

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE « Dr. TAHAR MOULAY » DE SAIDA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : PHYSIQUE

Option : Physique Computationnelle

Par

Boudouaya Thawria

Sur le thème

Etude de transfert de chaleur à travers d'un matériau formé de deux couches : Froide & chaude

Soutenu le : 01/07/2021 devant le jury composé de :

Mr. El keurti Mohamed	Pr	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Président
Mr. Sahabi Toufik	MCB	Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Encadreur
Mr. Lasri Boumediene		Université Dr. Tahar Moulay de Saida	Examineur

Année Universitaire 2020 - 2021

Table des matières

<i>DÉDICACE</i>	1
<i>Remerciement</i>	2
Liste des figures	3
INTRODUCTION GENERALE	4
Références	7
CHAPITRE 1	8
GENERALITE SUR L'EQUATION DE CHALEUR	8
1.1 Introduction	9
1.2 L'équation de chaleur	9
1.2.1 Formulation	9
1.2.2 Application des propriétés thermiques de matériaux	10
1.2.3 Importance	10
1.2.4 Analyse pratique	11
1.3 Le transfert de chaleur	11
1.3.1 Différents mécanismes de transfert de chaleur	11
1.3.2 Lois de conservation, forme général	11
1.3.3 Loi de Fourier : équation de la chaleur en conduction	12
1.4 Formes des équations de chaleur	13
1.4.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes	13
1.4.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques	14
1.4.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphériques	14
Référence	15
CHAPITRE 2	16
RESOLUTION DE L'EQUATIO DE CHALEUR	16
2.1 Introduction	17
2.2 Méthode de séparation de variables	17
2.3 Méthode de résolution numérique de l'équation différentielle	18
2.3.1 Méthode d'Euler	18
2.3.2 Méthode de Heum	19
2.3.3 Méthode de Runge-Kutta, d'ordre 3	19
2.3.4 Méthode de Runge-Kutta, d'ordre 4	19
2.3.5 Méthode de différences finies	20

2.4 Programme Maple	22
2.4.1 Définition	22
2.4.2 Fonctionnalités	22
2.4.3 Modèle de calcul et langage	23
(a) Variable booléenne	23
(b) La structure de test	23
(c) Boucles	23
(d) La boucle while	23
(e) La boucle for	23
2.5 Simulation Monte Carlo	23
Référence	24
CHAPITRE 3	25
ETUDE DU TRANSFERT THERMIQUE ENTRE DEUX COUCHES DE MATERIAUX ...25	
3.1 Introduction	26
3.2 Historique et motivation	26
3.3 Présentation du problème	27
3.4 Formulation théorique	28
3.5 Constants adimensionnelles	31
3.6 Résultats & discussions	32
3.7 Programme Maple	35
Nomenclature	43
Référence	44
CONCLUSION	46
ملخص	47
Résumé	47
Abstract	47

الإهداء

أهدي ثمرة هذا الجهد المتواضع إلى:
أبي "بوجمعة" حفظه الله ورعاه وأطال في عمره.
أمي رحمة الله عليها وأسكنها فسيح جنانه.
عمتي الكريمة التي كانت بمثابة أُمي .
كل إخوتي و أخواتي واخص بالذكر أخي العزيز "عبد
القادر" .

كل الأهل والأقارب من عائلة "بودواية" و"زعنون".
والى صديقاتي اللواتي شاركنني فرحتي وابتسامتي "خيرة
عرباوي، صفاء، فاطنة، حبيبة، خيرة، سميرة، سماحية".
واخص بذكري صديقتي الوفية التي لن ينساها قلبي
"حنان".

شكر و تقدير:

الحمد لله الذي وفقني ومكنني من إتمام هذه المذكرة
فالحمد لله أوله وآخره، وكما قال رسول الله صلى الله عليه
وسلم "من لا يشكر الناس لم يشكر الله" يسعدني أن أتقدم
بالشكر والتقدير والامتنان والعرفان بالجميل إلى الأستاذ
المشرف الدكتور صحابي توفيق لما قدمه لي من نصائح
وتوجيهات قيمة أثناء انجاز هذه المذكرة، فجزاه الله عني
خير جزاء وجعل ذلك في ميزان حسناته.

أتقدم بالشكر والتقدير إلى الأساتذة الأفاضل أعضاء لجنة
المناقشة لموافقهم على الاشتراك في مناقشة هذه المذكرة،
والى كل أساتذة وموظفين كلية العلوم لجامعة سعيدة والى
كل الأساتذة الذين درست على أيديهم طوال مشواري
الدراسي.

و أشكر كل من ساهم ولو بالكلمة الطيبة في إعداد هذا
العمل المتواضع سائلين المولى تبارك وتعالى أن يجزيهم
عني كل الخير انه ولي ذلك والقادر عليه.

Liste des figures

Fig. 3.1 Matériau composé de deux couches

Fig. 3.2 La fonction $E(\beta)$

Fig. 3.3 Etude de transfert de chaleur entre deux couches : (a) Représentation à 3 D, (b) Les températures en premiers moments, (c) Les températures des points sélectionnés dans la première couche, (d) Les températures des points sélectionnés dans la deuxième couche

INTRODUCTION GENERALE

L'énergie correspond à un transfert ou échange par interaction d'un système avec son environnement est habituellement manifeste en deux types : i) le travail noté W qui peut prendre diverses formes selon l'origine physique du transfert en jeu (électrique, magnétique, mécanique, ...), et ii) la chaleur notée Q . La thermodynamique classique (ou phénoménologique) ne s'intéresse généralement qu'aux états d'équilibre et aux variations entre ces états, grâce à l'utilisation de fonctions d'état, qui sur un plan mathématique sont des différentielles totales exactes. On pourrait d'ailleurs plus logiquement appeler cette discipline la thermostatique. Le formalisme généralement utilisé nécessite ainsi seulement la connaissance des états initiaux et finaux sans pour autant examiner en détail le processus de transfert d'énergie, ni les modes d'interaction. L'étude complète et générale des mécanismes de transfert d'énergie nécessite d'aborder le formalisme de la thermodynamique hors équilibre (formalisme d'Onsager par exemple et théories de Prigogine).

Dans ce cadre, certains ouvrages se limitent de façon modeste, par miles transferts énergétiques, à l'étude des transferts de chaleur ou transferts thermiques, selon un point de vue macroscopique. Ils seront ainsi amenés à répondre aux différentes questions: Qu'est ce qu'un transfert de chaleur ? Comment la chaleur est elle transmise ? Pourquoi est-ce important d'en étudier les mécanismes ?...etc.

D'autres références se proposent de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final [1], [2]. Cela était l'un des objectifs de la physique théorique et mathématique. Cette description nous explique le transfert de chaleur à partir des équations différentielles appelées équations de chaleur [3].

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Ils permettent une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématique, sur plus d'un siècle.

Il existe des méthodes de résolution en forme locale ou en forme faible. Le cas transitoire est toujours plus délicat à résoudre que le cas stationnaire. Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites) ne peuvent pas être déterminées dans le cas général, et ne concernent que les cas académiques connus depuis longtemps. Ces cas sont pédagogiquement intéressants mais demeurent beaucoup trop limités pour l'industriel, en particulier au niveau des géométries. Ils permettent de mettre en pratique la méthode de séparation des variables, ou les séries de Fourier. On cherche donc des méthodes permettant d'approcher le comportement de la structure, la notion d'approximation est inhérente aux méthodes numériques de résolution des problèmes [4].

