Remerciement

Nous voudrons remercier chaleuresement notre encadreur M^{r} A.Mimoun pour la façon de t-il-a encadré notre travail et pour ces conseiles et ces encouragement.
Nous remercions également M^{r} M.kadhi qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette mémoire.
Nous remerçions aussi M^{elle} N.Ait Ouali qui a accepté évaluer notre travail.
Tous les remerciement aussi à nous parents qui nous suivons durant toutes les années d' études.
Nous saisons cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignement qui nous ont intitie aux mathématique.
Nous pensons aussi à ceux et celles avec qui nous avons étudier.
Pour finir nous remercions tous les amies et les collégues qui nous ont soutenu
et encourager.

Table des matières

Introduction

La probabilité joue un rôle prémordiale dans le côtè théorique et pratique dans la majorité des domaines scientifique en (statistique, finance, commerce). Son importance donne un espace de recherche et de crèation suite à son effet nècessaire q'on ne peut pas s'en passer.
Le but de notre travail c'est l'étude de la convergence d'une suite de variables aléatoires , qui joue un rôle trés important dans la théorie des probabilités et des statistiques.
Ce qui nous pousse à introduire quelques notions de probabilité pour préciser tout qui suit dans le premier chapitre.
Consernnons le comportement asymptotique de suite de variables aléatoires ,nous précesons dans quel sens cette suite peut admettre une limite.
nous traduisons des types de convergence(en probabilité, en loi, presque sûrement, en moyenne d'ordre p) avec quelques exemples et aussi les liens entre ces modes dans le deuxiéme chapitre.
Ces types sont nécessaires et nous les utilisons pour la démonstration des théorèmes limites les lois des grands nombres qui relient par la convergence presque sûrement dans ce cas la loi est appellée loi forte des grands nombres et la convergence en probabilité donc la loi est appellée loi faible des grands nombres.
On intéresse dans cettes lois d'étudier la convergence de la moyenne et nous précissons leurs types.
Le théorème central limite, qui étudie la convergence de la somme normalisée centrée réduite des variable aléatoire ce théorème relie par la convergence en loi.
Nous introduisons l'application de ces théorèmes dans l'approximation et aussi quelques exemples de leurs applictions dans notre vie cotidienne dans le troisième chapitre.

Chapitre 1

Quelques notions de probabilités

Dans ce chapitre on introduit quelques notions de probabilité qui sont trés importantes dans les autres chapitres.

1.1 Espace de probabilité

1.1.1 Espace fandamental

Soit ξ une expérience aléatoire, L'ensemble de toutes les issues possibles associée à cette expérience est appellé espace fandamental est noté Ω.

1.1.2 Tribu

Soit $\mathcal{A}$ la classe de tous les évènements possibles liés à une experience aléatoire.
La classe $\mathcal{A}$ est dite tribu sur l'espace fandamental Ω si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire,
3. $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

1.1.3 Probabilité

On appelle probabilité sur une tribu $\mathcal{A}$ de parties de Ω toute mesure positive $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{A}$ verifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$,
3. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.

Définition 1.1.1 *On appelle espace de probabilité le triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *ou* $\mathbb{P}$ *disigne une probabilité définie sur une tribu* $\mathcal{A}$ *de parties de* Ω.

Remarque
Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appellé espace probabilisable.
Dans toute la suite, on disigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité.

1.1.4 Partie nègligeable

Une partie $\mathcal{N}$ de Ω est dite $\mathbb{P}-$négligeable ou négligeable relativement à $\mathbb{P}$ si est seulement si :

$$\exists B \in \mathcal{A} \quad telque \quad (\mathcal{N} \subseteq B) \quad et \quad \mathbb{P}(B) = 0.$$

1.1.5 Propriété presque sûre

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est presque sûrement vraie sur Ω si est seulement si elle est vraie hors d'une partie négligeable on notera $\mathcal{P}\, p.s.$

1.1.6 Espace complet

On dit que l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est complet si seulement si $\mathcal{A}$ contient toutes les parties $\mathbb{P}-$négligeables .

