

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.



Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Filière : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique des Processus et
Applications

par

Mekki Mohamed Redha¹

Sous la direction de

Dr R. Rouane

Thème :

Estimation non paramétrique pour les processus semi-markoviens

Soutenue le 20/06/2023 devant le jury composé de

Dr.M. Kadi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Président
Dr.R. Rouane	Université de Mustafa Stambouli Mascara	Encadreur
Dr.F. Benziadi	Université de Saïda Dr. Moulay Tahar	Examinatrice

Année univ.: 2022/2023

1. e-mail : m.mekki41@yahoo.com

✧ Remerciements ✧

On remercie Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

*Je tiens à remercier mon encadreur **Dr. Rachida ROUANE**, pour le temps et la patience qu'elle a manifesté à mon égard durant ce mémoire en me fournissant d'excellentes conditions logistiques. Je garderai dans mon coeur votre générosité, votre compréhension et votre efficacité. Pour tout ce que vous m'avez donné, je vous remercie très sincèrement.*

*Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi à **Dr. Mokhtar KADI** pour avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance. Que vous soyez assuré de mon entière reconnaissance.*

***Dr. Fatima BENZIADI** a accepté d'être examinatrice de ce mémoire, et je lui remercie, de même que pour sa participation au Jury, elle a également contribué par ses nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire, et je l'en suis très reconnaissant.*

*J'adresse mes sincères remerciements à tous les membres du laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistique et Applications et à la tête le directeur **Pr. Abdeldjebbar KANDOUCI**.*

Je dois un remerciement à tous les enseignants de département de Mathématiques pour leurs qualités scientifiques et pédagogiques.

Je tiens à remercier chaleureusement, tout mes proches et tout ceux qui, de près ou de loin, m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

je remercie tout les membres de ma famille surtout mon père et ma mère.

Table des matières

Notations	3
Introduction générale	5
1 Généralités sur les chaînes de Markov	8
1.1 Définitions et propriétés de base	8
1.1.1 Matrices stochastiques	9
1.2 Chaînes de Markov à temps discret	9
1.3 Classification des états	10
1.3.1 Relation de communication entre états	10
1.3.2 États périodiques	11
1.3.3 États récurrents et états transients	11
1.4 Distributions stationnaires et distributions limites	12
1.5 Processus de Markov à temps continu	14
2 Processus semi-Markoviens à temps continu	16
2.1 Processus semi-markoviens et leurs mesures associées	16
2.1.1 Processus de renouvellement de Markov	17
2.1.2 Matrice de renouvellement	17
2.2 Processus semi-markovien en temps continu	18
2.2.1 Régularité du processus semi-markovien	19
2.3 Distribution du temps de séjour	19
3 Estimation non paramétrique des processus semi-markoviens à temps continu	21
3.1 Estimateurs empiriques	21
3.1.1 Processus de comptage associés PRM	21
3.1.2 Construction des estimateurs	22
3.1.3 Propriétés asymptotiques des estimateurs	22
3.2 Estimateurs à noyaux	25
3.2.1 Construction des estimateurs	25

3.2.2	Hypothèses	26
3.2.3	Propriétés asymptotiques des estimateurs	27
4	Application et conclusion	36
4.1	Comparaison	42
4.1.1	Modèle de Markov homogène	42
4.1.2	Modèle semi-markovien	44
4.2	Test de Wald	46
4.3	Conclusion	47
5	Annexes	48
5.1	Théorème de Slutsky	48
5.2	Théorème de Glivenko-Cantelli	48
5.3	Théorème d'Anscombe	48
5.4	Théorème central limite	49
5.4.1	TCL pour martingales	49

Notations

CM	Chaîne de Markov
CMI	Chaîne de Markov Immergée
PSM	Processus Semi Markovien
PRM	Processus de Renouvellement Semi Markovien
PMI	Processus de Markov Immergée
NSM	Noyau Semi Markovien
ERM	Équation de Renouvellement Markovien
$p.s.$	presque sûrement
$v.a.$	variable aléatoire
$TLCF$	Théorème de la Limite Centrale Fonctionnel
IC	Intervalle de Confiance
MVE	Maximum de Vraisemblance Exact
\mathbb{N}	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$	ensemble des entiers naturels strictement positifs
$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$	ensemble des nombres reels non negatifs
$\mathbb{R}_+^* := (0, \infty)$	ensemble des nombres reels strictement positifs
E	espace d'état de la CM ou de la PSM
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace probabilisé
\mathbb{P}	probabilité
$\mathbb{P}_i(\cdot)$	probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot \mid J_0 = i)$
\mathbb{E}	espérance
\mathbb{E}_i	espérance conditionnelle correspondant à \mathbb{P}_i
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	covergence en loi

$\xrightarrow{p.s.}$	convergence presque sûrement
$Z = (Z_k)_{k \in \mathbb{R}_+}$	Processus semi-markovien
$(J, S) = (J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Processus de renouvellement markovien
$S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Processus des instants de sauts
$\mathbf{X} := (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$	temps entre deux sauts successifs (temps de séjour)
$\alpha = (\alpha_i; i \in E)$	loi initiale de la PSM
$\pi = (\pi_i; i \in E)$	loi stationnaire de la PSM
$\nu = (\nu_i; i \in E)$	loi stationnaire de la PMI
$\mathbf{q}(\cdot) = (q_{ij}(\cdot); i, j \in E)$	noyau semi-markovien
$\mathbf{Q}(\cdot) = (Q_{ij}(\cdot); i, j \in E)$	noyau semi-markovien cumulatif
$f_{ij}(\cdot)$	loi conditionnelle du temps de séjour en i , avant d'aller en j
$\mathbf{f}(\cdot) = (f_{ij}(\cdot); i, j \in E)$	matrice des lois conditionnelles du temps de séjour
$F_{ij}(\cdot)$	fonction de répartition conditionnelle du temps de séjour en i , avant d'aller en j
$\mathbf{F}(\cdot) = (F_{ij}(\cdot); i, j \in E)$	matrice des fonctions de répartition conditionnelles du temps de séjour
$N(T)$	nombre de sauts dans l'intervalle $[1, T]$
$N_i(T)$	nombre de passages par l'état i dans l'intervalle $[1, T]$
$N_{ij}(T)$	nombre de transitions de i vers j de le PSM dans l'intervalle $[1, T]$
$N_{ij}(t, T)$	nombre de transitions de i vers j de le PSM dans $[1, T]$, avec temps de séjour t dans l'état i

Introduction générale

Le processus de Markov, nommé d'après le mathématicien russe Andreï Markov, est un modèle probabiliste largement utilisé pour décrire les systèmes dynamiques qui évoluent au fil du temps. Il est basé sur le concept de mémoire limitée, ce qui signifie que l'état futur du système dépend uniquement de son état présent et ne dépend pas de son historique complet. Les processus de Markov trouvent des applications dans de nombreux domaines, tels que l'économie, l'informatique, la physique, la biologie et bien d'autres.

Un sous-type important de processus de Markov est le processus semi-Markov. Dans un processus semi-Markov, les événements ne se produisent pas à des instants discrets, mais plutôt selon des durées aléatoires. Cela signifie que le temps entre les transitions d'état n'est pas nécessairement fixe, mais peut suivre une distribution de probabilité spécifique. Les processus semi-Markov sont donc plus flexibles pour modéliser des systèmes dont les transitions entre les états sont irrégulières ou dépendent de facteurs aléatoires.

L'idée du processus semi-Markov remonte aux travaux du mathématicien français Paul Lévy [24]. Il a introduit la notion de processus de renouvellement, qui est étroitement liée aux processus semi-Markov. Par la suite, d'autres chercheurs, tels que Eugene Dynkin et Anatolii Yushkevich, ont contribué à l'avancement de la théorie des processus semi-Markov. Ces chercheurs ont contribué à l'élaboration de méthodes analytiques pour étudier les propriétés des processus semi-markoviens et ont proposé des applications pratiques dans différents domaines. Dans le domaine des files d'attente, par exemple, ils permettent de modéliser les temps de service variables, les temps d'arrivée non exponentiels, les priorités changeantes, etc. Cela permet d'obtenir des estimations plus précises des mesures de performance des systèmes de files d'attente, comme le temps d'attente moyen, le taux de saturation, etc.

Dans le domaine de la maintenance préventive, les processus semi-markoviens sont utilisés pour modéliser les durées de vie des équipements, les temps de répara-

tion, les défaillances et les politiques de maintenance optimales. Ils aident à prendre des décisions éclairées concernant la planification de la maintenance, l'optimisation des ressources et la minimisation des coûts liés aux défaillances.

En finance, les processus semi-markoviens sont utilisés pour modéliser les mouvements des prix des actifs financiers, en prenant en compte les durées de séjour dans différents états du marché. Cela permet de développer des modèles plus réalistes pour la prévision des prix, l'évaluation des options, la gestion des risques, etc.

L'étude des processus semi-markoviens à temps discret et continu, la modélisation des probabilités associées et les techniques d'estimation correspondantes (principalement dans un environnement non paramétrique) sont importantes à la fois du point de vue théorique et pratique. La construction des estimateurs et l'étude de leurs propriétés asymptotiques, principalement la convergence (ou consistance) et la normalité asymptotique, font l'objet de plusieurs travaux de recherche. Pour des références récentes dans ce domaine ainsi que des applications statistiques, voir, par exemple, Limnios et Oprisan, [20] et Barbu et Limnios [22].

Les processus semi-markoviens en temps continu ont été moins étudiés que ceux en temps discret, mais récemment, un intérêt croissant s'est porté sur leur inférence statistique, voir, par exemple, Limnios [21]. La plupart des procédures d'estimation existantes pour ces processus utilisent des estimateurs empiriques. Cependant, la fonction de distribution empirique est discontinue. En particulier, si l'on sait que la vraie distribution est continue, la distribution empirique peut donner de mauvaises approximations. tandis que l'estimation de noyau est une technique plus avancée qui tient compte de la structure continue de la distribution. Le choix entre les deux méthodes dépend de la complexité de la distribution, de la taille de l'échantillon et des objectifs de l'analyse.

Dans ce mémoire, nous considérons le problème de l'estimation non paramétrique par la méthode à noyau pour les processus semi markoviens en temps continu, nous étudions leur comportement asymptotique trouvée dans Ayhar et al.[9]. Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre nous donnons un aperçu et quelques concepts de base, propriétés, et théorèmes sur les chaînes de Markov homogènes et les processus de Markov homogènes en temps continu avec un ensemble d'états discret.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des processus semi Markovien à temps continu ainsi que les mesures associées. On termine par un exemple sur PSM.

Dans le troisième chapitre, nous construisons des estimateurs (empiriques et par noyaux) des principales caractéristiques d'un processus semi-markovien en temps continu : le noyau semi-markovien cumulatif, la loi conditionnelle et la fonction de répartition conditionnelle du temps de séjour, la loi et la fonction de répartition du temps de séjour. L'objectif principal est donc d'établir certaines propriétés asymp-

totiques des estimateurs construits.

Dans le quatrième chapitre, nous comparons le modèle de Markov homogène et le modèle semi-markovien, nous appliquons les deux modèles au jeu de données de la région nord de la mer Égée que nous utilisons de l'article de (Votsi et al.,[18]).

Enfin, les définitions et outils les plus importants qui clarifient de nombreuses notions et qui seront utilisés dans les preuves des principaux résultats sont rassemblés en annexe.

Chapitre 1

Généralités sur les chaînes de Markov

Les chaînes de Markov fournissent des moyens très puissants et efficaces pour la description et l'analyse des propriétés des systèmes dynamiques (files d'attente, réseaux informatiques et téléphoniques, physique, biologiques ou économiques \dots etc). Leurs utilisations pour la modélisation des phénomènes aléatoires évoluant dans le temps, donnent aux chaînes de Markov une place importante. La structure simple des chaînes de Markov permet de dire beaucoup de choses sur le comportement et l'évolution de ses phénomènes. En effet, l'ensemble des études mathématiques des processus aléatoires peut être considérée comme une généralisation d'une manière ou d'une autre de la théorie des chaînes de Markov.

Dans ce chapitre, nous donnons d'abord une introduction au concepts de base de la théorie des chaînes de Markov en temps discrets et en temps continus. Nous présentons également les propriétés fondamentales des chaînes de Markov.

1.1 Définitions et propriétés de base

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X(t), t \in T\}$ où chaque variable aléatoire $X(t)$ est indexée par le paramètre $t \in T$. Si T est un ensemble de \mathbb{R}_+ , alors t signifie temps.*

Généralement $X(t)$ représente l'état du processus stochastique au temps t .

- *Si T est dénombrable, i.e $T \subseteq \mathbb{N}$, alors nous disons que $X(t), t \in T$ est un processus à temps discret.*
- *Si T est un intervalle de $[0, \infty)$, alors le processus stochastique est dit un processus à temps continu.*

L'ensemble des valeurs de $X(t)$ est appelé l'espace d'état, qui peut également être soit discret (fini ou infini dénombrable) ou continu (un sous-ensemble de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n), donc nous écrivons $(X_n)_{n \geq 0}$ pour le processus à temps discret et $(X_t)_{t \geq 0}$ pour

le processus à temps continu.

1.1.1 Matrices stochastiques

Définition 1.1.2. Une matrice stochastique est une matrice (a_{ij}) avec $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ telle que :

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0 \\ \sum_{j=1}^r a_{ij} &= 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\} \end{aligned}$$

1.2 Chaînes de Markov à temps discret

Dans ce qui suit, nous donnons les définitions de base sur les Chaînes de Markov homogènes ainsi que certaines propriétés.