Dans ce mémoire, on va traiter de façon analytique le transfert de chaleur entre deux couches séparées par une surface de contact parfait (pour assurer la continuité des fonctions) mis initialement aux conditions différentes. Pour cela, nous donnons dans le premier chapitre, une brève description des formes générales des équations de chaleur, puis dans le deuxième chapitre, les méthodes de résolutions en particulier la méthode de séparation de variables, ainsi que une petite description de programme Maple utilisé dans notre calcul. Le troisième chapitre sera une application de la résolution de l'équation de chaleur à une dimension pour décrire le transfert de chaleur dans un matériau bicouche.

Références

- [1] Yves Jannot, Transferts Thermiques, Ecole des Mines Nancy 2^{ème} Année 2012.
- [2] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [3] H. Belghazi, Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008.
- [4] Guillaume Marmin, Résolution numérique de l'équation de la chaleur 1D en coordonnées sphériques, Application au refroidissement de la lune, 2009/2010

Chapitre 1

GENERALITE SUR L'EQUATION DE CHALEUR

1.1 Introduction

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en 1811, modélisa l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Il a permis ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques. [1]

Dans ce chapitre, on discute l'importance des équations différentielle dans la modélisation des systèmes physiques en détaillant l'exemple de l'équation de chaleur ainsi que la résolution numérique basé sur la méthode de différences finies.

1.2 L'équation de chaleur

1.2.1 Formulation

La quantité a que nous avons introduite peut être n'importe quelle quantité de la physique, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie... Nous allons ici préciser le cas de l'énergie dans le cas d'un milieu fixe de densité constante. Dans ce cas si on définit $J = q$ le flux d'énergie, on écrit l'équation différentielle

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) + r(x, t) \quad (1.1)$$

On connaît l'expression de la capacité calorifique qui relie les variations de l'énergie avec les variations de température

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} e(x, t) = \rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) \quad (1.2)$$

Donc

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) + r(x) \quad (1.3)$$

Il faut ensuite exprimer la relation constitutive entre le flux de chaleur q et le champ de température. La source r est une grandeur donnée. Par définition \vec{q} est le vecteur courant de chaleur (ou densité de flux de chaleur). Il est tel que le taux de chaleur reçue par conduction dans le domaine D est égal par définition à [2] :

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{aD} -\vec{q} \cdot \vec{n} ds \quad (1.4)$$

1.2.2 Applications des propriétés thermiques de matériaux

Les applications de la connaissance des propriétés thermiques des matériaux, et donc de leurs mesures, couvrent la quasi-totalité de l'activité industrielle :

- Génie des procédés de matériaux : modification des structures et des formes, production d'énergie électrique, centrales thermiques, combustion des matériaux.
- Génie climatique et bâtiment : production, stockage et isolation du chaud ou de froid.
- Mécanique : résistance des matériaux soumis à des variations ou gradients de température.
- Electronique : propriétés de conduction, protection des composants, capteurs nano- et microélectronique.
- Agriculture et agroalimentaire : production et conservation des aliments, cuisson.
- Environnement : imagerie thermique des sols et des mers.
- Pharmacie : production et conservation
- Chimie et biologie : synthèse, réactions.
- Médecine : diagnostic et soins, contrôle non destructif des produits, imagerie infrarouge. [3]

1.2.3 Importance

La connaissance des propriétés thermiques des matériaux permet de modéliser les transferts thermiques dans des systèmes complexes et de prédire leurs comportements thermiques. L'établissement du bilan thermique permet de dimensionner les systèmes d'évacuation de la chaleur (système climatique) ou les dispositifs d'isolation pour limiter les pertes d'énergie, de calculer au plus juste l'énergie à apporter à un système pour la transformation des matériaux, d'améliorer la qualité et la sécurité des produits par la maîtrise des processus de fabrication... Les équations (expressions mathématiques des grandeurs physiques mises en jeu dans les phénomènes thermiques) reposent principalement sur le principe de la conservation de l'énergie appelée «bilan énergétique».

1.2.4 Analyse pratique

Comme dans tous les domaines de la physique, pour résoudre un problème, il est essentiel d'en faire une analyse pratique qui conduira à des équations adaptées. Cette analyse permet aussi de poser des hypothèses simplificatrices afin de dégager des éléments sur l'influence de différents paramètres. Pour les échanges thermiques, il convient de s'interroger sur :

- _ Le type de régimes (permanent ou instationnaire) de température ou de flux thermique ;
- _ Les échanges aux frontières (entre les différents constituants du système étudié) et les équations qui en découlent ;
- _ Les symétries du système.

La qualité de l'analyse pratique dépend souvent de l'expérience et des compétences des thermiciens mais, de plus en plus, les équations sont résolues de manière complètement analytique et la modélisation numérique est utilisée pour mettre en évidence l'influence des différents paramètres.

1.3 Le transfert de chaleur

1.3.1 Différents mécanismes de transfert de chaleur

On distingue différents mécanismes de transferts de chaleur conduction convection rayonnement. La Chaleur fournie à un endroit du corps est propagée de proche en proche dans le corps. Dans le cas du gaz, nous savons qu'il s'agissait de chocs entre molécules, dans le cas du solide, de vibrations des atomes. Lorsque l'on examine les choses à une échelle bien plus grande que l'écart entre la molécule et que le milieu paraît continu, la température varie en fonction de la position. On n'a plus d'équilibre dans tout le corps comme dans le cas des systèmes minces. [2]

1.3.2 Lois de conservation, forme générale

Les équations fondamentales de la mécanique des "milieux continus" expriment les lois générales de la physique indépendamment des propriétés "spéciales" des matériaux. Les lois de conservations pour un domaine donné peuvent être en toute généralité écrites sous la forme

$$\text{Variation temporelle} = \text{terme de flux} + \text{création intérieure}$$

Le bilan de n'importe quelle quantité de la physique, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie....

$$\frac{d}{dt} \iiint a dv = - \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} + \iiint r dv \quad (1.5)$$

Dans certains cas on peut rester sur une description globale. Le corps se refroidit lentement, la température du corps est en équilibre continu (il n'y a pas de fortes variations de températures dans le corps). Nous nous concentrons pour l'instant sur des exemples où il y a une variation assez forte de la température dans l'objet. [2]

1.3.3 Loi de Fourier : équation de la chaleur en conduction

Le flux d'énergie dépendait du gradient de la température avec un coefficient proportionnel à la vitesse d'agitation et au libre parcours moyen. On retrouve donc une expression identique liée au gradient de température avec une démarche complètement différente. Tous les matériaux suivent la loi de Fourier (du moins en première approximation si on ne chauffe pas de manière trop forte ou de manière trop rapide). On en déduit que la forme la plus simple, parmi les formes compliquées pour l'expression du flux de chaleur est bien

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.6)$$

C'est la loi de Fourier (François Marie Charles Fourier 1772-1837). K le coefficient de conductivité thermique est positif (et comme T est toujours positif). q est en fait un vecteur, ici dans notre cas où il n'y a de variations qu'en x , le flux est un vecteur dirigé par.

$$\vec{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \vec{e}_x \quad (1.7)$$

L'équation de la chaleur stationnaire à 1D est

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + r \quad (1.8)$$

Les deux variables, x et t sont deux variables indépendantes, il s'agit de ce que l'on appelle une "Equation aux dérivées Partielles" (EDP, ou PDE en anglais). Le fait qu'il y ait deux variables (en fait 4 en réalité : t , x mais aussi y et z), complique beaucoup la résolution. On va donc commencer par examiner le cas simple stationnaire. On appellera solution stationnaire la

solution obtenue pour un temps assez long. Pour la solution stationnaire, le temps n'est plus un paramètre, la température ne varie plus avec le temps. [2]

1.4 Formes des équations de chaleur

1.4.1 Equation de la chaleur en coordonnées cartésiennes

Dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} \quad (1.9)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

b) S'il n'y a pas de génération à d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$

c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Les hypothèses (a) + (b) + (c) permettent d'écrire

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dt} \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.10)$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de poisson :

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.11)$$

Le rapport $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2 \cdot s^{-1}$) Qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.12)$$

1.4.2 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques

Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\varphi}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.13)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique ou la température ne dépend que de r et de z, l'équation (1.13) précédente peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.14)$$

$\frac{q}{k} = 0$ (Sans source de chaleur). Donc l'équation devient

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.15)$$

1.4.3 Equation de la chaleur en coordonnées sphérique

En coordonnées sphérique, on a

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad (1.16)$$

La résolution des équations de chaleur se fait par deux méthodes : analytique en utilisant la méthode de séparation de variables, et numérique en utilisant les méthodes itératives ainsi que la discrétisation des espaces temporel et spatial. Voir le chapitre suivant.

