République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Saida - Dr Moulay Tahar.
Faculté des Sciences.
Département de Mathématiques.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique
Filière : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique des Processus et Applications

par

**Khater Bouzid Mohamed**[1]

Sous la direction de

**Dr A. Benkhaled**

**Thème :**

# SUR LA MINIMAXITÉ ET LA LIMITE DU RAPPORT DE RISQUE DE L'ESTIMATEUR DE JAMES-STEIN SOUS UNE FONCTION DE PERTE ÉQUILIBRÉE

Soutenue le 10/06/2023 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **K. Djorfi** | Université de Saïda Dr. Moulay Tahar | Président |
| **A. Benkhaled** | Université de Mustafa Stambouli Mascara | Encadreur |
| **F. Mokhtari** | Université de Saïda Dr. Moulay Tahar | Examinateur |

Année univ.: 2022/2023

1. e-mail : khm204547@gmail.com

# Dédicace

*Je dédie ce travail*

*À ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études.*
*Qu'iles trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et reconnaissance.*

*À mes frères, mes soeurs et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.*

*À tous ceux qui m'ont aidé-de prés ou de loin-et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.*

*À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succés.*

*Merci !*

Mohamed

# Remerciements


Tout d'abord, nous tenons à remercier le "**BON DIEU**" le tout puissant de nous avoir accorder la patience, le courage et la volonté afin de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à remercier tout particuliérement mon encadreur, **Dr. Abdelkader Benkhaled** pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger.

Je voudrais également remercier tous les membres de jury d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.

Je remercie chaleureusement toute ma famille, qui m'a soutenu, encouragé et poussé durant toutes mes années d'étude. Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à mes amis permanents, qui m'ont toujours entouré et m'ont motivé à continuer à meilleure.

J'exprime mes remerciements à tous mes enseignants du département de Mathématiques qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour, ainsi que le personnel de l'administration.

Je remercie tous les membres de laboratoire des Modèles Stochastique Statistique et Application pour leur accueil et leur sympathie.

***Merci à tous***

# Résumé

Ce travail est essentiellement centré sur l'estimation, du point de vue de la théorie de décision, de la moyenne d'une distribution normale multidimensionnelle. Sous une fonction de perte équilibrée, nous nous sommes concentrés à l'étude de la minimaxité et la limites des rapports de risques des estimateurs de type James-Stein et sa partie positive. A la fin du mémoire, on illustre les résultats théoriques par des représentations graphiques des fonctions des risques des estimateurs considérés.

**Mots clés** : Loi normale mutidimensionnelle, Fonction de perte équilibrée, Estimateur de type James-Stein.

# Table des matières

# Introdution

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'estimation paramétrique de la moyenne d'une loi normale multidimensionnelle par deux formes d'estimateurs à rétrécisseur, de type James-Stein et sa partie positive. Ce travail se présente en quatre chapitres, décrits successivement comme suit :

Le chapitre un est introductif, on présente un panorama général sur la théorie des estimateurs paramétrique, vecteurs gaussiens, modèle Statistique, construction d'estimateurs, qualité d'un estimateur ect.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons les estimateurs de type James-Stein et sa partie positive. Sous des hypothèses de régularité nous établissons la minimaxité.

Le troisième chapitre constitue une suite du précédent où on étudier la limite des rapports de risque des éstimateurs à rétrécisseurs de type James-Stein et la partie positive de James-Stein.

Le dernier chapitre sera consacré à l'étude de simulation. En premier temps, nous représentons graphiquement les rapport de risques des estimateurs $\delta_{JS}$ et $\delta_{JS}^{+}$ par rapport à $X$. En second temps, nous donnons un tableau contients les valeurs des rapport de risques des estimateurs $\delta_{JS}$ et $\delta_{JS}^{+}$ par rapport à $X$ pour différentes valeurs de $\omega$ et $\lambda$.

Finalement, le mémoire s'achève par une conclusion générale.

Chapitre 1

# Introduction générale

## Sommaire



## 1.1 Lois gaussiennes

**Définition 1.1.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On dit que $X$ est $\mathbb{I}$ une variable aléatoire gaussienne de paramètres $(\mu,\sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$ (on note $X \sim N(\mu,\sigma^2)$) si et seulement si $X$ vérifie une des deux conditions suivantes :

- $\sigma > 0$ et $X$ admet pour densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

- $\sigma = 0$ et $X$ est presque sûrement égale à $\mu$.

**Remarque 1.1.** Dans le deuxième cas, on parle de lois gaussiennes dégénérées et donc la variable aléatoire $X$ n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Proposition 1.1.** Une variable aléatoire $X$ de loi $N(\mu, \sigma^2)$ a pour
- Espérance : $\mathbb{E}[X] = \mu$.
- Variance : $Var(X) = \sigma^2$.
- Fonction caractéristique

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{it\mu} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}, \ t \in \mathbb{R}$$

Lorsque la moyenne $\mu$ vaut 0, et l'écart-type vaut 1, la loi sera notée $N(0,1)$ et sera appelée loi normale standard. Sa fonction caractéristique vaut $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Seule la loi $N(0,1)$ est tabulée car les autres lois (c'està- dire avec d'autres paramètres) se déduise de celle-ci à l'aide du théorème suivant :

**Théorème 1.1.** *Si la variable aléatoire $X$ suit une loi $N(\mu, \sigma^2)$,*
*alors $Y := \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0,1)$*

## 1.2 Vecteurs gaussiens

**Définition 1.2.**
- Un ***vecteur aléatoire*** est un vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ composé de $n$ variables aléatoires définies sur le même espace.
- Un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ est dit $L^1$, resp. $L^2$, si $\mathbb{E}[X_i] < +\infty$, resp. $\mathbb{E}[X_i^2] < +\infty$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
- La ***matrice de covariance*** d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $L^2$ est la matrice carrée symétrique, positive

$$\Sigma = (Cov(X_i, Y_j))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

- ***L'espérance*** d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$ $L^1$ est le vecteur des espérances de ses marginales

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_n)).$$

**Définition 1.3.** Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ est gaussien si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de ses coordonnées $\langle a, X\rangle = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ suit une loi gaussienne dans $\mathbb{R}$ (pour tout $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$).

**Proposition 1.2.** Si $\psi$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et si $X$ est un vecteur gaussien de dimension $n$ alors $\psi(X)$ est aussi un vecteur gaussien de dimension $m$.

**Remarque 1.2.**
- Si $X$ est un vecteur gaussien alors pour toute partie $\{i_1, \dots, i_p\}$ de $\{1, \dots, n\}$, le vecteur $(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})$ est gaussien.
- Un vecteur gaussien est nécessairement $L^2$ puisque, par définition, chacune de ses marginales $X_i$ est gaussienne donc $L^2$.

**Théorème 1.2.** *Un vecteur aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien si et seulement si $X$ est $L^2$ et il admet pour fonction caractéristique*

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{iu^t\mu} e^{-\frac{1}{2}u^t \Sigma u}, \ u \in \mathbb{R}^n$$

*avec $\mu = \mathbb{E}$ et $\Sigma = Var(X)$*

**Proposition 1.3.** Soit $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$ un vecteur gaussien de dimension $n$, de moyenne $\mu$ et de covariance $\Sigma$. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si la matrice $\Sigma$ est diagonale.

**Proposition 1.4.** Soit $X$ un vecteur gaussien écrit de la forme $(Y, Z)$ avec $Y \in \mathbb{R}^p$ et $Z \in \mathbb{R}^q$. Les vecteurs $Y$ et $Z$ sont indépendants si et seulement si la matrice de covariance de $X$ est diagonale par blocs c'est a dire

$$\begin{pmatrix} A & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & B \end{pmatrix}$$

avec $A$ une matrice de dimension $p \times p$ et $B$ une matrice de dimension $q \times q$.

**Proposition 1.5.** La densité d'un vecteur gaussien $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$ non dégénéré (i.e $det\Sigma \neq 0$) est

$$f_X(x) = \frac{exp(-\langle (x-\mu), \Sigma^{-1}(x-\mu)\rangle/2)}{((2\pi)^n det\Sigma)^{1/2}}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

## 1.3 Loi du $\chi^2$ (khi-deux)

**Définition 1.4.** Soit $Z_1, \ldots, Z_\nu$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $N(0,1)$. Alors la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ suit une loi appelée loi du Khi-deux à $\nu$ degrés de liberté, notée $\chi^2_\nu$.

**Proposition 1.6.**
- La densité de la loi du $\chi^2_\nu$ est

$$f_{\chi^2_\nu}(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \; x > 0$$

  où $\Gamma$ est la fonction Gamma d'Euler définie par $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$
- L'espérance de la loi du $\chi^2_\nu$ est égale au nombre $\nu$ de degrés de liberté et sa variance est $2\nu$.
- Sa fonction caractéristique est $\phi_{\chi^2_\nu}(t) = (1-2it)^{-\nu/2}$
- Pour $\nu \geq 30$, $\sqrt{2\chi^2_\nu} - \sqrt{2\nu - 1}$ suit approximativement une loi $N(0,1)$.

## 1.4 Le moment d'ordre $k$

**Définition 1.5.** Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi $\chi^2_p$. On appelle moment d'ordre $k$ la quantité

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{+\infty} u^k f(u) du$$

où $f(u)$ est la densité de $X$.

**Proposition 1.7.** Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi $\chi^2_p$. Alors

$$\mathbb{E}(X^k) = 2^k \frac{\Gamma(\frac{p}{2} + k)}{\Gamma(\frac{p}{2})}$$

D'après la proposition précédente $\mathbb{E}(\chi^2_p) = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{1}{2}} = p$ et $Var(\chi^2_p) = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{1}{4}} = 2p$.

## 1.5 Loi du khi-deux décentrée

**Définition 1.6.** Soit $X_1, \dots, X_\nu$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivent la loi $N(\theta_i, \sigma_i^2)$, $i = 1 : \nu$. Alors la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{\nu} \left( \frac{X_i}{\sigma_i} \right)^2$ suit la loi du Khi-deux décentrée, elle dépend de deux paramètres :
$\nu$ : est le nombre de degrés de liberté.
$\lambda$ : est le paramètre de décentrage, il est donné par $\lambda = \sum_{i=1}^{\nu} \left( \frac{\theta_i}{\sigma_i} \right)^2$ et on note $X \sim \chi_\nu^2(\lambda)$.