Définition 1.2.1. Chaînes de Markov. Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires prenant leurs valeurs dans un espace dénombrable E (dans notre cas, nous prendrons \mathbb{N} ou un sous-ensemble de \mathbb{N}). $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov si et seulement si

$$\mathbb{P}(\underbrace{J_{n+1} = j}_{\text{le futur}} \mid \underbrace{J_0 = i_0, \dots, J_{n-1} = i_{n-1}, J_n = i}_{\text{le passé et le présent}}) = \mathbb{P}(\underbrace{J_{n+1} = j}_{\text{le futur}} \mid \underbrace{J_n = i}_{\text{le présent}}). \quad (1.1)$$

Ainsi, pour une chaîne de Markov, la probabilité d'un comportement futur particulier du processus, lorsque son présent actuel est bien connu, n'est pas modifié par toute connaissance supplémentaire du passé. Le processus est dit sans mémoire.

Soit la notation :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(J_n = j \mid J_{n-1} = i) \quad (1.2)$$

p_{ij} est appelé la probabilité de transition de l'état i vers l'état j . Lorsque cette probabilité ne dépend pas de n , nous disons que la chaîne de Markov est homogène, c'est-à-dire pour tout $n \geq 0$, on a :

$$p_{ij} = \mathbb{P}(J_n = j \mid J_{n-1} = i) = \mathbb{P}(J_1 = j \mid J_0 = i).$$

Dans toute la suite, les chaînes Markov considérées seront toutes homogènes et à espace d'états au plus dénombrable.

Définition 1.2.2. Matrice de transition La matrice

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

dont les coefficients sont les probabilités de transition p_{ij} est appelée à la fois matrice de Markov et matrice des probabilités de transitions du processus.

La i ème ligne de P , pour $i = 0, 1, \dots$, est la distribution de probabilité des valeurs J_{n+1} avec la condition que $J_n = i$. Si le nombre d'états est fini, alors P est une matrice carrée finie dont l'ordre (le nombre de lignes) est égal au nombre d'états. Les quantités p_{ij} satisfont les conditions :

1. $p_{ij} \geq 0$ pour $i, j = 0, 1, 2, \dots$.
2. $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$ pour tout $i = 0, 1, 2, \dots$.

les nombres p_{ij} sont des probabilités donc des nombres positifs.

Proposition 1.2.1. [4] Soit $(J_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P .

1. Le temps de séjour de la chaîne dans un état $i \in E$ est une variable aléatoire géométrique de paramètre $1 - p_{ii}$.
2. La probabilité que la chaîne entre dans l'état j lorsqu'elle quitte l'état i est la suivante $\frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}$ (pour $p_{ii} \neq 1$).

1.3 Classification des états

1.3.1 Relation de communication entre états

Définition 1.3.1. (État accessible) Soient i et j deux états. On dit que l'état j est accessible à partir de l'état i s'il existe $m > 0$ tel que $p_{ij}^m > 0$.

Un état i est toujours accessible à partir de lui-même, car $p_{ii}^{(0)} = 1$.

Définition 1.3.2. (États communicants) On dit que les états i et j communi-
quants si i est accessible à partir de j et j est accessible à partir de i , ce qui est désigné par $i \leftrightarrow j$.

La relation de communication (\leftrightarrow) est une relation d'équivalence, et elle génère une partition de l'espace des états E en classes d'équivalence disjointes appelées classes de communication.

Définition 1.3.3. *Une chaîne de Markov est **irréductible** s'il existe une seule classe de communication.*

1.3.2 Etats périodiques

Définition 1.3.4. ((Périodicité) *La période $d(i)$ d'un état i est définie par :*

$$d(i) = \text{pgcd}\{n \in \mathbb{N}^*; p_{ii}(n) > 0\}$$

(avec $d(i) = 0$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{ii}(n) = 0$).

Si $d(i) = 1$, i est dit apériodique.

Proposition 1.3.1. [4] *Tous les états d'une même classe de communication ont la même période.*

Remarque 1.3.1. *Une classe dont un élément admet une boucle, (c'est-à-dire $p_{ii} > 0$), est obligatoirement apériodique (c'est-à-dire de période 1), mais ce n'est pas une condition nécessaire.*

1.3.3 Etats récurrents et états transients

Définition 1.3.5. *Si au temps 0, la chaîne est en l'état i , la variable aléatoire*

$$T_i = \min\{n \geq 1, J_n = i\}$$

définit le temps de premier retour en i .

Définition 1.3.6. *Un état i est récurrent si partant de i on y revient sûrement, ce qui s'exprime par :*

$$\mathbb{P}(\text{il existe } n \geq 1 \text{ tel que } J_n = i | J_0 = i) = 1,$$

soit encore :

$$\mathbb{P}(T_i < +\infty | J_0 = i) = 1.$$

Un état récurrent est donc visité un nombre infini de fois.

Définition 1.3.7. *Un état i est dit transient s'il n'est pas récurrent :*

$$\mathbb{P}(T_i < +\infty | J_0 = i) < 1.$$

Un état est transient s'il n'est visité qu'un nombre fini de fois.

Par définition, une chaîne irréductible ne contient aucun état transient ou absorbant.

Définition 1.3.8. Une chaîne dont tous les états sont récurrents est dite récurrente, une chaîne dont tous les états sont transients est dite transiente.

Définition 1.3.9. La probabilité de première transition en n unités de temps, de l'état i à l'état j , notée $f_{i,j}^{(n)}$ est définie par :

$$f_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j = n | J_0 = i) = \mathbb{P}(J_n = j, J_{n-1} \neq j, \dots, J_1 \neq j | J_0 = i)$$

$f_{i,i}^{(n)}$ est la probabilité de premier retour à l'état i en n unités de temps.

Théorème 1.3.1. [4] Pour tout $i \in E$

$$1. \ i \text{ est récurrent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_{i,i}^{(n)} = 1.$$

$$2. \ i \text{ est transitoire} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_{i,i}^{(n)} < 1.$$

Définition 1.3.10. On appelle temps moyen de retour en e_j :

$$\mu_j = \mathbb{E}[T_j = n | J_0 = i] = \sum_n n p_{jj}^{(n)}$$

Il existe deux sortes d'états récurrents : les états récurrents positifs et les états récurrents nuls.

Définition 1.3.11. Un état j est récurrent positif (ou non nul) s'il est récurrent et si le temps moyen μ_j de retour est fini. Dans le cas où le temps moyen de retour est infini, l'état est dit récurrent nul.

1.4 Distributions stationnaires et distributions limites

Définition 1.4.1. Une distribution $\pi_k = (\phi_1, \phi_1, \dots, \pi_i, \dots)$ sur l'ensemble des états est une distribution stationnaire ou invariante de la chaîne $(J_n)_n$ de matrice de transition P , si :

$$\pi = \pi.P \tag{1.4}$$

$$\text{avec } \pi \geq (\phi_1, \phi_1, \dots, \pi_i, \dots) \text{ et } \sum_i \pi_i = 1 \tag{1.5}$$

L'équation (1.4) est équivalente :

$$\left(\pi_i = \sum_{j \in E} \pi_j p_{j,i} \right)_{i=1,2,\dots}$$

Interprétation : π_i désigne la proportion de temps passé par la chaîne dans l'état i lorsque le temps d'évolution de la chaîne devient infiniment long.

Théorème 1.4.1. [4] Soit π la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov si $\pi(0) = \pi$ alors $\forall k, \pi(k) = \pi$ i.e la loi $\pi(k)$ des états au temps k est invariante pour tout k .

Preuve :

$\pi(k) = \pi(0)P^k$, donc si $\pi(0) = \pi$, $\pi(1) = \pi P = \pi$ et par récurrence, $\pi(k) = \pi$

Théorème 1.4.2. [4] Si π est une distribution stationnaire, alors pour tout état récurrent i :

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i},$$

où μ_i est le temps moyen de retour à i .

Théorème 1.4.3. [4] Une chaîne transiente infinie n'admet pas de distribution stationnaire.

Preuve On démontre par l'absurde. Pour cela on suppose qu'il existe une distribution stationnaire π : alors $\pi P = \pi$. et $\pi P^n = \pi$ Pour tout état j et pour tout entier n , $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)}$; les états étant transitoires, tous les $p_{ij}^{(n)}$ tendent vers 0. $\forall j, \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_i \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_i p_{ij}^{(n)} = 0$, ce qui est contradictoire avec $\sum_j \pi_j = 1$.

Théorème 1.4.4. [4] (Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de distributions stationnaires)

Aperçu pour la démonstration Cas 1 : Si la chaîne est irréductible, elle possède une distribution stationnaire unique $\pi = \left(\frac{1}{\mu_i} \right)_{i \in E}$, si et seulement si tous les états sont récurrents positifs. (μ_i est le temps moyen de retour à i).

Cas 2 : Si la chaîne est quelconque, elle possède une distribution stationnaire π , si et seulement si la chaîne possède au moins une classe récurrente positive. Dans le cas de plusieurs classes récurrentes positives, il existe une distribution stationnaire pour chaque classe.

1.5 Processus de Markov à temps continu

Dans cette section, nous introduisons la définition et les principaux théorèmes pour les processus de Markov continus.

Un processus de Markov continu est un processus aléatoire $(J_t)_{t \in T}$ indexé par un espace continu. Dans notre cas, il sera indexé par $\mathbb{R}^+(T = \mathbb{R}^+)$

Définition 1.5.1. *Un processus stochastique $(J_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus de Markov si et seulement si, pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ avec $(t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_{n-1} < t_n)$ et pour tout $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in E^n$,*

$$\mathbb{P}(J_{t_n} = i_n \mid J_{t_{n-1}} = i_{n-1}, J_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, J_{t_1} = i_1) = \mathbb{P}(J_{t_n} = i_n \mid J_{t_{n-1}} = i_{n-1})$$

Un processus de Markov en temps continu est homogène si ne dépend pas de t . Dans ce qui suit, nous allons considérer que les processus de Markov homogènes.

Notations : On pose $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(J_{t+s} = j \mid J_s = i) = \mathbb{P}(J_t = j \mid J_0 = i)$ et $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$. On pose aussi $\vec{\pi}(t) = \mathbb{P}_{J_t}$ (vecteur ligne de composantes $\pi_x(t) = \mathbb{P}(J_t = i)$).

Propriété 1.5.1. 1. $P(t)$ est une matrice stochastique.

2. Pour tout s et pour tout t , $P(s+t) = P(s)P(t)$.

3. Pour tout s et pour tout t , $\vec{\pi}(s+t) = \vec{\pi}(s)P(t)$

Preuve

1. $p_{i,j}(t) \in [0, 1]$ car c'est une probabilité. De plus, la ligne i correspond à la loi $\mathbb{P}_{J_t}^{[J_0=i]}$ et on a bien

$$\sum_y p_{i,j}(t) = \sum_y \mathbb{P}^{[J_0=i]}([J_t = j]) = 1$$

2. Pour calculer $p_{i,j}(t+s) = \mathbb{P}^{[J_0=i]}([J_{t+s} = j])$ on va faire intervenir les différents états pouvant être occupés à l'instant t . Ainsi, on a

$$p_{i,j}(t+s) = \sum_{l \in E} p_{i,l}(t)p_{l,j}(s)$$

qui est le coefficient (i, j) de la matrice produit $P(t)P(s)$.

3.

$$\pi_j(t+s) = \mathbb{P}([J_{t+s} = j]) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}([J_{t+s} = j] \mid [J_t = i]) \mathbb{P}([J_t = i])$$

$$\pi_j(t+s) = \sum_{i \in E} \pi_i(t) p_{i,j}(s)$$

Proposition 1.5.1. [4] Soit T_i le temps d'attente dans l'état i . L'équation de Chapman Kolmogorov permet à T_i d'avoir toujours une distribution exponentielle avec un paramètre $\lambda_i > 0$

$$G_i(t) = \mathbb{P}(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad t \geq 0, \quad i \in E.$$

Chapitre 2

Processus semi-Markoviens à temps continu

Ce chapitre présente les notations et les pré-requis essentiels pour décrire le modèle semi-markovien à temps continu. Nous donnons les propriétés probabilistes de base des processus semi-markoviens et de la théorie de renouvellement markovien à temps continu. De plus, nous présentons les notions de base associées à l'inférence statistique des ces processus.

2.1 Processus semi-markoviens et leurs mesures associées

On se place, toujours sur un espace d'état fini $E = \{1, \dots, s\}$.

- Le processus stochastique $J = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à espace d'état E , J_n est l'état du système au nième temps de saut.
- Le processus de temps de sauts $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend des valeurs dans $[0, \infty)$, S_n est les instants de saut. On suppose que

$$0 = S_0 < S_1 < \dots < S_n < S_{n+1} < \dots$$

- Le processus stochastique $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à espaces d'états \mathbb{N} où $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = S_n - S_{n-1}$ et $X_0 = 0$ p.s. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est le temps de séjour dans l'état J_{n-1} avant le nième saut.