1.2 Varaible aléatoire

Définition 1.2.1 *On appelle variable aléatoire toute application mesurable X sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans un ensemble E muni d'une tribu $\mathcal{T}$. C'est à dire verifiant :*

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{A}.$$

1.3 Variable aléatoire discrète

Définition 1.3.1 *Une variable aléatoire X définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite discrète si l'ensemble des image $X(\omega),\ \omega \in \Omega$ est finie ou infinie dénombrable.*

1.3.1 Fonction de répartition

Définition 1.3.2 *Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω on appelle fonction de répartition ou la loi de X l'application F_X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \leq x\}.$$

1.3.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition 1.3.3 *Soit X une variable aléatoire discrètte de fonction de répartition F. On appelle espèrance mathèmatique ou moyenne de X, qu'on le notera*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} X \quad F(X) \quad dX \\ &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \quad \mathbb{P}_X(x) \quad . \end{aligned}$$

Définition 1.3.4 *On appelle variance d'une variable aléatoire discrètte X de moyenne de $\mathbb{E}(X)$ finie l'espèrance mathématique définit par*
$Var(X) = \sigma^2(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \quad .$

1.3.3 Les lois usuelles discrètes

Définition 1.3.5 *(**Loi de Bernoulli**) Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et a valeurs dans $\{1, 0\}$, alors X s'appelle variable aléatoire de bernoulli de paramétre P*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{s\}) &= \mathbb{P}(X = 1) = p \\ \mathbb{P}(\{e\}) &= \mathbb{P}(X = 0) = (1 - p) \\ &= q \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} p^k (1-p)^{1-k} & k \in \{0, 1\}, \\ 0 & \textit{si non.} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= p \\ var(X) &= p.(1 - p) \\ &= p.q \end{aligned}$$

Définition 1.3.6 *(**Loi binomiale**) Soit X une variable aléatoire suit la loi binomial de paramétre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On a donc*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= C_n^k p^k.(1 - p)^{n-k} \qquad k \leq n, \\ \mathbb{E}(X) &= n.p \\ var(X) &= n.q.p. \end{aligned}$$

1.4 Variable aléatoire absolument continue

Définition 1.4.1 *On dit q'une variariable aléatoire X est continue si sa fonction de répartition F est continue, dérivable et l'ensemble de définition de X est un intervalle ou réunion d'intervalles.*

1.4.1 Densité d'une variable aléatoire continue

Définition 1.4.2 *Soit X une variable aléatoire continue on appelle densité ou loi de X l'application f définie dans $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par*

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

1.4.2 Espèrance et variance

Définition 1.4.3 *Soit X une variable aléatoire continue de fonction densité f.*
On appelle espèrance mathématique de X, qu'on le notera

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx.$$

Définition 1.4.4 *On appelle variance d'une variable aléatoire continue X l'espérance mathématique définit par*

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \quad .$$

1.4.3 Les lois usuelles d'une variable aléatoire continue

Définition 1.4.5 ***(loi uniforme)*** *Soit X une variable aléatoire , on dit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ si sa fonction de densité est définie par*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ \\ 0 & si\ non. \end{cases}$$

Son espérance est $\frac{b+a}{2}$ et sa variance $\frac{b-a^2}{12}$.

Définition 1.4.6 ***(loi normale)*** *On dit q'une variable aléatoire X suit la loi normale ou loi de Gauss si sa fonction de densité est définie par*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

où

$\mu = \mathbb{E}(X)$ *est l'espérance de* X *et* $\sigma^2 = var(X)$ *est sa variance.*

1.4.4 Indèpendance des variables aléatoires

Définition 1.4.7 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variables aléatoires définies sur même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que les X_i sont indèpendantes si et seulement si*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i = x_i).$$

1.4.5 Variables aléatoires de même loi

Définition 1.4.8 *Soit X_i, $i = 1, ..., n$ des variables aléatoires, on dit que les X_i sont de même loi si et seulement si les X_i suivent la même loi de probabilité et dans ce cas elles ont la même espérance .*

1.4.6 Fonction caraclèristique

Définition 1.4.9 *Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction caractèristique de X et on la note $\varphi(X)$ la fonction définit par*

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itX} d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{itX} d\mathbb{P}\\ &= \mathbb{E}(e^{itX})\end{aligned}$$

1.4.7 Les fonctions caractèristiques des lois usuelles

1. Le cas discrète :

La fonction caractèristique définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = \sum_{x\in E} e^{itX}\mathbb{P}(X = x).$$

En particulier :

1. Si X suit la loi de bernouli, alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = (1-p) + pe^{it}$.
2. Si X suit la loi binomiale, on a $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = \left((1-p) + pe^{itX}\right)^n$.
3. Si X suit la loi de Poisson, alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}(t)$.

