République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique des Processus et Applications

par

Elias Omar [1]

Sous la direction de

Dr M. Boutlilis

Thème :

Mouvement Brownien Fractionnaire et Calcul Fractionnaire

Soutenue le 10/09/2023 devant le jury composé de

Pr.A. Kandouci	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
Dr.M. Boutlilis	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Encadreur
Dr.N. Ait ouali	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examinatrice

Année univ.: 2022/2023

1. e-mail : omarelias904@gmail.com

⁕ *Remerciements* ⁕

T*out d'abord, nous tenons à remercier "****ALLAH****", le Tout-Puissant, de nous avoir accordé la patience, le courage et la volonté nécessaires afin de réaliser ce modeste travail.*

J*e tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon encadreur,* ***Dr. Mokhtaria BOUTLILIS*** *pour ses conseils précieux, sa disponibilité constante, sa générosité, sa patience et son orientation, qui m'ont été d'une grande aide tout au long de ce travail.*

Je voudrais également exprimer ma gratitude envers tous les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail. Je les remercie pour toutes leurs remarques et critiques.

Je remercie chaleureusement toute ma famille qui m'a soutenu, encouragé et poussé durant toutes mes années d'études. J'aimerais exprimer mes sincères remerciements à mes amis fidèles qui m'ont toujours motivé à continuer.

Je tiens à exprimer mes remerciements envers tous les enseignants du département de Mathématiques pour leurs qualités scientifiques et pédagogiques, ainsi qu'envers le personnel de l'administration.

Je souhaite également adresser mes remerciements à tous les membres du laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistique et Applications.

Je remercie **mon père** ainsi que **Pr. Abdeldjebbar Kandouci** et **Pr. Kouider Djerfi** pour tous leurs efforts et leurs conseils tout au long de mon parcours universitaire.

⁂ Dédicace ⁂

Je dédie ce travail

À ma chère mère et à mon cher père, qui n'ont jamais cessé de me soutenir et de m'encourager durant mes années d'études, ainsi que KHATER BOUZID MOHAMED, pour sa gentillesse.

À mes soeurs, ma femme et ma famille qui me donnent de l'amour et de l'énergie.

À tous ceux qui m'ont aidé, que ce soit de près ou de loin, et à ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail, je vous exprime ma chaleureuse gratitude pour votre soutien et vos encouragements tout au long de mon parcours.

À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite encore plus de succès.

Résumé

Le mouvement brownien fractionnaire et le calcul fractionnaire sont des outils mathématiques essentiels qui permettent de mieux appréhender la complexité et l'irrégularité des phénomènes réels. Leur utilisation dans différents domaines de recherche ouvre de nouvelles perspectives pour une meilleure compréhension du monde qui nous entoure et pour le développement de modèles plus précis et plus adaptés aux systèmes complexes.

L'objectif de notre travail est de présenter des concepts de base du mouvement brownien fractionnaire ainsi que le calcul fractionnaire. Cela inclurait une étude des propriétés mathématiques des définitions et des théorèmes associés.

Abstract

Fractional Brownian motion and fractional calculus are essential mathematical tools that allow us to better understanding the complexity and irregularity of real phenomena. Their use in different research fields of research opens up new perspectives for a better understanding of the world around us and for development of more precise models that are more adapted to complex systems.

The objective of our work is to present basic concepts of fractional Brownian motion as well as fractional calculus. This would include a study of the mathematical properties of definitions and associated theorems.

Table des matières

Introduction

Le mouvement Brownien fractionnaire et le calcul fractionnaire sont deux concepts fondamentaux de la théorie des probabilités et du calcul, qui ont suscité un intérêt croissant dans les domaines de la physique, de l'économie, de l'ingénierie et des sciences naturelles. Ces concepts ont été développés pour mieux comprendre et modéliser des phénomènes réels complexes, caractérisés par des propriétés de dépendance à long terme et de mémoire à long terme.
Le mouvement Brownien fractionnaire est une généralisation du mouvement Brownien classique, qui est un processus stochastique continu dont les trajectoires sont caractérisées par des déplacements aléatoires et dépendants dans le temps. Contrairement au mouvement Brownien classique, le mouvement Brownien fractionnaire présente une propriété de dépendance à long terme, ce qui signifie que les variations passées du processus ont une influence significative sur ses évolutions futures. Cette caractéristique de dépendance à long terme est capturée par l'utilisation d'un paramètre fractal appelé exposant de Hurst, généralement noté "H", qui mesure le degré de mémoire du mouvement.

Historique du mouvement brownien fractionnaire : Le mouvement brownien classique, également connu sous le nom de mouvement brownien standard, a été découvert au début du XIXe siècle par le botaniste Robert Brown lorsqu'il observait au microscope le mouvement erratique de petites particules en suspension dans un fluide. Albert Einstein a fourni une explication théorique détaillée du mouvement brownien en 1905, montrant que les particules en suspension subissent une agitation thermique due aux chocs aléatoires des molécules du fluide environnant.

