

Table des matières

0.1	Introduction	2
1	Généralité sur les variétés	5
1.1	Variétés différentiables	5
1.1.1	Variétés Différentiables	5
1.1.2	Espace tangent et espace cotangent	6
1.1.3	Fibrés tangent et cotangent	7
1.1.4	Connexions	8
1.1.5	Géodesiques	9
1.2	Variétés Riemanniennes	9
1.2.1	Métriques Riemmaniennes	9
1.2.2	Connexion de Levi-Civita	10
1.3	Vecteurs de Killing	11
1.4	Repère de Serret-Frenet	11
1.5	Surface d'une variété	14
1.5.1	Surface d'une variété	14
1.5.2	Espace tangent d'une surface	14
2	Courbes magnétiques	15
2.1	$K_{1,2,3}$ -Courbes magnétiques dans \mathbb{E}^3	17
2.2	$K_{4,5,6}$ -Courbes magnetiques dans \mathbb{E}^3	18
3	Surfaces flux	25
3.1	$K_{1,2,3}$ -Surfaces flux dans \mathbb{E}^3	26
3.2	$K_{4,5,6}$ -Surfaces flux dans \mathbb{E}^3	28

0.1 Introduction

La trajectoire d'une particule chargée se déplaçant sous l'action d'un champ magnétique constitue un sujet de recherche important en physique et en géométrie. Cette trajectoire sur une variété est connue sous le nom d'une courbe magnétique. Les courbes magnétiques font naître un vaste sujet de recherche dans diverses variétés Riemanniennes. Voir la Figure 0-1.

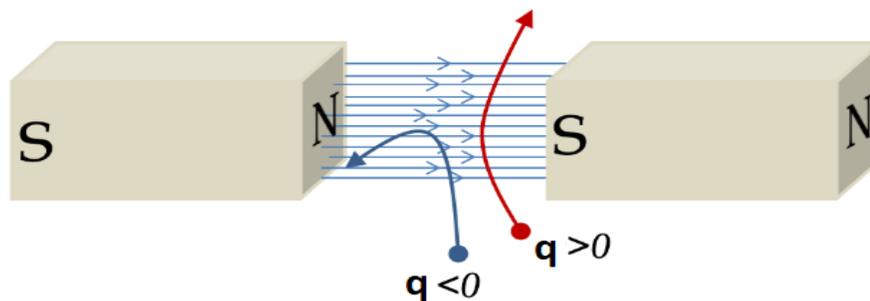


FIG. 0-1 – Courbes magnétiques d'une particule chargée

Sur une variété Riemannienne (M, g) de dimension n , un champ magnétique est une 2-forme fermée noté F sur (M, g) associée à une force de Lorentz définie par le champ de tenseur Φ de type $(1, 1)$ donné par

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \forall X, Y \in \chi(M) \quad (1)$$

Les courbes magnétiques sont des courbes qui vérifient l'équation de Lorentz (parfois appelé équation de Newton) définie par

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma'). \quad (2)$$

Ainsi l'équation de Lorentz généralise l'équation satisfaite par les géodésiques à savoir $\Phi \equiv 0$. D'un point de vue des systèmes dynamiques, une géodésique correspond à une trajectoire d'une particule sans action d'un champ magnétique.

D'autre part, Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923) est un mathématicien allemand connu pour ses nombreuses contributions aux théories des algèbres de Lie, des groupes de Lie..., l'un de ces travaux qui prend son nom la notion de vecteurs de Killing. Un vecteur de Killing, ou champ de Killing, est un champ de vecteur sur une variété Riemannienne qui conserve la métrique de cette variété. Lorsque la force de Lorentz F correspondant au vecteur de Killing V ,

elle se note par F_v et elle se définit par

$$\Phi(X) = V \wedge X.$$

ainsi l'équation d'une courbe magnétique devienne

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = V \wedge \gamma', \quad (3)$$

γ est dite courbe magnétique associée au de vecteur de Killing V . (Voir [2])

D'autre par, une surfaces flux est une surface M d'une variété différentiable (N, g) lorsque

$$g(V, n) = \langle V, n \rangle = 0 \quad (4)$$

par tout en M , où n est le vecteur normal à M et V est vecteur correspond au flux \mathcal{F} dans la variété ambiante (N, g) . Le flux trouve naturellement sa place en mécanique des fluides, dans ce domaine les flux sont systématiquement des débits, c'est-à-dire qu'ils représentent une quantité qui traverse une surface comme le montre la Figure 0-2.(Voir [3],[5])

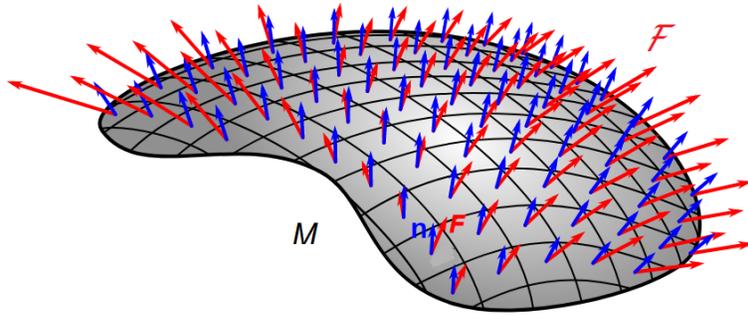


FIG. 0-2 – Surface flux M traversée par le flux F.

Le but de ce mémoire est d'étudier et de déterminer les courbes magnétiques associées aux vecteurs de Killing et les surfaces flux correspondentes aux vecteurs de killing sur \mathbb{E}^3 , qu'il se compose en trois chapitre :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base sur les variétés notamment les variétés différentiables, variétés Riemanniennes et leurs propriétés géométriques de plus on

donne les définitions des vecteurs de Killing et les surfaces paramétrées dans une variété de dimension 3.

Le deuxième chapitre se concentre sur les courbes magnétiques correspondantes aux vecteurs de Killing et leur détermination explicite.