Références

[1] Benhamma Salima, Equation de la Chaleur en Coordonnées Cartésiennes et en Axi-symétrie 3D, Mémoire Université de Bejaia, Année 2015/2016

[2] P-Y. Lagrée, Equation de la chaleur, 13 mars 2010

[3] Françoise Le Frious, Les propriétés thermiques des matériaux et les références métrologiques, LNE /DRST Décembre 2010

Chapitre 2

RESOLUTION DE L'EQUATION DE CHALEUR

2.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires (EDO) apparaissent très souvent dans la modélisation de la physique et des sciences de l'ingénieur. Trouver la solution d'une EDO ou

d'un système d'EDO est ainsi un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre ces équations différentielles.

Il existe des méthodes de résolution en forme locale ou en forme faible. Le cas transitoire est toujours plus délicat à résoudre que le cas stationnaire. Les solutions analytiques, basées sur la forme locale du problème (équation aux dérivées partielles avec conditions aux limites) ne peuvent pas être déterminées dans le cas général, et ne concernent que les cas académiques connus depuis longtemps. Ces cas sont pédagogiquement intéressants mais demeurent beaucoup trop limités pour l'industriel, en particulier au niveau des géométries. Ils permettent de mettre en pratique la méthode séparation des variables, ou les séries de Fourier. On cherche donc des méthodes permettant d'approcher le comportement de la structure, la notion d'approximation est inhérente aux méthodes numériques de résolution des problèmes [1].

2.2 Méthode de séparation de variables

La méthode de séparation des variables est classique. Elle conduit à une solution sous forme de développement en série de fonctions orthogonales. Elle s'applique pour [2] :

- Une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène ; dont le type le plus général est :

$$a(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T}{\partial x} + c(x)T + d(x) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + e(y) \frac{\partial T}{\partial y} + f(y)T = 0 \quad (2.1)$$

- Des systèmes limités, de forme géométrique simple, dont les frontières ont pour équation $x=c$ e ou $y=cte$
- Des conditions aux frontières linéaires homogènes et uniformes, sauf une qui est linéaire et non homogène.

La méthode de séparation des variables consiste à rechercher des solutions particulières de l'équation aux dérivées partielles de la forme $T(x,y) = f(x)g(y)$ qui satisfasse les seules conditions homogènes. Celles-ci imposent aux paramètres de séparation α de prendre une suite infinie de valeurs discrètes $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots)$: racines d'une équation transcendante. Ces solutions particulières $T_k = A_k f_k(x) \cdot g_k(y)$ correspondant à chacune de ces racines forment une suite de fonctions orthogonales dans l'ensemble du domaine. Elles constituent une base pour exprimer la solution du problème qui se présente sous forme d'une série $T_k =$

$\sum_k A_k \cdot f_k(x) \cdot g_k(y)$. Les coefficients de la série sont calculés de manière à ce que T satisfasse la seule condition non homogène du problème.

2.3 Méthodes de résolution numérique de l'équation différentielle

Ces méthodes sont basées sur un développement en série de Taylor suivant un ordre plus au moins élevé. Elles sont qualifiées à un pas, car le calcul de y_{k+1} ne réclame que la valeur de y_k à l'instant précédent. Une méthode à deux pas utilisera à la fois y_k et y_{k-1} . Les schémas numérique des méthodes d'Euler explicite, de Heun (ou de Runge-Kutta d'ordre 2) et de Runge-Kutta classique d'ordre 4 sont donnés dans ce qui suit

2.3.1 Méthode d'Euler

Afin d'atteindre la solution $y(t)$, sur l'intervalle $t \in [a, b]$, on choisit $n + 1$ points dissemblables $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, avec $t_0 = a$ et $t_n = b$ et le pas de discrétisation est défini par $h = (b - a)/n$. La solution à estimer peut être approchée par un développement limité de Taylor

$$y(t_k + h) = y(t_k) + \frac{dy(t_k)}{dt}(t_{k+1} - t_k) + \dots \quad (2.2)$$

Puisque $\frac{dy(t_k)}{dt} = f(t_k, y(t_k))$ et $y = t_{k+1} - t_k$, on obtient ainsi le schéma numérique d'Euler :

$$\begin{cases} y_0 = \text{valeurs initiales} \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \end{cases} \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2.3)$$

Cette méthode est d'ordre 1, cela veut dire que l'erreur est proportionnelle au carré du pas (h) de discrétisation. Intuitivement, on comprend que pour améliorer la précision de cette méthode, il suffira de réduire h . Cette réduction du pas de discrétisation aura pour incidence l'accroissement du temps de calcul ($\sim \frac{1}{h}$). Par ailleurs, l'avantage de la méthode d'Euler, tire son origine du fait qu'elle réclame uniquement l'évaluation de la fonction f pour chaque pas d'intégration.

2.3.2 Méthode de Heun

La méthode de Heun est une version améliorée de celle d'Euler. L'erreur sur le résultat générée par cette méthode est proportionnelle à h^3 , meilleur que celle de la méthode d'Euler. Néanmoins, la méthode d'Heun réclame une double évaluation de la fonction f .

$$\begin{cases} y_0 = \text{valeurs initiale} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)) \right), \quad \text{avec } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Le schéma numérique de cette méthode résulte de l'application de la formule de quadrature du trapèze. Notons également que la méthode de Heun fait partie des méthodes de Runge-Kutta explicites d'ordre deux.

2.3.3 Méthode de Runge-Kutta, d'ordre 3

Les méthodes de type Runge-Kutta permettent d'obtenir une plus grande précision (elles génèrent des solutions numériques plus proches des solutions analytiques) que les deux méthodes précédentes.

$$\begin{cases} y_0 = \text{valeurs initiales} \\ y_{k+1} = y_k + (f(t_k, y_k) + 4f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + y_{1k} \frac{h}{2}\right) + f(t_k + h, y_k + (2y_{2k} - y_{1k})h))h \\ \text{avec } k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ et} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} y_{1k} = f(t_k, y_k) \\ y_{2k} = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + y_{1k} \frac{h}{2}\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

C'est la méthode de Runge-Kutta explicite à trois niveaux.

2.3.4 Méthode de Runge-Kutta, d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta (classique) d'ordre 4, est une méthode explicite très populaire. Elle calcule la valeur de la fonction en quatre points intermédiaires selon :

$$\begin{cases} y_0 = \text{valeurs initiales} \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \left(f(t_k, y_{1k}) + 2f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{2k}\right) + 2f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{3k}\right) + f(t_{k+1}, y_{4k}) \right) \\ \text{avec } k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ et} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} y_{1k} = y_k \\ y_{2k} = y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_{1k}) \end{cases} \begin{cases} y_{3k} = y_k + \frac{h}{2} f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{2k}\right) \\ y_{4k} = y_k + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, y_{3k}\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

Notons que le nombre de termes retenus dans la série de Taylor définit l'ordre de la méthode de Runge-Kutta. Il vient que la méthode Runge-Kutta d'ordre 4, s'arrête au terme $O(h^4)$ de la série de Taylor. [3]

2.3.5 Méthode de différences finies

C'est l'une des techniques souvent utilisées pour la recherche de solution approchées d'équations aux dérivées partielles, elle consiste en une discrétisation des opérateurs différentiels sur une grille de pas d'espace fixe à l'aide de développements de Taylor tronqués [4] (approximations des dérivées) afin d'aboutir à un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. De manière générale, cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes :

- En premier lieu la discrétisation par différences finies des opérateurs de différentiation (dérivation),
- Puis la convergence du schéma numérique qui est obtenue lorsque la distance entre les points diminue.