Cependant, il est rapidement devenu évident que le mouvement brownien standard ne pouvait pas rendre compte de certains phénomènes observés dans la nature. Par exemple, dans certains systèmes, les trajectoires des particules semblaient être plus irrégulières et moins régulières que ce que le mouvement brownien classique pouvait expliquer.
Dans les années 1960, Benoît Mandelbrot, un mathématicien français, a introduit le concept de mouvement brownien fractionnaire pour remédier à ces lacunes. Il a observé que certaines trajectoires réelles semblaient être fractales, c'est-à-dire qu'elles présentaient une certaine auto-similarité à différentes échelles. Mandelbrot a proposé d'étendre la notion de mouvement brownien aux trajectoires fractionnaires, c'est-à-dire aux trajectoires dont l'exposant de Hurst (une mesure de leur irrégularité) est compris entre 0 et 1.

Le calcul fractionnaire, quant à lui, est une branche des mathématiques qui généralise les opérations de dérivation et d'intégration pour des ordres non-entiers. Alors que le calcul classique est basé sur des dérivées et intégrales d'ordre entier, le calcul fractionnaire permet de manipuler des opérateurs d'ordre fractionnaire, tels que les dérivées et intégrales d'ordre $1/2$, $1/3$, etc. Cette généralisation permet de capturer des phénomènes de mémoire à long terme et des propriétés de régularité et de continuité non conventionnelles.

Historique du calcul fractionnaire : Le développement de calcul fractionnaire remonte au début du XIXe siècle, lorsque le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy a introduit pour la première fois l'idée d'intégrales d'ordre non entier. Cependant, le sujet est resté relativement peu exploré jusqu'au XXe siècle.
C'est dans les années 1970 et 1980 que le calcul fractionnaire a commencé à attirer davantage d'attention grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens tels que Kenneth Miller, Rudolf Gorenflo et Francesco Mainardi. Ils ont développé des outils mathématiques pour étudier les équations différentielles et les processus stochastiques impliquant des dérivées fractionnaires.

En combinant le mouvement Brownien fractionnaire avec le calcul fractionnaire, les chercheurs ont pu développer un cadre mathématique puissant pour modéliser des systèmes complexes avec des propriétés de dépendance à long terme. Ces systèmes incluent des phénomènes naturels tels que la turbulence atmosphérique, les fluctuations financières, la croissance des cellules biologiques, les mouvements boursiers, et bien d'autres.

En outre, les outils du calcul fractionnaire ont également trouvé des applications pratiques dans divers domaines de l'ingénierie, notamment pour résoudre des équations différentielles et des systèmes dynamiques avec des conditions initiales et des contraintes non classiques.

Aujourd'hui, le mouvement brownien fractionnaire et le calcul fractionnaire sont des domaines de recherche actifs et interdisciplinaires, jouant un rôle crucial dans la modélisation et la compréhension des systèmes complexes, notamment dans les domaines de la finance, de la physique, de l'ingénierie et de la biologie.

L'objectif de notre mémoire est l'étude du mouvement Brownien fractionnaire et calcul fractionnaire, pour cela , l'étude a été divisée en deux chapitres :
Le premier chapitre est consacré aux définition et montrer les propriétés principales du mouvement Brownien fractionnaire.
Le second chapitre, on présente les définitions de la fonction Gamma et la fonction Bêta et les définitions et propreités de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Lionville et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Lionville.

Chapitre 1

Mouvement Brownien Fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire (MBF) a été introduit par Kolmogorov en 1940 [1], comme moyen d'engendrer des "spirales" Gaussiennes dans des espaces de Hilbert. En 1968 [3], Mandelbrot et Van Ness l'ont rendu célèbre en l'introduisant dans des modèles financiers, et en étudiant ses propriétés. Tout au long de ce chapitre, on se réfère aux : [1], [4],[8].

1.1 Définition du mouvement Brownien fractionnaire

Définition 1.1.1 *Un Mouvement Brownien Fractionnaire(MBF) de paramètre $H \in (0;1)$ est un processus Gaussien centré continu noté par $(B_t^H)_{t\geq 0}$ défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^{B^H})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et de fonction de covariance :*

$$R_H\Big(t,s\Big) = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - \mid t-s \mid^{2H}\Big).$$

**Le paramètre H est appelé le paramètre de Hurst.*

Propriétés 1.1.1

1. *Si $H = \frac{1}{2}$, alors le mouvement Brownien fractionnaire est le mouvement Brownien standard.*
2. *Si $H = 1$, alors $(B_t^H) = t(B_1^H)$ presque sûrement pour tous $t \geq 0$.*

Preuve.

1. Nous voyons immédiatement que la covariance de $(B^{\frac{1}{2}})$ réduire à (s,t) égale $s \wedge t$, ce qui donne $(B^{\frac{1}{2}})$ est un mouvement Brownien standard.
2. Si $H = 1$, nous avons pour tous $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[(B_t^H - t(B_1^H))^2\Big] &= \mathbb{E}\Big[(B_t^H)^2\Big] + t^2\mathbb{E}\Big[(B_1^H)^2\Big] - 2t\mathbb{E}\Big[B_t^H B_1^H\Big] \\
&= t^2 + t^2 \times 1 - 2t\Big(\tfrac{1}{2}(t^2 + 1 - (1 - t^2))\Big) \\
&= 2t^2 - 2t^2 = 0.
\end{aligned}$$

Donc on dit que $B_t^H = tB_1^H$ $\mathbb{P}$-ps.