**Proposition 1.8.**

- La densité de la loi du $\chi_\nu^2(\lambda)$ est

$$f_{\chi_\nu^2(\lambda)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \chi_{p+2k}^2 \frac{e^{-\lambda/2}(\lambda/2)^k}{k!}, \ x > 0$$

- Sa fonction caractéristique est $\phi_{\chi_\nu^2(\lambda)}(t) = \dfrac{e^{\left(\frac{i\lambda t}{1-2it}\right)}}{(1-2it)^{\nu/2}}$

**Définition 1.7.** Soit $h$ une fonction mesurable et $X \sim \chi_\nu^2(\lambda)$, on définit l'espérance de $h(X)$ par

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} h(x) \chi_{p+2k}^2 dx \right] \frac{e^{-\lambda/2}(\lambda/2)^k}{k!} \tag{1.1}$$

où $\chi_{p+2k}^2$ est la loi de Khi-deux centrée à $p + 2k$ degrés de liberté.

## 1.6 Estimation paramétrique

### 1.6.1 Modèle Statistique

**Définition 1.8.** ► Un échantillon d'une loi est une suite de v.a indépendantes identiquement distribuées (i.i.d).
► Un modèle statistique est la donnée de triplet $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ où : $\mathfrak{X}$ est l'espace de réalisations, $\mathfrak{A}$ tribu sur $\mathfrak{X}$, $P_\theta = P_X$ loi de $X$ et $\Theta$ l'ensemble des paramétres $\theta$.

**Exemple 1.1.** Soit un échantillonnage de $N(m, \sigma^2)$, c'est à dire une suites $X_1, \ldots, X_n$ de v.a i.i.d avec $\forall i,\ X_i \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$, $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$, $P_\theta = N(m, \sigma^2)$ et $\theta = (m, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

**Définition 1.9.** Une statistique est une application $T$ mesurable (v.a) de $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ dans un espace mesurable $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$.

$$\begin{array}{rccc} T: & (\mathfrak{X}, \mathfrak{A}) & \longrightarrow & (\mathfrak{F}, \mathfrak{H}) \\ & (X_1, \ldots, X_n) & \longmapsto & T(X_1, \ldots, X_n). \end{array}$$

**Définition 1.10.** On appelle estimateur de $\theta$, toute statistique $T$ de $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$ à valeurs dans $\Theta$.

### 1.6.2 Construction d'estimateurs

#### Méthode des moments

C'est une méthode naturelle dans la mesure où elle est intuitive. Supposons que l'on doive estimer le paramétre $\theta$, la méthode des moments consiste à choisir comme estimateur $\widehat{\theta_n}$ la solution de l'équation obtenue en égalant le moment théorique d'ordre $k$ et le moment empirique d'ordre $k$.

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

**Exemple 1.2.** Soit $X \hookrightarrow G(1, \theta)$, donc $E(X) = \dfrac{1}{\theta}$.
$*$ pour $k = 1$ la méthode des moments nous donne $E(X) = \overline{X}_n$, alors un estimateur de $\theta$ est

$$\widehat{\theta_n} = \frac{1}{\overline{X}_n}$$

$*$ pour $k = 2$ la méthode des moments nous donne $E(X^2) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, or $E(X^2) = \theta \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x} dx = \dfrac{2}{\theta^2}$, alors un estimateur de $\theta$ est

$$\widehat{\theta_n} = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

**Méthode du maximum de vraisemblance**

**Définition 1.11.** Soient $X = X_1,\ldots,X_n$ une suites de v.a i.i.d, on appelle fonction de vraisemblance pour $X$ la fonction définie par :

$$L(X_1,\ldots,X_n,\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} P(X_i,\theta) & \text{si} \quad \text{les } X_i \text{ sont discrètes} \\ \\ \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta) & \text{si} \quad \text{les } X_i \text{ sont continues} \end{cases}$$

**Définition 1.12.** l'estimateur de $\theta$ par la méthode du maximum de vraisemblance est la valeur $\widehat{\theta_n}$ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $L$.

Les conditions requises pour assurer cette maximisation sont $\dfrac{dL}{d\theta} = 0$ et $\dfrac{d^2L}{d\theta^2} < 0$.
Il est par fois plus commode de maximiser le logarithme népérien de $L$ par rapport à $\theta$ puisque cette fonction comporte souvent des puissances ou des formes exponentielles, les conditions deviennent alors $\dfrac{dlnL}{d\theta} = 0$ et $\dfrac{d^2lnL}{d\theta^2} < 0$.
$lnL$ est une fonction croissante et elle aura sa valeur maximum pour la même valeur de $\theta$ qu'aurait la fonction $L$.

**Remarque 1.3.** L'estimateur du maximum de vraisemblance peut ne pas exister.

**Exemple 1.3.** Si les $X_i$ sont de loi $N(m,\sigma^2)$, la fonction de vraisemblance est :

$$L(X_1,\ldots,X_n,m,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,m,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2}$$

D'où

$$lnL(X_1,\ldots,X_n,m,\sigma^2) = -\frac{n}{2}ln\sigma^2 - \frac{n}{2}ln2\pi - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2$$

On doit annuler les dérivées partielles de ce logarithme par rapport à $m$ et $\sigma^2$. On a

$$\frac{\partial}{\partial m} lnL(X_1,\ldots,X_n,m,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} -2(X_i - m) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - nm\right),$$

qui s'annule pour

$$\widehat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n.$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} lnL(X_1,\ldots,X_n,m,\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2,$$

qui s'annule pour

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = S_e^2.$$

### 1.6.3 Qualité d'un estimateur

**Biais d'un estimateur**

**Définition 1.13.** Le biais d'un estimateur est la quantité

$$b_\theta(T) = E_\theta(T) - \theta$$

où $E_\theta$ espérance par rapport à $P_\theta$.
$*$ Si $b_\theta(T) = 0$, $T$ est dit estimateur sans biais.
$*$ Si $b_\theta(T) \neq 0$, $T$ est dit estimateur biaisé.

**Définition 1.14.** Un estimateur $T(X) = (T_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\theta$, où $T_n(X)$ est intégrable pour tout $n$, est dit asymptotiquement sans biais si $E(T_n(X)) - \theta$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini et ce pour tout $\theta$ dans $\Theta$.

**Propriétés 1.1.** $*$ La moyenne empirique $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais pour $m$, en effet

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} nm = m$$

$*$ La variance empirique $S_e^2$ est un estimateur biaisé pour $\sigma^2$ mais il est asymptotiquement sans biais, en effet

$$\begin{aligned} E(S_e^2) &= E(X^2) - E(\overline{X}_n^2) \\ &= V(X) + E(X)^2 - V(\overline{X}_n) - E(\overline{X}_n)^2 \\ &= \frac{n-1}{n} V(X) \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2 \rightarrow_{n\to\infty} \sigma^2. \end{aligned}$$

En revanche, on voit que $E(\frac{n}{n-1}S_e^2) = \frac{n}{n-1}E(S_e^2) = \sigma^2$. On pose donc

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Par conséquent $S^2$ (appelée variance estimée) est un estimateur sans biais pour $\sigma^2$.

### Estimateur convergent

**Définition 1.15.** Un estimateur $T$ est dit convergent si $E(T)$ tend vers $\theta$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Il sera dit consistant si $T$ converge en probabilité vers $\theta$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Théorème 1.3.** *Si $T$ est convergent et de variance tendant vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini alors $T$ est consistant.*

Si $T$ et $\theta$ sont dans $\mathbb{R}$, la définition de la convergence de l'estimateur signifie que l'on a, pour tout $\epsilon > 0$ :

$$P(|T - \theta| > \epsilon) \to 0,$$

quand $n \to +\infty$.

**Exemple 1.4.** Si les $X_i$ sont de loi $B(\theta)$ alors l'estimateur $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers $\theta$ lorsque $n$ tend vers l'infini. En effet, soit $\epsilon > 0$

$$p(|\overline{X}_n - \theta| > \epsilon) \le \frac{Var(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n}\theta(1-\theta) \rightarrow_{n\to+\infty} 0$$

On peut considérer d'autres types de convergence, comme la convergence p.s. ou la convergence dans $L^p$, pour $p$ fixé. Dans ces cas, on dira respectivement que l'estimateur est fortement consistant ou $L^p$-consistant.

**Risque d'un estimateur**

On se donne en premier lieu un critère mesurant et pénalisant l'écart entre l'estimateur $\delta$ et la vraie valeur $\theta$. On parle de fonction de coût.

**Définition 1.16.** On appelle fonction de coût (ou de perte) toute fonction $L$ mesurable de $\Theta \times \Theta$ dans $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{array}{rccc} L: & \Theta \times \Theta & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\delta, \theta) & \longmapsto & L(\delta, \theta). \end{array}$$

Quelques fonctions de coût classiques sont :
1– La fonction de coût valeur absolue : $L(\delta, \theta) = |\delta - \theta|$
2– La fonction de coût quadratique : $L(\delta, \theta) = (\delta - \theta)^2$
Le rôle de chaque fonction de coût est :
- ► de mesurer la qualité de l'estimation,
- ► d'aboutir à une solution en minimisant la fonction de coût.

**Définition 1.17.** On appelle risque d'un estimateur $\delta$ de $\theta$ associé à la fonction de coût $L$, la fonction $R$ de $\Theta$ vers $\mathbb{R}^+$ définie par

$$R(\delta, \theta) = E(L(\delta, \theta)),$$

pour tout $\theta$ de $\Theta$, sous réserve que cette espérance existe.

**Remarque 1.4.** Quand la fonction de coût est quadratique on parle de risque quadratique.

**Proposition 1.9.** Soit $T$ un estimateur de $\theta$, si la fonction de coût $L(\delta, \theta)$ est quadratique on a :

$$R(T, \theta) = V_\theta(T) + b_\theta^2(T)$$

**Remarque 1.5.** Entre deux estimateurs sans biais, le "meilleur" sera celui dont la variance est minimale (on parle d'efficacité).