Pour y voir un peu plus claire, considérons le problème avec les conditions de Dirichlet unidimensionnel suivant

$$-u''(x) = f(x) \quad (2.9)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2.10)$$

Où $f \in C([0,1])$ et les conditions (2.9) sont dites conditions de Dirichlet homogènes (le terme homogène désigne les conditions nulles). Cette équation modélise par exemple la diffusion de la chaleur dans un barreau conducteur chauffé (terme source f) dont les deux extrémités sont plongées dans un milieu à basse température.

Soit $(X_k), k = 0..N + 1$ la subdivision de $[0,1]$

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 \dots < x_{N+1} = 1 \quad (2.11)$$

Le pas du maillage est défini par la relation

$$h = h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i \quad (2.12)$$

Avec $i = 0, \dots, N$

La reformulation de l'équation $\vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}p} = 0$ donne

$$-u''(x_i) = f(x_i) \quad (2.13)$$

Alors ; le développement de Taylor de second ordre en x_i s'écrit :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + o(h^2) \quad (2.14)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + o(h^2) \quad (2.15)$$

En additionnant les deux équations, on aboutit à :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + o(h^2) \quad (2.16)$$

A partir de cette relation, on peut approcher $-u''(x_i)$ par

$$-u''(x_i) = \frac{2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{h^2} \quad (2.17)$$

Finalement, l'équation $\vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}p} = 0$ se traduit par le schéma numérique suivant :

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{h^2} = f(x_i) \quad (2.18)$$

Le schéma numérique ainsi établi peut être résolu avec une méthode itérative (comme la méthode de Newton) en tenant compte des conditions aux limites (2.9). Pour les équations différentielles transitoires, on peut approcher la variation temporelle de la grandeur $u(x_i, t^n)$ (taux de changement) par :

$$\partial_t u(x_i, t^n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.19)$$

En résumé, la méthode de différence finie est l'un des schémas numériques le plus facile à mettre en œuvre pour la résolution des équations à dérivés partielles. Pourtant elle est limitée à

des géométries simples car pour mailler des géométries compliquées, il est plus facile d'utiliser des triangles (tétraèdres en 3 dimensions). La méthode des différences finies est plus difficile à généraliser pour ces cas.

2.4 Programme Maple

2.4.1 Définition

La technologie de l'informatique nous offre suffisamment de logiciels de calcul servent à réduire énormément le temps de calcul lors de la résolution d'un problème physique ou mathématique. On utilise dans ce mémoire le programme Maple qui est avant tout un logiciel de calcul formel, symbolique, c'est à dire qui travaille sur les expressions à la différence du calcul numérique qui calcule sur les nombres. Il intègre des possibilités de calcul numérique qui sont au fil des nouvelles versions de plus en plus performantes. Mais le calcul numérique n'est pas son objectif.

Maple est un logiciel généraliste qui convient très bien par exemple pour les calculs usuels genre terminale deug. Il touche à toutes les branches des mathématiques sur lesquelles on peut calculer. Il n'est pas spécialisé et de ce fait, ne prétend pas rivaliser avec les logiciels : Matlab pour le numérique, et Pari pour l'algèbre. [5]

2.4.2 Fonctionnalités

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, des fonctions, ou des séries. Maple réalise des dérivations, des intégrations, des résolutions de systèmes d'équations linéaires, des inversions de matrices, des développements asymptotiques ou encore des résolutions d'équations différentielles sous forme symbolique, c'est-à-dire en gardant des inconnues dans la résolution. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en théorie des nombres combinatoire. Maple est un système interprété. Dans son utilisation la plus courante, l'utilisateur entre une ligne de commande écrite dans un langage spécifique, et le système retourne un résultat.

2.4.3 Modèle de calcul et langage

Expressions : la structure de donnée fondamentale manipulée par Maple est l'expression. Dans la pratique courante, lorsque l'on utilise une expression mathématique telle

quesin(x), on a en tête une fonction (sin) et un réel dont on connaît de nombreuses propriétés, ainsi qu'une variable x .

(a) Variable booléenne

Par définition, une variable booléenne ne prend que deux valeurs : vrai (true) ou faux (false). Le logiciel manipule ce type de variables. [6]

(b) La structure de test

Un test permet d'effectuer des groupes de commandes si certaines conditions sont vérifiées. [6]

(c) Boucles

Les boucles servent à effectuer un même groupe de commandes plusieurs fois à la suite.

(d) La boucle while

La boucle while permet d'arrêter en cours de route les itérations dès qu'une certaine condition est vérifiée c'est ce qu'on appelle le test d'arrêt de la boucle. [6]

(e) La boucle for

Lorsque l'utilisateur n'a pas besoin d'effectuer de test d'arrêt lors d'une boucle, par exemple dans le cas où le nombre de passages par la boucle est connu d'avance, il peut utiliser une boucle for.

2.5 Simulation Monte Carlo

Les méthodes Monte Carlo sont des méthodes statistiques basées sur le tirage de nombres aléatoires suivant des lois de probabilité qui décrivent les processus physiques mis en jeu. La nature stochastique des processus d'émission, de transport et de détection fait que les méthodes Monte Carlo soient bien adaptées à la physique médicale nucléaire ainsi que la résolution des équations différentielles tels que l'équation de chaleur [7].

Références

- [1] Guillaume Marmin, Résolution numérique de l'équation de la chaleur 1 D en coordonnées sphériques, Application au refroidissement de la lune, 2009/2010
- [2] J. L. Battaglia, Transferts thermiques dans les procédés de mise en forme des métaux, Hermès Science Publications, 2007
- [3] Samir Kenouche <http://sites.univ-biskra.dz/kenouche> Méthodes numériques et programmation – copyright 2016
- [4] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me-de-Taylor> développement de Taylor
- [5] "Université de Laval (canada). Cours en ligne. <http://www.mat.ulaval.ca/mating/Maple>
- [6] <http://lkc.free.fr> lycée Janson-de-Sailly MPSI4 2010-2011
- [7] Asma BARBOUCHI, Simulation Monte Carlo des techniques de tomographie en utilisant la plate-forme gâte. Mémoire du Déplume de Master en Physique Quantique, Université de Tunis, Année 2006-2007

Chapitre 3

ETUDE DU TRANSFERT THERMIQUE ENTRE DEUX COUCHES DE MATERIAUX

3.1 Introduction

L'objectif de ce travail est de donner une description du transfert thermique entre deux couches de matériaux à partir de la résolution de l'équation de chaleur à une dimension.

Pour cela on va donner tout d'abord une description de notre problème, puis la formulation basée sur la méthode de séparation de variables (MSV) pour résoudre l'équation de chaleur décrivant le flux thermique à travers des deux couches. Les résultats et les graphes sont obtenus à l'aide du programme de Maple.