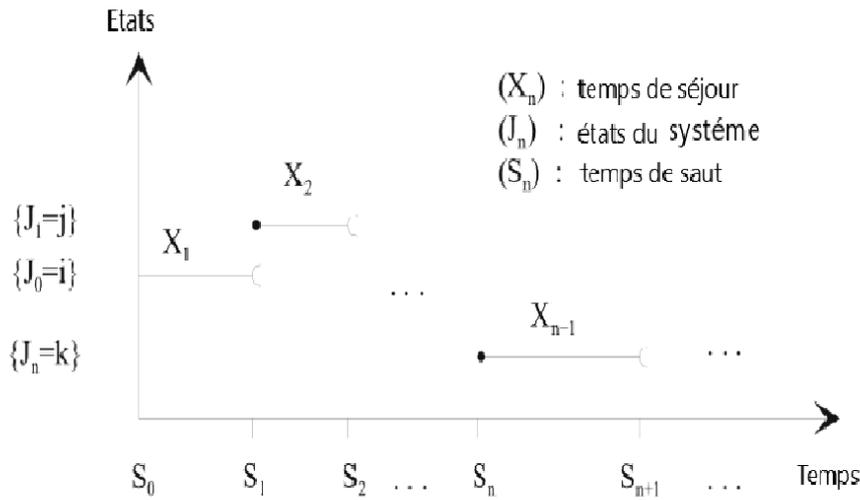


FIGURE 2.1 – Échantillon typique de semi-Markov.

2.1.1 Processus de renouvellement de Markov

Définition 2.1.1. *Le processus stochastique bivarié (J_n, S_n) est dit processus de renouvellement de Markov (PRM) d'espace d'état E , si pour tout $j \in E$, tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$ il satisfait presque sûrement,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t \mid J_0, J_1, \dots, J_n, S_0, S_1, \dots, S_n) = \\ \mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t \mid J_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cette équation signifie que si l'on connaît les états passés visités et les temps de saut du système, ainsi que son état présent, l'état futur visité et le temps de séjour dans l'état présent ne dépendent que de l'état présent. Autrement dit, on a essentiellement une hypothèse de type markovienne, à la différence que la propriété sans mémoire n'agit pas sur le temps calendaire $t \in \mathbb{R}_+$ mais sur un temps régi par le processus de temps de saut $J, (J_0, J_1, \dots, J_n, J_{n+1}, \dots)$. C'est ce que nous appelons une hypothèse markovienne plus souple.

2.1.2 Matrice de renouvellement

Définition 2.1.2. *La matrice définie comme*

$$\mathbf{Q}_{ij}(t) = \{Q_{ij}(t) : i, j \in E, t \geq 0\}$$

$$Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq t \mid J_n = i), \quad (2.2)$$

est appelée matrice de renouvellement. Nous identifions la matrice de renouvellement \mathbf{Q} comme le noyau de renouvellement.

Propriété 2.1.1. [10] La matrice de renouvellement de Markov \mathbf{Q} satisfait les conditions suivantes

- (i) Pour tout $t \geq 0$ et $i, j \in E$, $Q_{ij}(t) \geq 0$.
- (ii) Les fonctions $Q_{ij}(t)$ sont continues à droite.
- (iii) Pour tout $i, j \in E$, $Q_{ij}(0) = 0$ et $Q_{ij}(t) \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.
- (iv) Pour tout $i \in E$, on considère que $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} Q_{ij}(t) = 1$.

Définition 2.1.3. Les probabilités

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j \mid J_n = i), \quad (2.3)$$

sont les probabilités de transition de l'état i vers l'état j du chaîne Markov intégré $\{J_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Tout au long de ce travail, nous considérons que la CRM et le PRM sont homogènes en temps, dans le sens où l'équation (2.1.1) est indépendante de n .

Propriété 2.1.2. [10] Pour un PRM avec un noyau de renouvellement $\mathbf{Q}(t)$, $t \geq 0$ on a :

$$\mathbb{P}(J_0 = i_0, J_1 = i_1, X_1 \leq t_1, \dots, J_n = i_n, X_n \leq t_n) = \alpha_{i_0} Q_{i_0 i_1}(t_1) Q_{i_1 i_2}(t_2) \dots Q_{i_{n-1} i_n}(t_n), \quad (2.4)$$

Où $\alpha_{i_0} = \mathbb{P}(J_0 = i_0)$ est la distribution initiale du processus de renouvellement.

Pour $t_1 \rightarrow \infty, \dots, t_n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\mathbb{P}(J_0 = i_0, J_1 = i_1, \dots, J_n = i_n) = \alpha_{i_0} \mathbb{P}_{i_0 i_1} \mathbb{P}_{i_1 i_2} \dots \mathbb{P}_{i_{n-1} i_n}.$$

2.2 Processus semi-markovien en temps continu

Définition 2.2.1. Considérons un PRM $\{(J_n, S_n) : n \in \mathbb{N}\}$ défini sur un espace probabilisé complet et avec l'espace d'état E . Le processus stochastique $\{Z_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ défini par

$$Z_t = J_{N(t)},$$

est appelé Processus Semi-Markovien (PSM) où $N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$ est le processus de comptage du processus semi-markovien jusqu'au temps t . Nous pouvons

aussi définir le processus semi-markovien par

$$Z_t = J_n \quad \text{pour } t \in [S_n, S_{n+1}), n \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.2.2. On définit la matrice de transition du processus $\{Z_t, t > 0\}$ comme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \{\mathbb{P}_{ij}(t) : i, j \in \mathbb{E}\}, \\ p_{ij}(t) &= \mathbb{P}(Z_t = j \mid Z_0 = i), \\ &= \mathbb{P}(J_{N(t)} = j \mid J_0 = i), \end{aligned}$$

pour tout $i, j \in E$.

Alors la probabilité inconditionnelle de l'état semi-markovien est égale à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j(t) &= \mathbb{P}(Z_t = j) = \mathbb{P}(J_{N(t)} = j), \\ &= \sum_{i=1}^s \mathbb{P}(J_{N(t)} = j \mid J_0 = i) \mathbb{P}(J_0 = i), \\ &= \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbb{P}_{ij}(t), \end{aligned}$$

où $\alpha_i = \mathbb{P}(J_0 = i)$ est la distribution initiale du PRM.

2.2.1 Régularité du processus semi-markovien

Définition 2.2.3. Le PSM $\{Z_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est dit régulier si le processus de comptage correspondant $\{N(t), t > 0\}$ possède une valeur finie de nombre de sauts dans une période finie avec probabilité 1 :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(N(t) < \infty) = 1. \quad (2.5)$$

2.3 Distribution du temps de séjour

Définition 2.3.1. Pour tous $i, j \in E, \forall t \in \mathbb{R}_+$, notons par

1. $F_{ij}(\cdot)$, la fonction de distribution associée au temps de séjour dans l'état i , avant de passer à l'état j :

$$F_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i, J_{n+1} = j).$$

2. $H_i(\cdot)$, la fonction de distribution du temps de séjour, aussi appelée temps d'attente, à l'état i :

$$H_i(t) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i) = \sum_{j \in E} Q_{ij}(t).$$

De la définition précédente, nous pouvons déduire le résultat suivant.

Propriété 2.3.1. [10] Il est vrai que

$$F_{ij}(t) = Q_{ij}(t)/p_{ij}$$

pour tout $t \geq 0$ et $i, j \in E$.

Preuve De la définition des probabilités conditionnelles, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= \mathbb{P}(X_{n+1} \leq t \mid J_n = i, J_{n+1} = j) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} \leq t, J_n = i, J_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(J_n = i, J_{n+1} = j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} \leq t, J_n = i, J_{n+1} = j)}{\mathbb{P}(J_n = i)} \frac{\mathbb{P}(J_n = i)}{\mathbb{P}(J_n = i, J_{n+1} = j)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(J_{n+1} = j, X_{n+1} \leq t \mid J_n = i)}{\mathbb{P}(J_{n+1} = j, J_n = i)} \\ &= \frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}}. \end{aligned}$$

Exemple : (Modèle semi-markovien, Limnios and Oprisan [20]) :

Considérons un système parallèle à deux composants. Ce système peut se trouver dans l'un des états suivants,

- État 1 : les deux composants sont en mode de fonctionnement.
- État 2 : Un composant fonctionne et la réparation de l'autre vient de commencé.
- État 3 : Le composant de fonctionnement tombe en panne tandis que l'autre composant est en réparation (le système ne fonctionne pas tant que les deux composants ne sont pas réparés).

De plus, soit $\{Z_t : t \geq 0\}$ le processus qui décrit l'évolution dans le temps de système, avec l'espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$ et la matrice semi-markovienne

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & 0 & Q_{23} \\ Q_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, $Q_{ij}(t)$ est la probabilité que le système passe à l'état j jusqu'à l'instant t sachant qu'il était initialement à l'état i . Par exemple $Q_{21}(t)$ représente la probabilité de réparer le composant qui n'est pas en fonction avant l'instant t , sachant que l'autre composant est en mode de fonctionnement (état 2), alors que $Q_{23}(t)$ la probabilité d'avoir une défaillance du second composant, le premier n'étant déjà pas en fonction, avant t . En ce qui concerne la probabilité de transition conditionnelle $F_{ij}(t)$, c'est la probabilité que le système reste dans l'état i pendant le temps t , sous la condition que le passage de i à l'état futur du système, j est connu.

Chapitre 3

Estimation non paramétrique des processus semi-markoviens à temps continu

Comme nous avons remarqué dans le chapitre précédent, l'évolution aléatoire d'un système semi-markovien est complètement caractérisée par le NSM et sa loi initiale puisque les mesures relatives peuvent être exprimées comme des fonctionnelles de ce noyau. Par conséquent, l'estimation du NSM est de première importance dans le problème de l'inférence statistique pour les processus semi-markoviens. L'objectif de ce chapitre est de présenter une étude des comportement asymptotique des estimateurs empiriques et des estimateurs par la méthode à noyau des fonctionnelles associées telles que la matrice de transition de la CMI, le noyau semi-markovien cumulatif et les lois du temps de séjour. Les résultats présentés dans ce chapitre font partie de l'article de Ayhar et al. [9].

3.1 Estimateurs empiriques

Nous suivons la procédure d'observation concernant l'inférence statistique des processus stochastiques suivante : une trajectoire unique de ce processus est observée sur l'intervalle $[0, T]$, où $T \in \mathbb{R}^+$ est un instant de censure arbitraire fixe.

3.1.1 Processus de comptage associés PRM

Considérons une trajectoire d'un PRM $(J_n, S_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\mathcal{H}(T) = (J_0, J_1, \dots, J_{N(T)}, X_0, X_1, \dots, X_{N(T)}).$$

Pour tout $i, j \in E$ et $t \leq T$, on définit :

1. $N_i(T) = \sum_{n=1}^{N(Y)} \mathbb{1}_{\{J_n=i\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{J_n=i, S_n \leq T\}}$: C'est le nombre de visites à l'état i , jusqu'à l'instant T .
2. $N_{ij}(T) = \sum_{n=1}^{N(T)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, S_n \leq T\}}$: C'est le nombre de transitions de i à j , jusqu'à l'instant T .
3. $N_{ij}(t, T) = \sum_{n=1}^{N(t)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n \leq t\}}$: C'est le nombre de transitions de i à j , jusqu'à l'instant T , avec un temps de séjour dans l'état i égal à t , $1 \leq k \leq T$.

3.1.2 Construction des estimateurs

L'estimateur empirique du noyau semi-Markovien $Q_{ij}(t)$ est défini par

$$\widehat{Q}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{n=1}^{N(t)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n \leq t\}}$$

La définition de $F_{ij}(t) = Q_{ij}(t)/p_{ij}$ permet d'obtenir :

$$\widehat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{N_i(T)},$$

et ensuite

$$\widehat{F}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{n=1}^{N(t)} \mathbb{1}_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n \leq t\}}$$

Les quantités $\widehat{F}_{ij}(t, M)$ et \widehat{p}_{ij} sont respectivement les estimateurs empiriques pour les fonctions de transition conditionnelles et les probabilités de transition. On voit que pour \widehat{p}_{ij} on divise le nombre de transitions de l'état i à l'état j par le nombre (total) de visites à l'état i .

3.1.3 Propriétés asymptotiques des estimateurs

Dans cette section, nous étudions les propriétés asymptotiques (consistance et normalité asymptotique) des estimateurs proposés.

Convergence uniforme presque sûre

Corollaire 3.1.1. [28] Pour tous $i, j \in E$, on a,

$$\widehat{p}_{ij}(T) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} p_{ij}.$$

Théorème 3.1.1. [16] *Pour tout états arbitraires fixés $i, j \in E$, l'estimateur empirique $\widehat{Q}_{ij}(t, T)$ de $Q_{ij}(t)$ est fortement convergent, c'est-à-dire :*

$$\max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{Q}_{ij}(t, T) - Q_{ij}(t) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} 0$$

Preuve On a $Q_{ij}(t) = F_{ij}(t)p_{ij}$ et donc $\widehat{Q}_{ij}(t, T) = \widehat{F}_{ij}(t, T)\widehat{p}_{ij}(T)$ aussi. Il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned} \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{Q}_{ij}(t, T) - Q_{ij}(t) \right| &= \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_{ij}(t, T)\widehat{p}_{ij}(T) - F_{ij}(t)p_{ij} \right| \\ &= \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_{ij}(t, T)\widehat{p}_{ij}(T) - \widehat{F}_{ij}(t, T)p_{ij} \right| \\ &\quad + \left| \widehat{F}_{ij}(t, T)p_{ij} - F_{ij}(t)p_{ij} \right| \\ &\leq \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_{ij}(t, T)\widehat{p}_{ij}(T) - \widehat{F}_{ij}(t, T)p_{ij} \right| \\ &\quad + \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_{ij}(t, T)p_{ij} - F_{ij}(t)p_{ij} \right| \quad \text{et} \\ &= \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_{ij}(t, T) (\widehat{p}_{ij}(T) - p_{ij}) \right| \\ &\quad + \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \left(\widehat{F}_{ij}(t, T) - F_{ij}(t) \right) p_{ij} \right| \\ &= \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{p}_{ij}(T) - p_{ij} \right| \widehat{F}_{ij}(t, T) \\ &\quad + \max_{i, j \in E} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_{ij}(t, T) - F_{ij}(t) \right| p_{ij}. \end{aligned}$$

de la consistance de $\widehat{p}_{ij}(T)$ et $\widehat{F}_{ij}(t, T)$ (Corollaire(3.1.1) et Théorème(5.2)), on obtient le résultat désiré.