2. Dans le cas continue :

La fonction caractèristique définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} f_X(x)$.

En particulier :

1. Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([-a,+a])$ avec $a > 0$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \varphi_{X(t)} = \frac{\sin(at)}{at} & \text{si t>0} \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

2. Si X suit la loi normale, alors $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

Si X suit la loi normale centrè réduite, alors $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Chapitre 2

Convergence d'une suite de variables aléatoires

Dans ce chapitre nous allons introduire les diffèrentes notions de convergence pour une suite de variables aléatoires et quelques exemples, nous avons aussi ètudier les liens entre ces modes.Cette suite et leur limite sont supposées construites sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère que les variables aléatoires sont quelconques, mais les énoncés et les résultats sont vrais pour des variables aléatoires réelles et pour des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

2.1 Convergence presque sûrement

Définition 2.1.1 *Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite convrege presque sûrement vers une variable aléatoire X et on note $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} X_n = X$ p.s losqu'il exicte un ensemble $\mathcal{N}$, de probabilité nulle $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$, hors duquel X_n converge vers X*

$$\forall\omega \in \Omega - \mathcal{N} \qquad \underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Autrement dit, nous avons

$$\mathbb{P}(X_n \longrightarrow X) = \mathbb{P}(\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} |X_n - X| = 0) = 1$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Notation *On note cette convergence par* $X_n \longrightarrow X,\ \mathbb{P} - p.s.$

Exemple. On considere l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0,1]$ et $\mathcal{A}$ la tribu borélienne, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω.
pour tout $n \geq 1$ on considère la variable aléatoire définit comme suit

$$X_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad X_n(\omega) = \min(n \times \omega, 1).$$

Si $A =]0,1]$,alors la probabilité de A est $\mathbb{P}(A) = 1$.
Pour tout $\omega \in A$ et quand n assez grand, on a $n \times \omega \longrightarrow +\infty$ et $X_n = 1$.
Donc la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 1 lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

2.2 Convergence en probabilité

Définition 2.2.1 *Une suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est dite converge en probabilité vers une variable aléatoire* X *et on note* $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} X_n \overset{\mathbb{P}}{=} X$, *ou encore* $X_n \overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow} X$ *lorsque la probabilité d'une* $\varepsilon - diverge$ *entre* X_n *et* X *tends vers* 0 *lors que* $n \longrightarrow +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Exemple. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Alors lorsque $n \longrightarrow +\infty$ la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $Y_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ converge en probabilité vers la constante 1.
En effet, Soit $\varepsilon \in]0,1[$ on a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(|Y_n - 1| > \varepsilon) & = & \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, ..., X_n) < 1 - \varepsilon) \\ & = & \mathbb{P}(X_1 < 1 - \varepsilon) \times \mathbb{P}(X_2 < 1 - \varepsilon) \times ... \times \mathbb{P}(X_n < 1 - \varepsilon) \\ & = & (1 - \varepsilon)^n \\ \textit{Donc} \quad \underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} \mathbb{P}(|Y_n - 1| > \varepsilon) & = & \underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} (1 - \varepsilon)^n \\ & = & 0 \end{array}$$

2.3 Convergence en moyenne d'ordre p

Définition 2.3.1 *Une suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{L}_p$ *est dite convergente en moyenne d'ordre p vers une variable aléatoire* $X \in \mathbb{L}_p$ *dans l'espace* $\mathbb{L}_p$*, et on le note* $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}_p} X$*, lorsque on a :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|)^P = 0.$$