3.2 Historique et motivation

Le transfert de chaleur par conduction a été décrit depuis la fin du XIXe siècle par J. Fourier après de nombreuses expériences. Depuis, plusieurs travaux dans divers domaines de la physique et de la physique extérieure, que ce soit la physique théorique, la physique des matériaux, la biologie et même l'électronique, se sont intéressés à l'étude de ce phénomène ainsi que de son équation. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour le contexte général et de base. D'un point de vue mathématique, plusieurs types d'équation de chaleur sont développés comme le cas non linéaire. Voir [2] pour la présentation de base et [3] pour la résolution numérique. On retrouve aussi le type fractionnaire dans [4] et les références qu'il contient. En image physique, on retrouve une recherche très riche. Nous ne mentionnons pas exclusivement, l'étude de plusieurs couches dans [5], et [6] pour l'étude multidimensionnelle de deux couches. Les méthodes de Monte Carlo sont également utilisées pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur. Voir [7] pour une bonne présentation, et [8] pour une application importante à l'équation de la bio-chaleur à l'intérieur des corps biologiques. En ce qui concerne la relation entre la chaleur et la conservation de l'énergie dans les bâtiments, nous renvoyons le lecteur à la référence [9] où il existe une étude appliquée récente. En électronique, on retrouve l'utilisation du graphène pour réduire les points chauds dans les circuits électroniques [10]. Aussi, dans [11], on peut trouver un détail fondamental dans l'étude du transfert de chaleur dans un matériau bicouche formé par des éclaboussures déposées sur un substrat soumis à un faisceau laser gaussien en mouvement où la résistance thermique entre les deux surfaces de contact (TCR) était pris en considération. Cette étude est applicable dans le traitement des surfaces. Récemment, on retrouve une grande importance accordée aux problèmes de chaleur inverse où l'on peut déterminer certaines propriétés thermo-physiques en connaissant le comportement du flux thermique. Nous cite [12] comme référence fondamentale, et [13] pour un exemple concret.

3.3 Présentation du problème

On considère un matériau composé de deux couches différentes S_1 , et S_2 (cf. figure 3.1) séparées par une surface de contact parfait. Les propriétés thermo-physiques des deux couches sont : la conductivité k_i , la diffusivité α_i , la chaleur spécifique Cp_i , la masse volumique ρ_i et l'épaisseur a_i . Les coefficients de convection des deux côtés sont h_i . Tout pour $i = 1, 2$. Les deux couches sont maintenues respectivement aux deux températures initiales T_{01} , et T_{02} . Pour simplifier l'étude, nous adoptons le changement de variable suivant

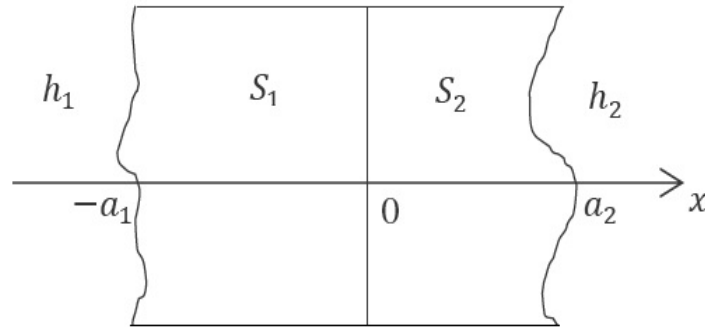


Fig. 3.1 Matériau composé de deux couches

$$\theta_i(x, t) = T_{amb} - T_i(x, t) \quad (3.1)$$

Le transfert de chaleur par conduction à une dimension est décrit par l'équation [2]

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (3.2)$$

Les conditions aux bords choisis sont

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=-a_1} + h_1 \theta_1 \Big|_{x=-a_1} = 0 \quad (3.3)$$

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=a_2} + h_2 \theta_2 \Big|_{x=a_2} = 0 \quad (3.4)$$

Et celles sur la surface de contact sont

$$\theta_2 \Big|_{x=0} = \theta_1 \Big|_{x=0} \quad (3.5)$$

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (3.6)$$

Les températures initiales sont pour chaque couche sont

$$\theta_{0i} = T_{amb} - T_{0i} \quad (3.7)$$

3.4 Formulation théorique

L'ensemble des équations (3.2) - (3.7) détermine un problème de conduction de chaleur solvable par MSV. Pour cela, on peut écrire la séparation pour chaque couche i ($i = 1,2$)

$$\theta_i(x, t) = X_i(x) \cdot G_i(t) \quad (3.8)$$

En injectant (3.8) dans (3.2), on obtient un système d'équations différentielles décrivant les deux parties pour chaque couche

$$\begin{cases} \frac{1}{X_i} \frac{d^2 X_i}{dx^2} = -\lambda_i^2 \\ \frac{1}{\alpha_i G_i} \frac{dG_i}{dt} = -\lambda_i^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

La contrainte de convergence de G exige la valeur négative $-\lambda_i^2$ où nous gardons α_i . On obtient alors les formes de solutions suivantes

$$X_i(x) = A_i \cos(\lambda_i x) + B_i \sin(\lambda_i x) \quad (3.10)$$

$$G_i(t) = \exp(-\alpha_i \lambda_i^2 t) \quad (3.11)$$

A_i et B_i sont des constantes d'intégration. $t \geq 0$, $-a_1 \leq x \leq 0$ pour la première couche ($i = 1$) et $0 \leq x \leq a_2$ pour la seconde ($i = 2$). La détermination de constantes A_i , B_i et λ_i est détaillée dans [17]. Pour simplifier l'étude, on définit ce qu'on appelle le groupe adimensionnel (sans dimension) qui est formé par les rapports des paramètres thermo-physique mis en jeu

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (3.12)$$

$$\kappa = \frac{k_2}{k_1} \quad (3.13)$$

$$\gamma = \frac{a_2}{a_1} \quad (3.14)$$

Et les nombres de Biot

$$Biot_i = \frac{h_i a_1}{k_1} \quad (3.15)$$

La version finale des solutions à des constantes pris B sera

$$X_1(\xi) = B\{P_1(\beta)\cos(\beta\xi) + \sin(\beta\xi)\} \quad (3.16)$$

$$G_1(\tau) = \exp(-\beta^2\tau) \quad (3.17)$$

$$X_2(\xi) = \frac{B}{\kappa\omega}\{-P_2(\beta)\cos(\omega\beta\xi) + \sin(\omega\beta\xi)\} \quad (3.18)$$

$$G_2(\tau) = \exp(-\beta^2\tau) \quad (3.19)$$

Où $P_i(\beta)$ sont des fonctions dépendant de ce qu'on appelle valeurs propres notées β [15]

$$P_i(\beta) = \frac{(\kappa\omega)^{i-1}\beta + Biot_i \operatorname{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)}{Biot_i - (\kappa\omega)^{i-1}\beta \operatorname{tg}((\omega\gamma)^{i-1}\beta)} \quad (3.20)$$

et satisfont à la relation

$$E(\beta) = P_1(\beta) + \frac{P_2(\beta)}{\kappa\omega} = 0 \quad (3.21)$$

ξ et τ sont les deux coordonnées (variables) adimensionnelles spatiale et temporelle respectivement définies par

$$\xi = \frac{x}{a_1} \quad (3.22)$$

$$\tau = \frac{\alpha_1}{a_1^2} t \quad (3.23)$$

Où $\tau \geq 0$, $-1 \leq \xi \leq 0$ pour la première couche, et $0 \leq \xi \leq \gamma$ pour la seconde. L'équation (3.21) s'appelle équation aux valeurs propres dont les racines non négatifs sont β_n , $n \geq 1$. Voir la figure (3.2) et table 3.1 pour un exemple concret où on a calculé les valeurs propres pour l'exemple $\omega = 1$, $\kappa = 1$, $\gamma = 2$, $Biot_1 = 1.5$, and $Biot_2 = 2$. Les constantes B sont déterminées en utilisant une propriété d'orthogonalité [15] de X_i .