**Exemple 1.5.** Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires i.i.d de moyenne $\theta$ et de variance $\sigma^2$. Soient $\delta_1$ et $\delta_2$ deux estimateurs non biasés de $\theta$ telle que :

$$\delta_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \text{ et } \delta_2 = \frac{aX_1 + bX_2}{a + b} \text{ où } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
Var(\delta_1) - Var(\delta_2) &= Var(\frac{X_1+X_2}{2}) - Var(\frac{aX_1+bX_2}{a+b}) \\
&= \frac{1}{4}Var(X_1+X_2) - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}Var(X_1) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right)\sigma^2 \\
&= \left(\frac{(a+b)^2-2a^2-2b^2}{2(a+b)^2}\right)\sigma^2.
\end{aligned}$$

Comme $2(a+b)^2 > 0$ et $(a+b)^2 - 2a^2 - 2b^2 = -(a-b)^2 < 0$, alors

$$Var(\delta_1) < Var(\delta_2).$$

Donc $\delta_1$ est meilleur que $\delta_2$.

**Définition 1.18.** Soient $\delta_1$ et $\delta_2$ deux estimateurs de $\theta$. On dit que $\delta_1$ est préférable (domine) à $\delta_2$ si l'on a :

$$R(\delta_1,\theta) \le R(\delta_2,\theta)$$

pour tout $\theta$ de $\Theta$ et avec une inégalité stricte pour au moins un $\theta$ de $\Theta$.

**Définition 1.19.** Un estimateur $T$ de $\theta$ est dit admissible s'il n'existe pas d'estimateur de $\theta$ qui lui soit préférable.

**Définition 1.20.** Un estimateur $T_m$ de $\theta$ est appelé minimax s'il atteint le plus petit risque maximum pour tout autre estimateurs $T$, ce qui signifie qu'il satisfait

$$sup_{\theta\in\Theta}R(T_m,\theta) = inf_{T\in D}sup_{\theta\in\Theta}R(T,\theta)$$

avec $D = \{T/\ T \text{ estimateur de } \theta\}$

**Information de Fisher**

Au vu d'un échantillon $X = (X_1,\ldots,X_n)$ on peut obtenir une certain information sur le paramètre $\theta$, il s'agit de contifier cette information et de montrer qu'il a un intérêt pour les statistiques.

**Définition 1.21.** L'information de Fisher ($I_X(\theta)$) apporté par $X$ sur le paramètre $\theta$ est définie par :

$$I_X(\theta) = E\left(\left(\frac{\partial}{\partial\theta} lnL(X,\theta)\right)^2\right).$$

On peut établir une autre écriture de l'information de Fisher.

**Proposition 1.10.** L'information de Fisher est aussi égale à

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} lnL(X,\theta)\right).$$

**Proposition 1.11.** Soit $T$ une statistique de $\theta$. Alors

$$I_{T(X)}(\theta) \leq I_X(\theta)$$

► **Cas vectoriel** $\theta = (\theta_1, \ldots \theta_p)$
On définit L'information de Fisher par la matrice suivantes

$$I_X(\theta) = \left(I_{i,j}(\theta)\right)_{i,j=1,\ldots,p}$$

où

$$I_{i,j}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} lnL(X,\theta)\right).$$

**Borne de Cramer-Rao**

Le resultat suivant affirme l'existence d'une borne inférieure pour la variance de n'importe quel estimateure. Dans la suite on supposera les hypothèses suivantes.

$H_1$ : Le domaine des réalisation de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ne dépent pas de $\theta$.
$H_2$ : La densité de $X$ est 2 fois dérivable par rapport à $\theta$.
$H_3$ : On peut dériver par rapport à $\theta$ sous le signe d'integrale.

**Théorème 1.4.** *Soit $T$ un estimateur sans biais de $\theta$. Alors sous les hypothèses $H_1$, $H_2$ et $H_3$, on a :*

$$Var(T) \geq \frac{1}{I_X(\theta)}.$$

La borne $\frac{1}{I_X(\theta)}$ est la borne de Cramer-Rao

**Définition 1.22.** (**Estimateur efficace**) Un estimateur sans biais $T$ est dit efficace s'il atteint la borne de Cramer-Rao, c'est-à-dire si

$$Var(T) = \frac{1}{I_X(\theta)}.$$

Il est dit **asymptotiquement efficace** si

$$lim_{n\to+\infty}\frac{1}{I_X(\theta)Var(T)} = 1$$

### 1.6.4 Amélioration d'estimateurs

#### Statistique exhaustive

Il s'agie de construire une statistique $T(X)$ à partir d'un échantillon $X = (X_1,\dots,X_n)$ qui vont nous renseigner sur le paramètre $\theta$, sans entraîner de perte d'information.

**Définition 1.23.** Soit $(\mathfrak{X},\mathfrak{A},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle paramétrique et $X = (X_1,\dots,X_n)$ un échantillon dans ce modèle. Une statistique $T(X)$ est dite exhaustive pour le paramètre $\theta$ si la loi de $X$ conditionnelle à $T(X)$ est indépendante du paramètre $\theta$.

Le calcul de la loi conditionnelle n'étant pas toujours facile, on utilisera souvent le théorème suivant qui donne un moyen plus aisé pour prouver l'exhaustivité d'une statistique.

**Théorème 1.5.** *Soit $(\mathfrak{X},\mathfrak{A},(P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle paramétrique et $X = (X_1,\dots,X_n) \sim f(X,\theta)$ un échantillon dans ce modèle. Une statistique $T(X)$ est exhaustive si, et seulement si, la densité $f(X,\theta)$ s'ecrit :*

$$f(X,\theta) = g(X)h(T(X),\theta)$$

*où $g$ et $h$ sont des fonction mesurable et positive.*

**Exemple 1.6.** soit $X = (X_1, \ldots, X_n) \sim f(X, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta)$ où $\forall i = 1 : n$, $X_i \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$ and $f(X_i, \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x)$, on a

$$
\begin{aligned}
f(X,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta) &= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[0,\theta]}(x_i) \\
&= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{0 \leq x_i \leq \theta\}} \\
&= \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x_i \leq \theta\}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x_i \geq 0\}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x_i \geq 0\}} \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x_i \leq \theta\}} \\
&= \mathbb{I}_{\{inf_i x_i \geq 0\}} \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}_{\{sup_i x_i \leq \theta\}} \\
&= g(X) h(T(X), \theta).
\end{aligned}
$$

Donc la statistique $T(X_1, \ldots, X_n) = sup_{1 \leq i \leq n} X_i$ est une statistique exhaustive pour $\theta$.

La statistique $T(X) = X$ est toujours une statistique exhaustive. Mais elle n'est pas d'un grand intérêt et ne réduit absolument pas l'information. Il ne s'agit donc pas seulement de trouver une statistique exhaustive mais plutôt de trouver parmi les statistiques exhaustives celle(s) qui réduit(sent) au maximum l'information. En d'autres termes, le problème est de trouver une statistique exhaustive qui soit minimale.

**Définition 1.24.** On dit qu'une statistique exhaustive est minimale, si elle est une fonction mesurable de toutes les autres statistiques exhaustives.

Autrement dit, la statistique $T$ est minimale si pour toute statistique exhaustive $S$ il existe une fonction $h$ telle que $T = h(S)$.

**Théorème 1.6.** ***(Théorème de Rao-Blackwell)*** *Soit $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un modèle paramétrique et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon dans ce modèle. Soit*

*$T(X)$ un estimateur de $\theta$ de carré intégrable. Si le modèle possède une statistique exhaustive $S(X)$ pour le paramètre $\theta$, alors l'estimateur $E_\theta(T(X)|S(X))$ de $\theta$ a un risque quadratique inférieur à $T(X)$, c'est à dire que l'on a :*

$$R(E_\theta(T(X)|S(X)),\theta) \leq R(T(X),\theta),$$

*pour tout $\theta$ dans $\Theta$. De plus cette inégalité est stricte pour au moins un $\theta$ de $\Theta$, i.e. $E_\theta(T(X)|S(X))$ est préférable à $T(X)$, sauf si $T(X)$ est sans biais et une fonction de la statistique exhaustive $S(X)$. Si $T(X)$ est un estimateur sans biais de $\theta$ alors $E_\theta(T(X)|S(X))$ est également sans biais pour $\theta$ et l'inégalité sur les risques quadratiques se traduit également sur les variances.*

Le théorème précédent nous permet déjà d'améliorer la qualité d'un estimateur. Mais il ne nous assure pas de tomber sur un estimateur optimal. L'obtention directe d'un estimateur optimal sera possible grâce au Théorème de Lehmann-Scheffé donné ci-dessous. Mais il nous faut auparavant introduire la notion de statistique complète qu'il utilise.

**Statistique complète**

**Définition 1.25.** Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle paramétrique et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon dans ce modèle. Une statistique $T(X)$ est dite complète (ou totale) si toute fonction borélienne $\varphi$ vérifiant

$$E_\theta|\varphi(T(X))| < +\infty \;\; et \;\; E_\theta(\varphi(T(X))) = 0$$

pour tout $\theta$ de $\Theta$ est nécessairement telle que

$$\varphi(T(X)) = 0,\; P_\theta - p.s.$$

pour tout $\theta$ de $\Theta$

**Théorème 1.7.** *Toute statistique exhaustive et complète est minimale.*

**Théorème 1.8.** ***(Théorème de Lehmann-Scheffé)*** *Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle paramétrique et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon dans ce modèle. Soit $T(X)$ un estimateur de $\theta$ de carré intégrable et $S(X)$ une statistique exhaustive et complète de $\theta$. Alors l'estimateur amélioré de Rao-Blackwell $E_\theta(T(X)|S(X))$ est optimal dans la classe des estimateurs sans biais de $\theta$.*

**Cas des familles exponentielles**

**Définition 1.26.** Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle paramétrique et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon dans ce modèle. La famille des loi $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est dit famille exponentielle si $P_\theta$ admet une densité $f(x,\theta)$ et $f(x,\theta)$ admet la représentation suivante :

$$f(x,\theta) = exp\left[a(x)\alpha(\theta) + b(x) + \beta(\theta)\right] \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = exp\left(\sum_{i=1}^{n} a(x_i)\alpha(\theta) + \sum_{i=1}^{n} b(x_i) + n\beta(\theta)\right) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

où $a$, $b$, $\alpha$ et $\beta$ sont des fonction mesurables.