Normalité asymptotique

On suppose que le PRM est irréductible, récurrent et que $F_{ij} = H_i$ pour $1 \leq j \leq s$. Considérons l'estimateur défini par

$$\widehat{Q}_{ij}(t, T) = \widehat{H}_i(t, T)\widehat{p}_{ij}(T) \quad (3.1)$$

$$\widehat{H}_i(t, T) = N_i(T)^{-1} \sum_{k=1}^{N_i(T)} \epsilon(t - X_{ik}) \quad (3.2)$$

où $\epsilon(u)$ vaut 1 si $u \geq 0$ et 0 sinon. $\widehat{H}_i(t, T)$ est donc la fonction de distribution empirique déterminée à partir de l'échantillon de taille aléatoire $N_i(T)$. Soit f une fonction mesurable réelle, définie sur $E \times E \times \mathbb{R}$. Définir, pour chaque $T > 0$, la fonctionnelle $W_f(T)$ comme

$$W_f(T) = \sum_i \sum_{n=1}^{N_i(T)} f(i, X_{in}) \quad (3.3)$$

où X_{in} est le n^{ime} temps de séjour de la chaîne dans l'état i c'est-à-dire $X_{in} = S_{n+1}^i - S_n^i$. Soient les ensembles

$$A_{ij} = \int_0^\infty f(i, j, x) dQ_{ij}(x), A_i = \sum_{j=1}^s A_{ij}$$

$$B_{ij} = \int_0^\infty (f(i, j, x))^2 dQ_{ij}(x), B_i = \sum_{j=1}^s B_{ij}$$

Soient μ_{ij} et μ^*_{ij} désignent les temps moyens de premier passage de l'état i vers j dans le PRM et dans la chaîne de Markov correspondante $(J_n)_{n \geq 0}$, respectivement. Écrire

$$r_i = \sum_{j=1}^s A_j \frac{\mu_{ii}^*}{\mu_{jj}^*}$$

$$\sigma_i^2 := -r_i^2 + \sum_{j=1}^s B_j \frac{\mu_{ii}^*}{\mu_{jj}^*} + 2 \sum_{r=1}^s \sum_{l \neq i} \sum_{k \neq i} A_{rl} A_k \mu_{ii}^* \frac{\mu_{li}^* + \mu_{ik}^* - \mu_{ii}^*}{\mu_{lk}^* \mu_{kk}^*}$$

Enfin, mettez

$$m_f = \frac{r_i}{\mu_{ii}}$$

$$B_f = \frac{\sigma_i^2}{\mu_{ii}}$$

La démonstration de la normalité asymptotique du noyau semi-markovien est basée sur le TCL pour les chaînes de renouvellement de Markov

Théorème 3.1.2. [13] *Pour un PRM récurrent irréductible et si les moments ci-dessus sont finis, nous avons,*

$$T^{-1/2} [W_f(T) - T \cdot m_f] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, B_f).$$

Pour appliquer ce résultat dans les preuves des théorèmes de cette section il faudra seulement être nécessaire de produire la fonction appropriée f et de calculer les instants correspondants.

Théorème 3.1.3. [13] *Pour tout i, j, t ,*

$$\left(T^{1/2} [\widehat{p}_{ij}(T) - p_{ij}], T^{1/2} [\widehat{H}_i(t, T) - H_i(t)] \right) \quad (3.4)$$

converge en loi $T \rightarrow \infty$ pour une v.a. normale bivariée avec moyenne nulle et matrice de covariance (σ_{ij}) donnée par

$$\sigma_{11} = \mu_{ii} p_{ij} (1 - p_{ij}), \quad \sigma_{22} = \mu_{ii} H_i(t) (1 - H_i(t)), \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.$$

Corollaire 3.1.2. [13] Pour tout i, j, t , \widehat{p}_{ij} et $\widehat{H}_i(t, T)$ sont asymptotiquement indépendants.

Théorème 3.1.4. [13] L'estimateur empirique \widehat{Q}_{ij} est asymptotiquement normal, c'est à dire pour tout $t > 0$

$$\sqrt{T} \left[\widehat{Q}_{ij}(t, T) - Q_{ij}(t) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

avec

$$\sigma^2 = \mu_{ii} H_i(t) p_{ij} [H_i(t) - 2H_i(t) p_{ij} + p_{ij}]$$

Preuve Nous réécrivons $\sqrt{T}[\widehat{Q}_{ij}(t, T) - Q_{ij}(t)]$ comme

$$T^{1/2} \widehat{H}_i(t, T) [\widehat{p}_{ij}(T) - p_{ij}] + T^{1/2} p_{ij} \left[\widehat{H}_i(t, T) - H_i(t) \right], \quad (3.5)$$

La distribution limite de (3.5) est la même que cela

$$T^{1/2} H_i(t) [\widehat{p}_{ij}(T) - p_{ij}] + T^{1/2} p_{ij} \left[\widehat{H}_i(t, T) - H_i(t) \right], \quad (3.6)$$

Avec le choix particulier $\omega_1 = H_i(t)$ et $\omega_1 = p_{ij}$, 3.6 est exactement le même que (3.4) et la preuve est complète.

3.2 Estimateurs à noyaux

Dans cette section, nous construisons des estimateurs non paramétriques du noyaux de Parzen-Rosenblatt des différents mesures liées à le PSM.

Pour des états fixes i et j et $l \in \mathbb{N}^*$, Notons $X_{i;l}$ les temps de séjour dans l'état i lors de la l ème visite de cet état et par $X_{ij;l}$ le temps de séjour correspondant dans l'état i avant d'aller dans l'état j , lors de la l ème visite.

3.2.1 Construction des estimateurs

Pour des états fixes i et j et $l \in \mathbb{N}^*$, Notons $X_{i;l}$ les temps de séjour dans l'état i lors de la l ème visite de cet état et par $X_{ij;l}$ le temps de séjour correspondant dans l'état i avant d'aller dans l'état j , lors de la l ème visite.

Prendre un exemple de trajectoire $\mathcal{H}(T)$ d'un PRM, pour tout $i, j \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$, on définit les estimateurs à noyaux de $F_i(t)$, $F_{ij}(t)$, $Q_{ij}(t)$ et des dérivés $f_i(t)$, $f_{ij}(t)$, $q_{ij}(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_i(t, T) &= \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_i(T)} H \left(\frac{t - X_{i;l}}{h_{i,T}} \right) \\ &= \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N(T)} H \left(\frac{t - X_l}{h_{i,T}} \right) \mathbb{I}_{\{J_{l-1}=i\}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{ij}(t, T) &= \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} H\left(\frac{t - X_{ij,l}}{h_{ij,T}}\right) \\ &= \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{l=1}^{N(T)} H\left(\frac{t - X_l}{h_{ij,T}}\right) \mathbb{I}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j\}}\end{aligned}\quad (3.8)$$

$$\widehat{f}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} \frac{1}{h_{ij,T}} K\left(\frac{t - X_{ij,l}}{h_{ij,T}}\right) \quad (3.9)$$

$$\widehat{f}_i(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_i(T)} \frac{1}{h_{i,T}} K\left(\frac{t - X_{i,l}}{h_{i,T}}\right), \quad (3.10)$$

avec $H(t) = \int_{-\infty}^t K(t)dt$. Il convient de noter que le paramètre de lissage des estimateurs précédents dépend de la taille de l'échantillon, donc on devrait écrire $h_{i,T} = h_{i,N_i(T)}$ (resp. $h_{ij,T} = h_{ij,N_{ij}(T)}$). Deuxièmement, Nous pouvons introduire un estimateur de $Q_{ij}(T)$ défini par :

$$\widehat{Q}_{ij}(t, T) = \widehat{p}_{ij}(T) \widehat{F}_{ij}(t, T) = \frac{N_{ij}(T)}{N_i(T)} \widehat{F}_{ij}(t, T)$$

où $\widehat{p}_{ij}(T) = \frac{N_{ij}(T)}{N_i(T)}$ est l'estimateur empirique de p_{ij} . Donc, on a les estimateurs du noyau correspondants de $Q_{ij}(t)$ et $q_{ij}(t)$ donné par

$$\widehat{Q}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} H\left(\frac{t - X_{ij,l}}{h_{ij,T}}\right), \quad (3.11)$$

$$\widehat{q}_{ij}(t, T) = \frac{1}{N_i(T)} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} \frac{1}{h_{ij,T}} K\left(\frac{t - X_{ij,l}}{h_{ij,T}}\right). \quad (3.12)$$

3.2.2 Hypothèses

Dans la suite, nous supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

(H1) La CMI $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible ergodique, avec distribution stationnaire ν .

(H2) Le PSM est irréductible, apériodique, avec des temps de séjour moyens finis.

(H3) Le PSM (ou de manière équivalente, le PRM) est régulier, c'est $\mathbb{P}_i(N(t) < \infty) = 1$ pour tout $t > 0, i \in E$ où $\mathbb{P}_i(\cdot)$ moyens $\mathbb{P}(\cdot \mid J_0 = i)$.

De plus, nous devons introduire les conditions suivantes

(H4) i) $Q_{ij}(t)$, $F_i(t)$ et $F_{ij}(t)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et $q_{ij}(t)$, $f_i(t)$ et $f_{ij}(t)$ être respectivement les dérivés Radon-Nikodym correspondants.

ii) Les dérivées premières f_{ij} et f_i sont bornées.

(H5) i) La fonction H est une fonction de distribution.

ii) Le noyau K est une fonction de densité à variation bornée telle que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |xK(x)| = 0 \text{ et } \left| \int t^j K^k(t) dt \right| < \infty \text{ pour } j = 0, 1, \text{ et } k = 1, 2,$$

où K est la dérivée de H .

(H6) Les paramètres de lissage $h_{i,n}, h_{ij,n}$ satisfaire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{i,n} = 0 \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} h_{ij,n} = 0.$$

(H7) les séries $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma n h_{i,n}^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma n h_{ij,n}^2}$ convergent pour toute valeur positive de γ .

Commentaires sur les hypothèses

Notez que ces conditions sont généralement supposées dans ce contexte. En effet, les conditions (H1) et (H2) sont des hypothèses classiques pour les processus semi-markoviens, couramment utilisé dans la littérature (voir Barbu et Limnios [30]). Notez également que sous la condition (H3), $S_n < S_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \infty$, $N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{a.s.} \infty$ (voir Limnios et Oprisan [20]). Hypothèse (H4) imposée à $Q_{ij}(t)$, $F_{ij}(t)$ et $F_i(t)$ est une hypothèse de type régularité. Précisément, l'hypothèse (H4)(i) est une contrainte de type continuité qui va nous permettre d'obtenir une consistance forte. De plus, dès que l'on souhaite énoncer la normalité asymptotique, il faut introduire des contraintes plus restrictives, c'est le rôle joué par l'hypothèse de la dérivée seconde (H4)(ii). Les conditions techniques sur les noyaux sont imposées dans un souci de brièveté des preuves. (H6) et (H7) sont d'autres contraintes techniques. De plus, (H6) est aussi satisfaite pour $h_{ij,T}$ et $h_{i,T}$.

3.2.3 Propriétés asymptotiques des estimateurs

Convergence uniforme

Théorème 3.2.1. [9] Pour tout état $i, j \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$, sous Hypothèses (H5)-(H6), l'estimateur à noyau $\hat{F}_i(t, T)$ introduit dans (3.1) est uniformément

convergent, c'est-à-dire :

$$\max_i \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_i(t, T) - F_i(t) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Preuve

Soit

$$\widehat{F}_i^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n H \left(\frac{t - X_{i;l}}{h_{i,n}} \right).$$

Sous les hypothèses (H5) et (H6) et par l'application du Théorème 1 de [12], nous avons

$$\max_i \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_i^*(t) - F_i(t) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0.$$

D'après le théorème [9], nous obtenons le résultat souhaité.

Selon la définition des estimateurs à noyau (3.8), (3.9) et (3.11), nous pouvons établir également leur convergence uniforme, dont les preuves sont simples adaptations du preuve du théorème (3.2.1)

Corollaire 3.2.1. [9] *Pour tout états arbitraires fixés $i, j \in E$, tout arbitraire fixe positif $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$ et sous Hypothèses (H5)-(H6), et hypothèse supplémentaires (H7) pour (ii), (iii) et (iv), les déclarations suivantes sont vraies.*

i) *L'estimateur à noyau $\widehat{F}_{ij}(t, T)$ introduit dans (3.8) est uniformément convergent, c'est-à-dire :*

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{F}_{ij}(t, T) - F_{ij}(t) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

ii) *L'estimateur à noyau $\widehat{f}_{ij}(t, T)$ proposé dans (3.9) est uniformément convergent, c'est-à-dire :*

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{f}_{ij}(t, T) - f_{ij}(t) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

iii) *L'estimateur à noyau $\widehat{f}_i(t, T)$ introduit dans (3.10) est uniformément convergent, c'est-à-dire :*

$$\max_i \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{f}_i(t, T) - f_i(t) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

iv) *L'estimateur à noyau de la densité du noyau semi-Markovien proposé dans (3.12) est uniformément convergent, c'est-à-dire :*

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{q}_{ij}(t, T) - q_{ij}(t) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

v) Puisque $\widehat{Q}_{ij}(t, T) = \widehat{p}_{ij}(T)\widehat{F}_{ij}(t, T)$, la convergence uniforme des estimateurs $\widehat{p}_{ij}(T)$ et $\widehat{F}_{ij}(t, T)$ permet de déduire que :

$$\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{Q}_{ij}(t, T) - Q_{ij}(t) \right| \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Preuve

Nous donnons ici que la preuve de (iv). Pour les autres points, selon le définition des estimateurs noyau (3.8), (3.9) et (3.11), on peut établir leur convergence uniforme dont les preuves sont une simple adaptation de la preuve du théorème (3.2.1). (iv) On a pour tous $i, j \in E$, $\widehat{q}_{ij}(t, T) = \widehat{f}_{ij}(t, T)\widehat{p}_{ij}(T)$, $|\widehat{p}_{ij}(T)| \leq 1$, et $|f_{ij}(t, T)| \leq 1$. Après quelques calculs on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} |\widehat{q}_{ij}(t, T) - q_{ij}(t)| > \epsilon \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\max_{i,j} |\widehat{p}_{ij}(T) - p_{ij}| > \frac{\epsilon}{2} \right) + \mathbb{P} \left(\max_{i,j} \sup_{t \in [0, T]} \left| \widehat{f}_{ij}(t, T) - f_{ij}(t) \right| > \frac{\epsilon}{2} \right). \end{aligned}$$

Le résultat est donc une conséquence de (ii) dans le Corollaire (3.2.1) sous les hypothèses (H.6), (H.7) et de la convergence forte de $\widehat{p}_{ij}(T)$.

