient $\mathbb{E}(\varphi(X,z))$ (car X et Z sont indépendantes), qui n'est autre que $h(z)$. Et bien sûr, z est en réalité Z. En remplaçant z par Z dans $h(z)$, on obtient $h(Z)$ comme la valeur de $E(\varphi(X,Z)/Z)$.*

Preuve du Théorème 1.2.1 Le théorème de **Fubini** nous dit que $h(z)$ est bien définie, et que $h(Z)$ est intégrable. Soit $A \in \sigma(Z)$. On vérifie que

$$\mathbb{E}[h(Z)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\varphi(X,Z)\mathbb{1}_A].$$

Comme A$\in \sigma(Z)$, on peut écrire $A = \{\omega : \mathrm{Z}(\omega) \in B\}$. Par l'indépendance et le théorème de **Fubini**,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varphi(X,Z)\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[\varphi(X,Z)\mathbb{1}_B(Z)] \\
&= \int\int \varphi(x,z)\mathbb{1}_B(z)\mathbb{P}_X(dx)\mathbb{P}_Z(dz) \\
&= \int h(z)\mathbb{1}_B(z)\mathbb{P}_Z(dz) \\
&= \mathbb{E}[h(Z)\mathbb{1}_B(Z)].
\end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que $\mathbb{1}_B(Z(\omega)) = \mathbb{1}_A(\omega)$. $\square$

Voisci une méthode générale pour calculer $\mathbb{E}(X/Z)$, lorsque (X,Z) est une vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.2.2. *Soit (X,Z) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui admet une densité $f_{(X,Z)}$. On suppose que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ et que $f_Z(z) > 0$ pour tout z. On pose*

$$f_{X/Z=z}(x) = \frac{f_{(X,Z)}(x,z)}{f_Z(z)}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$h(z) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X/Z=x}(x)dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\mathbb{E}(X/Z) = h(Z).$$

Preuve : Il est clair d'aprés le théorème de **Fubini** que $h(Z)$ est une variable aléatoire intégable. Soit $A \in \sigma(Z)$. Il s'agit de prouver que $\mathbb{E}[h(Z)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]$. Comme $A \in \sigma(Z)$, on peut écrire $A = \{\omega : Z(\omega) \in B\}$, où $B \subset \mathbb{R}$ est une partie borélienne. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X\mathbb{1}_B(Z)] \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_B dz x f_{(X,Z)}(x,z) \\ &= \int_B dz h(z) f_Z(z) \\ &= \mathbb{E}[h(Z)\mathbb{1}_B(Z)]. \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré . □

Dans la littérature, on trouve de temps en temps l'écriture informelle $\mathbb{E}(X|Z=z)$ pour désignér $h(z)$.

Exemple 2 :

Soient X et Y deux v.a. réelles indépendants suivant la même loi gaussienne $\mathcal{N}(0.1)$. Soit $Z = X + Y$.

Il est facile de calculer la loi de (X, Z). Pour toute fonction borélienne bornée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X,Z)) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x, x+y) \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h(x,z) \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+(z-x)^2)/2} dxdz. \end{aligned}$$

Donc (X, Z) admet une densité qui vaut

$$f_{(X,Z)}(x,z) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+(z-x)^2)/2}, \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

D'autre part, $P_Z = \mathcal{N}(0.2)$, donc $f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4}$. Posons, pour chaque $z \in \mathbb{R}^2$,

$$f_{X/Z=z}(x) = \frac{f_{(X,Z)}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x^2+(z-x)^2)/2+z^2/4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-z/2)^2}.$$

La fonction $f_{X/Z=z}$ n'est autre que la densité de la loi gaussienne $\mathcal{N}(z/2, 1/2)$ (d'où vient une formulation du genre "sachant $Z = z$, X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(z/2, 1/2)$"). Posons $h(z) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X/Z=z}(x)dx = z/2$. Alorx $\mathbb{E}(X/Z) = h(z) = Z/2$. On arrive donc à la même conclusion que dans l'exemple 1.