**Exemple 1.7.** Soit $X \sim p_\theta = b(m,\theta)$, i.e :

$$p_\theta(k) = p(X = k) = C_m^k \theta^k (1-\theta)^{m-k}.$$

on a

$$\begin{aligned} lnp(X = k) &= ln\left(C_m^k \theta^k (1-\theta)^{m-k}\right) \\ &= lnC_m^k + kln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + mln(1-\theta). \end{aligned}$$

Donc $(b(m,\theta))_{\theta\in[0,1]}$ est une famille exponentielle avec $a(k) = k$, $\alpha(\theta) = ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, $b(k) = lnC_m^k$ et $\beta(\theta) = mln(1-\theta)$.

**Théorème 1.9.** *(**Théorème de Darmois-Koopmans**) Soit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta})$ un modèle paramétrique dont le domaine des valeurs ne dépend pas de $\theta$ et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon dans ce modèle. Alors : il existe une statistique exhaustive de $\theta$ si et seulement si la famille $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ est exponentielle. De plus $T(X) = \sum_{i=1}^{n} a(X_i)$ est la statistique exhaustive.*

**Exemple 1.8.** Soit $X \sim p_\theta = b(m,\theta)$, i.e :

$$p_\theta(k) = p(X = k) = C_m^k \theta^k (1-\theta)^{m-k}.$$

on a $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une statistique exhaustive de $\theta$.

Chapitre 2

# Minimaxité

## Sommaire



## 2.1 Préliminaires

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi normale multidimentionelle $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$, avec $\theta \in \mathbb{R}^p$, alors $\frac{\|X\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_p(\lambda)$ où $\chi^2_p(\lambda)$ désigne la distribution de khi-deux décentré a $p$ degrée de liberté et de paramètre de décentrage $\lambda = \frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$. Dans la suite nous rappelons également les résultats suivants qui sont utiles dans notre preuves.

**Définition 2.1.** Soit $U \sim \chi^2_p(\lambda)$ désigne la distribution de khi-deux décentré a $p$ degrée de liberté et de paramètre de décentrage $\lambda$. La fonction de densité de $U$ est donnée par

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}(\frac{\lambda}{2})^k}{k!} \frac{x^{(p/2)+k-1}e^{-x/2}}{\Gamma(\frac{p}{2}+k)2^{(p/2)+k}} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}(\frac{\lambda}{2})^k}{k!} \chi^2_{p+2k}\ ,\ 0 < x < +\infty. \end{aligned}$$

où $\chi^2_{p+2k}$ est la loi du $\chi^2$ a $p+2k$ degrée de liberté.

De cette définition on déduit que si $U \sim \chi^2_p(\lambda)$, alors pour toute fonction $g : \mathrm{R}_+ \longrightarrow \mathrm{R}$, $\chi^2_p(\lambda)$ intégrable on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(U)] &= \int_{\mathrm{R}_+} g(x)\chi^2_p(\lambda)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_{\mathrm{R}_+} g(x)\chi^2_{p+2k}(0)\,dx\right] e^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_{\mathrm{R}_+} g(x)\chi^2_{p+2k}dx\right] P\left(\frac{\lambda}{2}; dk\right), \end{aligned}$$

où $P\left(\frac{\lambda}{2}; dk\right)$ désigne la distribution de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$

**Lemme 2.1.** *Soit $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ , alors pour $p \geq 3$ on a :*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \tag{2.1}$$

*où $K \sim \mathcal{P}\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$ est la loi de Poisson du paramètre $\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$.*

**Démonstration :** On pose $U = \|X\|^2$. Il est clair que $U \sim \chi^2_p(\lambda = \|\theta\|^2)$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{U}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{u}\chi^2_{p+2k}du\right] \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{p+2k}{2}}}{\Gamma(\frac{p+2k}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}\exp(\frac{-1}{2}u)u^{\frac{p+2k}{2}-1}du\right] \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{p+2k}{2}}}{\Gamma(\frac{p+2k}{2})} \int_0^{+\infty} \exp(\frac{-1}{2}u)u^{\frac{p+2k}{2}-2}du\right] \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

Posons $t = \frac{1}{2}u \Leftrightarrow 2t = u$ et $du = 2dt$ alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{U}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+2k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+2k}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\exp(-t)(2t)^{\frac{p+2k}{2}-2}2dt\right]\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p+2k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+2k}{2}\right)}2^{\frac{p+2k}{2}-2}2\int_0^{+\infty}\exp(-t)t^{\frac{p+2k}{2}-2}dt\right]\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{p+2k}{2})}\Gamma\left(\frac{p+2k}{2}-1\right)\right]\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+2k}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2k}{2}-1+1\right)}\right]\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+2k}{2}-1\right)}{\frac{p+2k-2}{2}\Gamma\left(\frac{p+2k}{2}-1\right)}\right]\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{p-2+2k}\right]\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).
\end{aligned}$$

■

**Lemme 2.2.** *(**Stein**[7]) Si $Y \sim N(0,1)$, alors pour toute fonction dérivable $h$, telle que $|\mathbb{E}(h'(Y))| < \infty$ alors :*

$$\mathbb{E}[Yh(Y)] = \mathbb{E}[h'(Y)]$$

**Démonstration :** On pose

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}y^2)$$

la densité de la loi normale centrée réduite, et par dérivation on trouve $f'_Y(y) = -yf_Y(y)$ Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h'(Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} h'(y)f(y)dy \\
&= -\int_0^{+\infty} h'(y)\left(\int_y^{+\infty} -zf(z)dz\right)dy + \int_{-\infty}^0 h'(y)\left(\int_{-\infty}^y -zf(z)dz\right)dy \\
&= \int_0^{+\infty} h'(y)\left(\int_y^{+\infty} zf(z)dz\right)dy - \int_{-\infty}^0 h'(y)\left(\int_{-\infty}^y zf(z)dz\right)dy \\
&= \int_0^{+\infty} zf(z)\left(\int_0^z h'(y)dy\right)dz - \int_{-\infty}^0 zf(z)\left(\int_z^0 h'(y)dy\right)dz \text{ (d'aprés Fubini)} \\
&= \int_0^{+\infty} zf(z)[h(z)-h(0)]dz + \int_{-\infty}^0 zf(z)[h(z)-h(0)]dz \\
&= \left(\int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^0\right)\{zf(z)[h(z)-h(0)]\}dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} zh(z)f(z)dz - h(0)\int_{-\infty}^{+\infty} zf(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} zh(z)f(z)dz - h(0)\mathbb{E}(Y) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} zh(z)f(z)dz \text{ (car}\mathbb{E}(Y) = 0).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}(h'(Y)) = \mathbb{E}(Yh(Y)).$$

■

**Corollaire 2.1.** *Si $X$ un $\sim N(\nu,\sigma^2)$, alors pour toute fonction dérivable $f$, telle que $|\mathbb{E}(f'(X))| < \infty$ on a :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\nu}{\sigma}\right)f(X)\right] = \mathbb{E}(f'(X))$$

**Démonstration :** On pose $Y = \dfrac{X-\nu}{\sigma}$, alors $Y \sim N(0,1)$, et donc d'aprés le lemme 2.2 on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\frac{X-\nu}{\sigma}\right)f(X)\right) &= \mathbb{E}(Yf(\sigma Y+\nu)) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial Y}f(\sigma Y+\nu)\right) \\ &= \mathbb{E}(f'(\sigma Y+\nu)) = \mathbb{E}(f'(X)).\end{aligned}$$

■

Maintenant, soit $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ où $\sigma^2$ est inconnu et estimé par $S^2(S^2 \sim \sigma^2\chi^2_n)$. Soit la fonction de perte définie par : pour tout estimateur $\delta$ de $\theta$ :

$$L_\omega(\delta,\theta) = \omega\|\delta-\delta_0\|^2 + (1-\omega)\|\delta-\theta\|^2. \tag{2.2}$$

où $0 \le \omega < 1$ et $\delta_0$ est le E.M.V $X$. Nous associons à cette fonction de perte la fonction de risque définie par

$$R_\omega(\delta,\theta) = \mathbb{E}(L_\omega(\delta,\theta)). \tag{2.3}$$

Dans ce modèle, il est clair que la fonction de risque de $\delta_0 = X$ est $(1-\omega)\sigma^2 p$. En effet, $R_\omega(X,\theta) = \omega\mathbb{E}(\|X-X\|^2) + (1-\omega)\mathbb{E}(\|X-\theta\|^2)$, où $X \sim \mathcal{N}_p(\theta,\sigma^2 I_p)$, alors $\dfrac{X-\theta}{\sigma} \sim N_p(0, I_p)$, ainsi $\dfrac{\|X-\theta\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_p$. Ainsi, $\mathbb{E}(\|X-\theta\|^2) = \mathbb{E}(\sigma^2\chi^2_p) = \sigma^2 p$.

Il est bien connu que $\delta_0$ est minimax et inadmissible pour $p \ge 3$, ainsi tout estimateur dominant $\delta_0$ serait lui aussi minimax.

## 2.2 Estimateur de James-Stein

On considére l'estimateur

$$\delta_a = \left(1 - a\frac{S^2}{\|X\|^2}\right)X = X - a\frac{S^2}{\|X\|^2}X, \tag{2.4}$$

où la constante réelle positive $a$ peut dépendre de $p$.

**Proposition 2.1.** Sous la fonction de perte $L_\omega$, le risque de l'estimateur $\delta_a$ donné en (2.4) est

$$R_\omega(\delta_a,\theta) = (1-\omega)p\sigma^2 + [a^2 + \sigma^2 n(n+2) - 2a(1-w)\sigma^2 n(p-2)]\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right),$$

où $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$ est la loi de Poisson du paramètre $\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$.