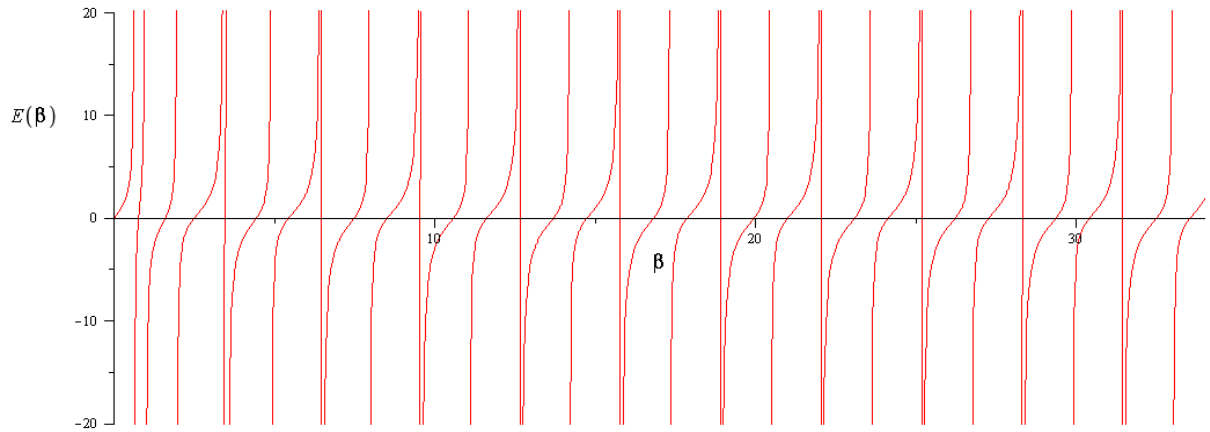


Fig. 3.2 La fonction $E(\beta)$

Les racines β_n (table 3.1) sont obtenues en implémentant la méthode de Newton dans le programme Maple avec une tolérance de 10^{-5} . Ils ont un caractère linéaire. La solution est une combinaison linéaire par rapport à n (l'indice de chaque racine) où on isole B de X

N	β_n
1	0.7674332984
2	1.597456395
3	2.499509363
4	3.406994828
5	4.438540348
6	5.443000616
7	6.459333762
8	7.483375566
9	8.512639636
10	9.545577860
11	10.58118669
12	11.61879154
13	12.65792417
14	13.69825087
15	14.20690521
16	14.73952702
17	15.77096594
18	16.82424174
19	17.86743394
20	18.91106241

Table 3.1 Les vingt premiers racines de la fonction $E(\beta)$

$$\theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (3.24)$$

La détermination des constantes B_n se fait d'après la relation d'orthogonalité satisfaisant les parties spatiales $X_{i,n}(\xi)$ [15]

$$\kappa \int_{-1}^0 X_{1,n}(\xi)X_{1,m}(\xi)d\xi + (\kappa\omega)^2 \int_0^Y X_{2,n}(\xi)X_{2,m}(\xi)d\xi = \delta_{nm}\varphi_n \quad (3.25)$$

or, on obtient la forme des constantes B

$$B_n = \frac{\kappa}{\varphi_n} \left\{ \int_{-1}^0 \theta_{01} X_{1,n}(\xi) d\xi + k\omega^2 \int_0^Y \theta_{02} X_{2,n}(\xi) d\xi \right\} \quad (3.26)$$

3.5 Constantes adimensionnelles

On introduit la température adimensionnelle initiale par la relation

$$F = \frac{\theta_{02}}{\theta_{01}} = \frac{T_{amb}-T_{02}}{T_{amb}-T_{01}} \quad (3.27)$$

et la température solution (de (3.2)) par

$$\Theta_i = \frac{\theta_i}{\theta_{01}} = \frac{T_{amb}-T_i}{T_{amb}-T_{0i}} \quad (3.28)$$

Alors, nous obtenons explicitement les constantes adimensionnelles C par la définition

$$C_n = \frac{B_n}{\theta_{01}} = \frac{\kappa}{\varphi_n \beta_n} \{ \cos(\beta_n) + P_1(\beta_n) \sin(\beta_n) - 1 + F(1 - \cos(\omega\gamma\beta_n) - P_2(\beta_n) \sin(\omega\gamma\beta_n)) \} \quad (3.29)$$

Enfin, en combinant les deux relations (3.28) et (3.29), on obtient la solution analytique sous la forme

$$\Theta_i(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_{i,n}(\xi) G_{i,n}(\tau) \quad (3.30)$$

Nous avons donc résolu analytiquement par MSV notre problème de transfert de chaleur à travers les deux couches. Notez que la température d'équilibre instable entre les deux couches est donnée par [16]

$$T_{eq} = \frac{\sqrt{k_1 \rho_1 c p_1} T_{01} + \sqrt{k_2 \rho_2 c p_2} T_{02}}{\sqrt{k_1 \rho_1 c p_1} + \sqrt{k_2 \rho_2 c p_2}} \quad (3.31)$$

où Cp_i et ρ_i ($i = 1,2$) sont respectivement la chaleur spécifique et la masse volumique de chaque matériau. Puisque la diffusivité thermique est liée à ces propriétés et k_i par

$$\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i \cdot Cp_i} \quad (3.32)$$

on obtient par simple calcul la température d'équilibre adimensionnelle

$$F_{eq} = \frac{T_{amb} - T_{eq}}{T_{amb} - T_{01}}$$

$$= \frac{\sqrt{\kappa\omega}F_2 + 1}{\sqrt{\kappa\omega} + 1} \quad (3.33)$$

L'ensemble du matériau composé de deux couches est décrit par la température

$$\Theta(\xi, \tau) = \begin{cases} \Theta_1(\xi, \tau) & \text{if } -1 \leq \xi \leq 0 \\ \Theta_2(\xi, \tau) & \text{if } 0 \leq \xi \leq \gamma \end{cases} \quad (3.34)$$

Après un temps suffisant, toutes les températures tendent vers T_{amb} , ce qui est équivalent à Θ_i tend vers 0.

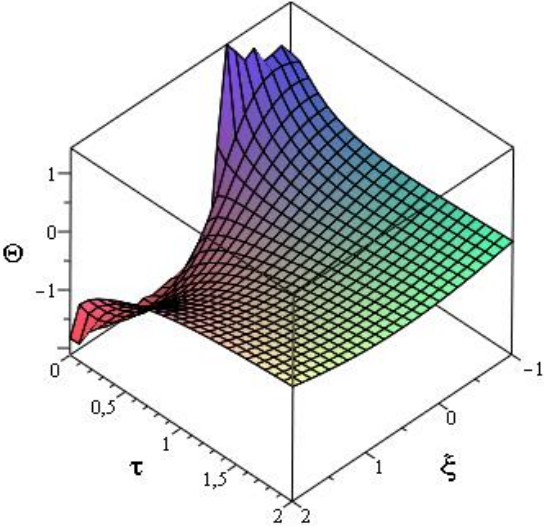
3.6 Résultats & discussions

En prenant l'exemple de la table 3.1, où on prend comme conditions initiales $T_{amb} = 300K$, $T_{01} = 350K$, $T_{02} = 200K$, et on s'arrête à 20 racines dans la somme (3.30) qui est suffisant pour avoir une erreur inférieure à 5% [17]. Les températures adimensionnelles sont d'après (3.28) :