Exemple. Dans cet exemple en particulier le cas ou $p = 2$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de loi binomiale de paramètre (n, p) et on pose

$$Y_n = \frac{n - X_n}{n}.$$

La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne d'ordre 2 vers $(1 - p)$.
En effet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|Y_n - (1-p)|^2) &= \mathbb{E}(|\frac{n - X_n}{n} - (1-p)|^2) \\
&= \mathbb{E}(|\frac{n - X_n - n + np}{n}|^2) \\
&= \mathbb{E}(|-\frac{(X_n) - np}{n}|^2) \\
&= \mathbb{E}(|\frac{X_n - np}{n}|^2) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(|X_n - np|^2) \\
&= \frac{1}{n^2} var(X_n) \\
&= \frac{1}{n^2} np(1-p) \\
&= p\frac{(1-p)}{n}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(|Y_n-(1-p)|^2) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} p\frac{(1-p)}{n}\\ &= 0\end{aligned}$$

2.4 Convergence en loi

Définition 2.4.1 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de fonction de répartition $F_n(X)$ et X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(X)$, on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X si seulement si $F_n(X)$ converge vers $F(X)$ en tout point de continuté de F et on le note*
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

Exemple. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes de loi binomial de paramètre $(netp)$ on suppose $\lambda = np$ constante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} P(\lambda = np)$.
La fonction caractèristique de X est :

$$\varphi_n(t) = [1-p+pe^{it}]^n$$

on pose $\lambda = np \Longrightarrow p = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= [1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}e^{it}]^n\\ &= [1+\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)]^n\end{aligned}$$

alors $\varphi_n(t) \longrightarrow \exp(\lambda(e^{it}-1)) = \varphi(t)$ quand $n \longrightarrow +\infty$
$\varphi(t)$ est continue en $t=0$
et comme $\varphi(t)$ est la fonction caractèristique d'une variable aléatoire de poisson de paramètre $\lambda = np$.
On a donc

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \longrightarrow B(n,p) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \longrightarrow P(\lambda = np)$$

quand $n \longrightarrow +\infty$

2.5 Les liens entre les types de convergence

Proposition 2.5.1 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. donc Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence presque sûrement vers X alors elle converge en probabilité vers la même variable.*

Démonstration : Soit A l'évènement de probabilité 1 qui apperaît dans la définition de la convergence presque sûre on fixe $\varepsilon > 0$ et pour chaque entier n on considère

$$B_n = \{\omega \in A : \sup_{m>n} |X_m(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

la suite (B_n) est décroissante et $\cap_n B_n = \emptyset$ car $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers X sur A
on a $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \mathbb{P}(B_n) = 0$
comme

$$\begin{aligned}
\{|X_n - X| > \varepsilon\} \subset B_n \cup A^c &\Longrightarrow \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}(B_n \cup A^c) \\
&\Longrightarrow \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq \mathbb{P}(B_n) \\
&\Longrightarrow \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq 0.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite on a

$$\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq 0 \Longrightarrow \underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$$

car $\mathbb{P}$ est une probabilité donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X.

Remarque : La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûrement, on le montre par l'exemple suivant :
Soit $([0,1], \mathbb{B}[0,1], \mathbb{P})$ et on définit

$$\begin{aligned}
Y_{2^n,j} &= 1_{]\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n}]}(\omega), \quad 0 \leq j \leq 2^n - 1, \quad n \geq 1 \\
X_{2^n+j} &= Y_{2^n,j}, \quad 0 \leq j \leq 2^n - 1, \quad n \geq 1 \\
\textit{pour} \quad \textit{tout} \quad & \omega \in [0,1]
\end{aligned}$$

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} X_n = 0$$

et

$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} X_n = 1$$

donc $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers X mais pour tout $\forall \varepsilon \in]0,1[$ et $m = 2^n + j$ telque $0 \leq j \leq 2^n - 1$ on a :

$$\mathbb{P}(|X_m| \geq \varepsilon) = 2^{-n}$$

alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité. Donc si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X n'implique pas elle converge presque sûrement vers X.