Exemple 3 :

Soient N, $X_1, X_2, ...$ des v.a. réelles indépendantes, admettant toutes des moments d'ordre 1. On suppose que les X_i suivant la même loi, et que N est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Défինssions

$$Y(\omega) := \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega),$$

(convenction : $\sum_{i=1}^{0} = 0$). On cherche à déterminer le moment d' ordre 1 de Y .

Il est claire que Y est une v.a. il suffit d'écrire $Y(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \mathbb{1}_{\{N(\omega)=n\}}$, qui est représentée comme somme de v.a. réelles. Il est égalment clair que Y admet un moment d'ordre 1, car le théorème de **Fubini**,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} |X_i| \mathbb{1}_{\{N=n\}}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_i| \mathbb{1}_{\{N=n\}}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|X_i|) \mathbb{P}(N = n) \\
&= \mathbb{E}(|X_1|) \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbb{P}(N = n) \\
&= \mathbb{E}(|X_1|) \mathbb{E}(N) < +\infty.
\end{aligned}$$

Le même argement nous donne en fait $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$.

On peut calculer $\mathbb{E}(Y)$ à l'aide du théorème 1.2.1, en effet, soit

$$h(n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\mathbb{E}(X_1),$$

Alors $\mathbb{E}(Y/N) = h(N) = N\mathbb{E}(X_1)$ et

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N\mathbb{E}(X_1)) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

On termine cette section avec une inégalité célèbre.

Théorème 1.2.3. ***(Inégalité de Jensen)****[2] Soit X une v.a. réelle et soit φ une fonction convexe. Si X et $\varphi(X)$ sont intégrables, alors*

$$\varphi(\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)/\mathcal{B}], \ p.s.$$

En particulier, $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

1.3 Espérance conditionnelle et projection orthogonale

Dans le cas où X est de carré intégrable, il existe une autre interprétation remarquable de $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]$. Avant d'énoncer le résultat, observons que $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à savoir l'espace des éléments de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dont un représentant au moins est $\mathcal{B}$-mesurable.

Théorème 1.3.1. *Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]$ est la projection orthogonale de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.*

Preuve : Le thèorème 1.2.3 montre que $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2/\mathcal{B}]$ p.s. Cela entraîne que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]^2] \leq \mathbb{E}[X^2] < \infty$, et donc la v.a. $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]$ est dans $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Par ailleurs, pour toute v.a. Z $\mathcal{B}$-mesurable bornée,

$$\mathbb{E}[Z(X - \mathbb{E}[X/\mathcal{B}])] = \mathbb{E}[ZX] - \mathbb{E}[Z\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]] = 0,$$

toujours d'après la propriété caractéristique de $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]$. Donc $X - \mathbb{E}[X/\mathcal{B}]$ est orthogonal à toutes les v.a. bornées $\mathcal{B}$-mesurables, et par un argument de densité, $X - \mathbb{E}[X/\mathcal{B}]$ est orthogonal à $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. $\square$

Chapitre 2

La décomposition de Doob d'une sous-martingale

Dans tout ce chapitre, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Par définition un processus aléatoire est une suite $(X_n)_{n\in N}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.1 Définition et propriétées

Définition 2.1.1. *(Filtration) Une filtration d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un ensemble* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de sous-tribu de* $\mathcal{F}$*, croissantes pour l'inclusion :*

$$\forall s, \quad t \geq 0, \quad s \leq t \quad alors \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

La filtration est une formalisme probabiliste pour d'écrire l'information dont on dispose. La derniér definition traduit simplement que l'information augmente au cours du temps. Pour un processus aléatoire $X = (X_t)_{t\geq 0}$, il y a une filtration naturelle, constituée des sous-tribu engendrées par les variables aléatoires $X_s,\ s \leq t : \mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Définition 2.1.2. *Un processus adapté à la filtration* $\mathcal{F}_n$ *est une suite* $(X_n)_n$ *de variables aléatoires réelles telles que pour tout* $n,\ X_n$ *est* $\mathcal{F}_n$*-mesurable.*