**Démonstration :** On a :

$$R_\omega(\delta_a, \theta) = \omega \mathbb{E}(\|\delta_a - X\|^2) + (1-\omega)\mathbb{E}(\|\delta_a - \theta\|^2).$$

De l'indépendance entre les variables aléatoires $S^2$ et $\|X\|^2$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|\delta_a - X\|^2) &= \mathbb{E}\left(\| - a\frac{S^2}{\|X\|^2}X\|^2\right) \\
&= a^2\mathbb{E}(S^2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|X^2\|}\right) \\
&= \mathbb{E}(\|\delta_a - X\|^2) = a^2\mathbb{E}((\sigma^2 x_n^2)^2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|X^2\|}\right) \\
&= a^2\sigma^2 n(n+2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right),
\end{aligned}$$

où $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$ est la loi de Poisson du paramètre $\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$ et la dernièr égalité selon la formule (2.1) et le fait que $\mathbb{E}((x_n^2)^2) = n(n+2)$. Maintenant,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|\delta_a - \theta\|^2) &= \mathbb{E}\left(\|X - a\frac{S^2}{\|X\|^2}X - \theta\|^2\right) \\
&= \mathbb{E}(\|X-\theta\|^2) + a^2\mathbb{E}(S^2)^2\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|X\|^2}\right) \\
&\quad -2a\mathbb{E}(S^2)\mathbb{E}\left(\left\langle X-\theta, \frac{1}{\|X\|^2}X\right\rangle\right).
\end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E}\left(\left\langle X-\theta, \frac{1}{\|X\|^2}X\right\rangle\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{p}\left(y_i - \frac{\theta_i}{\sigma}\right)\frac{y_i}{\|y\|^2}\right],$$

où pour tout $i = 1, \ldots, p, y_i = \frac{x_i}{\sigma} \sim N\left(\frac{\theta_i}{\sigma}, 1\right)$ et en utilisant le corollaire 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\langle X-\theta, \frac{1}{\|X\|^2}X\right\rangle\right] &= \sum_{i=1}^{p}\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\sum_{j=1}^{p} y_j^2}y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\|y\|^2}-\frac{2y_i^2}{\|y\|^4}\right] \\
&= (p-2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{\|y\|^2}\right) \\
&= (p-2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)
\end{aligned}$$

où $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$ est la loi de Poisson du paramètre $\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}$ et la dernièr égalité vient de la formule (2.1). Ainsi

$$\begin{aligned}
R_\omega(\delta_a,\theta) &= {}^2\sigma^2 n(n+2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \\
&+(1-\omega)\left[p\sigma^2+a^2\sigma^2 n(n+2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)\right] \\
&-2a(1-\omega)\sigma^2 n(p-2)\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \\
&= (1-\omega)p\sigma^2+[a^2\sigma^2 n(n+2)-2a(1-w)\sigma^2 n(p-2)]\mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).
\end{aligned}$$

■

En utilisant la proposition 2.1, nous remarquons que sous la fonction de perte équilibrée $L_w$, une condition suffisante pour que $\delta_a$ domine le E.M.V $X$, est

$$a \geq 0 \quad et \quad a(n+2)-2(1-\omega)(p-2) \leq 0,$$

ce qui équivaut à

$$0 \leq a \leq \frac{2(1-\omega)(p-2)}{n+2}. \tag{2.5}$$

A partir de la proposition 2.1 et de la convexité de la fonction de risque $R_\omega(\delta_a, \theta)$ par rapport à $a$, on peut montrer facilement que la valeur optimale de $a$ qui minimise la fonction de risque $R_\omega(\delta_a, \theta)$ est

$$\alpha = \frac{(1-\omega)(p-2)}{n+2}.$$

Pour $a = \alpha$, on obtient l'estimateur de James-Stein

$$\delta_{JS} = \delta_\alpha = \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right) X = \left(1 - \frac{(1-w)(p-2)}{n+2} \frac{S^2}{\|X\|^2}\right) X. \tag{2.6}$$

Il découle de la proposition 2.1 que la fonction de risque de $\delta_{JS}$ est donnée par

$$R_w(\delta_{JS}, \theta) = (1-\omega)p\sigma^2 - (1-\omega)^2(p-2)^2 \frac{n}{n+2} \sigma^2 \mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right), \tag{2.7}$$

où $K \sim P\left(\frac{\|\theta\|^2}{2\sigma^2}\right)$.

D'après la formule (2.7), il est claire que $R_w(\delta_{JS}, \theta) \leq R_w(X, \theta)$, alors L'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$ domine le E.M.V $X$, donc il est minimax.

## 2.3 La partie positive de l'estimateur de James-Stein

On considère la partie positive de l'estimateur de James-Stein défini par :

$$\delta_{JS}^+ = \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right)^+ X = \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right) X \mathbb{I}_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \leq 1}, \tag{2.8}$$

où $\left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right)^+ = max\left(0, 1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right)$. Nous rappelons que

$$\delta_{JS}^- = \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right)^- X = \left(1 - \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2}\right) X \mathbb{I}_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1}, \tag{2.9}$$

où $\mathbb{I}_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\left(\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1\right)$. Nous notons que la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^+$ a la forme (2.4), correspond à $a^+ = min\left\{\frac{(1-w)(p-2)}{n+2}, \frac{S^2}{\|X\|^2}\right\}$. De plus $a^+$ satisfait la relation (2.5), alors $\delta_{JS}^+$ domine le E.M.V X sous la fonction de perte équilibrée $L_\omega$, donc $\delta_{JS}^+$ est minimax.

## 2.4 Domination de la partie positive de l'estimateur de James-Stein à l'estimateur de James-Stein

Il est bien connu que la partie positive de l'estimateur de James-Stein domine l'estimateur de James-Stein pour le cas standard où $\omega = 0$ (**voir Baranchick**[1]). Dans cette partie, nous montrons que cette propriété reste valable pour tout $0 < \omega < 1$.

**Théorème 2.1.** *Sous la fonction de perte équilibrée $L_\omega$, la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^+$ domine l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$*

**Démonstration :** On a

$$R_\omega(\delta_{JS}^+, \theta) = \omega\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+ - X\|^2) + (1-\omega)\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+ - \theta\|^2)$$

et

$$R_\omega(\delta_{JS}, \theta) = \omega\mathbb{E}(\|\delta_{JS} - X\|^2) + (1-\omega)\mathbb{E}(\|\delta_{JS} - \theta\|^2).$$

**Baranchick**[1], a montré que $\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+ - \theta\|^2) \leq \mathbb{E}(\|\delta_{JS} - \theta\|^2)$ pour $p \geq 3$. Alors $\delta_{JS}^+$ domine $\delta_{JS}$ si et seulement si $\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+ - X\|^2) - E(\|\delta_{JS} - X\|^2) \leq 0$. Maintenant,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^{+} - X\|^2) &= \mathbb{E}(\|\delta_{JS}^{+} - \delta_{JS} + \delta_{JS} - X\|^2) \\
&= \mathbb{E}(\|\delta_{JS}^{+} - \delta_{JS}\|^2) + (\|\delta_{JS} - X\|^2) + 2\mathbb{E}[\langle \delta_{JS}^{+} - \delta_{JS}, \delta_{JS} - X\rangle] \\
&= \mathbb{E}(\|\delta_{JS}^{-}\|^2) + \mathbb{E}(\|\delta_{JS} - X\|^2) + 2\mathbb{E}[\langle \delta_{JS}^{-}, \delta_{JS} - X\rangle] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\left(\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2} - 1\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1} X\right\|^2\right] + \mathbb{E}(\|\delta_{JS} - X\|^2) \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\left\langle\left(\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2} - 1\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1} X, -\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}X\right\rangle\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2} + \|X\|^2 - 2\alpha S^2\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right] + \mathbb{E}(\|\delta_{JS} - X\|^2) \\
&\quad -2\mathbb{E}\left[\left(\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2} - \alpha S^2\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right].
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^{+} - X\|^2) - \mathbb{E}(\|\delta_{JS} - X\|^2) \\
= \ & \mathbb{E}\left[\left(\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2} + \|X\|^2 - 2\alpha S^2\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right] - 2\mathbb{E}\left[\left(\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2} + \|X\|^2 - \alpha S^2\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right] \\
= \ & \mathbb{E}\left[\left(\|X\|^2 - \alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2}\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right] \\
= \ & \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\|X\|^2}(\|X\|^2 - \alpha S^2)(\|X\|^2 + \alpha S^2)\right)\mathbb{I}_{(\|X\|^2 - \alpha S^2)\leq 0}\right] \\
\leq \ & 0.
\end{aligned}
$$

■

Chapitre 3

# Limites des Rapports de risques

## Sommaire



## 3.1 Bornes et limite du rapport des risques de l'estimateur de James-Stein.

Dans cette partie, nous étudions la limite du rapport des risques de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$ à $X$, lorsque la dimension p tend vers l'infini et que la taille d'échantillon n est fixée d'une part et d'autre part lorsque p et n tendent simultanément vers l'infini. Le lemme suivant donne une borne inférieure et une borne supérieure du rapport $R_\omega(\delta_{JS},\theta)/R_w(X,\theta)$, qui va nous aider à calculer la limite du rapport des risque.

**Lemme 3.1.** *Supposons l'estimateur $\delta_{JS}$ donné en (2.6). Sous la fonction de perte équilibrée $L_\omega$, on a*

$$1-\frac{n(1-\omega)(p-2)}{(n+2)(p+\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2})}\leq\frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}\leq 1-\frac{n(1-\omega)(p-2)^2}{(n+2)p(p-2+\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2})}.$$

**Démonstration :** *D'après le lemme 2.1 de (**Hamdaoui et Benmansour**[5]), nous avons*

$$\frac{1}{p-2+\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}} \leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) \leq \frac{p}{(p-2)(p+\frac{\|\theta\|^2}{\sigma^2})}.$$

*En utilisant la formule (2.7), nous obtenons le résultat souhaité.* ∎

**Théorème 3.1.** *Supposons l'estimateur $\delta_{JS}$ donné en (2.6), si $\lim_{p\to\infty}\frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}=c(c>0)$,*

*alors*

*i)* $\lim_{p\to\infty}\frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}=\frac{\left(1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\right)+c}{1+c}$;

*ii)* $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}=\frac{\omega+c}{1+c}$.