Finalement au troisième et le dernier chapitre, après qu'on donne la notion des surfaces flux au cas général, on détermine toutes les surfaces flux associées aux vecteurs de Killing dans \mathbb{E}^3 et on donne leurs représentations graphiques en utilisant le logiciel 'Wolfram Mathematica' dans l'espace Euclidien de dimension 3.

Chapitre 1

Généralité sur les variétés

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés Différentiables

Soit M un espace topologique séparé non vide.

Définition 1.1 *On dit que M est une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ si tout point p de M possède un voisinage ouvert U homéomorphe à \mathbb{R}^n i.e: il existe une application bijective*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$$

tel que φ et son inverse φ^{-1} sont continues.

Un point p de U est repéré par les coordonnées (p_1, \dots, p_n) dans \mathbb{R}^n de son image réciproque $\varphi^{-1}(p)$. Alors, on dit que U est un ouvert de coordonnées locales de M au voisinage de p . La paire (U, φ) est appelée carte locale et $(p_1, \dots, p_n) = \varphi^{-1}(p)$ seront les coordonnées locales de p .

Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telle que l'intersection U et V soit non vide alors un point $p \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées (p_1, \dots, p_n) dans U et ses coordonnées (p'_1, \dots, p'_n) dans V . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & \nearrow \psi & \\ \psi^{-1}(U \cap V) & & \end{array}$$

est commutatif alors on a

$$(p'_1, \dots, p'_n) = \psi^{-1} \circ \varphi(p_1, \dots, p_n)$$

où l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée changement de coordonnées de la carte (U, φ) vers la carte (V, ψ) .

On appelle atlas définissant M la donnée d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et pour chaque $i \in I$, d'un homéomorphisme $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$; cet objet sera noté $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$.

Définition 1.2 *On dira que M est une variété différentiable si elle est une variété topologique et l'homéomorphisme $\psi^{-1} \circ \varphi$ est de classe C^∞ .*

1.1.2 Espace tangent et espace cotangent

Soit M une variété différentielle de dimension n . On note $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^1 sur M .

Définition 1.3 *L'ensemble $C^\infty(M)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} est une algèbre associative et commutative avec le produit usuel*

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

où $f, g \in C^\infty(M)$ et $x \in M$.

Définition 1.4 *Un vecteur tangent en un point $p \in M$ est l'application $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, pour tous $f, g \in C^\infty(M)$, on a*

$$\text{- } v \text{ est } \mathbb{R}\text{-linéaire : } v(af + bg) = av(f) + bv(g),$$

$$\text{- } v \text{ satisfait la règle de Leibnitz : } v(f.g)(p) = v(f).g(p) + f(p).v(g).$$

L'ensemble de vecteurs tangents au point p de M est noté par T_pM , et on l'appelle l'espace tangent en $p \in M$, c'est un espace vectoriel de dimension n ($\dim M$).

On peut voir l'espace tangent par la définition suivante.

Définition 1.5 *On définit l'espace tangent à M en un de ses points comme l'ensemble des vecteurs tangents à une courbe tracée dans M . Un vecteur v de \mathbb{R}^n est dit tangent à M en un*

point x de M s'il existe une courbe paramétrée de classe C^1

$$\gamma :]-\varepsilon, +\varepsilon[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

définie sur un voisinage de 0, telle que

$$\gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = v$$

L'espace tangent en tout point p d'un ouvert U de \mathbb{R}^n est $T_pU = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.6 Comme T_pM est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, que nous noterons T_p^*M . Cet espace est appelé l'espace cotangent à M en p . Il est un espace vectoriel de même dimension que T_pM .

Localement, au dessus d'un ouvert U , d'une carte locale (U, φ) , $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}$ est une base de T_pM pour tout $p \in U$. Notons $\{dx_i|_p\}$ sa base duale, on a alors :

$$\langle dx^i|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x_j}(p) = \delta_j^i$$

1.1.3 Fibrés tangent et cotangent

Définition 1.7 On appelle fibré tangent à M , que l'on désigne par TM , l'ensemble de tous les vecteurs tangents de M en ses points, c'est donc la réunion de tous les espaces tangents T_pM en ses divers points :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$$

C'est une famille d'espaces vectoriels paramétrisés par M . On peut le munir d'une projection $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, v) = p$.

Le fibré TM est une variété différentiable de dimension $2n$. L'application $\pi : (p; u) \in TM \rightarrow p \in M$ est différentiable.

On appelle *section* C^∞ de TM ou *champ de vecteurs* sur M toute application différentiable $X : TM \rightarrow M$ telle que $\pi \circ X = id_M$. Le champ de vecteurs X en tout point $p \in M$ est un vecteur $X(p)$ tangent à M en p de façon à ce que la variation de $X(p)$ (en fonction de p) soit différentiable.

L'ensemble $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M .

Définition 1.8 *On définit le fibré cotangent par*

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

C'est une variété différentiable de dimension $2n$. Une section de classe C^∞ $\alpha : M \rightarrow T^*M$ de ce fibré, est appelée une 1-forme différentielle sur M .

1.1.4 Connexions

Définition 1.9 *Soit M une variété différentiable. Une connexion linéaire sur M est une application*

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

telle que

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

vérifiant les propriétés :

1. $\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$ -linéaire par rapport à X :

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad f, g \in C^\infty(M)$$

2. $\nabla_X Y$ est \mathbb{R} -linéaire par rapport à Y :

$$\nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3. vérifie la règle de Leibniz :

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y, \quad f \in C^\infty(M)$$

$\nabla_X Y$ est appelée la dérivée covariante de Y dans la direction de X .

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

Définition 1.10 *Soient ∇ une connexion sur M et (U, ϕ) une carte sur M de coordonnées*

locales (x_1, x_2, \dots, x_n) . On définit les fonctions différentiables $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appelée les symboles de Christoffel. En générale,

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ est la dérivée covariante associé à la connexion linéaire ∇ .

Définition 1.11 Soit ∇ une connexion sur une variété différentiable M . Le tenseur de torsion de ∇ est une application

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

tel que

$$T : (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

1.1.5 Géodesiques

Définition 1.12 Une courbe γ dans une variété différentiable M muni d'une connexion linéaire ∇ est dite géodésique si

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

1.2 Variétés Riemanniennes

1.2.1 Métriques Riemmaniennes

Soit M une variété différentiable de dimension n .