Normalité asymptotique

Les résultats suivants concernent la normalité asymptotique des estimateurs à noyaux .

Théorème 3.2.2. [9] Pour tout états arbitraires fixés $i, j \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$, sous Hypothèses (H4), (H5) et (H6) les déclarations suivantes sont vraies.

i)

$$\sqrt{T} \left[\widehat{F}_1(t, T) - F_i(t) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L} \mathcal{N} \left(0, \sigma_F^2(i, t) \right)$$

avec la variance asymptotique

$$\sigma_F^2(i, t) = \mu_{ii} F_i(t) [1 - F_i(t)]$$

ii) Sous la condition $\lim_{T \rightarrow \infty} Th_{ij, T} = \infty$, on a

$$\sqrt{Th_{ij, T}} \left[\widehat{q}_{ij}(t, T) - q_{ij}(t) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L} \mathcal{N} \left(0, \sigma_q^2(i, j, t) \right)$$

avec la variance asymptotique

$$\sigma_q^2(i, j, t) = \mu_{ii} q_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dv$$

De même que le théorème (3.2.2), nous établissons les résultats asymptotiques suivants.

Corollaire 3.2.2. [9] Dans les mêmes conditions que celles du théorème (3.2.2), les déclarations suivantes sont vraies.

i)

$$\sqrt{T} \left[\hat{F}_{ij}(t, T) - F_{ij}(t) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \sigma_F^2(i, j, t) \right),$$

avec la variance asymptotique

$$\sigma_F^2(i, j, t) = \frac{\mu_{ii}}{p_{ij}} F_{ij}(t) [1 - F_{ij}(t)]$$

ii)

$$\sqrt{T} \left[\hat{Q}_{ij}(t, T) - Q_{ij}(t) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \sigma_Q^2(i, j, t) \right),$$

avec la variance asymptotique

$$\sigma_Q^2(i, j, t) = \mu_{ii} Q_{ij}(t) [1 - Q_{ij}(t)].$$

iii) Si $\lim_{T \rightarrow \infty} Th_{ij,T} = \infty$ est vrai, on a

$$\sqrt{Th_{ij,T}} \left[\hat{f}_{ij}(t, T) - f_{ij}(t) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \sigma_f^2(i, j, t) \right),$$

avec la variance asymptotique

$$\sigma_f^2(i, j, t) = \frac{\mu_{ii}}{p_{ij}} f_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz.$$

iv) Si $\lim_{T \rightarrow \infty} Th_{i,T} = \infty$ est vrai, on a

$$\sqrt{Th_{i,T}} \left[\hat{f}_i(t, T) - f_i(t) \right] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \sigma_f^2(i, t) \right),$$

avec la variance asymptotique

$$\sigma_f^2(i, t) = \mu_{ii} f_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz.$$

Preuve

i) Remarque qu'on peut écrire

$$\sqrt{T} \left[\hat{F}_i(t, T) - F_i(t) \right] = \frac{T}{N_i(T)} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{l=1}^{N(T)} \left[H \left(\frac{t - X_l}{h_{i,T}} \right) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} - F_i(t) \mathbf{1}_{\{J_{L-1}=i\}} \right].$$

D'après théorème 2.2.1, nous introduisons

$$U_l = \left(H \left(\frac{t - X_l}{h_{i,n}} \right) - F_i(t) \right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}}.$$

Si l'on note par \mathcal{F}_l le σ -algèbre $\mathcal{F}_l = \sigma(J_n, X_n; n \leq l)$, $l \geq 0$, ainsi U_l est \mathcal{F}_l -mesurable et $\mathcal{F}_l \subseteq \mathcal{F}_{l+1}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_l | \mathcal{F}_{l-1}) &= \mathbb{E} \left(\left[H \left(\frac{t - X_1}{h_{i,n}} \right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} - F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \right] | \mathcal{F}_{l-1} \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} H \left(\frac{t - x}{h_{i,n}} \right) f_i(x) dx - F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}}, \end{aligned}$$

où la dernière équation est obtenue par le fait que $\mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}}$ est \mathcal{F}_{l-1} -mesurable. D'autre part, en utilisant un changement de variable, une intégration par parties suivie de développement de Taylor de $F_i(t - h_{i,n}z)$ dans un voisinage de t , combinées avec des hypothèses (H4), (H5) et (H6), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_l | \mathcal{F}_{l-1}) &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} H(z) dF_i(t - zh_{i,n}) - F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) F_i(t - zh_{i,n}) dz - F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) (F_i(t - zh_{i,n}) - F_i(t)) dz \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) (-h_{i,n}z F_i'(t^*)) dz \end{aligned}$$

où t^* est entre t et $t - h_{i,n}z$. Ça suit

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K(z) F_i'(t^*) h_{i,n}z dz \right| \leq Ch_{i,n} \int_{-\infty}^{\infty} |z| K(z) dz = O(h_{i,n}).$$

Ceci implique que

$$\mathbb{E}(U_l | \mathcal{F}_{l-1}) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

En utilisant le TCL pour les martingales, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n U_l \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(i, t)).$$

Pour obtenir la variance asymptotique $\sigma^2(i, t)$, nous devons calculer

$$\sigma^2(i, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(U_l^2 | \mathcal{F}_{l-1}) > 0.$$

Premièrement,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_l^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}) &= \mathbb{E}\left(H^2\left(\frac{t - X_l}{h_{i,n}}\right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \mid \mathcal{F}_{l-1}\right) + \mathbb{E}\left(F_i^2(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \mid \mathcal{F}_{l-1}\right) \\ &\quad - \mathbb{E}\left(2F_i(t)H\left(\frac{t - X_l}{h_{i,n}}\right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \mid \mathcal{F}_{l-1}\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} H^2\left(\frac{t-x}{h_{i,n}}\right) f_i(x) dx \right) + F_i^2(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &\quad - 2F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} H\left(\frac{t-x}{h_{i,n}}\right) f_i(x) dx \right).\end{aligned}$$

Deuxièmement, sous les hypothèses (H4), (H5), (H6) et un changement de variable, une intégration par parties suit un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_l^2 \mid \mathcal{F}_{l-1}) &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(z) dF_i(t - zh_{i,n}) + F_i^2(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &\quad - 2F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} H(z) dF_i(t - zh_{i,n}) \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} 2K(z)H(z)F_i(t - zh_{i,n}) dz + F_i^2(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &\quad - 2F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} [F_i(t) + O(h_{i,n})] \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} F_i(t) \int_{-\infty}^{\infty} 2K(z)H(z) dz + O(h_{i,n}) - F_i^2(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} F_i(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} (H^2)'(z) dz - F_i(t) \right] + O(h_{i,n}).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sigma^2(i, t) = \nu_i F_i(t) [1 - F_i(t)] \quad (3.13)$$

En outre,

$$\sqrt{T} \left[\hat{F}_i(t, T) - F_i(t) \right] = \frac{T}{N_1(T)} \sqrt{\frac{N(T)}{T}} \frac{1}{\sqrt{N(T)}} \sum_{l=1}^{N(T)} \left[H\left(\frac{t - X_l}{h_{i,T}}\right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} - F_i(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \right].$$

Combinaison des énoncés (3) et (5) du lemme (5.4.1.1) avec l'équation (3.13) et en appliquant le théorème d'Anscombe (voir [23]), on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_F^2(i, t) &= \left(\mu_{ii} \sqrt{1/\mu_{ii}\nu_i} \right)^2 \nu_i F_i(t) [1 - F_i(t)] \\ &= \mu_{ii} F_i(t) [1 - F_i(t)].\end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(U_l^2 \mathbb{1}_{\{|U_l| > c, \sqrt{n}\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En effet, en utilisant successivement les inégalités de Holder, Markov, Jensen puis Minkowski, on obtient pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout p et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(U_l^2 \mathbf{1}_{\{|U_l| > \epsilon \sqrt{n}\}} \right) &\leq \left(\mathbb{E} (U_l^{2q}) \right)^{1/q} \mathbb{P} \{ |U_l| > \epsilon \sqrt{n} \}^{1/p} \leq (\epsilon \sqrt{n})^{-2q/p} \mathbb{E} (|U_l|^{2q}) \\
&\leq (\epsilon \sqrt{n})^{-2q/p} \mathbb{E} \left(\left| H \left(\frac{t - X_l}{h_{l,n}} \right) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} - F_i(t) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \right|^{2q} \right) \\
&\leq (\epsilon \sqrt{n})^{-2q/p} \left(\mathbb{E} \left(H^{2q} \left(\frac{t - X_l}{h_{i,n}} \right) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \right) + F_i^{2q}(t) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \right) \\
&\leq (\epsilon \sqrt{n})^{-2q/p} \left(\mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \int_{-\infty}^{\infty} H^{2q} \left(\frac{t-x}{h_{i,n}} \right) f_i(x) dx + F_i^{2q}(t) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \right) \\
&\leq (\epsilon \sqrt{n})^{-2q/p} \left(h_{i,n} \int_{-\infty}^{\infty} H^{2q}(z) f_i(t - zh_{i,n}) dz + F_i^{2q}(t) \right) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque f est une fonction de densité et en utilisant le lemme (5.4.1.1), il s'ensuit que

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left(U_l^2 \mathbf{1}_{\{|U_l| > \epsilon \sqrt{n}\}} \right) \leq (\epsilon \sqrt{n})^{-2q/p} \nu_i (h_{i,n} \|H\|_{\infty}^{2q} + F_i^{2q}(t)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

À partir des résultats ci-dessus et du théorème de la limite centrale fonctionnelle pour la martingale différences (voir Billingsley [23]) nous obtenons le résultat.

ii) On commence par écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{T h_{ij,T}} [\hat{q}_{ij}(t, T) - q_{ij}(t)] &= \frac{T}{N_1(T)} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{l=1}^{N_{ij}(T)} \frac{1}{\sqrt{h_{ij,T}}} K \left(\frac{t - X_n}{h_{ij,T}} \right) - q_{ij}(t) \sqrt{h_{ij,T}} \\
&= \frac{T}{N_1(T)} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{l=1}^{N(T)} \left[\frac{1}{\sqrt{h_{ij,T}}} K \left(\frac{t - X_l}{h_{ij,T}} \right) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j\}} \right. \\
&\quad \left. - q_{ij}(t) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \sqrt{h_{ij,T}} \right]
\end{aligned}$$

D'après le théorème (5.6), on note

$$V_l = \frac{1}{\sqrt{h_{ij,n}}} K \left(\frac{t - X_l}{h_{ij,n}} \right) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j\}} - q_{ij}(t) \mathbf{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \sqrt{h_{ij,n}} \quad (3.14)$$

Ensuite, nous utilisons les mêmes étapes comme (i), nous ne donnons donc que les détails principaux. Notons par \mathcal{F}_l le σ -algèbre $\mathcal{F}_l = \sigma(J_n, X_n; n \leq l)$, $l \geq 0$,

pour tout $l \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_l | \mathcal{F}_{l-1}) &= \frac{1}{\sqrt{h_{ij,n}}} \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} p_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t-x}{h_{ij,n}}\right) f_{ij}(x) dx - q_{ij}(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \sqrt{h_{ij,n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h_{ij,n}}} \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} p_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dF_{ij}(t - zh_{ij,n}) - q_{ij}(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \sqrt{h_{ij,n}} \\ &= \sqrt{h_{ij,n}} \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} q_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K(z) dz + O(h_{ij,n}) - q_{ij}(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \sqrt{h_{ij,n}} \\ &\rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

le résultat précédent est obtenu en utilisant le \mathcal{F}_{l-1} -mesurabilité de $\mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}}$, un changement de variable, développements de Taylor d'ordre un et hypothèses (H4), (H5) et (H6). Pour obtenir la variance asymptotique, nous devons d'abord calculer $\mathbb{E}(V_l^2 | \mathcal{F}_{l-1})$ et puis pour obtenir

$$\sigma^2(i, j, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(V_l^2 | \mathcal{F}_{l-1}) > 0$$