Proposition 1.1.1 *Soit $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ un MBF alors :*

$$var(B_t^H) = t^{2H}.$$

Preuve. Ona :

$$\begin{aligned}
var(B_t^H) &= R_H(t,t) = \tfrac{1}{2}\Big(t^{2H} + t^{2H} - \mid t - t \mid^{2H}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}(2t^{2H}) = t^{2H}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.2 *Si $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien stationnaire et $X_0 = 0$, tel que $var(X) = t^{2H}$ alors X est un MBF de paramètre H.*

Preuve. Il suffit de montrer que la fonction de covariance de X est la quantité :

$$cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - \mid t - s \mid^{2H})$$

on a :

$$var(X_t - X_s) = var(X_t) + var(X_s) - 2cov(X_t, X_s)$$

alors :

$$\begin{aligned} cov(X_t, X_s) &= \tfrac{1}{2}\Big\{var(X_t) + var(X_s) - var(X_t - X_s)\Big\} \\ &= \tfrac{1}{2}\Big\{var(X_t) + var(X_s) - var(X_{t-s})\Big\} \\ &= \tfrac{1}{2}\Big\{t^{2H} + s^{2H} - \mid t - s \mid^{2H}\Big\}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

1.2 Propriétés principales du MBF

1.2.1 Auto-similarité

Définition 1.2.1 *Un processus* $\Big\{X_t, t \in \mathbb{R}\Big\}$ *est dit auto-similarité d'indice* $\beta > 0$ *si : pour tout* $\alpha > 0$ *les processus* $\Big\{X_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\Big\}$ *et* $\Big\{\alpha^\beta X_t, t \in \mathbb{R}\Big\}$ *aient même loi, ie :*

$$\forall \alpha > 0, \Big\{X_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\Big\} \stackrel{\mathfrak{L}}{=} \Big\{\alpha^\beta X_t, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Théorème 1.2.1 *Le MBF de paramètre H est auto-similarité d'ordre H :
ce qui signifie que*

$$\forall \alpha > 0, \Big\{B^H_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\Big\} \stackrel{\mathfrak{L}}{=} \Big\{\alpha^H B^H_t, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Preuve. On fixe $\alpha > 0$; il est évident que $\Big\{B^H_{\alpha t}, t \in \mathbb{R}\Big\}$ et $\Big\{\alpha^H B^H_t, t \in \mathbb{R}\Big\}$ sont deux processus Gaussiens centrés, il suffit donc demontrer qu'ils ont la même fonction de covariance.

D'une part on a :

$$\begin{aligned} R_H\Big(\alpha t, \alpha s\Big) &= \mathbb{E}\Big(B^H_{\alpha t} B^H_{\alpha s}\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big\{ \mid \alpha t \mid^{2H} + \mid \alpha s \mid^{2H} - \mid \alpha t - \alpha s \mid^{2H} \Big\} \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha^{2H}\Big(\mid t \mid^{2H} + \mid s \mid^{2H} - \mid t - s \mid^{2H} \Big). \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[(\alpha^H B^H_t)(\alpha^H B^H_s)\Big] &= cov\Big(\alpha^H B^H_t, \alpha^H B^H_s\Big) \\ &= \alpha^{2H} cov(B^H_t, B^H_s) \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha^{2H}\Big(\mid t \mid^{2H} + \mid s \mid^{2H} - \mid t - s \mid^{2H}). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

1.2.2 Accroissements stationnaires

Propriétés 1.2.1 *Le mouvement Brownien fractionnaire $(B^H_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements stationnaires :*
c'est-à-dire

$$\forall h > 0, \Big\{B^H_{t+h} - B^H_h, t \geq 0\Big\} \overset{\mathfrak{L}}{=} \Big\{B^H_t, t \geq 0\Big\}.$$

Preuve. Comme $(B^H_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien avec $s < t$, il suffit de vérifer :

$$cov\Big(B^H_{t+h} - B^H_h, B^H_{s+h} - B^H_h\Big) = cov\Big(B^H_t, B^H_s\Big).$$

On a :

$$\begin{aligned}
cov\Big(B^H_{t+h} - B^H_h, B^H_{s+h} - B^H_h\Big) &= \mathbb{E}\Big[(B^H_{t+h} - B^H_h)(B^H_{s+h} - B^H_h)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big(B^H_{t+h}B^H_{s+h}\Big) - \mathbb{E}\Big(B^H_{t+h}B^H_h\Big) - \mathbb{E}\Big(B^H_h B^H_{s+h}\Big) + \mathbb{E}\Big(B^H_h B^H_h\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\mid t+h \mid^{2H} + \mid s+h \mid^{2H} - \mid t-s \mid^{2H} \Big) \\
&- \tfrac{1}{2}\Big(\mid t+h \mid^{2H} + \mid h \mid^{2H} - \mid t \mid^{2H} \Big) \\
&- \tfrac{1}{2}\Big(\mid h \mid^{2H} + \mid s+h \mid^{2H} - \mid s \mid^{2H} \Big) + \mid h \mid^{2H}
\end{aligned}$$

En simplifiant terme à terme, on obtient :

$$\begin{aligned}
cov\Big(B^H_{t+h} - B^H_h, B^H_{s+h} - B^H_h\Big) &= \tfrac{1}{2}\Big(\mid t \mid^{2H} + \mid s \mid^{2H} - \mid t-s \mid^{2H} \Big) \\
&= cov\Big(B^H_t, B^H_s\Big) = R\Big(B^H_t, B^H_s\Big)
\end{aligned}$$

donc $\Big\{B^H_{t+h} - B^H_h, t \geq 0\Big\} \stackrel{\mathfrak{L}}{=} \Big\{B^H_t, t \geq 0\Big\}$. ■

1.2.3 Propriétés de mémoire

Soit $r(n) = cov(X_k, X_{k+n}); k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$

Définition 1.2.2 *Un processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, est dite à longue mémoire tant que :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r(n) = +\infty$ *et à courte mémoire si :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r(n) < +\infty$.