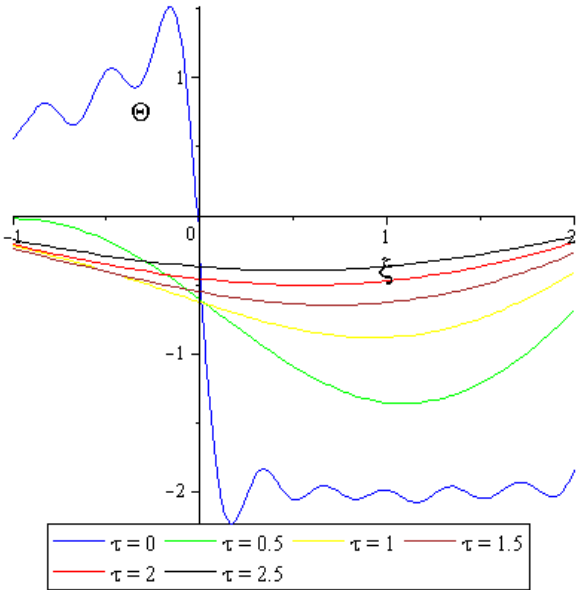
- ❖ La température initiale de la couche chaude (couche 1) est 1
- ❖ La température initiale de la couche froide (couche 2) est $F = -2$
- ❖ La température d'équilibre instantanée est $F_{eq} = -0.5$ (équivalent à 275K)
- ❖ La température d'équilibre thermique final est 0

La figure 3.3a est une représentation à 3D de la température $\Theta(\xi, \tau)$ solution de l'équation (3.2) où on observe un équilibre thermique à partir de la valeur $\tau = 2$. La figure 3.3b montre une représentation bidimensionnelle de Θ aux différents temps en des points sélectionnés. On observe clairement l'équilibre instantané au point (0 ; -0.5). La figure 3.3c donne une représentation de l'évolution de la température de la couche chaude ou on observe des chutes de températures vers la valeur de l'équilibre instantané d'autant plus visibles lorsqu'on se rapproche de la surface de contact puis toutes les valeurs tendent vers la température ambiante 0. Dans la figure 3.3d on représente le comportement de la température de la couche froide aux différents points en fonction de temps adimensionnel. On n'observe pas

des sauts de températures et les courbes rejoignent le régime permanent (l'équilibre final) après une période le temps adimensionnel signalé avant.



(a)



(b)

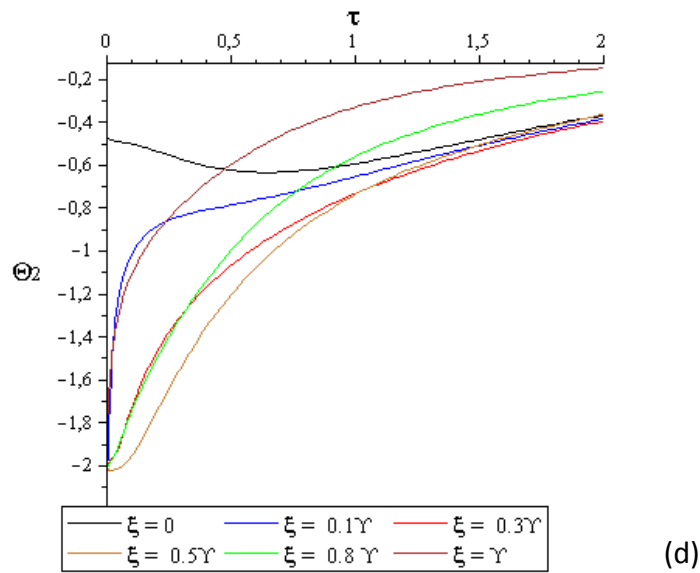
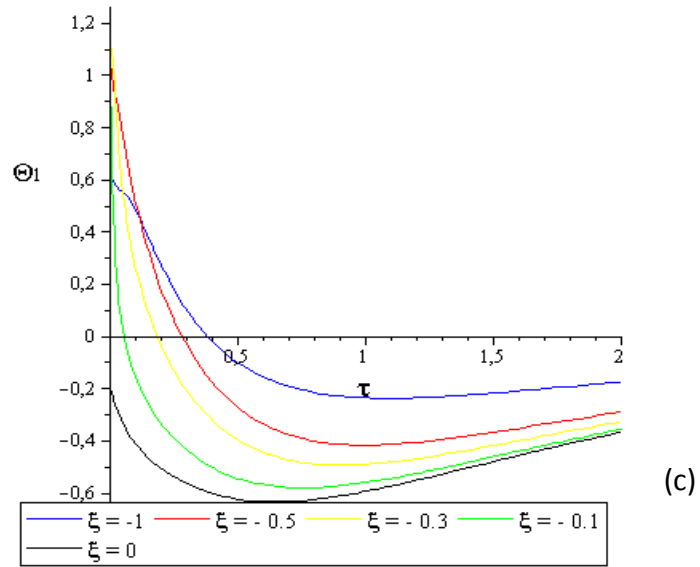


Fig. 3.3 *Etude de transfert de chaleur entre deux couches : (a) Représentation à 3 D, (b) Les températures en premiers moments, (c) Les températures des points sélectionnés dans la première couche, (d) Les températures des points sélectionnés dans la deuxième couche,*

3.7 Programme Maple

> with(Student[CalculusI]), with(Student[NumericalAnalysis]), with(plots, implicitplot),
with(linalg), with(RandomTools[MersenneTwister]), with(LinearAlgebra),
with(Statistics) :

(1) The General Solution And Conditions

> X := (i, n, x) → sin(ωⁱ⁻¹ · lambda(n) · x) + (-1)ⁱ⁻¹ Π(i, n) · cos(ωⁱ⁻¹ · lambda(n) · x)

Ecriture des solutions

$$X := (i, n, x) \rightarrow \sin(\omega^{i-1} \lambda(n) x) + (-1)^{i-1} \Pi(i, n) \cos(\omega^{i-1} \lambda(n) x) \quad (1)$$

> Fi := Tam - T0i; # Les conditions initiales

$$Fi := Tam - T0i \quad (2)$$

(3) Eigen Problem Of beta(n) ≡ z

> Π := (i, z) → $\frac{(\kappa \omega)^{i-1} \cdot z + Biot[i] \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot z)}{Biot[i] - (\kappa \omega)^{i-1} \cdot z \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot z)}$;

$$\Pi := (i, z) \rightarrow \frac{(\kappa \omega)^{i-1} z + Biot_i \tan((\omega Y)^{i-1} z)}{Biot_i - (\kappa \omega)^{i-1} z \tan((\omega Y)^{i-1} z)} \quad (3)$$

> PI(1, z); PI(2, z)

$$\frac{z + Biot_1 \tan(z)}{Biot_1 - z \tan(z)}$$

$$\frac{\kappa \omega z + Biot_2 \tan(\omega Y z)}{Biot_2 - \kappa \omega z \tan(\omega Y z)} \quad (4)$$

> EqVp := (z) → Π(1, z) + $\frac{1}{\kappa \omega}$ · Π(2, z) # Problème de valeurs propres

$$EqVp := z \rightarrow \Pi(1, z) + \frac{\Pi(2, z)}{\kappa \omega} \quad (5)$$

> EqVp(1)

$$\frac{1 + Biot_1 \tan(1)}{Biot_1 - \tan(1)} + \frac{\kappa \omega + Biot_2 \tan(\omega Y)}{\kappa \omega (Biot_2 - \kappa \omega \tan(\omega Y))} \quad (6)$$

> kappa := 1; Y := 2; omega := 1; Biot[1] := 1.5; Biot[2] := 2

κ := 1

Y := 2

ω := 1

Biot₁ := 1.5

Biot₂ := 2

(7)