Premièrement,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_l^2 | \mathcal{F}_{l-1}) &= \frac{1}{h_{ij,n}} \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} p_{ij} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K^2\left(\frac{t-x}{h_{ij,n}}\right) f_{ij}(x) dx \right) + h_{ij,n} q_{ij}^2(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &\quad - 2q_{ij}(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} p_{ij} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t-x}{h_{ij,n}}\right) f_{ij}(x) dx \right). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes étapes précédentes, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_l^2 | \mathcal{F}_{l-1}) &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} p_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) f_{ij}(t - zh_{ij,n}) dz + h_{ij,n} q_{ij}^2(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \\ &\quad - 2q_{ij}(t) h_{ij,n} \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} p_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} K(z) f_{ij}(t - zh_{ij,n}) dz \\ &= \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} q_{ij}(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz - h_{ij,n} q_{ij}(t) \right] + O(h_{ij,n}). \end{aligned}$$

Deuxièmement,

$$\sigma^2(i, j, t) = \nu_i q_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz.$$

En utilisant (3.14) avec le théorème (5.6), on peut écrire

$$\begin{aligned} \sqrt{Th_{ij,T}} [\hat{q}_{ij}(t, T) - q_{ij}(t)] &= \frac{T}{N_i(T)} \sqrt{\frac{N(T)}{T}} \frac{1}{\sqrt{N(T)}} \sum_{l=1}^{N(T)} \left[\frac{1}{\sqrt{h_{ij,T}}} K\left(\frac{t - X_l}{h_{ij,T}}\right) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i, J_l=j\}} \right. \\ &\quad \left. - q_{ij}(t) \mathbb{1}_{\{J_{l-1}=i\}} \sqrt{h_{ij,T}} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les énoncés (3) et (5) du Lemma (5.4.1.1), avec l'application du théorème d'Anscombe, on déduit que

$$\begin{aligned}\sigma_q^2(i, j, t) &= \left(\mu_{ii} \sqrt{1/\mu_{ii} \nu_i} \right)^2 \nu_i q_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz \\ &= \mu_{ii} q_{ij}(t) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz\end{aligned}$$

Maintenant, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \left(V_l^2 \mathbf{1}_{\{|V_l| > \epsilon \sqrt{n}\}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et nous utilisons les mêmes étapes de (i) pour prouver ce résultat. D'après les résultats ci-dessus et le TLCF pour différences martingale (voir Billingsley [23]), on obtient le résultat souhaité.

Chapitre 4

Application et conclusion

Dans ce chapitre, nous appliquons les deux modèles markovienne et semi-markovienne à un jeu de données de la région du Nord Mer Egée en Grèce. De nombreuses recherches s'intéressent à cette région et ses environs, en raison de la forte activité sismique (Votsi et al.,[18]). La région a connu un nombre décent de forts tremblements de terre ($M \geq 6.4$), ainsi qu'une quantité décente d'événements modérés ($M \geq 5.5$) depuis 1953. Nous considérons tous les tremblements de terre depuis 1953

à 2007. avec $M \geq 5.5$, qui sont données dans le tableau B.0.1 (Votsi et al., [18]).

Date	Time	M	St
02-05-1953	18 : 37	5.6	1
03-08-1954	18 : 18	5.9	2
02-06-1955	23 : 34	5.5	1
06-01-1956	12 : 15	5.5	1
16-01-1958	04 : 18	5.7	2
11-04-1964	16 : 00	5.5	1
20-04-1964	04 : 21	5.6	1
09-03-1965	17 : 57	6.1	3
28-08-1965	14 : 08	5.6	1
20-12-1965	00 : 08	5.6	1
04-03-1967	17 : 58	6.6	3
19-02-1968	22 : 45	7.1	3
10-10-1968	07 : 10	5.5	1
06-04-1969	03 : 49	5.9	2
17-03-1975	05 : 35	5.8	2
27-03-1975	05 : 15	6.6	3
11-02-1976	07 : 35	5.7	2
14-06-1979	11 : 44	5.9	2
19-12-1981	14 : 10	7.2	3
18-01-1982	19 : 27	7.0	3
06-08-1983	15 : 43	6.8	3
05-10-1984	20 : 58	5.6	1
25-03-1986	01 : 41	5.5	1
29-03-1986	18 : 36	5.8	2
24-05-1994	02 : 05	5.5	1
25-05-1994	02 : 18	5.5	1
04-05-1995	00 : 34	5.8	2
14-11-1997	21 : 38	5.6	1
26-07-2001	00 : 21	6.3	3
06-07-2003	19 :01	5.5	1
15-06-2004	12 :02	5.5	1
21-12-2006	19 :30	5.7	2
09-11-2007	01 :43	5.5	1

Nous définissons trois états de tremblements de terre correspondant aux magnitudes :

état 1 : $[5.5, 5.6]$.

état 2 : [5.7, 6.0].

état 3 : [6.1, 7.2].

Ces intervalles sont définis pour spécifier les états discrets du système. On en déduit que l'espace d'état est égal à l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$

Pour cette application du modèle semi-markovien à la région du nord de la mer Egée en Grèce, nous sommes les plus intéressés par les tremblements de terre du troisième état. C'est pourquoi, dans les prochaines sections, nous déterminerons le nombre prévu d'occurrences de tremblements de terre avec $M \geq 6.1$.

Soit $t = 0$ le moment où nous avons observé le premier tremblement de terre. Ce tremblement de terre a eu lieu le 2 mai 1953. On note que on ne sait pas combien de temps le premier tremblement de terre était dans son état. Nous fixons l'heure de fin T plus tard que le dernier tremblement de terre nous avons observé. Le dernier séisme que nous avons observé date du 9 novembre 2007. Nous avons donc fixé $T = 55$ ans.

Dans les sections à venir, nous appliquons l'ensemble de données au modèle semi-markovien en temps continu. Le nombre de transitions observées dans l'ensemble de données de n'importe quel état i à n'importe quel état j pour $i, j \in E$ sont présentés comme des éléments dans la matrice N . Les éléments de cette matrice sont les valeurs $N_{ij}(T)$ pour tout $i, j \in E$

$$N = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A partir de la matrice N on peut conclure que CMI $\{J_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ est irréductible, car on peut faire une transition de l'état i à l'état j pour tout $i, j \in E$.

Les valeurs $N_i(T)$ pour $i \in E$ sont égales à $N_1(T) = 15, N_2(T) = 9, N_3(T) = 8$. Rappelons que l'estimateur empirique des probabilités de transition de tout état i à tout état j pour $i, j \in E$ de la CMI sont définies comme :

$$\hat{p}_{ij}(T) = \frac{N_{ij}(T)}{N_i(T)}.$$

Les estimations des probabilités de transition de tout état i à tout état j sont présentées comme des éléments dans la matrice \hat{P} .

$$\hat{P} = (\hat{p}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.4000 & 0.4000 & 0.2000 \\ 0.5556 & 0.2222 & 0.2222 \\ 0.5000 & 0.1250 & 0.3750 \end{pmatrix}$$

Les transitions de l'état i à l'état j avec les probabilités de transition correspondantes sont représentées sur la figure 4.1 pour tout $i, j \in E$.

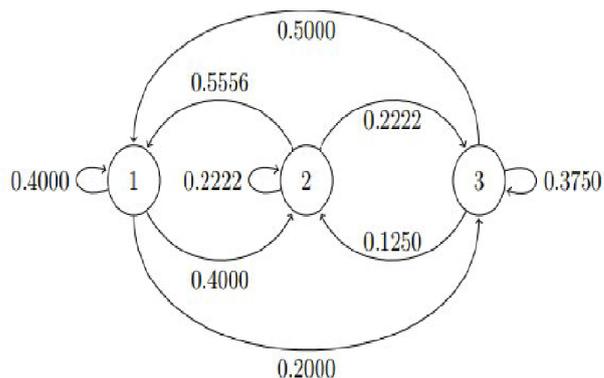
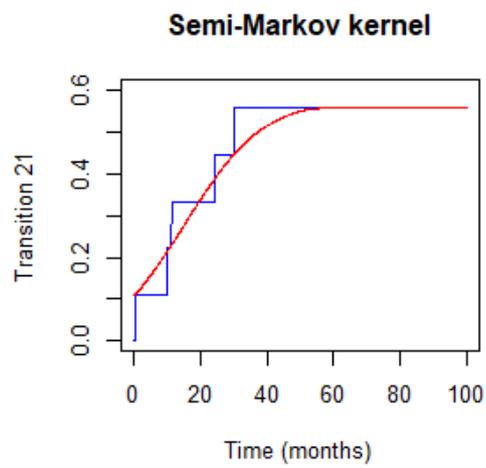
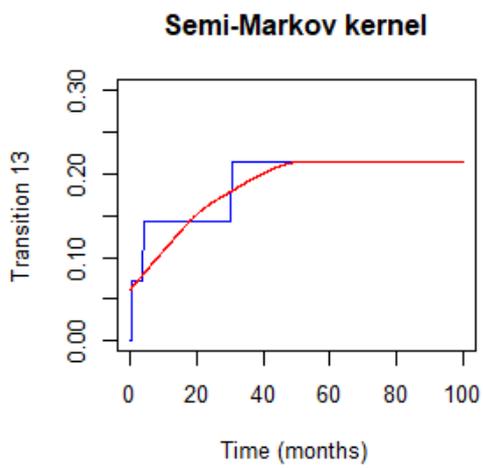
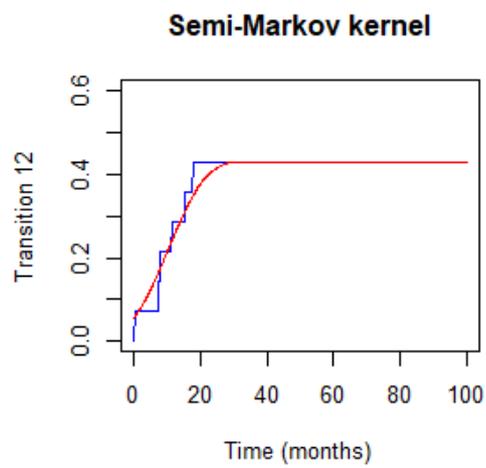
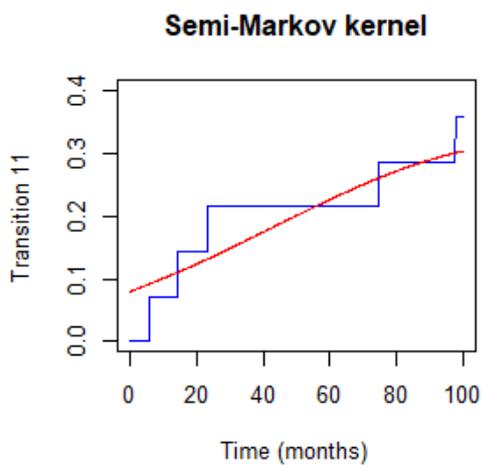


FIGURE 4.1 – Graphe de transitions

Avec l'utilisation de la définition de $\hat{Q}_{ij}(t, T)$, on a estimé les noyaux semi-markoviens et fonctions de transition conditionnelle $\hat{F}_{ij}(t, T)$ pour les transitions de l'état i à l'état i avec l'estimateur empirique et l'estimateur à noyau en utilisant les codes r de Ayhar et al. [9]. Les noyaux semi-markoviens sont montrés dans la figure (4.2) pour toutes les transitions de l'état i à l'état j , $i, j \in E$ et $t \geq 0$. Le temps de séjour se mesure en mois.

Les estimateurs empiriques des fonctions de transition conditionnelle $\hat{F}_{ij}(t, T)$, associés au temps de séjour dans chaque état avant transition, sont représentés sur la figure (4.3) pour toutes les transitions de l'état i à l'état j , $i, j \in E$ et $t \geq 0$.