Proposition 2.5.2 *Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire donc si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne d'ordre p vers X alors elle converge en probabilité vers la même variable*

Démonstration : Par l'inégalité de Markov pour tout $\varepsilon > 0 \quad$ et $p > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|)^p}{\varepsilon}$$

par passage à la limite on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon}$$

$$lim\, \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq 0$$

car la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre p. Et comme $\mathbb{P}$ et une probabilité. Alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Cela signifie la convergence en probabilité.

Remarque : La convergence en probabilité n'imlique pas la convergence en moyenne d'ordre p on le montre par l'exemple suivant : Soit $(]0,1], \mathbb{B}(]0,1]), \mathbb{P})$ espace de probabilité et soit $\alpha > 0$ on considère

$$X_n(\omega) = \omega^{-\alpha} \mathbb{1}_{]-\infty, \frac{1}{n}]}(\omega)$$

avec $n \geq 1$ $\forall \varepsilon \in]0,1[$

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \frac{1}{n}$$

d'ou $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0. Or, $X_n \in \mathbb{L}^p$ dés que $\alpha p \geq 1$ car

$$\mathbb{E}(X_n^p) = \int_0^{\frac{1}{n}} \omega^{-\alpha p} d\omega$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^p) &= \int_0^{\frac{1}{n}} \omega^{-\alpha p} d\omega \\
&= \left[\frac{\omega^{-\alpha p+1}}{-\alpha p+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{1-\alpha p} \times (\frac{1}{n})^{-\alpha p+1} \\
&= \frac{1}{1-\alpha p} \times (n)^{\alpha p-1} \longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en moyenne d'ordre p.

Proposition 2.5.3 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire.Donc si (X_n) convergence en probabilité vers X. Alors elle converge en loi vers la même variable*

Démonstration. Soit g une fonction continue et bornée on a $g(X_n)$ converge en probabilité vers $g(X)$ car $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ de plus $g(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continue et bornée. Donc intégrable on déduit la convergence en loi de $g(X_n)$ vers $g(X)$

Remarque. La convergence presque sûrement n'imlique pas la convergence en moyenne d'ordre p on le montre par l'exemple suivant : Soit $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit X_n de loi $(1-n^{-p})\delta_0 + n^{-p}\delta_n$ avec $p > 1$ soit $\varepsilon > 0$ pour $n \geq \varepsilon^{-p}$

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = n^{-p}.$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûre vers 0 puisque $p > 1$ toute fois $\mathbb{E}(|X_n|^p) = 1$ pour tout n $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \mathbb{E}(|X_n|^p) = 1 \neq 0$ donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 en moyenne d'ordrdre p.

Proposition 2.5.4 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. Donc si (X_n) converge presque sûre vers X, alors elle converge en loi vers la même variable X.*

Démonstration. Cette proposition est une conséquence du théorème de convergence dominée et de la définition.

Proposition 2.5.5 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. Donc si (X_n) convergence en moyenne d'ordre p vers X, alors elle convergence en loi vers la même variable.*

Remarque. La convergence en loi n'implique ni la convergence presque sûre ni la convergence en probabilité ni la convergence en moyenne d'ordre p on le montre par l'exemple suivant : Soit $X \longrightarrow N(0,1)$ et $X_n = (-1)^n X$ alors par la symétrie de la loi gaussienne standard X_n à même loi que X donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converege en loi vers X mais ne converge ni presque sûre ni en probabilité ni en moyenne d'orde p.

Corollaire 2.5.1 *C'est une cas particulier ou la convergence en loi imlique la convergence en probabilité. la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une constante c alors elle converge en probabilité vers c.*

Démonstration. On a lors que $n \longrightarrow +\infty$ $F_{X_n}(t) \longrightarrow 0$ si $t < c$ et 1 si $t \geq c$ $\forall t \neq c$ $\forall \varepsilon > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(c - \varepsilon < |X_n - X| < c + \varepsilon)$$

$$\mathbb{P}(c - \varepsilon < X_n \leq c + \varepsilon) = F_{X_n}(c + \varepsilon) - F_{X_n}(c - \varepsilon) \longrightarrow 1 - 0 = 1$$

$\mathbb{P}(|X_n - c| \leq \varepsilon) = 1$ alors $((X_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ converge en probabilité vers c.