2.2 Martingale, Sous-martingale, Sur-martingale

Définition 2.2.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration et* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus aléatoire adapté pour cette filtration, i.e.* $\mathbb{E}(X_t) < \infty$. *On dit que* X *est une* $\mathcal{F}$*-martingale (resp. sous-martingale, resp. sur-martingale) si pour tout* t *et* $h \geq 0$*, on a avec probabilité 1 :*
martingale :

$$X_t = \mathbb{E}(X_{t+h}/\mathcal{F}_t)$$

sous-martingale :

$$X_t \leq \mathbb{E}(X_{t+h}/\mathcal{F}_t)$$

sur-martingale :

$$X_t \geq \mathbb{E}(X_{t+h}/\mathcal{F}_t).$$

Remarque 2.2.1. *Lorsqu'elle n'est pas précise, on utilise la filtration naturelle et on dit simplement que* X *est une martingale.*

2.3 Interprétation dans le contexe d'un jeu d'argent

La notion de martingale a une interprétation intuitive en terme de jeu. Dans ce contexte, la tribu $\mathcal{F}_n$ représente l'information accessible à un joueur " honnête " à l'instant n (par exemple après observation des n premières parties), X_n est la fortune du joueur à l'issue de la ne partie. La martingale signifie alors que le jeu est équitable (on ne peut espére ni perdre ni gagner). Une sous-martingale(resp. sur-martingale) est une jeu désavantageux (resp. avantageux).

2.4 Examples

Example1 :

Soit$(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, intégrables et centrées (pas forcément de meme loi). On pose

$$\mathrm{S}_0 := 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad \mathrm{S}_n := \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_k, k \leq n).$$

Alors $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Vérification. La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geq 1}$ hérite de l'intégrabilité des X_k et est clairement adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout entiers $m \leq n$, on a par additivité de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_n/\mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_m/\mathcal{F}_m) + \mathbb{E}(\mathrm{S}_m/\mathcal{F}_m).$$

La variable aléatoire S_m étant $\mathcal{F}_m$ mesurable, $\mathbb{E}(\mathrm{S}_m/\mathcal{F}_m) = \mathrm{S}_m$. D'autre part, la tribu $\mathcal{F}_m$ et la v.a. $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_m$ sont indépendentes, d'ou

$$\mathbb{E}(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_m/\mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_m) = \sum_{m<k<n} \mathbb{E}X_k = 0,$$

utilisant le centrage des X_k, on obtien $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n/\mathcal{F}_m) = 0 + \mathrm{S}_m = \mathrm{S}_m$.

Example 2 :

Soient $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et définissons pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)$. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Vérification. D'abord, chaque X_k est $\mathcal{F}_n$ mesurable par construction. Pour vérifier l'intégrabilité de X_n, en utilisant la conservation de l'espérance, on obtien :

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}|Y| < +\infty.$$

Enfin, pour n entiers :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n) = (\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n} \circ \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{n+1}})(Y) = X_n,$$

en utilisant l'inclution $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

2.5 Premiers propriétés

Proposition 2.5.1. *Une martingale est constate en moyenne, c'est-à-dire que $t \to E(X_t)$ est constante, une sous-martingale est croissante en moyenne, une sur-martingalee décroissante.*

Proposition 2.5.2. *Si $(X_n)_n$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et φ une fonction convexe, alors $\varphi(X_n)$ et une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).*

Preuve. On remarque tout d'abord que $\varphi(X_n)$ est bien $\mathcal{B}_n$-mesurable (car X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et φ est borélienne), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale, il suffit alors d'utiliser le theorème 1.2.3 sur l'inégalité de jensen. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1})/\mathcal{B}_n) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{B}_n)) \quad \text{p.s.}$$

Comme $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., on en déduit $E(\varphi(X_{n+1})/\mathcal{B}_n) \geq \varphi(X_n)$ p.s, ce qui montre bien que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

2.6 La décomposition de Doob

Tout processus adapté intégrable s'ecrit comme la somme d'une partie prévisible et d'une partie imprévisible (martingale). C'est le théoréme de décomposition de Doob.