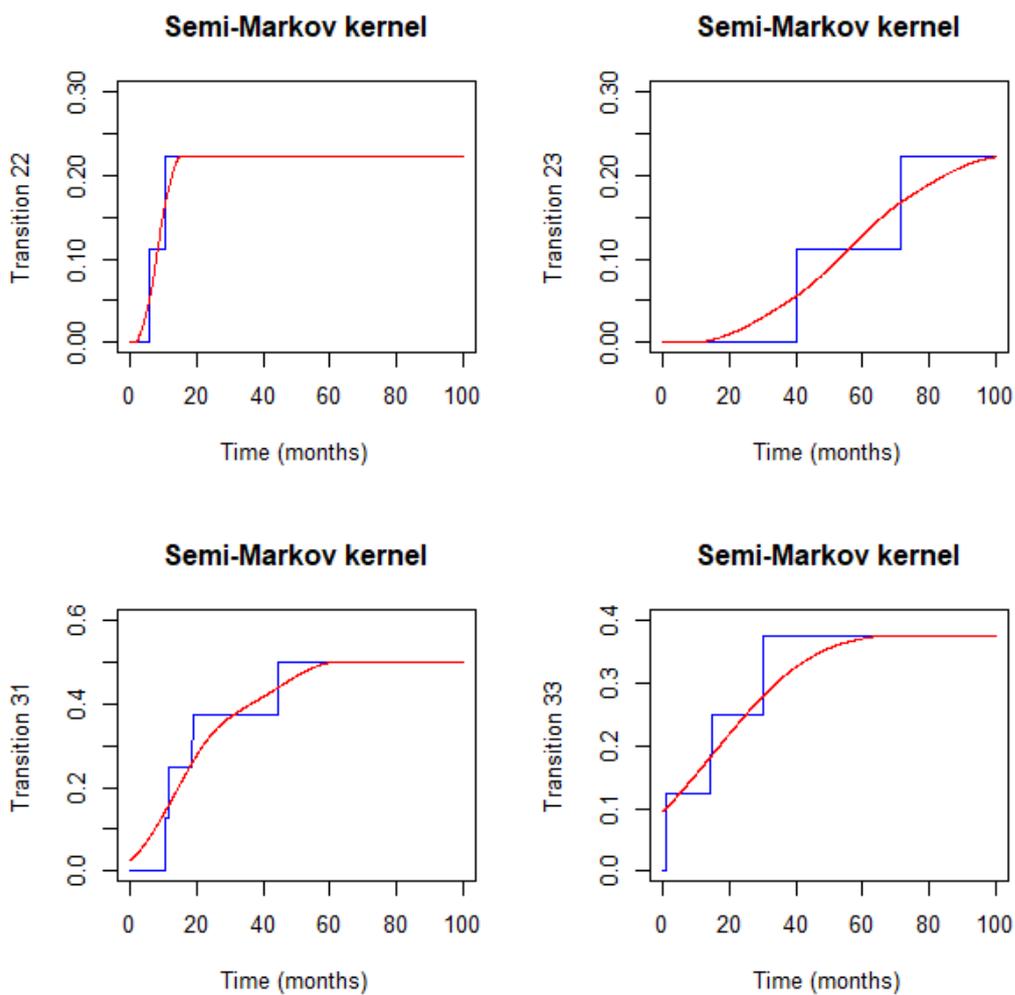
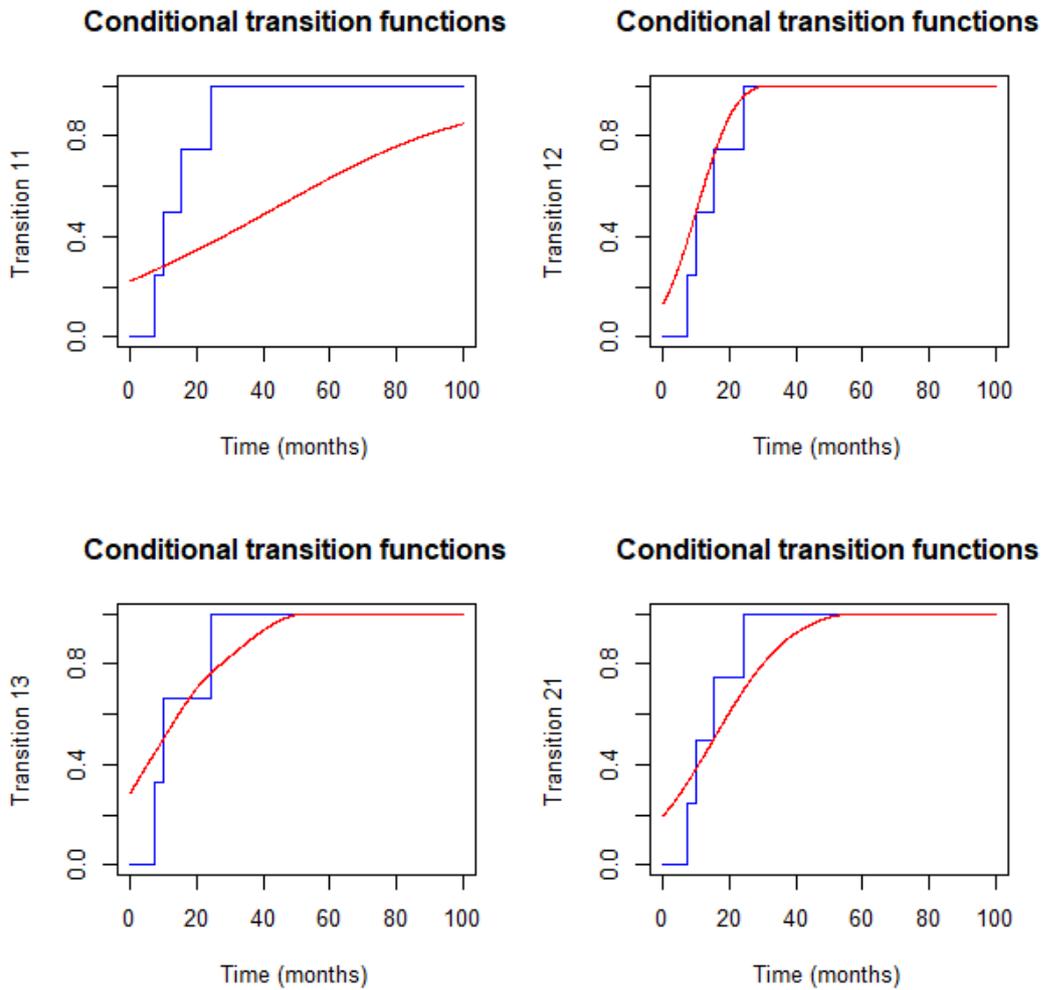


FIGURE 4.2 – Estimateurs par noyaux et Estimateurs empiriques des NSMs



4.1 Comparaison

Dans cette section, nous comparons le modèle de Markov homogène et le modèle de semi-Markov. Nous calculons le NSM à l'aide de distributions de temps de séjour et nous examinons le test de Wald pour la fonction de taux de hasard du PSM.

4.1.1 Modèle de Markov homogène

Nous choisissons la distribution exponentielle comme loi du temps de séjour. Dans ce cas, les fonctions de distribution de probabilité du temps de séjour sont définies comme

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-(t/\sigma_{ij})}$$

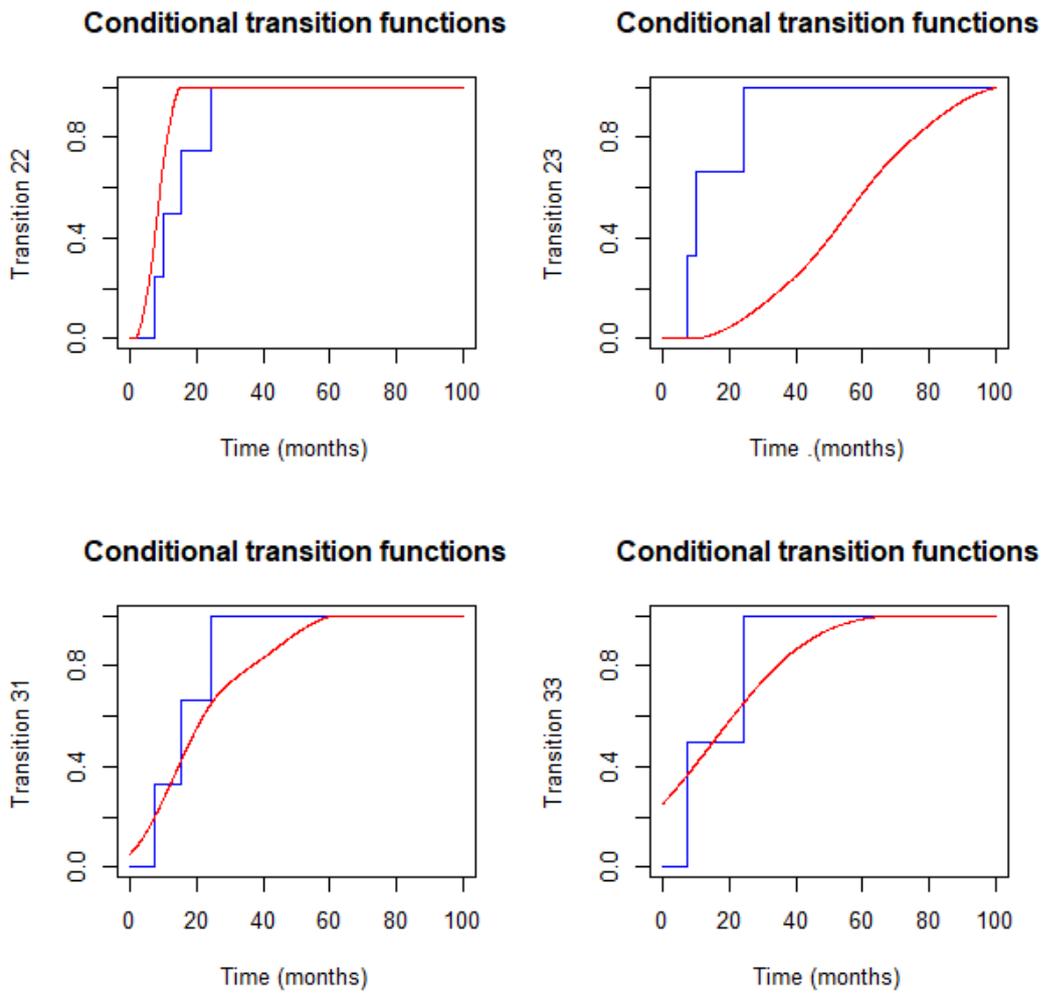


FIGURE 4.3 – Estimateurs par noyaux et Estimateurs empiriques des fonctions de transition conditionnelles

pour tout $i, j \in E$ et $t \geq 0$. Ici σ_{ij} est le paramètre d'échelle de la distribution. Dans la matrice suivante Σ nous donnons les valeurs du paramètres de la distribution exponentielle pour tout $i \neq j \in E$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} - & 1.535 & 2.386 \\ 5.538 & - & 1.384 \\ 1.598 & 1.302 & - \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $i, j \in E$ et $t \geq 0$. Nous obtenons les fonctions de densité estimées suivantes $f_{1j}(t)$ dans le cas du modèle homo Markov pour tout $\bar{i} \neq j \in E$:

$$\begin{aligned} f_{12}(t) &= 0.6515e^{-0.6515t}, & f_{13}(t) &= 0.4191e^{-0.4191t}, \\ f_{21}(t) &= 0.1806e^{-0.1806t}, & f_{23}(t) &= 0.7225e^{-0.7225t}, \\ f_{31}(t) &= 0.6258e^{-0.6258t}, & f_{32}(t) &= 0.7680e^{-0.7680t} \end{aligned}$$

Les fonctions de distribution de probabilité du temps de séjour avec le paramètre d'échelle σ_{ij} sont définies comme suit

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-t/\sigma_{ij}},$$

pour tout $i, j \in E$ et $t \geq 0$. Les fonctions de distribution de probabilité estimées du temps de séjour pour tous $i \neq j \in E$ sont

$$\begin{aligned} F_{12}(t) &= 1 - e^{-0.6515t}, & F_{13}(t) &= 1 - e^{-0.4191t}, \\ F_{21}(t) &= 1 - e^{-0.1806t}, & F_{23}(t) &= 1 - e^{-0.7225t}, \\ F_{31}(t) &= 1 - e^{-0.6253t}, & F_{32}(t) &= 1 - e^{-0.7680t}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ce qui suit les noyaux semi-markoviens suivants pour le modèle de Markov homogène avec $i \neq j \in E$

$$\begin{aligned} Q_{12}(t) &= 0.4000 (1 - e^{-0.6515t}), & Q_{13}(t) &= 0.2000 (1 - e^{-0.4191t}), \\ Q_{21}(t) &= 0.5556 (1 - e^{-0.1806t}), & Q_{23}(t) &= 0.2222 (1 - e^{-0.7225t}) \\ Q_{31}(t) &= 0.5000 (1 - e^{-0.6258t}), & Q_{32}(t) &= 0.1250 (1 - e^{-0.7680t}). \end{aligned}$$

4.1.2 Modèle semi-markovien

Nous choisissons la distribution de Weibull comme distribution du temps de séjour. Dans ce cas, les fonctions de distribution de probabilité du temps de séjour sont définies comme

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-(t/\sigma_{ij})^{\nu_{ij}}}$$

Dans les deux matrices suivantes $\Sigma = (\sigma_{ij})$ et $V = (\nu_{ij})$ nous donnons les valeurs des paramètres de la distribution de Weibull et exponentielle pour tout $i \neq j \in E$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} - & 1.493 & 2.398 \\ 5.381 & - & 1.152 \\ 1.461 & 1.311 & - \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} - & 1.061 & 1.854 \\ 1.263 & - & 0.495 \\ 2.083 & - & - \end{pmatrix}$$

Lorsque nous choisissons une distribution de Weibull pour le temps de séjour, les fonctions de densité du temps de séjour avec le paramètre d'échelle σ_{ij} et le paramètre de forme ν_{ij} sont définies comme

$$f_{ij}(t) = \frac{\nu_{ij}}{\sigma_{ij}} \left(\frac{t}{\sigma_{ij}} \right)^{\nu_{ij}-1} e^{-(t/\sigma_{ij})^{\nu_{ij}}}$$

pour tout $i, j \in E$ et $t \geq 0$. Nous obtenons les fonctions de densité estimées suivantes $f_{ij}(t)$ dans le cas du modèle semi-markovien pour tout $i \neq j \in E$:

$$\begin{aligned} f_{12}(t) &= 0.7106(0.6698t)^{0.061} e^{-(0.6698t)^{1.061}}, & f_{13}(t) &= 0.7731(0.4170t)^{0.854} e^{-(0.4170t)^{1.854}}, \\ f_{21}(t) &= 0.2347(0.1858t)^{0.263} e^{-(0.1858t)^{1.263}}, & f_{23}(t) &= 0.4297(0.8681t)^{-0.505} e^{-(0.8681t)^{0.495}}, \\ f_{31}(t) &= 1.4257(0.6845t)^{1.083} e^{-(0.6845t)^{2.083}}, & f_{32}(t) &= 0.7628e^{-0.7628t}. \end{aligned}$$

Les distributions de probabilité du temps de séjour avec le paramètre d'échelle σ_{ij} et le paramètre de forme ν_{ij} sont définies comme

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-(t/\sigma_{ij})^{\nu_{ij}}}$$

pour tout $i, j \in E$ et $t \geq 0$. Les fonctions de distribution de probabilité estimées du temps de séjour pour tout $i \neq j \in E$ sont

$$\begin{aligned} F_{12}(t) &= 1 - e^{-(0.6698t)^{1.061}}, & F_{13}(t) &= 1 - e^{-(0.4170t)^{1.854}}, \\ F_{21}(t) &= 1 - e^{-(0.1858t)^{1.263}}, & F_{23}(t) &= 1 - e^{-(0.8681t)^{0.495}}, \\ F_{31}(t) &= 1 - e^{-(0.6845t)^{2.083}}, & F_{32}(t) &= 1 - e^{-0.7628t}. \end{aligned}$$

Alors, pour le modèle semi-Markovien, on obtient les noyaux semi-Markoviens suivants pour $i \neq j \in E$:

$$\begin{aligned} Q_{12}(t) &= 0.4000 \left(1 - e^{-(0.6698t)^{1.061}} \right), & Q_{13}(t) &= 0.2000 \left(1 - e^{-(0.4170t)^{1.854}} \right), \\ Q_{21}(t) &= 0.5556 \left(1 - e^{-(0.1858t)^{1.263}} \right), & Q_{23}(t) &= 0.2222 \left(1 - e^{-(0.8681t)^{0.495}} \right), \\ Q_{31}(t) &= 0.5000 \left(1 - e^{-(0.6845t)^{2.083}} \right), & Q_{32}(t) &= 0.1250 \left(1 - e^{-0.7628t} \right). \end{aligned}$$

Nous définissons $Q_{ii}(t) = 0$ pour tout $i \in E$, car nous n'avons aucune information sur les distributions des temps de séjour des transitions de l'état i à lui-même.