Chapitre 3

Les principaux théorèmes limites

Dans ce chapitre, nous énonçons les théorèmes limites qui sont la base de la théorie des probabilités et statistiques.Nous utilisons la convergence en probabilité et presque sûre dans les lois des grands nombres et la convergence en loi dans le théorème central limite, nous introduisons aussi quelques exemples d'applications de ces théorèmes.

3.1 Les lois des grands nombres

On rappelle d'abord l'inégalité de Bienaymé tchebycheff :
L'inégalité de Bienaymè tchebycheff : Soit X une variable aléatoire rèelle telle que $Var(X) < +\infty$ alors pour toute $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

3.1.1 Loi faible des grands nombre

Théorème 3.1.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires independantes et de même loi, d'esperance μ et de variance σ^2 et soit $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Il en rèsulte

$$\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} \mathbb{P}(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

On dit que la suite de variables aléatoires (Z_n) *converge en probabilité vers* μ.

Démonstration. On pose $Z_n = \frac{S_n}{n}$ avec $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
D'une part on calcule l'espérance de Z_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)
\end{aligned}$$

et comme les X_i sont iid, alors $\forall i = 1, ..., n \quad \mathbb{E}(X_i) = \mu$, et on donc

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

D'autre part, on calcule la variance de Z_n

$$
\begin{aligned}
Var(Z_n) &= Var\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
&= Var\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{X_i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)
\end{aligned}
$$

et comme les X_i sont iid, alors $\forall i = 1, ..., n \quad Var(X_i) = \sigma^2$, et on donc

$$Var(Z_n) = \frac{1}{n^2} n \times Var(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

D'aprés l'inégalitè de Bienaymè tchebycheff, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Z_n - \mu| > \varepsilon) &\leq \frac{Var(Z_n)}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

et comme $\mathbb{P}$ est une probabilité et $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$, on obtient

$$\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} \mathbb{P}(|Z_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

et cela signifie la convergence en probabilité de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers μ .

3.1.2 Loi forte des grands nombres

Théorème 3.1.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indèpendantes telles que*

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{E}(X_n) = \mu_n$ *avec*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu_n = \mu \quad et \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < +\infty.$$

Si on pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. *Alors lorsque* $n \longrightarrow +\infty$ *la suite* $(\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge presque sûrement vers* μ.

Pour démontrer cet théorème on utilise le théorème suivant :

Théorème 3.1.3 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires indèpendantes d'espèrance nulle et de variances finies telles que* $\sum_{i=1}^{+\infty} Var(X_i) < +\infty$ *; alors la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *converge presque sûrement .*

Démonstration de théorème 3.1.3 **:** On pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
D'aprés le critère de Cauchy, la suite $S_n(\omega)$ converge si

$$\inf_{m\geq 1} \sup_{k\geq 0} |S_{m+k}(\omega) - S_m(\omega)| = 0.$$

Or d'aprés l'énigalité Kolmogorov,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq K\leq r} |S_{m+k}(\omega) - S_m(\omega)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{r} Var(X_{m+k}),$$

et en faisant tendre r vers l'infini

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 0} |S_{m+k}(\omega) - S_m(\omega)| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} Var(X_{m+k}).$$

Par hypothése, la série $\sum_{i=1}^{n} Var(X_i < \infty)$ converge, donc on peut toujours choisir m de sorte que $\sum_{k=1}^{\infty} Var(X_{m+k)})$ soit aussi petit qu'on veut. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} Var(X_{m+k}) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 0} |S_{m+k}(\omega) - S_m(\omega)| \geq \varepsilon \right) = 0,$$

et prouve le résultat cherché.

Démonstration du théorème(3.1.2) : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $Y_n = X_n - \mu_n$, on a

$\mathbb{E}(Y_n) = 0$ et $Var(Y_n) = Var(X_n)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} Var(\frac{Y_n}{n}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} Var(Y_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} Var(X_n) \end{aligned}$$

d'aprés le théorème précedant, on dèduit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Y_n}{n}$ converge presque sûrement

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$ presque sûrement.