Définition 2.6.1. *On dit qu'un processus A_n est un processus croissant prévisible si $A_0 = 0$, $A_n \leq A_{n+1}$ et si A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable.*

Théorème 2.6.1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $M_0 = 0$ et un processus croissant prévisible $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$X_n = X_0 + M_n + A_n \tag{2.1}$$

Cette décomposition est p.s. unique.

Preuve. Définissons A_n par $A_0 = 0$ et

$$n \geq 1, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1}/\mathcal{F}_{k-1}).$$

Puisque (X_k) est une sous-martingale, $\mathbb{E}(X_k - X_{k-1}/\mathcal{F}_{k-1})$ est positif pour tout $k \geq 1$ et (A_n) est donc bien un porocessus croissant. Dautre part, A_n et $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable par construction pour tout $n \geq 1$ et hérite de l'intégrabilité des X_k Il nous reste à verifier qu'en posant $M_n = X_n - X_0 - A_n$, on obtient bien une martingale. Il suffit de le vérifier pour $M'_n = X_n - A_n$ puisque X_0 est $\mathcal{F}_n$ mesurable pour tout n, remarquons que M'_n est integrable comme combinaison linéare de X_n et A_n. D'aprés la définition de A_n, $\mathbb{E}(X_n - X_{n-1}/\mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A_{n-1}$, d'ou par $\mathcal{F}_n$ mesurabilité de X_{n-1} et de A_n, $\mathbb{E}(X_n - A_n/\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} - A_{n-1}$ p.s ceci étant vrai pour tout entier $n \geq 1$, (M'_n) est bien une $(\mathcal{F}_n)$ martingale. Il en va de meme pour $M_n = M'_n - X_0$. De plus, $M_0 = X_0 - X_0 - A_0$.
Pour établir l'unicité, supposons qu'il existe deux décomposition :

$$X_n = X_0 + M_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$X_n = X_0 + N_n + B_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

ayant les propriétés ci-dessus. Par soustraction, on a

$$M_n - N_n = B_n - A_n.$$

Comme B_n et A_n sont $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurables, $M_n - N_n$ l'est aussi, d'ou p.s.

$$M_n - N_n = \mathbb{E}(M_n - N_n/\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} - N_{n-1} = ... = M_0 - N_0 = B_0 - A_0 = 0.$$

Ainsi pour tout n, $M_n = N_n$ p.s et donc $A_n = B_n$ p.s, ce qui prouve l'unicité de la décomposition de Doob.

Corollaire 2.6.1. *Toute sur-martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une décomposition*

$$X_n = X_0 + M_n - A_n$$

où (M_n) et (A_n) sont comme dans la décomposition de Doob.

Il suffit pour le voir d'appliquer la décomposition de Doob à la sous-martingale $(-X_n)$.

Chapitre 3

Application

3.1 Théorème de Hunt

On présente dans cette section une jolie application de la Décomposition de Doob. On va donner une nouvelle preuve du théorème de Hunt, basée sur son corollaire relatif aux martingales.

Théorème 3.1.1. *Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtaration et $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale relative à la filtaration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Soient S et T deux temps d'arret $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ adapté bornés avec $S \leq T$ alors*

$$\mathbb{E}[X_T/\mathcal{F}_S] \geq X_S.$$

Preuve : On écrit la décomposition de Doob $X_n = M_n + A_n$, avec la martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ et le processus croisant prévisible intégrable $(A_n)_{n\geq 0}$.

$$X_T = M_T + A_T \geq M_T + A_S, \text{ car } (A_n)_{n\geq 0}$$

est croisant, donc

$$\mathbb{E}[X_T/\mathcal{F}_S] \geq \mathbb{E}[M_T/\mathcal{F}_S] + \mathbb{E}[A_S/\mathcal{F}_S].$$