Définition 1.13 Une métrique Riemannienne notée g est une application définie par

$$\begin{aligned} g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M), \\ (X, Y) &\mapsto g(X, Y) \end{aligned}$$

telle que g est

1. Symétrique $g(X, Y) = g(Y, X)$,

2. Non dégénérée $g(X, X) = 0 \implies X = 0$,

3. Définie positive $g(X, X) \geq 0$,

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.14 Une variété différentiable M munie d'une métrique Riemannienne g est dite variété Riemannienne notée (M, g) .

Une métrique Riemannienne g sur M définit sur chaque espace tangent un produit scalaire donnée par

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_p = g(u, v) \mid u, v \in T_p M$$

La norme d'un vecteur v de $T_p M$ est

$$\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$$

L'angle entre deux vecteurs u et v de $T_p M$ est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ telle que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

La longueur d'une courbe C^1 par morceaux $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est définie par

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

La longueur d'une courbe est invariante par reparamétrage régulier. La distance entre $x, y \in M$ est définie par

$$d(x, y) = \inf L(\gamma)$$

Une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est paramétrée par la longueur d'arc ou unitaire si

$$\|\gamma'\| = 1$$

1.2.2 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.15 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Une connexion linéaire ∇ est dite de Levi-Civita si

1. ∇ est symétrique si le tenseur de torsion est nul i.e. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
2. ∇ est compatible avec g i.e. $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.

Théorème 1.16 Une variété Riemannienne (M, g) admet une et une seule connexion de Levi-Civita.

1.3 Vecteurs de Killing

Définition 1.17 Soit (M, g) une variété Riemannienne. Le champ de vecteur V sur M est appelé un champ de vecteur de Killing s'il satisfait l'équation de Killing

$$g(\nabla_Y V, Z) + g(\nabla_Z V, Y) = 0, \forall Y, Z \in \Gamma(TM) \quad (1.1)$$

En particulier, les champs vecteurs de Killing définissent une classe importante de champs magnétiques appelés champs magnétiques de Killing et de plus les trajectoires correspondant aux champs magnétiques de Killing sont appelées courbes magnétiques de Killing qu'on va voir au chapitre 2.

1.4 Repère de Serret-Frenet

Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc s . On supposera ici les courbes paramétrées bi-régulières, i.e. γ' et γ'' linéairement indépendants en tout point.

On a

$$\gamma'(s) = T(s), \quad \|T(s)\| = 1$$

qui donne

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1$$

et

$$\nabla_T \langle T(s), T(s) \rangle = 2 \langle \nabla_T T(s), T(s) \rangle = 0$$

d'où les vecteurs $\nabla_T T(s)$ et $T(s)$ sont orthogonaux et on a la définition.

Définition 1.18 *Le vecteur normal unitaire (appelé aussi vecteur normal principal) est donné par*

$$N(s) = \frac{\nabla_T T(s)}{\|\nabla_T T(s)\|}$$

et la fonction $\|\nabla_T T(s)\|$ est appelée la courbure de γ notée par κ .

Remarque 1.19 *On a donc, comme pour les courbes planes*

$$\nabla_T T(s) = \kappa(s)N(s), \quad (1.2)$$

mais ici la courbure est par définition, positive et le vecteur unitaire normal est orienté dans la même direction que $\nabla_T T(s)$.

Définition 1.20 *On définit ensuite le vecteur unitaire $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ qui complète la base orthonormée directe $\{T, N, B\}$ appelé repère de Serret-Frenet.*

On considère $\nabla_T B(s)$, c'est un vecteur orthogonal à $B(s)$ mais aussi à $T(s)$ car

$$\nabla_T B(s) = \nabla_T T(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge \nabla_T N(s) = T(s) \wedge \nabla_T N(s)$$

donc $\nabla_T B(s)$ est colinéaire avec $N(s)$ et on peut définir une fonction en s appelée la torsion notée par τ , définie par l'équation suivante

$$\nabla_T B(s) = -\tau(s)N(s).$$

Certains auteurs définissent la torsion par

$$\nabla_T B(s) = \tau(s)N(s).$$

Remarque 1.21 *La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit trois fois dérivable, ensuite que la courbe soit bi-régulière au point où l'on veut définir la torsion (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire, en un point non bi-régulier, on ne peut pas définir le vecteur normal unitaire car $T'(s) = 0$). On observera aussi que la condition de bi-régularité impose que la courbure ne s'annule pas.*

On calcule maintenant les coordonnées de $\nabla_T N$ dans la base $\{T, N, B\}$. On a

$$\nabla_T N = aT + bN + cB.$$

où a, b et c sont des fonctions en s . Utilisant Eq.(1.2), on obtient

$$a = \langle T, \nabla_T N \rangle = -\langle \nabla_T T, N \rangle = -\kappa,$$

et

$$b = \langle N, \nabla_T N \rangle = 0$$

de plus

$$c = \langle B, \nabla_T N \rangle = -\langle \nabla_T B, N \rangle = \tau,$$

La fonction τ est appelée la torsion. D'où

$$\nabla_T N = -\kappa(s)T + \tau(s)B.$$

Définition 1.22 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc s . Les formules de Serret-Frenet pour γ est données par la matrice suivante,

$$\begin{pmatrix} \nabla_T T \\ \nabla_T N \\ \nabla_T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

où κ et τ sont la fonction courbure et la fonction torsion respectivement.

1.5 Surface d'une variété

1.5.1 Surface d'une variété

Définition 1.23 Une surface S de M est différentiable si pour un voisinage de tous point p de S il existe une paramétrisation

$$\begin{aligned} X & : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset M \\ (u, v) & \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

où les fonctions x, y et z sont différentiables.

1.5.2 Espace tangent d'une surface

Définition 1.24 Soit S une surface d'une variété M de dim 3 paramétrisé par $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de M .