Propriétés 1.2.2 *Le mouvement Brownien fractionnaire a une longue mémoire, si $H > \frac{1}{2}$ et il a une courte mémoire si $H < \frac{1}{2}$.*

Preuve. On considère $X_k = B^H_k - B^H_{k-1}$ et $X_{k+n} = B^H_{k+n} - B^H_{k+n-1}$.
Puisque le MBF est centré donc :

$$\begin{aligned}
r(n) &= cov\Big(X_k, X_{k+n}\Big) = \mathbb{E}\Big(X_k, X_{k+n}\Big) = \mathbb{E}\Big[(B^H_k - B^H_{k-1})(B^H_{k+n} - B^H_{k+n-1}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[(B^H_{k-(k-1)})(B^H_{k+n-(k+n-1)})\Big] = \mathbb{E}\Big[(B^H_1)(B^H_{n+1-n})\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[(B^H_1)(B^H_{n+1} - B^H_n)\Big] = \mathbb{E}\Big[B^H_1 B^H_{n+1} - B^H_1 B^H_n\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[B^H_1 B^H_{n+1}\Big] - \mathbb{E}\Big[B^H_1 B^H_n\Big] = R_H\Big(1, n+1\Big) - R_H\Big(1, n\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(1^{2H} + (n+1)^{2H} - \mid (n+1-1) \mid^{2H}\Big) - \tfrac{1}{2}\Big(1^{2H} + n^{2H} - \mid (n-1) \mid^{2H}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big((n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(n^{2H}(1+\tfrac{1}{n})^{2H} - 2n^{2H} + n^{2H}(1-\tfrac{1}{n})^{2H}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}n^{2H}\Big((1+\tfrac{1}{n})^{2H} - 2 + (1-\tfrac{1}{n})^{2H}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}n^{2H}\Big((1+\tfrac{2H}{n}) + \tfrac{H(2H-1)}{n^2} - 2 + (1-\tfrac{2H}{n}) + \tfrac{H(2H-1)}{n^2} + \mathrm{o}(\tfrac{1}{n^2})\Big) \\
&= H(2H-1)n^{2H-2} + \mathrm{o}(n^{2H-2}).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $H > \frac{1}{2}$ on a :

$$r(n) > 0 \ et \ \sum_n r(n) = +\infty.$$

Pour $H < \frac{1}{2}$ on a :

$$r(n) < 0 \ et \ \sum_n r(n) < +\infty.$$

Pour cela on dit que le MBF a une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$ et il a une courte mémoire si $H < \frac{1}{2}$. ■

1.2.4 Non-Différentiabilité

Théorème 1.2.2 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont $\mathbb{P}$-p.s non différentiable en t_0.*

Preuve. On a, la v.a $Z = \frac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^H} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et M une constante, on veut montrer que $\mathbb{P}\Big(\mid \frac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h} \mid > M\Big) \rightarrow_{h\to 0} 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\mid \tfrac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h} \mid > M\Big) &= \mathbb{P}\Big(\mid h^{1-H}\tfrac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h} \mid > Mh^{1-H}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\mid \tfrac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^{1-1+H}} \mid > Mh^{1-H}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\mid Z \mid > Mh^{1-H}\Big) \\
&= \int_{|Z|>Mh^{1-H}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)dz \\
&\rightarrow_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)dz \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(\mid \frac{B^H_{t+h}-B^H_t}{h^H} \mid > M) \rightarrow_{h\longrightarrow 0} 1.$$

D'où le théorème. ■

1.2.5 Propriété trajectorielle du mouvement Brownien fractionnaire

Définition 1.2.3 *On rappelle qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *est dite* $\alpha-$*Höldérienne, s'il existe* $C > 0$ *tel que :*

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{L}^d} \leq C\|x - y\|^{\alpha}_{\mathbb{L}^p}.$$

Théorème 1.2.3 *(Kolmogorov) Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique à valeurs réelles pour lequel il existe trois constantes strictement positives* γ, c, ϵ *telque :*

$$\mathbb{E}\Big[|X_t - X_s|^{\gamma}\Big] \leq |t - s|^{c+\epsilon}.$$

Alors il existe une modification $\widetilde{X}$ *du processus* X*; telque :*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\neq s} \frac{|\widetilde{X}_t - X_s|^{\gamma}}{|t - s|^{\alpha}}\Big] < +\infty,$$

pour chaque $0 \leq \alpha \leq \frac{\epsilon}{\gamma}$*. En particulier les trajectoires de* $\widetilde{X}$ *sont Hölderiennes continues de paramètre* α*.*