4.2 Test de Wald

Le test de Wald nous donne la validité de la distribution donnée. Dans notre cas, nous testons les paramètres de la distribution σ_{ij} pour la distribution exponentielle et ν_{ij} pour la distribution de Weibull nous avons les tests d'hypothèses suivants :

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_{ij} = 1 \\ H_1 : \sigma_{ij} \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \nu_{ij} = 1 \\ H_1 : \nu_{ij} \neq 1 \end{cases}$$

Nous examinons tout d'abord le modèle de Markov homogène. Σ

	<i>Transition</i>	<i>Sigma</i>	<i>SD</i>	<i>Lower.CI</i>	<i>Upper.CI</i>	<i>Wald.test</i>	<i>p.value</i>
1	1 → 2	1.535	0.66	0.25	2.82	0.66	0.4166
2	1 → 3	2.386	1.43	-0.42	5.19	0.94	0.3323
3	2 → 1	5.538	2.49	0.66	10.41	3.33	0.0680
4	2 → 3	1.384	1.13	-0.82	3.59	0.12	0.7290
5	3 → 1	1.598	0.84	-0.05	3.24	0.51	0.4751
6	3 → 2	1.302	1.65	-1.94	4.54	0.03	0.8625

Pour le modèle semi-markovien, les résultats du test de Wald sont les suivants : Σ

	<i>Transition</i>	<i>Sigma</i>	<i>SD</i>	<i>Lower.CI</i>	<i>Upper.CI</i>	<i>Wald.test</i>	<i>p.value</i>
1	1 → 2	1.493	0.60	0.31	2.67	0.67	0.4131
2	1 → 3	2.398	0.77	0.89	3.90	3.31	0.0689
3	2 → 1	5.381	1.96	1.54	9.22	5.01	0.0252
4	2 → 3	1.152	2.10	-2.97	5.27	0.01	0.9203
5	3 → 1	1.461	0.37	0.73	2.19	1.55	0.2131
6	3 → 2	1.311	1.68	-1.98	4.61	0.03	0.8625

Σ

	<i>Transition</i>	<i>Sigma</i>	<i>SD</i>	<i>Lower.CI</i>	<i>Upper.CI</i>	<i>Wald.test</i>	<i>p.value</i>
1	1 → 2	1.061	0.37	0.33	1.79	0.03	0.8625
2	1 → 3	1.854	0.76	0.36	3.35	1.25	0.2636
3	2 → 1	1.263	0.47	0.33	2.19	0.31	0.5777
4	2 → 3	0.495	0.31	-0.11	1.10	2.64	0.1042
5	3 → 1	2.083	0.84	0.44	3.73	1.67	0.1963

Si $p - value > 0.05$, nous ne parvenons pas à rejeter l'hypothèse nulle.. Nous concluons que le modèle de Markov homogène est peut-être un meilleur ajustement.

Pour le reste des fonctions de taux du processus semi-markovien, nous ne pouvons pas conclure à une préférence pour un certain modèle sur la base des valeurs p du test de Wald.

4.3 Conclusion

Le modèle markovien et le modèle semi-markovien sont deux modèles importants dans la théorie des processus stochastiques. Bien qu'ils soient basés sur l'hypothèse de Markov, ils diffèrent dans leur façon de modéliser le temps. Le choix entre les deux modèles dépend du phénomène à modéliser et des données disponibles.

Chapitre 5

Annexes

Des résultats, utilisés tout au long de ce mémoire, sont présentés dans cette annexe. Toutes les variables (ou vecteurs) aléatoires sont définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

5.1 Théorème de Slutsky

Soient $\mathbf{X} := (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{Y} = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de v.a. et X une v.a. Le résultat suivant est donné par, e.g., van der Vaart [4].

Théorème 5.1. *Si \mathbf{X} converge en loi vers X et \mathbf{Y} converge en loi vers c , avec c constante p.s., alors*

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$;
2. $Y_n X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$;
3. $Y_n^{-1} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c^{-1} X$, si $c \neq 0$;

lorsque $n \rightarrow \infty$.

5.2 Théorème de Glivenko-Cantelli

[4] Soit F_n la fonction de répartition empirique d'une fonction de répartition F . Alors

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \longrightarrow 0 \text{ p.s.}$$

5.3 Théorème d'Anscombe

Soient $\mathbf{X} := (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi centrée et de variance σ^2 finie et $N := (N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus à valeurs dans \mathbb{N}^* , fini p.s. pour tout n , indépendant de \mathbf{X} . Le théorème suivant en temps continu est énoncé par Gut [25].

Théorème 5.2. *On suppose que*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta, \quad n \rightarrow \infty,$$

avec θ une constante, $0 < \theta < \infty$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{N_n}} \sum_{m=1}^{N_n} X_m \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty$$

Théorème 5.3. *(Loi forte des grands nombres). Pour un PRM apériodique qui satisfait les Hypothèses H1 et H2 (voir Chapitre 3) nous avons*

$$\frac{W_f(T)}{T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} m_f.$$

Théorème 5.4. *(Théorème centrale limite)*

Pour un PRM récurrent irréductible qui satisfait les hypothèses H1 et H2 (voir chapitre 3) nous avons

$$T^{-1/2} [W_f(T) - T \cdot m_f] \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, B_f)$$

5.4 Théorème central limite

5.4.1 TCL pour martingales

Le résultat suivant est le théorème central limite de Lindeberg-Lévy pour martingales de Billingsley [25].

Définition 5.4.1. *(Martingale) Soit $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ une famille de sous- σ algèbre de \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$, quand $n < m$. On dit que \mathbf{F} est la filtration de \mathcal{F} . Une valeur réelle \mathbf{F} -processus stochastique adapté X_n s'appelle une martingale par rapport à une filtration \mathbf{F} si, pour tout $n = 0, 1, \dots$,*

1. $\mathbb{E} |X_n| < \infty$,
2. $\mathbb{E} [X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ a.s.

Théorème 5.5. [25] *(TCL pour martingales)*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et définir le processus $Y_n = X_n - X_{n-1}, n \in \mathbb{N}^$ (avec $Y_1 = X_1$), appelée une martingale de différence. Si*

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [Y_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \sigma^2 > 0$;
2. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[Y_k^2 1_{\{|Y_k| > \epsilon \sqrt{n}\}} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, for all $\epsilon > 0$, alors

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n}}X_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Lemme 5.4.1.1. [20]

Sous les notations précédentes, si la CMI $(J_n)_n$ est récurrente positive, alors, pour tout $i, j \in E$ on a :

1. $\frac{N_i(T)}{N(T)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} \nu_i,$
2. $\frac{N_{ij}(T)}{N(T)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} \nu_i p_{ij},$
3. $\frac{N_i(T)}{T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} \frac{1}{\mu_{ii}},$
4. $\frac{N_{ij}(T)}{T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} \frac{p_{ij}}{\mu_{ii}},$
5. $\frac{N(T)}{T} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{a.s.} \frac{1}{\nu_i \mu_{ii}}.$

Théorème 5.6. [3] Supposons que Y_1, Y_2, \dots soient des variables aléatoires telles que

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} Y,$$

et que $\{N(t), t \geq 0\}$ est une famille de variables aléatoires entières positives, telle que

$$N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} \infty.$$

Alors

$$Y_{N(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{p.s.} Y.$$

Bibliographie

- [1] A. Asanjarani, B. Liqueet and Y. Nazarathy Estimation of Semi-Markov Multi-state Models : A Comparison of the Sojourn Times and Transition Intensities Approaches.
- [2] A. Baddeley and R. Turner. Spatstat : an R package for analyzing spatial point patterns. *Journal of Statistical Software*, 12(1) :1-42, 2005.
- [3] A.C. Guidoum. Kernel estimator and bandwidth selection for density and its derivatives. Department of Probabilities and Statistics, University of Science and Technology, Houari Boumediene, Algeria, 2015.
- [4] A.W. Van der Vaart. *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] B. Ouhbi and N. Limnios. Non-parametric failure rate estimation of semi-Markov systems. In *Semi-Markov models and applications*, pages 207-218. Springer, 1999.
- [6] B. Ouhbi and N. Limnios. Nonparametric estimation for semi-Markov processes based on its hazard rate functions. *Stat. Inference Stoch. Process*, 2(2) :151-173, 1999.
- [7] B. Ouhbi and N. Limnios. Nonparametric estimation for semi-Markov kernels with application to reliability analysis. *Appl. Stoch. Models Data Anal*, 12 :209-220, 1996.
- [8] B. Ouhbi and N. Limnios. Comportement asymptotique de la matrice de renouvellement markovien. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(8) :921-924, 1997.
- [9] C. Ayhar, V.S. Barbu, F. Mokhtari, and S. Rahmani. On the asymptotic properties of some kernel estimators for continuous-time semi- Markov processes. *Journal of Nonparametric Statistics*, 34(1) :1-21, 2022.
- [10] F. Grabski, *Semi-Markov Processes : Applications in System Reliability and Maintenance*, Polish Naval University Gdynia, Poland, 2015
- [11] F. Grabski, *Concept of Semi-Markov Process*, De Gruyter, 2016. D. A. Darling, " The Kolmogorov-Smirnov, Cram r-von mises tests," *Ann.Math. Statist.*, 28 (1957).

- [12] E.A. Nadaraya. Some new estimates for distribution functions. *Theory of Probability and Its Applications*, 9(3) :497-500, 1964.
- [13] E.H. Moore and R. Pyke. Estimation of the transition distributions of a Markov renewal process. *Ann. Inst. Statist. Math*, 20 :411-424, 1968.
- [14] F. Grabski, *Semi-Markov Processes : Applications in System Reliability and Maintenance*, Polish Naval University Gdynia, Poland, 2015
- [15] F. Grabski, *Semi-Markov Processes : Applications in System Reliability and Maintenance*, Polish Naval University Gdynia, Poland, 2015.
- [16] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946.
- [17] I. Votsi, N. Limnios, G. Tsaklidis, and E. Papadimitriou. Estimation of the expected number of earthquake occurrences based on semi-Markov models. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 14(3) :685- 703, 2012.
- [18] Irene Votsi, Nikolaos Limnios, George Tsaklidis & Eleftheria Papadimitiou, *Estimation of the Expected Number of Earthquake Occurrences Based on Semi-Markov Models*, Springer, 2011.
- [19] M.L. Gimiz, K.B. Kulasekera, N. Limnios, and B.H. Lindqvist. *Applied Nonparametric Statistics in Reliability*. Springer, 2011.
- [20] N. Limnios, G. Oprisan, *Semi-Markov Processes and Reliability*, in : *Statistics for Industry and Technology*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (2001).
- [21] N. Limnios. Reliability measures of semi-Markov systems with general state space. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 14(4) :895-917, 2012.
- [22] Lévy P. Processus semi-markoviens, in *Proc. Int. Congr. Math.* (1956), 3, 416-426..
- [23] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 2nd edition, 1999.
- [24] P. Lévy. *Processus Semi-Markoviens*. *Proc. of International Congress of Mathematics*, Amsterdam, 1954.
- [25] P. Billingsley. The lindeberg-lévy theorem for martingales. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(5) :788-792, 1961.
- [26] R.D. Gill Nonparametric estimation based on censored observations of Markov renewal process. *ZWahrscheinlichkeitstheor Verw Geb* 53(1980).
- [27] S. Trevezas and N. Limnios. Exact MLE and asymptotic properties for nonparametric semi-Markov models. *Journal of Nonparametric Statistics*, 23(3) :719-739, 2011.

-
- [28] V. Barbu and N. Limnios. Semi-Markov chains and Hidden Semi Markov Models toward Applications vol.191, Spring, New York.(2008).
- [29] V.S. Barbu, C. Berard, D. Cellier, F. Lecocq, C. Lothode, and M. Sautreuil. smmR : Semi-Markov models, Markov models and reliability. <https://cran.r-project.org/web/packages/smmR/index.html>, 2021.
- [30] V.S. Barbu and N. Limnios. Empirical estimation for discrete time semi-Markov processes with applications in reliability. *Journal of Nonparametric Statistics*, 18(4) :483-498, 2006.