On définit les vecteur tangent à S par

$$\begin{aligned} X_u(u, v) & = x_u(u, v) e_1 + y_u(u, v) e_2 + z_u(u, v) e_3 \\ X_v(u, v) & = x_v(u, v) e_1 + y_v(u, v) e_2 + z_v(u, v) e_3 \end{aligned}$$

Définition 1.25 Le plan passant par un point P d'une surface régulière différentiables S de M qui est engendré par les vecteurs $\vec{X}_u(p)$ et $\vec{X}_v(p)$ est appelé le plan tangent à la surface S à P .

Définition 1.26 Le vecteur normal à la surface au point p sera notée $N(p)$ (pour simplifier on le note seulement par $N(p)$) et supposée être un vecteur unitaire $|N(p)| = 1$. En particulier, Le vecteur normal peut être identifié avec le vecteur $\frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ et on a

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$$

Chapitre 2

Courbes magnétiques

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n . Un champ magnétique est une 2-forme fermée noté F sur (M, g) associée à une force de Lorentz définie par le champ de tenseur Φ de type $(1, 1)$ donnée par

$$g(\Phi(X), Y) = F(X, Y), \forall X, Y \in \chi(M)$$

Les courbes magnétiques de F sont des courbes qui vérifient l'équation de Lorentz (parfois appelé équation de Newton) définie par

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \Phi(\gamma'). \tag{2.1}$$

Ainsi l'équation de Lorentz généralise l'équation satisfaite par les géodisiques de (M, g) , à savoir

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0,$$

d'un point de vue des systèmes dynamiques, une géodisique correspond à une trajectoire d'une particule sans action d'un champ magnétique. Nous avons

$$\frac{d}{dt} g(\gamma', \gamma') = 2g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma') = 0$$

donc les courbes magnétiques (trajectoires) ont une vitesse constante $v(t) = \|\gamma'\| = v_0$. Lorsque la courbe magnétique $\gamma(t)$ est paramétrée par la longueur d'arc, on l'appelle une courbe magné-

tique normale.

Notons que, le produit vectoriel de deux champs vectoriels $X, Y \in \chi(M)$ est défini par

$$g(X \wedge Y, Z) = dv_g(X, Y, Z), \forall Z \in \chi(M).$$

Si V est un champ vectoriel de Killing sur M , soit

$$F_V = \iota_V dv_g$$

le champ magnétique de Killing correspondant. Par ι nous désignons le produit intérieur.

Alors, la force de Lorentz F_V est

$$\Phi(X) = V \wedge X.$$

Par conséquent, l'équation de force de Lorentz (2.1) peut être réécrite comme

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = V \wedge \gamma'. \quad (2.2)$$

Dans ce qui suit nous considérons l'espace Euclidien \mathbb{E}^3 , muni du produit scalaire usuel \langle, \rangle et pour simplifié, les courbes magnétique de Killing correspondant à V seront notées par V -courbe magnétique. (Voir [2])

Proposition 2.1 *Les vecteurs de Killing sur l'espace Euclidien \mathbb{E}^3 qui sont des solutions fondamentales de (1.1) sont*

$$\begin{cases} K_{1,2,3} = \partial_x, \partial_y, \partial_z, \\ K_{4,5,6} = -y\partial_x + x\partial_y, -z\partial_y + y\partial_z, z\partial_x - x\partial_z \end{cases}$$

Par la suite on étudie seulement pour les deux vecteurs de Killing $K_3 = \partial_z$ et $K_4 = -y\partial_x + x\partial_y$. Les autres champs de vecteurs de Killing donnent lieu à des classifications analogiques pour les courbes magnétiques correspondantes.

2.1 $K_{1,2,3}$ -Courbes magnétiques dans \mathbb{E}^3

On donne dans cette section les formes explicites des K_3 -Courbes magnétiques dans \mathbb{E}^3 par le Théorème suivant.

Théorème 2.2 *Les courbes magnétiques coresspondantes au vecteur de Killing $K_3 = \partial_z$ dans \mathbb{E}^3 sont données explicitement par*

$$\begin{aligned} \gamma & : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ t & \mapsto (a \cos t + x_0, a \sin t + y_0, bt + z_0) \end{aligned}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Preuve. L'équation (2.2) des courbes magnétiques sur \mathbb{E}^3 devienne

$$\gamma'' = K_3 \wedge \gamma'$$

Soit γ est une courbe sur \mathbb{E}^3 définie par

$$\begin{aligned} \gamma & : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ t & \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Alors γ est une courbe magnétique si et seulement si

$$\gamma'' = \partial_z \wedge \gamma'$$

qui donne

$$(x''(t), y''(t), z''(t)) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{vmatrix}$$

qui est le système différentielle du second ordre suivant

$$\begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

La solution de la troisième équation donne

$$z = bt + z_0$$

et pour le système

$$\begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} x = a \cos t + x_0 \\ y = a \sin t + y_0 \end{cases}$$

d'où la solution générale est

$$\begin{cases} x = a \cos t + x_0 \\ y = a \sin t + y_0 \\ z = bt + z_0 \end{cases}$$

qui est le résultat du Théorème. ■

2.2 $K_{4,5,6}$ -Courbes magnétiques dans \mathbb{E}^3

Les formes explicites des K_4 -Courbes magnétiques dans \mathbb{E}^3 sont déterminés par le Théorème suivant.