D'ou $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu_j) = 0,$

ou encore $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = \mu$ presque sûrement, d'où $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \quad \mathbb{P}\ p.s.$

Exemple d'application. Parmi de nobreuses causes, une certaine maladie est déclenchée par la mutation d'un gène sur un chromosome, pour avoir une idée du nombres dans la population susceptibles d'être atteintes par cette maladie, on sohaite conaître la proportion de la population chez qu'il y a en mutation.

On demande ainsi à n personnes de se soumettre à un test, on note $\{X_i = 0\}$ (resp$\{X_i = 1\}$) les évènement il n'y a pas (resp il y a) mutation chez la i^{ime} personnes testée.

On fait l'hypothèse que les rèsultat des tests sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi de bernoulli de paramètre p

D'aprés la loi faible des grands nombres lorsque $n \longrightarrow +\infty$ on a

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = p.$$

Autrement dit, avec une grande probabilité, si n assez grand la moyenne arithmitique $\frac{S_n}{n}$ est proche de p.
Une bonne valeur approchée de la proportion de personnes chez qui la mutation est apparue, elle est donc $\frac{S_n}{n}$.
Dans la pratique, une valeur de n de l'ordre de 1000 ou 10000 fournit déja une bonne appximation de p.

3.2 Théorème centrale limite

Définition 3.2.1 ***(Loi normale centrée réduite)*** *Soit X une variable aléatoire admettant une espèrance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\sigma^2(X)$ non nulle. La variable aléatoire centrée rèduite associée X^* à X est définie par*

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Théorème 3.2.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indèpendantes et de même loi avec. $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ et $Var(X_n) = \sigma^2$.*
Si on pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
Alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration : On utilise la méthode des fonctions caractéristiques.
Si on pose $Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}$ et

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} Y_j \\ &= \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \end{aligned}$$

et si φ_Y désigne la fonction caractéristique commune aux variables aléatoires $Y_j (j \in \mathbb{N})$ et φ_n celle de U_n, on a

$$\varphi_n(t) = \left(\varphi_Y(\frac{t}{\sqrt{n}})\right)^n.$$

Pour t fixé et n suffisamment grand,

$$\varphi_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n}).$$

D'ou

$$\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n})\right)^n.$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$ on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2).$$

Exemples d'application :

Exemple 1 : On précise maintenant l'évolution du gain dans un jeu de pile ou face symétrique, c'est à dire
lorsque $p = \frac{1}{2}$ la loi des grands nombres donne

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = 2p - 1 = 0.$$

Le théorème limite centrale précise

$$2\sqrt{n}\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

pour tout $[a,b] \in \mathbb{R}$ on a donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{2S_n}{\sqrt{n}} \in [a,b]\right) \longrightarrow \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \in [a,b]\right).$$

Autrement dit, la gain normalisé $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ visite n'importe quel intervalle avec une probabilité positive.

Exemple 2 : Le nombre d'inscription à un cours de psychologie est une variable aléatoire de poisson d'espérance 100. Le professeur donnant ce cours a décidé que, si le nombre des inscriptions est au-delà de 120, il créera deux sections et donnera donc deux cours, tandis qu'en dejà une seul classe sera formée. Quelle est la probabilité que ce professeur ait à donner deux fois le cours ?
La solution exacte est $e^{-100}\sum_{i=120}^{\infty}(100)^i/i!$ et son évaluation numérique n'est pas aisée. On se souvient cependant qu'une variable poissonienne de paramètre 100 peut être considérée comme la somme de 100 variables poissoniennes indépendantes de paramètre 1 chacune, ce qui donne l'occasion d'utiliser le théorème central limite pour obtenir une approximation de la réponse exacte. Soit X le nombre d'inscriptions on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(X \geq 120\Big) &= \mathbb{P}\Big(\frac{X-100}{\sqrt{100}} \geq \frac{120-100}{\sqrt{100}}\Big) \\
&= 1-\Phi(2) \\
&= 0.228.
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait qu'espérance et variance des variables poissoniennes sont toujours égales.