**Démonstration :** *i)En utilisant le lemme 3.1 et sous la condition $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}=c$, nous avons*

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty}\frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} &\leq 1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{(p-2)^2}{p}\frac{\frac{1}{p}}{\frac{p-2}{p}+\frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}}\right]\\
&= 1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{(p-2)^2}{p^2}\frac{1}{\frac{p-2}{p}+\frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}}\right]\\
&= 1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\frac{1}{1+c}\\
&= \frac{\left(1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\right)+c}{1+c}
\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty}\frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} &\geq 1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{\frac{p-2}{p}}{\frac{p}{p}+\frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}}\right]\\
&= 1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\frac{1}{1+c}\\
&= \frac{\left(1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\right)+c}{1+c}
\end{aligned}$$

*ii) D'après le lemme 3.1 et sous la condition* $\lim_{p\to\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} &\leq 1-(1-\omega)\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}}\left[\frac{n}{n+2}\,\frac{(p-2)^2}{p}\,\frac{\frac{1}{p}}{\frac{p-2}{p}+\frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}}\right]\\
&= 1-(1-\omega)\frac{1}{1+c} = \frac{\omega+c}{1+c}
\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} &\geq 1-(1-\omega)\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}}\left[\frac{n}{n+2}\,\frac{\frac{p-2}{p}}{\frac{p}{p}+\frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2}}\right]\\
&= 1-(1-\omega)\frac{1}{1+c} = \frac{\omega+c}{1+c}.
\end{aligned}$$

■

**Remarque 3.1.** Comme $0 \leq \omega < 1$, alors $\frac{1-\frac{n}{n+2}+c}{1+c} \leq 1-(1-\omega)\frac{\frac{n}{n+2}+c}{1+c} < 1$ et $c/(1+c) \leq (\omega+c)/(1+c) < 1$, donc pour p tend vers l'infini et n est fixe, ou pour p et n tendent simultanément vers l'infini, la limite du rapport des risques de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$ à X, est inférieur à 1. Par conséquent, le théorème 3.1 montre la stabilité de la propriété de minimaxité de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$ pour les grandes valeurs de n et p.

## 3.2 Bornes et limite du rapport des risques de la partie positive de l'estimateur de James-Stein.

Les résultats pour la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta^+_{JS}$ sont similaires à ceux de l'estimateur de James-Stein ordinaire $\delta_{JS}$, bien que les calculs soient un peu plus difficiles. Dans la proposition suivante, nous donnons la formule explicite de la fonction de risque de $\delta^+_{JS}$.

**Proposition 3.1.** La fonction de risque de l'estimateur $\delta^+_{JS}$ sous la fonction de perte équilibrée $L_\omega$, est

$$R_\omega(\delta_{JS}^+,\theta) = R_\omega(\delta_{JS},\theta)$$
$$+\mathbb{E}\left[\left(\|X\|^2-\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2}+2(1-\omega)\sigma^2(p-2)\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}-p\sigma^2\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right].$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
R_\omega(\delta_{JS}^+,\theta) &= \omega\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+-X\|^2)+(1-\omega)\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+-\theta\|^2)\\
&= \omega\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+-\delta_{JS}+\delta_{JS}-X\|^2)+(1-\omega)\mathbb{E}(\|\delta_{JS}^+-\delta_{JS}+\delta_{JS}-\theta\|^2)\\
&= \omega\mathbb{E}[\|\delta_{JS}^+-\delta_{JS}\|^2+\|\delta_{JS}-X\|^2+2\langle\delta_{JS}^+-\delta_{JS},\delta_{JS}-X\rangle]\\
&\quad +(1-\omega)\mathbb{E}[\|\delta_{JS}^+-\delta_{JS}\|^2+\|\delta_{JS}-\theta\|^2+2\langle\delta_{JS}^+-\delta_{JS},\delta_{JS}-X+X-\theta\rangle]\\
&= [\omega\mathbb{E}(\|\delta_{JS}-X\|^2)+(1-\omega)\mathbb{E}(\|\delta_{JS}-\theta\|^2)]+[\|\delta_{JS}^+-\delta_{JS}\|^2]\\
&\quad +2\mathbb{E}[\langle\delta_{JS}^+-\delta_{JS},\delta_{JS}-X\rangle+2(1-\omega)\langle\delta_{JS}^+-\delta_{JS},X-\theta\rangle]\\
&= R_\omega(\delta_{JS},\theta)+\mathbb{E}[\|\delta_{JS}^+-\delta_{JS}\|^2]+2\mathbb{E}[\langle\delta_{JS}^+-\delta_{JS},\delta_{JS}-X\rangle]\\
&\quad +2(1-\omega)\mathbb{E}[\langle\delta_{JS}^+-\delta_{JS},X-\theta\rangle].
\end{aligned}$$

Maintenant, nous calculons les espérances du côté droit de la dernière égalité.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|\delta_{JS}^+-\delta_{JS}\|^2] &= \mathbb{E}[\|\delta_{JS}^-\|^2]\\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\left(\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}-1\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}X\right\|^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^4}+1-2\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\|X\|^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2}+\|X\|^2-2\alpha S^2\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right], \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle\delta_{JS}^+-\delta_{JS},\delta_{JS}-X\rangle] &= \mathbb{E}[\langle\delta_{JS}^-,\delta_{JS}-X\rangle]\\
&= \mathbb{E}\left[\left\langle\left(\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}-1\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}X,-\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}X\right\rangle\right]\\
&= -\mathbb{E}\left[\left(\alpha^2\frac{S^4}{\|X\|^2}-\alpha S^2\right)\mathbb{I}_{\alpha\frac{S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right], \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

et en utilisant le lemme 2.1 de (**Shao et Strawdermen**[6]), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle \delta_{JS}^{+} - \delta_{JS}, X - \theta \rangle] &= \mathbb{E}\left[\left\langle \left( \alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - 1 \right) \mathbb{I}_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1} X, X - \theta \right\rangle\right] \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}\left[\left( (p-2)\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} - p \right) \mathbb{I}_{\alpha \frac{S^2}{\|X\|^2} \geq 1}\right]. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

En combinant les formules (3.1), (3.2) et (3.3) nous obtenons le résultat souhaité. ■

Dans le théorème 2.1, nous avons montré que $R_\omega(\delta_{JS}^{+}, \theta) \leq R_\omega(\delta_{JS}, \theta)$ pour $p \geq 3$ et $(\theta, \sigma) \in (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+)$, alors la borne supérieure donné au Lemme 3.1 joue le rôle de la borne supérieure de $R_\omega(\delta_{JS}^{+}, \theta)/R_\omega(X, \theta)$. il suffit de déterminer une borne inférieure. La proposition suivante donne une borne inférieure du rapport des risques $R_\omega(\delta_{JS}^{+}, \theta)/R_\omega(X, \theta)$.

**Proposition 3.2.** Pour tout $p \geq 3$, nous avons la borne inférieure suivante du rapport des risques $\dfrac{R_\omega(\delta_{JS}^{+}, \theta)}{R_\omega(X, \theta)}$

$$\begin{aligned}
\frac{R_\omega(\delta_{JS}^{+}, \theta)}{R_\omega(X, \theta)} &\geq \frac{R_\omega(\delta_{JS}, \theta)}{(1-\omega)p\sigma^2} + \frac{p+\lambda}{(1-\omega)p} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left( \chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) \\
&\quad - \frac{4}{p} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left( \chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p-2}^2(\lambda, du) \\
&\quad - \frac{(p-2)n}{(1-\omega)p(n+2)} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left( \chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p-2}^2(\lambda, du). \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

**Démonstration :** Comme $\dfrac{\|X\|^2}{\sigma^2} \sim \chi_p^2(\lambda)$ et $\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$, où $\lambda = \dfrac{\|\theta\|^2}{\sigma^2}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \mathbb{E}\left( \|X\|^2 \mathbb{I}_{\frac{\alpha S^2}{\|X\|^2} \geq 1} \right) &= \sigma^2 \mathbb{E}\left( \chi_p^2(\lambda) \mathbb{I}_{\chi_n^2 \geq \frac{\chi_p^2(\lambda)}{\alpha}} \right) \\
&= \sigma^2 \int_0^{+\infty} \left( \int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_n^2(0, dt) \right) u \chi_p^2(\lambda, du) \\
&= \sigma^2 p \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left( \chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p+2}^2(\lambda, du) \\
&\quad + \sigma^2 \lambda \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left( \chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha} \right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant la formule (4.1) du Lemme 4.1 Annexe avec $h(u) = \int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_n^2(0,dt)$. Comme la fonction $\mathbb{P}\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right)$ est non croissante sur $u$ et en utilisant la formule 4.2 du lemme 4.2 on obtient

$$\sigma^2 \mathbb{E}\left(\|X\|^2 \mathbb{I}_{\frac{\alpha S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right) \geq q\sigma^2(p+\lambda)\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right)\chi_{p+4}^2(\lambda,du), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \mathbb{E}\left\{\left(2(p-2)\frac{\alpha S^2}{\|X\|^2} - 2p\right)\mathbb{I}_{\frac{\alpha S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right\} &\geq -4\sigma^2 \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\frac{\alpha S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right) \\
&= -4\sigma^2 \int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_n^2(0,dt)\right)\chi_p^2(\lambda,du) \\
&= -4\sigma^2 \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right)\chi_p^2(\lambda,du) \\
&\geq -4\sigma^2 \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right)x_{p-2}^2(\lambda,du) \quad (3.6)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de la formule (4.1). Maintenant,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(-\frac{\alpha^2 S^4}{\|X\|^2}\mathbb{I}_{\frac{\alpha S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right) &= -\sigma^2\alpha^2 \int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} t^2\chi_n^2(0,dt)\right)\frac{1}{u}\chi_p^2(\lambda,du) \\
&\geq -\frac{\sigma^2\alpha}{n+2}\int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} t^2\chi_n^2(0,dt)\right)\chi_{p-2}^2(\lambda,du).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de la formule (4.1), en prenant $h(u) = \frac{1}{u}\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} t^2\chi_n^2(0,dt)$. Cependant, en utilisant à nouveau la formule (4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} t^2\chi_n^2(0,dt) &= n\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} t\chi_{n+2}^2(0,dt) \\
&= n(n+2)\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty} \chi_{n+4}^2(0,dt) \\
&= n(n+2)\mathbb{P}\left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

ainsi, nous avons

$$\mathbb{E}\left(-\frac{\alpha^2 S^4}{\|X\|^2}\mathbb{I}_{\frac{\alpha S^2}{\|X\|^2}\geq 1}\right) \geq -\sigma^2\alpha n\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\chi_{n+4}^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right)\chi_{p-2}^2(\lambda,du), \quad (3.7)$$

en combinant les formules (3.5), (3.6) et (3.7), on obtient le résultat recherché. ∎

**Théorème 3.2.** *Supposons que l'estimateur $\delta_{JS}^{+}$ donnée en (2.8), si* $\lim_{p\to+\infty}\dfrac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = c (c>0)$,

*alors*

*i)* $\lim_{p\to\infty}\dfrac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} = \dfrac{\left(1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\right)+c}{1+c}$;

*ii)* $\lim\limits_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}}\dfrac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} = \dfrac{\omega+c}{1+c}$.