Théorème 2.3 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ une courbe régulière. γ est une courbe magnétique associée au vecteur de Killing K_4 si et seulement si γ est paramétrée par :

1.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) = C_1 e^{\sqrt{c_1}t} - C_2 e^{-\sqrt{c_1}t} \\ y(t) = C_1 e^{\sqrt{c_1}t} + C_2 e^{-\sqrt{c_1}t} \\ z(t) = c_1 t + C_3 \end{pmatrix}$$

où $c_1, C_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

2.

$$\gamma(t) = \left(\rho(t) \sin \theta, \rho(t) \cos \theta, -\frac{1}{2} \int \rho^2(t) dt \right)$$

avec θ est une constant de $[0, 2\pi]$ et $\rho(t) > 0$ satisfait l'équation différentielle ordinaire d'ordre

$$\rho'' + a\rho^3 + b\rho = 0.$$

Preuve. Notre but est de diterminer les courbes magnétiques associée au vecteur de Killing K_4 . L'Eq (2.2) donne l'équation sivante

$$\gamma'' = K_4 \wedge \gamma'$$

Soit γ est une courbe sur \mathbb{E}^3 définie par

$$\begin{aligned} \gamma & : \quad I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ t & \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

Alors γ est une K_4 -courbe magnétique si et seulement si

$$\gamma'' = K_4 \wedge \gamma'$$

qui donne

$$(x''(t), y''(t), z''(t)) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -y & x & 0 \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{vmatrix}$$

qui est le système (S) différentielle ordinaire du second ordre suivant

$$S : \begin{cases} x'' = xz' \\ y'' = yz' \\ z'' = -(xx' + yy') \end{cases} . \quad (2.3)$$

Par intégration de la troisième équation, (S) devient

$$S : \begin{cases} x'' = xz' \\ y'' = yz' \\ z' = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c \end{cases} \quad (2.4)$$

où c est une constante arbitraire.

Cas I : Si $z' = 0$, la première et la deuxième équation dans le système 2.3 deviennent

$$\begin{cases} x(t) = a_1 t + b_1, & a_1, b_1 \in \mathbb{R} \\ y(t) = a_2 t + b_2, & a_2, b_2 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.5)$$

après remplaceant x , y dans l'Eq (2.4), on obtient

$$(a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 = 2c \quad \forall t \in I,$$

donc cet cas est impossible. Il s'ensuit qu'on ne peut pas avoir de courbes magnétiques horizontales correspondant à K_4 pour ce cas.

Cas II : Si $z' = c_1$ constante non nulle, on a

$$z' = c_1 t + c_2 \mid c_2 \in \mathbb{R}$$

et la solution du système (S_1)

$$S_1 : \begin{cases} x'' = c_1 x \\ y'' = c_1 y \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} x(t) = C_3 e^{\sqrt{c_1} t} + C_4 e^{-\sqrt{c_1} t} \\ y(t) = C_1 e^{\sqrt{c_1} t} + C_2 e^{-\sqrt{c_1} t}, \end{cases}$$

et en substituant les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ dans (S)₃ on obtient

$$\left(C_1 e^{\sqrt{c_1} t} + C_2 e^{-\sqrt{c_1} t} \right)^2 + \left(C_3 e^{\sqrt{c_1} t} + C_4 e^{-\sqrt{c_1} t} \right)^2 = 2(c - c_1) > 0$$

qui implique que

$$\begin{cases} C_1 C_2 + C_3 C_4 = c_1 - c \\ C_1 = -C_3 \\ C_2 = -C_4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{c_1 - c}{2C_1} \\ C_3 = -C_1 \\ C_4 = -\frac{c_1 - c}{2C_1} \end{cases} \quad (2.6)$$

Ainsi, la solution du système (S) est

$$\begin{cases} x(t) = -Ce^{\sqrt{c_1}t} - \frac{c_1-c}{2C}e^{-\sqrt{c_1}t} \\ y(t) = Ce^{\sqrt{c_1}t} + \frac{c_1-c}{2C}e^{-\sqrt{c_1}t}, \\ z(t) = c_1t + c_2 \end{cases}$$

où $c_{1,2}, C_1 = C$ sont des réels. La courbe paramétrée par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) = -Ce^{\sqrt{c_1}t} - \frac{c_1-c}{2C}e^{-\sqrt{c_1}t} \\ y(t) = Ce^{\sqrt{c_1}t} + \frac{c_1-c}{2C}e^{-\sqrt{c_1}t}, \\ z(t) = c_1t + c_2 \end{pmatrix}$$

est une courbe K_4 -magnétique.

Cas III : Si z' est une fonction non constante, le système (S) est

$$S : \begin{cases} x'' = xz' \\ y'' = yz' \\ z' = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''y - xy'' = 0 \\ y'' = yz' \\ z' = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c \end{cases}$$

$$S : \begin{cases} x'y - xy' = c_1 \\ y'' = yz' \\ z' = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c \end{cases} \quad \text{où } c_1 \in \mathbb{R}$$

suivant la difficulté de la résolution du système (S) , on cherche que les solutions où $c_1 = 0$, ainsi le système (S) est sous la forme

$$S : \begin{cases} x'y - xy' = 0 \\ y'' = yz' \\ z' = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_1 \end{cases}$$

On a la solution de l'équation $(S)_1$ est

$$x = c_2y \mid c_2 \in \mathbb{R}$$

le système (S) devient

$$S : \begin{cases} x = c_2 y \\ y'' = -\frac{1}{2}y^3(c_2^2 + 1) + y c_1 \\ z' = -\frac{1}{2}y^2(c_2^2 + 1) + c_1 \end{cases}$$

par les coordonnées cylindriques il devient

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t), \\ z(t) = z(t) \end{cases}$$

où $\rho(t) > 0$ et $\theta(t) \in [0, 2\pi]$, l'équation $(S)_1$ donne

$$\tan \theta(t) = \frac{1}{c_2} \Rightarrow \theta(t) \text{ est une constante}$$

d'où l'équation $(S)_2$ implique

$$\rho'' = -\frac{1}{2}(c_2^2 + 1) \sin \theta \rho^3 + c_1 \sin \theta \rho$$

et

$$z = -\frac{1}{2} \int \rho^2 dt$$

Alors, la courbe paramétrée par

$$\gamma(t) = \left(\rho(t) \sin \theta, \rho(t) \cos \theta, -\frac{1}{2} \int \rho^2(t) dt \right)$$

avec θ est une constante de $[0, 2\pi]$ et $\rho(t)$ satisfait l'équation

$$\rho'' + a\rho^3 + b\rho = 0$$

est une courbe K_4 -magnétique. ■

Exemple 2.4 La courbe γ paramétrée par

$$\gamma(t) = (C_1 e^{\sqrt{c_1}t} - C_2 e^{-\sqrt{c_1}t}, C_1 e^{\sqrt{c_1}t} + C_2 e^{-\sqrt{c_1}t}, c_1 t + C_3).$$

Pour $C_1 = C_2 = C_3 = 1$ et $c_1 = 3$, on présente la K_4 -Courbe magnétique γ_1 dans la Figure 2-1 pour la paramétrisation

$$\gamma_1(t) = \left(e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t}, e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t}, 3t + 1 \right)$$

et $t \in [0, 2]$.