Exemple 3 : On lance 10 dés équilibrés. On cherche la probabilité que la somme des dix résultats soit comprise entre 30 et 40.
On note X_i le résultat montré par le i-ème dé, $i = 1, 2, ..., 10$.
Comme $\mathbb{E}[X_i] = \frac{7}{2}$ et $Var(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = \frac{35}{12}$, on obtient par application du

théorème central limite

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(30 \leq \sum_{i=1}^{10} X_i \geq 40\Big) &= \mathbb{P}\Big(\frac{30-50}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i 35}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{40-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}\Big) \\
&= 2\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\right) - 1 \\
&= 0.65.
\end{aligned}$$

3.3 Application de l'aproximation

3.3.1 Loi binomiale et loi de poisson

Définition 3.3.1 ***(Fonction génératrice)*** *On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire l'application définie par :*

$$G_n(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Proposition 3.3.1 *Soit a un réel strictement positif et soit $(X_n)_{n>a}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale d'ordre n et de paramètre $p = \frac{a}{n}$ (c'est à dire d'espérance a). Alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = a$.*

Démonstration.
Soit $G_n(Z)$ la fonction génératrice associée à X_n. On a :

$$\begin{aligned}
G_n(Z) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-\frac{a}{n})^{n-k} z^k \\
&= \left(\frac{az}{n} + (1-\frac{a}{n})\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{a}{n}(z-1)\right)^n
\end{aligned}$$

et lorsque $n \longrightarrow +\infty$
$(G_n(z))_n$ converge simplement vers $G(z) = e^{a(z-1)}$ la fonction génératrice associée à X.
Donc la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

3.3.2 La loi binomiale et la loi normale

Proposition 3.3.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout n, X_n suive la loi binomiale d'ordre n et de paramètre a.*
Alors si on pose $Y_n = \frac{X_n - na}{\sqrt{n}}$, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale de moyenne nulle et de variance $a(1-a)$.

Démonstration.
Notons d'abord que l'on a $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ et de variance $\sigma^2(Y_n) = a(1-a)$.
On pourrait prouver cette proposition directement mais on peut noter que c'est un cas particulier du théorème central limite. En effet, soit Z une variable aléatoire à valeur dans $\{0, 1\}$ et telle que $\mathbb{P}(z = 0) = a$ et $\mathbb{P}(z = 1) = 1 - a$.
Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que Z.
Si on pose $Y_n' = \frac{1}{\sqrt{n}}[\sum_{i=1}^{n}(Z_i - a)]$, Y_n' suit la loi que Y_n et Y_n' converge en loi vers la loi normale de moyenne nulle et de variance $a(1-a)$.
Remarque.
Par la même manière et pour n assez grand, on peut donc approcher certaines lois par une loi normale, cette approximation est très satisfaisante, c'est pourquoi, les tables des lois .

Conclusion

La convergence d'une suite de variables aléatoires est un concepte trés nécessaire dans la probabilité et la statistique et aussi dans les autres domaines scientifique.
Nous interessons dans notre travail d'introduire les modes de convergence avec quelques exemples et nous avons donné les relation qui relie l'une avec l'autre.
Nous précesons aussi l'interêt et le rôle de ces notions de convergence qui le jouent dans les théorèmes limites et l'approximation. L' utilisation de la convergence en probabilité et la convergence presque sûrement sont appliquées dans les théorèmes des lois des grands nombres (loi faible et loi forte). Nous utilisons aussi la convergence en loi dans le théorème central limite et dans l'approximation d'une loi binomiale vers la loi de poisson et de même pour la loi de binomiale vers la loi normale et nous donnons quelques exemples d'application de ces théorèmes.

Bibliographie

[1] P.Delmoral, B.Rémillard, S.Rubenthaler. *Une introduction aux probabilités*. Ellipses, Paris 2006.

[2] NEVEU (1964). *Bases mathématiques du calcul des probabilités.* Masson, Paris 1964.

[3] Foata, D. et Fuch, A. *Calcul des probabilités*. 2nde édition. Dunod, 2003.

[4] J.Pellaumail. *Probabilités,statistiques, files d'attente (Cours et exercices résolus).* Dunod, Paris 1986.

[5] N.Boccara. *Probabilités (Mathématiques pour l'ingénieur).* Ellipses, Paris 1995.

[6] K. Redjdal. *Cours de probabilité*. Office des publications universitaires, Alger 1995.