Proposition 1.2.1 *Les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont Hölderiennes continues de paramètre* $\alpha < H$*.*

Preuve. On a :

$$\mathbb{E}\Big[\mid B^H_t - B^H_s \mid^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\mid B^H_{t-s} \mid^2\Big] =\mid t - s \mid^{2H} .$$

Si on prend : $\gamma = 2,\ c = 1$, et $c + \epsilon = 2H$ d'où : $\epsilon = 2H - 1$, d'après le théorème de Kolmogorov1.2.3 B^H_t à une modification $\widetilde{B}^H_t$ dont les trajectoires sont $H\ddot{o}$lderiennes continues de paramètre :

$$\alpha \in \Big[0, \frac{\epsilon}{\gamma}\Big[= \Big[0, \frac{2H-1}{2}\Big[= \Big[0, H - \frac{1}{2}\Big[$$

. On a prouvé que $\widetilde{B}^H_t$ est $H\ddot{o}$lderienne continue de paramètre $\alpha < H$. ■

1.2.6 La variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire

Définition 1.2.4 *Un processus X est à variation quadratique finie s'il existe un processus noté $\langle X \rangle$ tel que, pour tout t et toute suite de subdivisions Δ_n de [0,t] telle que le pas $|\Delta_n| \to 0$*
on ait :

$$\mathbb{P} - \lim_{n \to +\infty} \sum_{(t_i, t_{i+1}) \in \Delta_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \langle X \rangle_t.$$

Théorème 1.2.4 *Soit $\left\{ B_t^H, t \in \mathbb{R} \right\}$ un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H, on a :*

$$\begin{array}{lll} \langle B^H \rangle_t = 0, & \forall \quad t \in \mathbb{R} & \textit{pour } H > \frac{1}{2}. \\ \langle B^{\frac{1}{2}} \rangle_t = t, & \forall \quad t \in \mathbb{R}. & \\ \langle B^H \rangle_t = +\infty, & \forall \quad t \in \mathbb{R}^* & \textit{pour } H < \frac{1}{2}. \end{array}$$

Preuve. Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$, et $\{\Delta_n : 0 = t_0 < t_1 < ..... < t_n = t, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de subdivision de $[0, t]$ dont le pas $|\Delta_n|_{n \longrightarrow +\infty} \longrightarrow 0$.

Considérons $T_t^{\Delta_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H)^2$.

$\mathbf{1^{er}}$cas : $\mathbf{H > \frac{1}{2}}$.

Nous allons donc montrer la convergence dans $\mathbb{L}$ de $T_t^{\Delta_n}$ vers 0. Par la stationnarité des accroissements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[T_t^{\Delta_n}\Big] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H)^2\Big] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\Big[(B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H)^2\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} var(B^H_{t_{k+1}} - B^H_{t_k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} var(B^H_{t_{k+1}-t_k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k|^{2H} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k||t_{k+1} - t_k|^{2H-1} \\
&\leq |\Delta_n|^{2H-1} \sum_{k=0}^{n-1} |t_{k+1} - t_k| \\
&\leq |\Delta_n|^{2H-1} t.
\end{aligned}$$

Comme $H > \frac{1}{2} \Rightarrow 2H - 1 > 0$, on a donc : $\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} |\Delta_n|^{2H-1} t = 0$.

Alors :

$$T_t^{\Delta_n} \longrightarrow^{\mathbb{L}^1}_{n \to +\infty} 0.$$

D'où le résultat. ■

$\mathbf{2^{\text{ème}}}$cas : $\mathbf{H < \frac{1}{2}}$.

Nous allons montrer la divergence de $T_t^{\Delta_n}$ vers $+\infty$.

Appelons A l'ensemble des subdivisions de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0 et considérons :

$D_n = \sup_{\Delta_n} \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} (B^H_{t_{k+1}} - B^H_{t_k})^2\Big]$, ceci est donc minoré par la subdivision $\tau_i = \frac{it}{2^n}$

on a donc

$$D_n \geq \mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{2^n}(B^H_{\tau_i} - B^H_{\tau_{i-1}})^2\Big]$$

et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{2^n}(B^H_{\tau_i} - B^H_{\tau_{i-1}})^2\Big] &= \sum_{i=0}^{2^n}\mathbb{E}\Big[(B^H_{\tau_i} - B^H_{\tau_{i-1}})^2\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{2^n} var\Big(B^H_{\tau_i} - B^H_{\tau_{i-1}}\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{2^n} var\Big(B^H_{\tau_i - \tau_{i-1}}\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{2^n} \mid \tau_i - \tau_{i-1} \mid^{2H} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n} \mid \frac{it}{2^n} - \frac{(i-1)t}{2^n} \mid^{2H} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n} \mid \frac{t}{2^n} \mid^{2H} = (2^n+1) \mid \frac{t}{2^n} \mid^{2H} \\
&= (t)^{2H}\Big(\frac{1}{2^{n(2H-1)}} + \frac{1}{2^{2nH}}\Big).
\end{aligned}$$

Alors

$$D_n \geq (t)^{2H}(\frac{1}{2^{n(2H-1)}} + \frac{1}{2^{2nH}}).$$

Comme $H < \frac{1}{2}$ alors $2H-1<0$ et $2H>0$ on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n(2H-1)}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2nH}} = 0.$$