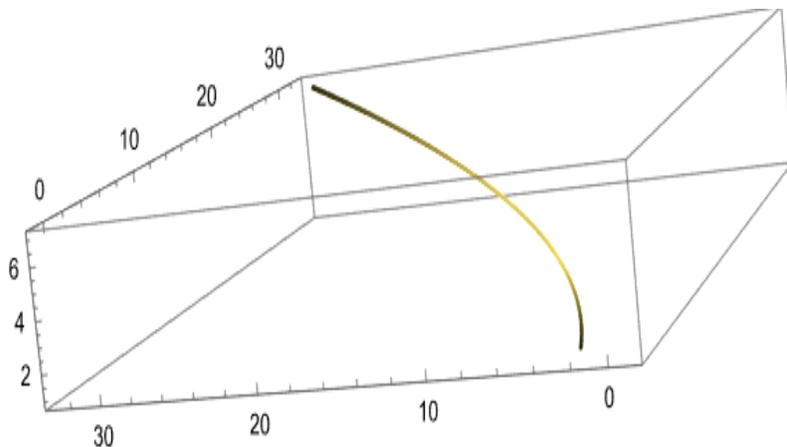


FIG. 2-1 – K_4 -Courbe magnétique γ_1

Exemple 2.5 La courbe γ paramétrée par

$$\gamma(t) = \left(\rho(t) \sin \theta, \rho(t) \cos \theta, -\frac{1}{2} \int \rho^2(t) dt \right). \quad (2.7)$$

Pour $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\rho'' + \sqrt{2}\rho^3 + \sqrt{2}\rho = 0.$$

Suivant la difficulté de la résolution d'EDO d'ordre 2 non linéaire, on présente une solution approchée en série entière d'ordre 4 telle que $\rho(0) = \rho'(0) = 1$ par

$$\rho(t) = t + 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}t^3 - \frac{\sqrt{2}}{4}t^4 + O(t^4).$$

Par l'Eq.(2.7), on présente la K_4 -Courbe magnétique γ_2 dans la Figure 2-2 de la paramétrisa-

tion

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ -\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}\sqrt{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ -\frac{1}{144}t^9 - \frac{1}{48}t^8 - \frac{1}{63}t^7 + \frac{1}{24}\sqrt{2}t^6 + \frac{7}{60}\sqrt{2}t^5 + \frac{1}{12}\sqrt{2}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$

et $t \in [0, 2]$.

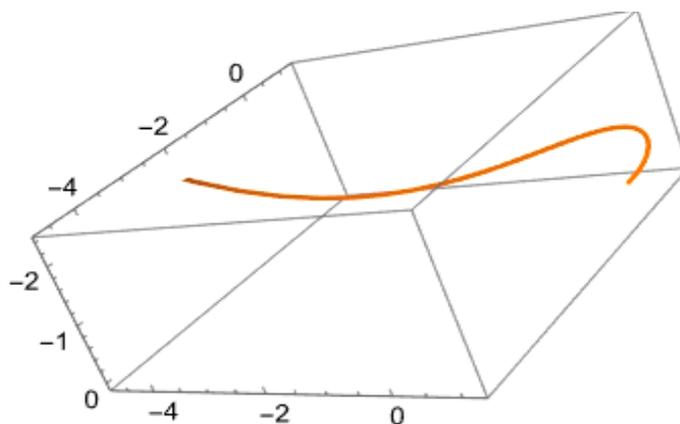


FIG. 2-2 – K_4 —Courbe magnétique γ_2

Chapitre 3

Surfaces flux

Dans ce chapitre, on détermine toutes les surfaces flux associées aux vecteurs de Killing dans \mathbb{E}^3 . (Voir [3])

Définition 3.1 Soit M une surface différentiable de champ de vecteurs normal N dans une variété riemannienne (\mathbb{N}, g) . On dit que M est une surface flux accordé au champ de vecteurs V sur (\mathbb{N}, g) si

$$g(V, N) = 0$$

partout sur M .

De plus, si V est un champ de Killing alors on dit que M est une surfaces flux accordés au vecteur de Killing V . (voir Figure 3-1)

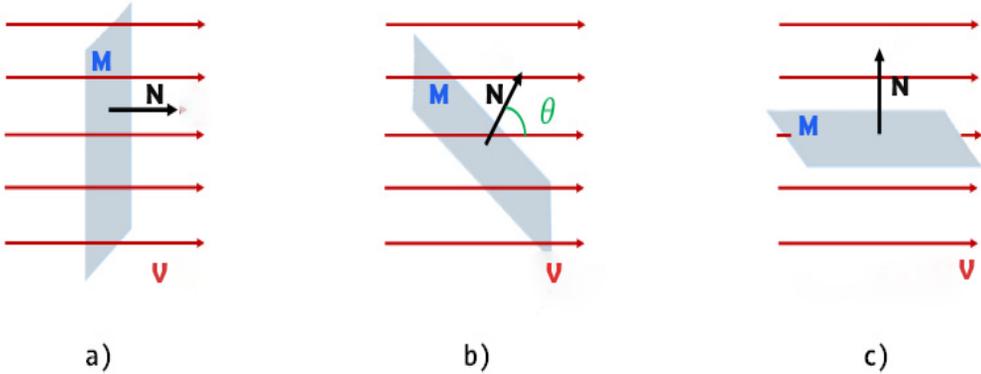


FIG. 3-1 – Surface flux M pour (c) d’un champs de vecteur V dans $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, g_{euc})$

Pour Simplifié les surfaces flux accordés aux vecteur de Killing V sont notés par V -Surfaces flux. On présente une proposition pour résoudre les equations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1 qu'on aura besoin par la suite ([4]).