D'aprés le théoréme de Hunt sur les martingales, $\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$. D'autre part, le processus $(A_n)_{n\geq 0}$ est adapté, donc d'aprés le lemme, A_S est $\mathcal{F}_S$-mesurable et $\mathbb{E}[A_S/\mathcal{F}_S] = A_S$.
Finalement :

$$\mathbb{E}[X_T/\mathcal{F}_S] \geq M_S + A_S = X_S.$$

3.2 Convergence L^2 des martingales

Pour étudier le comportement asymptotique d'une martingale (M_n) dans L^2, il est utile de considérer le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale M_n^2.
Voici un premier résultat reliant le comportement de (M_n) à celui de ce processus.

Théorème 3.2.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale relative à la filtration $(\mathcal{F}_n)n \geq 0$ telle que*

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$$

Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable X_∞ de carré intégrable.

La démonstratoion de ce théoréme repose sur la décomposition de Doob. Ce théoréme est simple à utiliser et il a de nombreuse application.

Preuve : La convergence quadratique s'obtient par des méthodes hilbertiennes classiques : comme L_2 est complet, il suffit en effet de montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Le point clé est le calcul de $\|X_k - X_j\|_2^2$ pour $k \geq j$ où l'on utilise la propriété de martingale $\mathbb{E}(X_k/\mathcal{F}_j) = X_j$, d'où $\mathbb{E}(X_k X_j) = \mathbb{E}(X_j^2)$:

$$\mathbb{E}(X_k - X_j)^2 = \mathbb{E}X_k^2 - \mathbb{E}X_j^2 \tag{3.1}$$

La suite de réels $(\mathbb{E}X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (parce que (X_n^2) est une sous-martingale ou comme sous-produit du calcul ci-dessus qui montre que pour $k \geq j$, $\mathbb{E}X_k^2 - \mathbb{E}X_j^2$ est positif). Comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L2, (\mathbb{E}X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}^+$. Elle converge donc dans $\mathbb{R}^+$ et c'est une suite de Cauchy. En utilisant 3.1, on en déduit immédiatement que $(X_n)n \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy dans L_2.

3.3 Quelques exemples d'utilisation

Exemple 1 :

Les sommes de variables iid : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendentes et équidistribuées (iid) de moyenne $m = E(X)$ et de variance

$\sigma^2 = var(X)$. On s'intéresse au comportement asympotique de

$$S_n = X_1 + ... + X_n.$$

On constate immédiatement que

$$M_n = S_n - nE(X)$$

est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
Cherchons son processus croissante :

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(M_k^2 - M_{k-1}^2/\mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2/\mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - \mathbb{E}(x))^2/\mathcal{F}_{k-1}) = n\sigma^2. \end{aligned}$$

Finalement, dans ce cas des sommes de variables iid, la décomposition de Doob s'écrit :

$$(S_n - nm)^2 = martingale + n\sigma^2$$

Exemple 2 :

Proprieté quadratique : Un cas particulier important se présente si (X_n) est une martingale telle que $X_0 = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ pour tout n. Dans ce cas, La proposition 2.5.2 implique que $(X_n^2)_n$ est une sous-martingale. La décomposition de Doob de $(X_n^2)_n$ s'écrit alors

$$X_n^2 = M_n + A_n$$

où M_n est une martingale et

$$A_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}(X_m^2/\mathcal{F}_{m-1}) - X_{m-1}^2 = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}((X_m^2 - X_{m-1}))^2/\mathcal{F}_{m-1}).$$

Bibliographie

[1] J. L. Doob, J. Wiley : Stochastic Processes, *New-York. Ed. Chapmann & Hall, Londres.* (1953)

[2] J. Lacroix, P. Priouret : Probabilit2s Approfondies. *Polycopié* (2005)

[3] Paul André Merey : Décomposition des surmartingales, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny.Théorie du potentel* (1962)

[4] Mazliak, Priouret, Baldi : Martingales et chaînes de Markov. *Polycopié*