Ce qui conduit au résultat. ■

1.2.7 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas markovien

Théorème 1.2.5 *(Revuz et Yor[6]page81) Soit* $\Big\{X_t, t \in \mathbb{R}\Big\}$ *un processus Gaussien centré. Si* X *un processus de markov, alors* $\forall s < t < u$ *avec* $cov(X_t, X_t) > 0$,

$$cov(X_s, X_u)cov(X_t, X_t) = cov(X_s, X_t)cov(X_t, X_u) \tag{1.1}$$

De plus si $cov(X_t, X_t) = 0$ *alors* $\Big\{X_s : s \leq t\Big\}$ *et* $\Big\{X_s : s \geq t\Big\}$ *sont indépendants.*

Théorème 1.2.6 *Le Mouvement Brownien Fractionnaire* $\Big\{B_t, t \in \mathbb{R}\Big\}$ *n'est pas markovien pour* $H \neq \frac{1}{2}$.

Preuve.

- S'il était markovien, comme on a $R_H(0,0) = 0$, les processus $\Big\{B_s : s \leq 0\Big\}$ et $\Big\{B_s : s \geq 0\Big\}$ seraient indépendants, ce qui est absurde.
- S'il était markovien, sa fonction de covariance vérifierait (1.1) et en particulier, comme $1 < 2 < 3$, on aurait :

$$\begin{aligned} R_H(1,3)R_H(2,2) &= R_H(1,2)R_H(2,3) \\ \tfrac{1}{2}(1 + 3^{2H} - 2^{2H})2^{2H} &= \tfrac{1}{2}(1^{2H} + 2^{2H} - 1)\tfrac{1}{2}(2^{2H} + 3^{2H} - 1) \\ 3 + 3^{2H} - 3.2^{2H} &= 0. \end{aligned}$$

Après l'étude de la fonction $H \longrightarrow 3 + 3^{2H} - 3.2^{2H}$, on voit que cette fonction ne s'annule que pour $H = \frac{1}{2}$et pour $H = 1$ (cas exclu par définition). Le seul cas possible ($H = \frac{1}{2}$) correspond à celui du mouvement Brownien standard qui est markovien.■

1.2.8 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale

Théorème 1.2.7 *Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semi-martingale pour $H \neq \frac{1}{2}$, relativement à sa fltration naturelle.*

Preuve. On suppose que ce soit une semi-martingale, elle est donc continue et nulle en 0, B^H s'écrit donc de manière unique sous la forme $B^H = M + V$ tel que : M est une martingale locale continue en 0 et V un processus continue à variation fnie nul en 0.

1

Comme M est une martingale locale donc d'après la décomposition de Doob-Meyer[1], $M^2 - \langle M \rangle$ est une martingale locale, et on a $\langle M \rangle_t = \langle B^H \rangle_t = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, alors M^2 martingale locale continue nulle en 0 c'est à dire qu'il existe une suite $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ croissante de temps d'arrêt telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty \ \ \mathbb{P} - p.s$$

et on a :

$$\begin{aligned} \forall n, \forall t, \ \mathbb{E}[M^2_{t \wedge T_n}] &= \mathbb{E}[M^2_{0 \wedge T_n}] = 0, \\ \forall n, \forall t, \ M^2_{t \wedge T_n} &= 0 \ \ \mathbb{P} - p.s. \end{aligned}$$

Comme T_n tend en croissant vers $+\infty$ $\mathbb{P} - p.s$, on a :

$$\forall t, \ M_t^2 = 0 \ \ \mathbb{P} - p.s.$$

Donc M^2 est indistinguable du processus nul.

Finalement, $\forall t, \ \ B_t^H = V_t \ \ \mathbb{P} - p.s$ et donc B^H est $\mathbb{P} - p.s$, à variation finie...Absurde.

$\mathbf{2^{\text{ème}}}$cas : $\mathbf{H < \frac{1}{2}}$.

La variation quadratique de M ne serait définie qu'en 0 ce qui contredit l'hypothèse de continuité...Absurde. ■

1.3 Représentations intégrales du Mouvement Brownien Fractionnaire

Soit $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien fractionnaire d'indice $H \in (0;1)$. Il existe de nombreuses représentations d'un mouvement Brownien fractionnaire. Plus ou moins compliquées selon que l'on souhaite obtenir une représentation sur un compact de $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1.3.1 Représentation par moyenne mobile du MBF

Dans les travaux de Mandelbrot et Van Ness (1968)[3], le mouvement Brownien fractionnaire a la représentation intégrale suivante :

$$B_t^H = \frac{1}{C_H}\int_{\mathbb{R}}\left[(t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}\right]\mathrm{d}B_s,$$

où

$$C_H = \Big(\int_{\mathbb{R}^+}\left[(1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2}\right]^2\mathrm{d}s + \frac{1}{2H}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

et $x_+ = \max\{x, 0\}$ et B est un mouvement brownien standard.

1.3.2 Représentation harmonisable du MBF

Samorodnitsky et Taqqu(1994) [7] ont montré que le mouvement Brownien fractionnaire B^H peut être représenté par l'intégrale stochastique suivante :

$$B_t^H = \frac{1}{C_H^{(1)}}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{its}-1}{|s|^{H+1/2}}d\widehat{\mathrm{B}}_s.$$

où $C_H^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(2H)}}$ et $\widehat{\mathrm{B}}$ est un mouvement Brownien à valeur complexe.