Proposition 3.2 *Soient P et Q deux fonctions réelles telles que*

$$P(u, v)\partial_u h(u, v) + Q(u, v)\partial_v h(u, v) = 0$$

Alors

1. *Si $P \equiv 0$ (resp $Q \equiv 0$) alors $h(u, v) = h(u)$ (resp. $h(u, v) = h(v)$).*
2. *Si P et Q sont des fonctions non nulles on a*

$$h(u, v) = \varphi(\psi(u, v))$$

telle que ψ est la solution de l'EDP $\frac{du}{P} = \frac{dv}{Q}$, et φ fonction réelle arbitraire.

3.1 $K_{1,2,3}$ -Surfaces flux dans \mathbb{E}^3

Soit M une surface dans \mathbb{E}^3 paramétrée par $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, alors son vecteur normal unitaire N par la Definition 1.26, est donné par

$$N = \frac{1}{\|X_u \wedge X_v\|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{cases} X_u = \frac{\partial X}{\partial u} \\ X_v = \frac{\partial X}{\partial v} \end{cases}$$

Théorème 3.3 *Soit M une surface dans \mathbb{E}^3 paramétrée par*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Alors M est une surface flux de champ de vecteur de Killing

$$K_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

si et seulement si

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = 0. \quad (3.2)$$

Preuve. Soit $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ est une paramétrisation de M dans l'espace Euclidien de dimension 3 et de vecteur normal unitaire N donné par Eq.(1.26). Puisque $X(u, v)$ est une surface flux de champ vectoriel

$$K_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

on a $g(N, V) = 0$ cela implique que

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

Inversement, si nous supposons que $X(u, v)$ satisfait Eq.(3.2), alors il est facile de voir que $g(N, V) = 0$. Ainsi $X(u, v)$ est une surface flux de champ vectoriel de Killing K_3 . ■

Exemple 3.4 Soit $x(u, v) = \sqrt{uv}$ alors en utilisant Eq.(3.2), nous avons

$$\frac{v}{2\sqrt{uv}} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{u}{2\sqrt{uv}} \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

C'est une EDP linéaire d'ordre 1, par la Proposition 3.2, on a l'équation caractéristique

$$\frac{dv}{v} = -\frac{du}{u} \implies \psi(u, v) = uv = c, \text{ constant}, \quad (3.3)$$

qui donne

$$y(u, v) = \varphi(uv).$$

Alors la surface M paramétrisée par

$$X(u, v) = (\sqrt{uv}, \varphi(uv), z(u, v))$$

est une K_4 -surface flux, où φ est une fonction réelle arbitraire. On présente la K_4 -surface flux M_1 dans la Figure 3-2 pour la paramétrisation

$$X(u, v) = (\sqrt{uv}, \sin^3(uv), \sin(2uv))$$

et $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

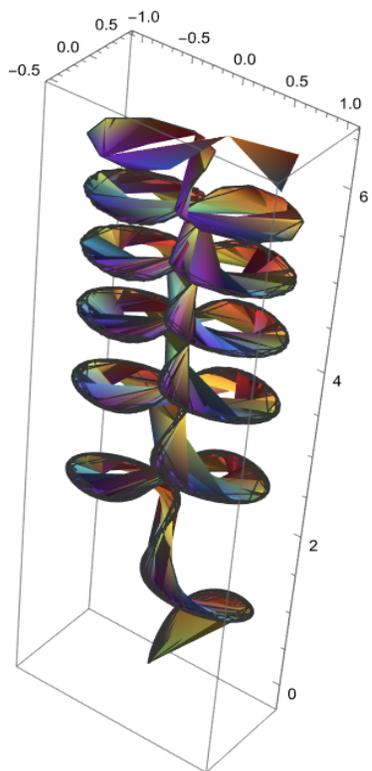


FIG. 3-2 – K_4 -surface flux M_1

3.2 $K_{4,5,6}$ -Surfaces flux dans \mathbb{E}^3

Théorème 3.5 Soit M une surface dans \mathbb{E}^3 paramétrisée par

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Alors M est une surface flux de champ de vecteur de Killing

$$K_4 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

si et seulement si

$$\frac{\partial z}{\partial u} \left(x \frac{\partial x}{\partial v} + y \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial z}{\partial v} \left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial y}{\partial u} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Preuve. Soit $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ une parâétrisation de M dans \mathbb{E}^3 . Puisque $X(u, v)$ est une surface flux de champ vectoriel de Killing

$$K_4 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

et par la Définition 3.1 et la valeur du vecteur normal N donné dans l'Eq.(3.1), on a

$$g(N, K_4) = 0,$$

ce qui implique après un calcul, l'équation suivante

$$\frac{\partial z}{\partial u} \left(x \frac{\partial x}{\partial v} + y \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial z}{\partial v} \left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial y}{\partial u} \right) = 0$$

Inversement, si nous supposons que l'Eq (3.4) est vrai, alors il est facile de voir que $g(N, K_4) = 0$.

■

Exemple 3.6 Soit $x(u, v) = \cos u$ et $y(u, v) = \sin v$ alors en utilisant Eq.(3.4) nous avons

$$\cos v \sin v \frac{\partial z}{\partial u} + \cos u \sin u \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

C'est une EDP linéaire d'ordre 1, par la Proposition 3.2, on a l'équation caractéristique

$$\frac{du}{dv} = \frac{\cos v \sin v}{\cos u \sin u} \implies \psi(u, v) = \cos 2v - \cos 2u = c, \text{ constant} . \quad (3.5)$$

qui donne

$$z(u, v) = \varphi(\cos 2v - \cos 2u)$$

Alors la surface M paramétrisée par

$$X(u, v) = (\cos u, \sin v, \varphi(\cos 2v - \cos 2u))$$

est une K_4 -surface flux, où φ est une fonction réelle arbitraire. On présente la K_4 -surface flux M_2 dans la Figure 3-3 pour la paramétrisation

$$X(u, v) = (\cos u, \sin v, \sin((\cos 2v - \cos 2u)^3))$$

et la K_4 -surface flux M_3 dans la Figure 3-4 pour la paramétrisation

$$X(u, v) = (\cos u, \sin v, \sin^3(\sqrt{\cos 2v - \cos 2u} + (\cos 2v - \cos 2u)))$$