**Démonstration :** D'une part, à partir du théorème 2.1, nous avons montré que $R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta) \le R_\omega(\delta_{JS},\theta)$ pour $p\ge 3$ et $(\theta,\sigma)\in(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^+)$ et en utilisant le théorème 3.1, on a

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} \quad\le\quad \frac{\left(1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\right)+c}{1+c} \tag{3.8}$$

et

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} \quad\le\quad \frac{\omega+c}{1+c}. \tag{3.9}$$

D'autre part, lorsque p tend vers l'infini et n est fixe, on a $\alpha = \dfrac{(1-\omega)(p-2)}{n+2}$ tend vers $+\infty$. D'après le théorème de Lebesque en prenant par exemple, la suite croissante avec $p\left(f_p(u) = \displaystyle\int_{\frac{u}{\alpha}}^{+\infty}\chi_n^2(0,dt) = \mathbb{P}\left(\chi_n^2 \ge \frac{u}{\alpha}\right)\right)$ et le fait que

$$\lim_{p\to+\infty}\mathbb{P}\left(\chi_n^2\ge\frac{u}{\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\chi_n^2\ge 0\right) = 1, pour toutes n\ge 1,$$

on obtient

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}\left(\chi_n^2\ge\frac{u}{\alpha}\right)\chi_{p+4}^2(\lambda,du) = 1. \tag{3.10}$$

Dans le cas où $p$et $n$ tendent simultanément vers l'infini, on a

$$\mathbb{P}\left(\chi_n^2\ge\frac{u}{\alpha}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \ge \frac{u(n+2)}{p-2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \ge \frac{u}{p-2}+\frac{2u}{n(p-2)}\right),$$

où $y_1, y_2, ..., y_n$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées et réduites.

Alors par la loi forte des grands nombres, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \mathbb{P}\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) &= \lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq \frac{u}{p-2} + \frac{2u}{n(p-2)}\right) \\
&= \lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0\right) \\
&= \mathbb{P}(1 \geq 0) = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\chi_n^2 \geq \frac{u}{\alpha}\right) \chi_{p+4}^2(\lambda, du) = \int_0^{+\infty} \chi_{p+4}^2(\lambda, du) = 1. \tag{3.11}$$

En utilisant la proposition 3.2, les formules (3.10) et (3.11) et la condition

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\|\theta\|^2}{p\sigma^2} = \lim_{p\to\infty} \frac{\lambda}{p} = c,$$

conduit à

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to+\infty} \frac{R_\omega(\delta_{JS}^+,\theta)}{R_\omega(X,\theta)} &\geq \lim_{p\to+\infty} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} + \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{p+\lambda}{(1-\omega)p} - \frac{4}{p} - \frac{(p-2)n}{(1-\omega)p(n+2)}\right] \\
&= \lim_{p\to+\infty} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} + \frac{1-\frac{n}{n+2}}{1-\omega} + \frac{c}{1-\omega} \\
&\geq \lim_{p\to+\infty} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{R_\omega(\delta_{JS}^+,\theta)}{R_\omega(X,\theta)} &\geq \lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} + \lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}}\left[\frac{p+\lambda}{(1-\omega)p} - \frac{4}{p} - \frac{(p-2)n}{(1-\omega)p(n+2)}\right] \\
&= \lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)} + \frac{c}{1-\omega} \\
&\geq \lim_{\substack{p\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}.
\end{aligned}$$

Il résulte du théorème 3.1 que

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{R_\omega(\delta_{JS}^+,\theta)}{R_\omega(X,\theta)} \geq \frac{\left(1-(1-\omega)\frac{n}{n+2}\right)+c}{1+c} \tag{3.12}$$

et

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ n\to+\infty}} \frac{R_\omega(\delta_{JS}^+,\theta)}{R_\omega(X,\theta)} \quad \geq \quad \frac{\omega+c}{1+c}. \tag{3.13}$$

En combinant les formules (3.8), (3.9), (3.12) et (3.13) nous obtenons le résultat souhaité. ∎

Chapitre 4

# Résultats de la simulation

Premièrement, nous illustrons graphiquement les rapport de risques des estimateurs de James-Stein $\delta_{JS}$ et de la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^{+}$ par rapport au MLE $X$ en fonction de $\lambda = \|\theta\|^2/(2\sigma^2)$ pour divers valeurs de $n$, $p$ et $\omega$. Deuxièmement, nous donnons les tableaux qui montrent les valeurs des rapport de risques des estimateurs de James-Stein $\delta_{JS}$ et de la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^{+}$ par rapport au MLE $X$ selon diverses valeurs de $\lambda = \|\theta\|^2/(2\sigma^2)$ mais cette fois on fixe $n$ et $p$ et on fait varier $\omega$.

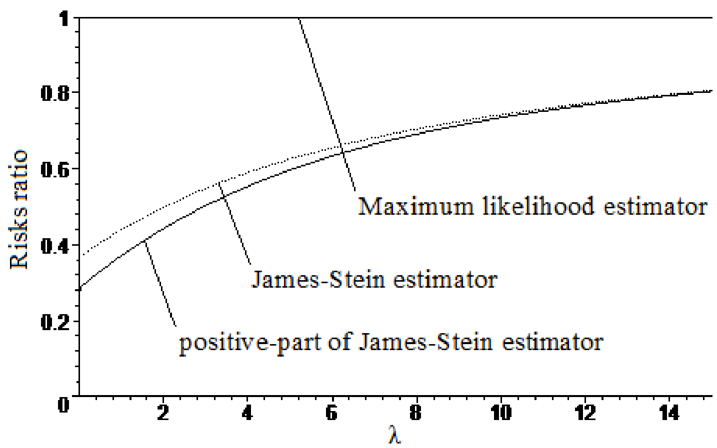


FIGURE 4.1 – Graphique des rapport de risques de $\dfrac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ et $\dfrac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 30,\ p = 8$ et $\omega = 0.1$

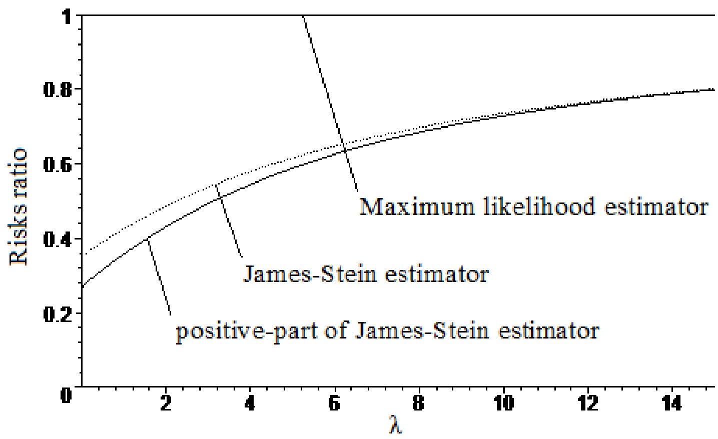


FIGURE 4.2 – Graphique des rapport de risques de $\dfrac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ et $\dfrac{R_\omega(\delta^+_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 50,\ p = 8$ et $\omega = 0.1$

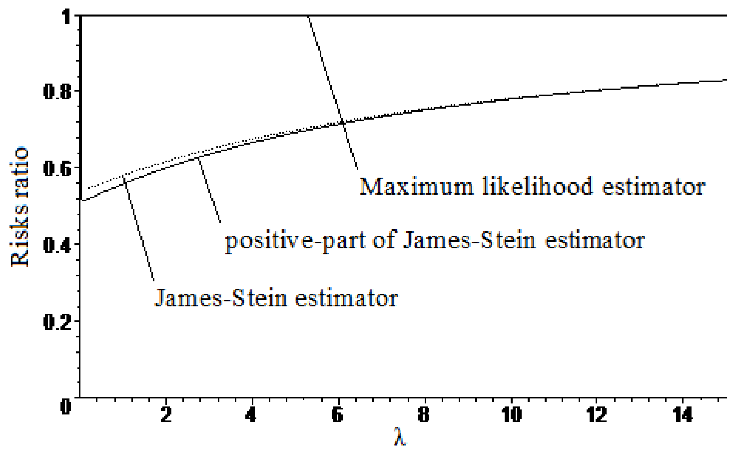


FIGURE 4.3 – Graphique des rapport de risques de $\dfrac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ et $\dfrac{R_\omega(\delta^+_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 50,\ p = 10$ et $\omega = 0.4$

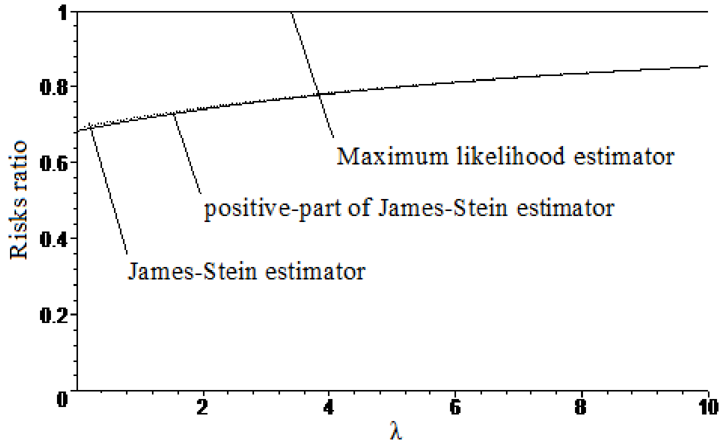


FIGURE 4.4 – Graphique des rapport de risques de $\frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ et $\frac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 50,\ p = 10$ et $\omega = 0.6$