1.3.3 Représentation de Levy-Hida du MBF

On peut aussi représenter le mouvement Brownien fractionnaire sur un interval fini de la forme suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad B_t^H = \int_0^t K_H(t,s) dB_s.$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement Brownien standard et K_H le noyau.

- Si $H > \frac{1}{2}$ alors $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, t > s$,

$$K_H(t,s) = b_H^{(1)} s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du,$$

où

$$b_H^{(1)} = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})}}.$$

- Si $H < \frac{1}{2}$ alors $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, t > s$,

$$K_H(t,s) = b_H^{(2)} \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (H - \frac{1}{2}) s^{H-\frac{1}{2}} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}} u^{H-\frac{3}{2}} du \right],$$

où

$$b_H^{(2)} = \sqrt{\frac{2H}{(1-2H)\beta(1-2H, H+\frac{1}{2})}}.$$

Pour plus de détail voir (Nualart [5], 2003).

Chapitre 2

Eléments De Calcul Fractionnaire

2.1 Fonction Gamma et Fonction Bêta

2.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction du calcul fractionnaire qui généralise "la fonction" factorielle. Elle est donneé par la définition suivante :

Définition 2.1.1 *La fonction Gamma notée* Γ *est définie par l'integrale suivante :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \ \alpha > 0$$

Propriétés 2.1.1 *Pour tout* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

(i) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,

(ii) $\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1)......(\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha)$,

(iii) $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.1.2 *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1 - u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

Proposition 2.1.1 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \forall\alpha,\beta;\alpha>0,\beta>0.$$

2.2 Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. On considére l'intégrale :

$$I_a^1 f(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

La primitive seconde de f définie comme suit :

$$I_a^2 f(x)=\int_a^x(\int_a^u f(t)dt)du,$$

en permutant l'ordre de l'intégration ,on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x(\int_t^x du)f(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt. \end{aligned}$$

$I_a^3 f(x)=I_a^1 I_a^2 f(x)=I_a^1 g(x)=\int_a^x g(v)dv,$

où : $g(v)=\int_a^v (v-t)f(t)dt.$

$$\begin{aligned} I_a^3 f(x) &= \int_a^x(\int_a^v (v-t)f(t)dt)dv \\ &= \int_a^x(\int_t^x (v-t)dv)f(t)dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt. \end{aligned}$$

Plus généralement :

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \text{ pour tout entier n.}$$

Cette formule est appelée formule de cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann a réalisé que cette écriture pourrait avoir un sens, même dans le cas ou n n'est pas entier, cette idée a donné naissance à l'intégration fractionnaire.

Définition 2.2.1 *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$.*
On appelle intégrale fractionnaire (à gauche), de Riemann-Liouville de f, d'ordre α et on note $I_{a^+}^{\alpha}$, la fonction définie par :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ \alpha > 0.$$

On appelle intégrale fractionnaire (à droite), de Riemann-Lionville de f, d'ordre α et on note $I_{b^-}^{\alpha}$, la fonction définie par :

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ \alpha > 0.$$

Exemples 2.2.1 • *Calculons l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\frac{1}{2}$ de la fonction définie par : $f(t) = t$.*

On pose que $a = 0$.

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}} f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} t dt, \ x > 0 \\ &= \tfrac{1}{M(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{\frac{-1}{2}} t.dt \end{aligned}$$

Aprés une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}} f(x) &= \tfrac{-4}{3\sqrt{\pi}}[(x-t)^{\frac{1}{2}}]_0^x \\ &= \tfrac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

• *Considérons maintenant la fonction définie par :* $f(t) = (x-a)^{\beta}$. *On prend* $\beta > -1$ *et on calcule l'intégrale fractionnaire de* f, *au sens de Riemann-Liouville.*

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a^{\beta})dt,$$

pour calculer cette intégrale, on pose : $t = a + (x-a)z$, *alors :*

$$dt = (x-a)dz.$$

Alors :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \tfrac{(x-a^{\alpha+\beta})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^{\beta}(1-z)^{\alpha-1}dz \\ &= \tfrac{(x-a)^{\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha), \end{aligned}$$

et comme, on a : $B(\beta+1,\alpha) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}$, *alors :*

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Propriétés 2.2.1 *[9] Pour* $f \in \mathcal{C}([a,b])$, *l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x); \;\; \alpha, \beta > 0.$$

Théorème 2.2.1 *Si* $f \in L^1([a,b])$, *alors* $I_a^{\alpha} f$ *existe pour presque tout* $x \in [a,b]$ *et de plus :* $I_a^{\alpha} \in L^1([a,b])$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_a^b |(I_a^\alpha)(x)|dx &\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t)|dtdx \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1}dxdt \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)|(b-t)^\alpha dt \\
&\leq \tfrac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)|dt.
\end{aligned}$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. La dérivée d'ordre α non entier (avec $n-1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$), au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} f(x),$$

où :

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n}.$$

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \ , x > a.$$

En particulier, si $\alpha = 0 : D_a^0 = f(x)$.