et $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

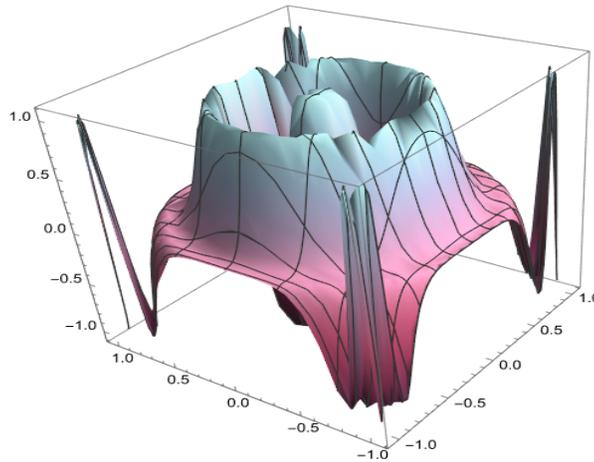


FIG. 3-3 – K_4 -surface flux M_2

Exemple 3.7 Soit $x(u, v) = (C + a \cos v) \cos u$, $y(u, v) = (C + a \cos v) \sin u$ alors en utilisant Eq.(3.4) nous avons

$$(C + a \cos v)(-a \sin v) \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

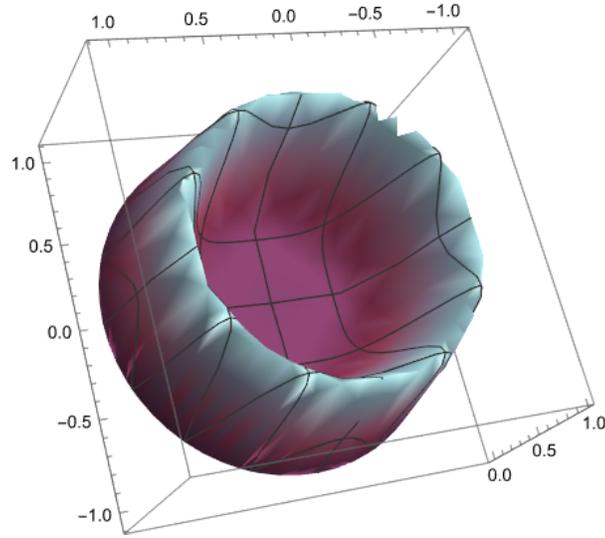


FIG. 3-4 – K_4 –surface flux M_3

C'est une EDP linéaire d'ordre 1, par la Proposition 3.2 on a l'équation caractéristique

$$z(u, v) = \varphi(v)$$

Alors la surface M paramétrisée par

$$X(u, v) = ((C + a \cos v) \cos u, (C + a \cos v) \sin u, \varphi(v))$$

est une K_4 -surface flux, où φ est une fonction réelle arbitraire. On présente la K_4 –surface flux M_4 dans la Figure 3-5 pour la paramétrisation

$$X(u, v) = ((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v) ,$$

et la K_4 –surface flux M_5 dans la Figure 3-6 pour la paramétrisation

$$X(u, v) = ((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, 2 \cos v \sin v)$$

et $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

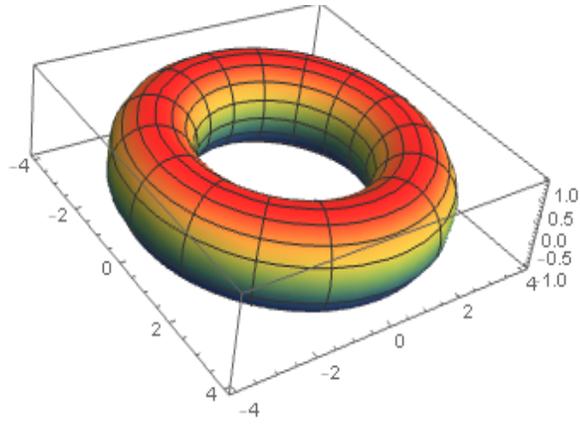


FIG. 3-5 – K_4 -surface flux M_4

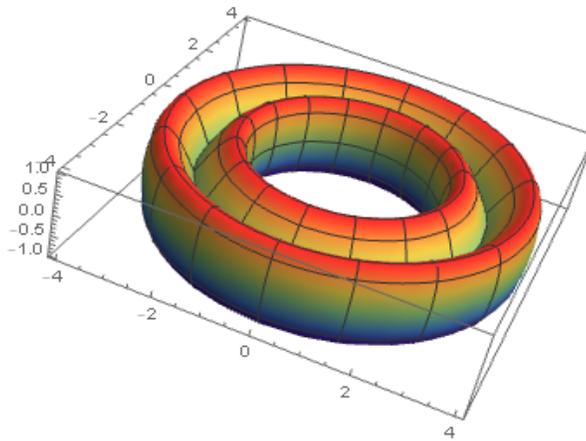


FIG. 3-6 – K_4 -surface flux M_5

Bibliographie

- [1] M. Barros, A. Romero. Magnetic vortices, EPL 77 (2007), 34002.
- [2] Simona Luiza Druță-Romaniuc et Marian Ioan Munteanu, Magnetic curves corresponding to Killing magnetic fields in \mathbb{E}^3 , J. Math. Phys. 52 (2011), 113506.
- [3] Z. Ozdemir , I. Gok, Y. Yayli, F.N. Ekmekci, Killing magnetic flux surfaces in Euclidean 3-space, Honam Math. J. 41(2), (2019), 329-342. doi.org/10.5831/HMJ.2019.41.2.329
- [4] A. Walter. Strauss. Partial differential equations : An introduction, ISBN 0-471-57364-7 (Wiley). The Mathematical Gazette, 77(479), Lord, N. (1993), 286-287. doi :10.2307/3619758
by
- [5] [http ://fusionwiki.ciemat.es/wiki/Flux_surface](http://fusionwiki.ciemat.es/wiki/Flux_surface).