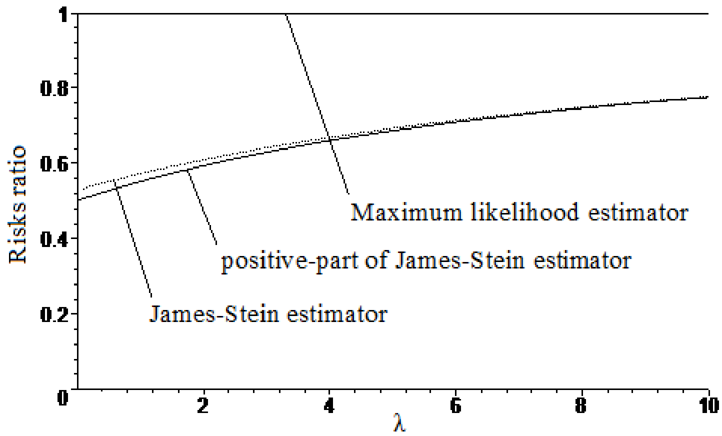


FIGURE 4.5 – Graphique des rapport de risques de $\frac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ et $\frac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 100,\ p = 10$ et $\omega = 0.4$

Les figures 1 à 6 montrent que les rapport de risques de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$ et du partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^{+}$ au MLE $X$ sont infèrieurs à 1, donc le estimateurs $\delta_{JS}$ et $\delta_{JS}^{+}$ domine $X$ pour les grandes valeurs de $n$ et $p$. Nous avons aussi observez que le gain augmente si $\omega$ est proche de 0 et diminue si $\omega$ est proche de 1. Tables 1 et 2 illustrent cette note.

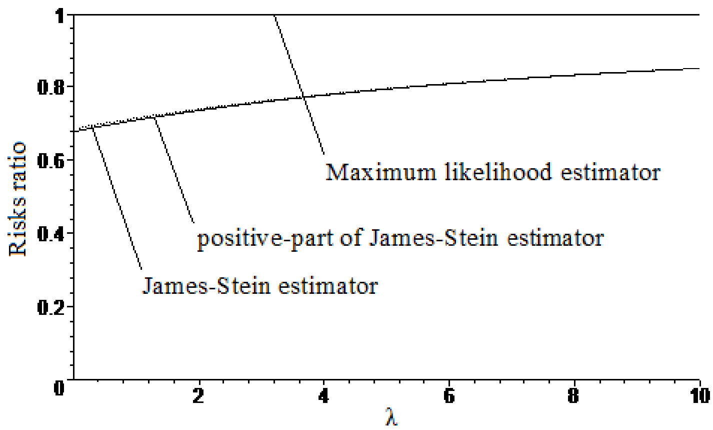


FIGURE 4.6 – Graphique des rapport de risques de $\dfrac{R_\omega(\delta_{JS},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ et $\dfrac{R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)}{R_\omega(X,\theta)}$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 100,\ p = 10$ et $\omega = 0.6$

Dans le tableau 1 et 2, nous donnons les valeurs des rapports $R_\omega(\delta_{JS},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ et $R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ pour $n = 50$, $p = 10$, $n = 100$ et $p = 10$, respectivement pour différentes valeurs de $\lambda$ et $\omega$.

TABLE 4.1 – Les valeurs des rapport de risques $R_\omega(\delta_{JS},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ et $R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 50$ et $p = 10$.

| $\lambda$ | rapport de risques | $\omega = 0.1$ | $\omega = 0.3$ | $\omega = 0.6$ | $\omega 0.9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | $\delta_{JS}$ | 0.3105 | 0.4637 | 0.6936 | 0.9234 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0.2416 | 0.4261 | 0.6854 | 0.9223 |
| 10 | $\delta_{JS}$ | 0,6719 | 0,7448 | 0,8542 | 0,9635 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0,6640 | 0,7420 | 0,8540 | 0,9635 |
| 20 | $\delta_{JS}$ | 0,7912 | 0,8376 | 0,9072 | 0,9768 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0,7907 | 0,8375 | 0,9072 | 0,9768 |
| 30 | $\delta_{JS}$ | 0,8477 | 0,8816 | 0,9323 | 0,9831 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0,8477 | 0,8815 | 0,9323 | 0,9831 |

D'après les tableaux 1 et 2, premièrement, pour toutes les valeurs de $\omega$ et $\lambda$, le rapport $R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ est inférieur au rapport $R_\omega(\delta_{JS},\theta)/R_\omega(X,\theta)$, ce qui montre que la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}^{+}$ domine l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$. Deuxièmement, d'une part, si $\omega$ et $\lambda$

Table 4.2 – Les valeurs des rapport de risques $R_\omega(\delta_{JS},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ et $R_\omega(\delta_{JS}^{+},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ comme fonctions de $\lambda$ pour $n = 100$ et $p = 10$.

| $\lambda$ | rapport de risques | $\omega = 0.1$ | $\omega = 0.3$ | $\omega = 0.6$ | $\omega 0.9$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.4 | $\delta_{JS}$ | 0.2970 | 0.4532 | 0.6876 | 0.9219 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0.2092 | 0.4025 | 0.6800 | 0.9219 |
| 10 | $\delta_{JS}$ | 0,6655 | 0,7398 | 0,8513 | 0,9628 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0,6582 | 0,7373 | 0,8511 | 0,9628 |
| 20 | $\delta_{JS}$ | 0,7871 | 0,8344 | 0,9054 | 0,9763 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0,7867 | 0,8343 | 0,9054 | 0,9763 |
| 30 | $\delta_{JS}$ | 0,8447 | 0,8792 | 0,9310 | 0,9827 |
| | $\delta_{JS}^{+}$ | 0,8447 | 0,8792 | 0,9310 | 0,9827 |

sont petits, les rapports sont proches de 0 que de 1, et donc le gain est très important. D'autre part, autant que $\omega$ tend vers 1, le gain sera faible et les rapports de risque sont presque ègaux. Dans le cas où $\omega$ est proche de 1 et $\lambda$ est grand, le gain est presque égal à zéro et les rapports de risques sont les mêmes.

# Annexe

**Lemme 4.1.** *(Bock [4]). Soit $X \sim N_p\left(\theta, I_p\right)$ où $X = (X_1, \ldots, X_p)^\top$ et $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top$, alors pour tout fonction mesurable $h : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, on a*

$$E\left(h\left(\|X\|^2\right)X_i^2\right) = E\left[h\left(\chi^2_{p+2}\left(\|\theta\|^2\right)\right)\right] + \theta_i^2 E\left[h\left(\chi^2_{p+4}\left(\|\theta\|^2\right)\right)\right].$$

*De plus,*

$$\begin{aligned} E\left(h\left(\|X\|^2\right)\|X\|^2\right) &= E\left[\chi^2_p\left(\|\theta\|^2\right)h\left(\chi^2_p\left(\|\theta\|^2\right)\right)\right] \\ &= pE\left[h\left(\chi^2_{p+2}\left(\|\theta\|^2\right)\right)\right] + \|\theta\|^2 E\left[h\left(\chi^2_{p+4}\left(\|\theta\|^2\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

**Lemme 4.2.** *(Benmansour and Hamdaoui [3]) Soit $f$ une fonction réel. Si pour $p \geq 3$, $E_{\chi^2_p(\lambda)}[f(U)]$ existe, alors*

*a) si $f$ est monotone et décroissante on a*

$$E_{\chi^2_{p+2}(\lambda)}[f(U)] \leq E_{\chi^2_p(\lambda)}[f(U)], \tag{4.2}$$

*b) si $f$ est monotone et croissante on a*

$$E_{\chi^2_{p+2}(\lambda)}[f(U)] \geq E_{\chi^2_p(\lambda)}[f(U)]. \tag{4.3}$$

# conclusion

Dans ce travail nous avons étudié la minimaxité et la limites des rapports de risques des éstimateurs à rétrécisseur de type $\delta_{JS}$ et $\delta^{+}_{JS}$ de la moyenne d'une loi gaussienne multidimensionelle, relativement à une fonction de coùt équilibrée. Si la limite du rapport $\|\theta\|^2/p$ est une constante $c > 0$, les rapports de risques $R_\omega(\delta_{JS},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ et $R_\omega(\delta^{+}_{JS},\theta)/R_\omega(X,\theta)$ tendent vers des valeurs inférieures à 1, ainsi nous nous sommes assurés la stabilité de la propriété de minimaxité de l'estimateur de James-Stein $\delta_{JS}$ et la partie positive de l'estimateur de James-Stein $\delta^{+}_{JS}$ même si la dimension de l'espace des paramètres $p$ et la taille de l'échantillon $n$ tendent vers l'infini.

# Bibliographie


[1] A.J. Baranchik, (1964). *Multiple regression and estimation of the mean of a multivariate normal distribution*. Stanford Univ. Technical Report 51.

[2] A. Hamdaoui, A. Benkhaled and M. TERBECHE, *ON MINIMAXITY AND LIMIT OF RISKS RATIO OF JAMES-STEIN ESTIMATOR UNDER THE BALANCED LOSS FUNCTION*, Kragujevac J. Math. **47**(3) (2023), 459–479.

[3] D. Benmansour and A. Hamdaoui, *Limit of the Ratio of Risks of James-Stein Estimators with Unknown Variance*, Far East J. Theo. Stat. **36**(1) (2011), 31–53.

[4] M. E. Bock, *Minimax Estimators of The Mean of a Multivariate Normal Distribution*, Ann. Statist. **3**(1) (1975), 209–218. https://doi.org/10.1214/aos/1176343009

[5] A. Hamdaoui and D. Benmansour, Asymptotic properties of risks ratios of shrinkage estimators, Hacet. J. Math. Stat. 44(5) (2015), 1181–1195.

[6] P. Shao and W. E. Strawderman, Improving on the James-Stein positive-part estimator of the multivariate normal mean vector for the case of common unknown variances, Ann. Statist. 22(3) (1994), 1517–1539.

[7] C. Stein, (1981), *Estimation of the mean of multivariate normal distribution*, Annals of Statistics, Vol.9, 1135–1151.