Exemples 2.3.1 • *Calculons la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\frac{1}{2}$ *de la fonction définie par :* $f(t) = t$.

On pose : $a = 0$ *et* $o < \frac{1}{2} < 1, (n = 1)$.

$$\begin{aligned} D_0^{\frac{1}{2}} f(x) &= D^1 I_0^{1-\frac{1}{2}} f(x) \\ &= D^1 I_0^{\frac{1}{2}} f(x) \\ &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}. \end{aligned}$$

• *Calculons la dérivée fractionnaire d'ordre* α *de la fonction définie par :* $f(x) = (x-a)^\beta, \beta \in \mathbb{R}$.

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{d^n}{dx^n}[I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta].$$

On prend $\beta > n$

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \tfrac{d^n}{dx^n}\left[\tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}\right] \\ &= \tfrac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = 1$ *:*

$$\begin{aligned} D_a (x-a)^\beta &= \tfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-1)^{\beta-1} \\ &= \beta(x-a)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.1

1. *Pour* $\alpha \in \mathbb{N}$, *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique.*
2. *la dérivée fractionnaire d'une fonction constante n'est ni nulle, ni constante :*

$$D_a^\alpha c = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

Théorème 2.3.1 *Si* $f \in \mathcal{C}([a,b]), \alpha > 0$ *et* $x > a$*, alors :*

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x).$$

Ce qui veut dire que l'opérateur dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

Preuve.

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) &= D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(x) \\ &= D^n I_a^n f(x) = f(x). \end{aligned}$$

Proposition 2.3.1 *Soit* $\alpha > 0$*, et* $n = [\alpha] + 1$*, si* $\alpha \in \mathbb{N}$*,* $(\alpha = n si\ \alpha \in \mathbb{N})$*,*
alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^m I_a^{m-\alpha} f(x)\ , m > \alpha.$$

([.] : dénote la partie entière d'un nombre réel, $n - 1 \leq \alpha \leq n$*).*

Preuve. Comme $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} D^m I_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^{m-n} I_a^{m-n} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Conclusion

Le mouvement brownien fractionnaire et le calcul fractionnaire sont des domaines de recherche passionnants et en évolution constante qui offrent de nouvelles perspectives pour comprendre et modéliser des phénomènes complexes. Leur utilisation dans divers domaines scientifiques et industriels ouvre la voie à des avancées significatives et à des découvertes importantes. Au fil de ce mémoire, nous avons exploré les concepts, les propriétés de ces deux domaines.

Nous avons commencé par introduire le mouvement brownien fractionnaire en montrant comment il diffère du mouvement brownien classique et de présenter ses principales propriétés avec tous les détails. Nous avons mis en évidence le rôle essentiel de l'indice de Hurst dans la caractérisation de ce processus, ainsi que ses implications sur la régularité et la volatilité des trajectoires.

Ensuite, nous avons abordé le calcul fractionnaire, en soulignant son origine historique. Nous avons examiné les différentes définitions des opérateurs fractionnaires, telles que la dérivée et l'intégrale fractionnaires, ainsi que leurs propriétés fondamentales.

Bibliographie

[1] C. Bender, *An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter. Stochastic Processes and their Applications*, (Vol :104), pp81.106 (2003).

[2] F. Ben Adda, *Interprétation géometrique de la différentiabilité et du gradient d'ordre réel*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, 1998,pp. 931-934.

[3] R. Bagley, P. J Torvik, *Fractional calculus a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures*, AIAA Journal, 21(5) :741-748, 1983.

[4] H. E. Bray, *Elementary properties of the Stieltjes integral*, Annals of Mathematics, Second Séries, vol. 20 (1918-1919), 177-186.

[5] Butcher, John Charles, "and Nicolette Goodwin", *Numerical methods for ordinary differential equations*. Vol. 2. New York : Wiley, 2008.

[6] Herrmann, Richard, *Fractional calculus : an introduction for physicists*, World Scientic, 2014.

[7] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, World scientic. (Ed). (2000).

[8] A. Kolmogorov, *The Wiener spiral and some other interesting curves in Hilbert space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 26 :2 (1940), 115118. (Russian).

[9] B. Keith, Oldham, Jerome Spanier, *The fractional calculus theory and application of differentiation and integretion to arbitrary order*, acadimic press, INC.

[10] B. Mandelbrot, J. Van-Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Rev. 10(1968), p.422 – 437.

[11] Y. Mshura, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2008).

[12] K.S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional differential Equations*, John Wiley and Sons, 1993.

[13] D. Nualart , *Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. Stochastic Models*, (Mexico City), Contemp. Math. 336. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 3 – 39, (2003).

[14] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, (1991).

[15] B. Ross, *The Development of Fractional Calculus*, 1695-1900. Historia Math 4 :75-89, (1977).

[16] G. Samorodnitsky, M. Taqqu, *Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance. Stochastic Modeling*, New York, NY : Chapman and Hall, (1994).

[17] N. Savy, *Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux Télécommunication. Calcul Stochastique relativement à des Processus Fractionnaires*, Thèse De Doctorat, Université de Rennes1, (2003).

[18] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste. Panstwowe wydawnictwo naukowe*, Warszawa 1958.

[19] I. Podlubny, *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation*, arXiv :math/0110241v1 [math.CA] 22 Oct 2001.