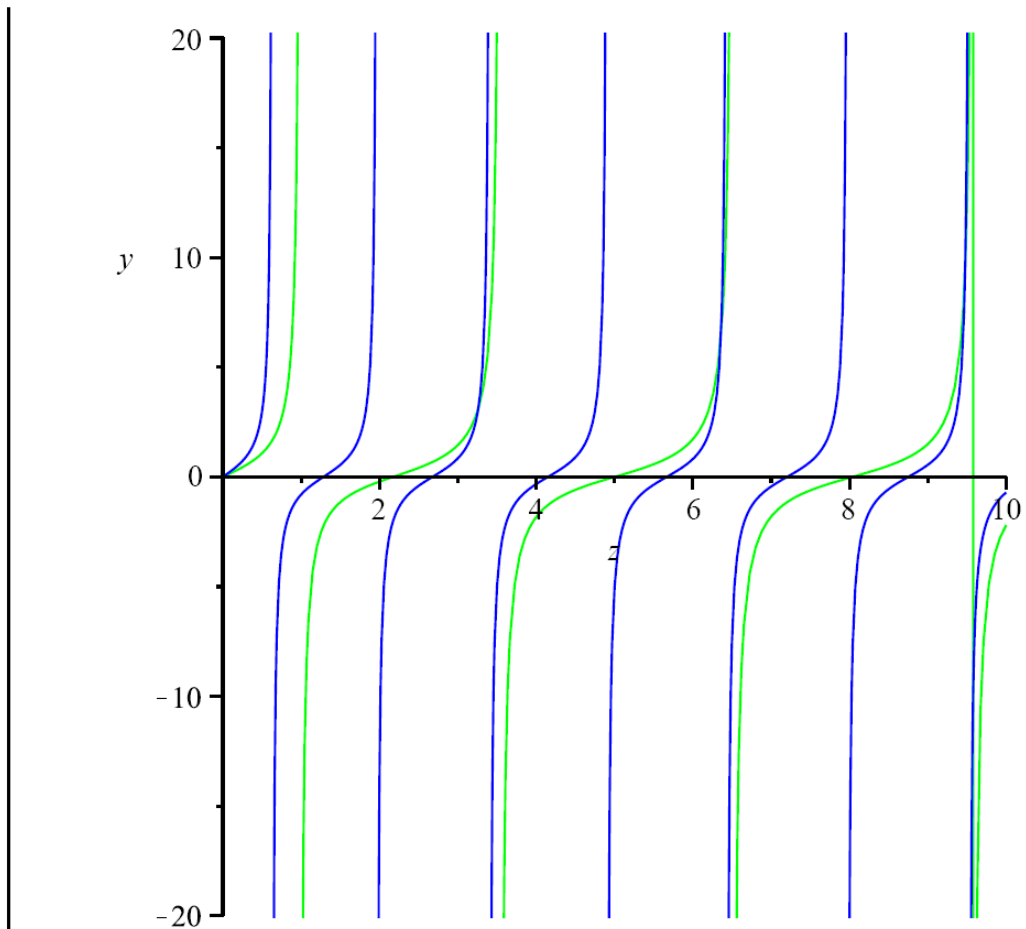
> ord := 2; N := 34

ord := 2

N := 34

(8)

> plot([PI(1, z), PI(2, z)], z = 0 .. 10, y = -10 .. 10, ord = 2, color = [green, blue], discount = true)

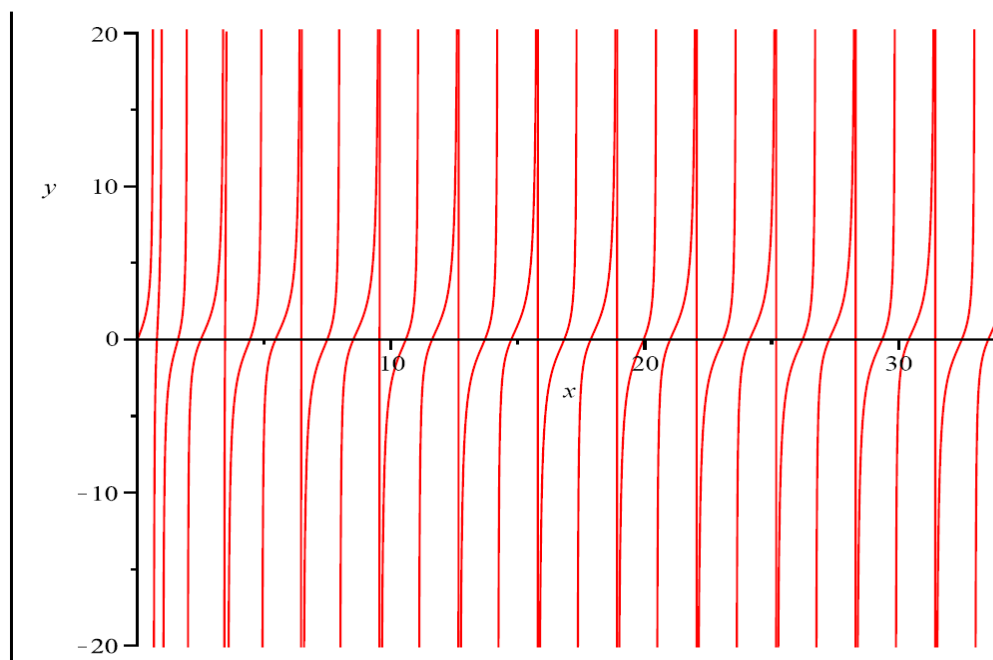


> EqVp(x)

$$\frac{x + 1.5 \tan(x)}{1.5 - x \tan(x)} + \frac{x + 2 \tan(2x)}{2 - x \tan(2x)}$$

(9)

> plot(EqVp(x), x=0..34, y=-10 ord..10 ord, discont=true)# Figure 3.2



(4) Newton Raphson Resolution

```
> 60, 10 N;
Tolerance := 10-5; Ni := 800; Nf := 1000N
60, 340
Tolerance :=  $\frac{1}{100000}$ 
Ni := 800
Nf := 34000
```

(10)

```
> Sol := {seq(Newton(EqVp(x), x =  $\frac{i}{1000}$ , tolerance = Tolerance), i = Ni..Nf)}
```

(11)

```
Sol := [
1 .. 33201 Vectorcolumn
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order
]
```

```
> for i from 1 to Nf - Ni do if Sol(i + 1) - Sol(i) ≤ 0.1 then Sol(i + 1) := Sol(i) end if end do
> Root := {op([seq(Sol(i), i = 1..Nf - Ni)])} # Table 3.1
```

```
Root := {0.7674332984, 1.597456395, 2.499509363, 3.406994828, 4.438540348,
5.443000616, 6.459333762, 7.483375566, 8.512639636, 9.545577860, 10.58118669,
11.61879154, 12.65792417, 13.69825087, 14.20690521, 14.73952702, 15.77096594,
16.82424174, 17.86743394, 18.91106241, 19.95505995, 20.46894810, 20.99937240,
22.04395565, 23.08877345, 23.60379072, 24.13379570, 25.17899653, 26.22435682,
26.74113599, 27.26985646, 28.31548078, 29.36121658, 30.40705242, 31.44830420,
32.49898589, 33.01702665, 33.54506729}
```

(12)

```
> Nr := nops(Root) - 18
Nr := 20
```

(13)

```
> seq(EqVp(Root[i]), i = 1..Nr)
6. 10-9, -1. 10-10, -1.9 10-9, 45434.95719, -2. 10-10, 2.2 10-9, -0.00001033, -2.2 10-9,
-1.1 10-9, -0.00000224, 1.00 10-8, -1.64 10-8, -0.00053238, -1.18 10-8, 2624.590609,
8. 10-10, 7350.150928, -7.5 10-9, 1.69 10-8, -0.00001410
```

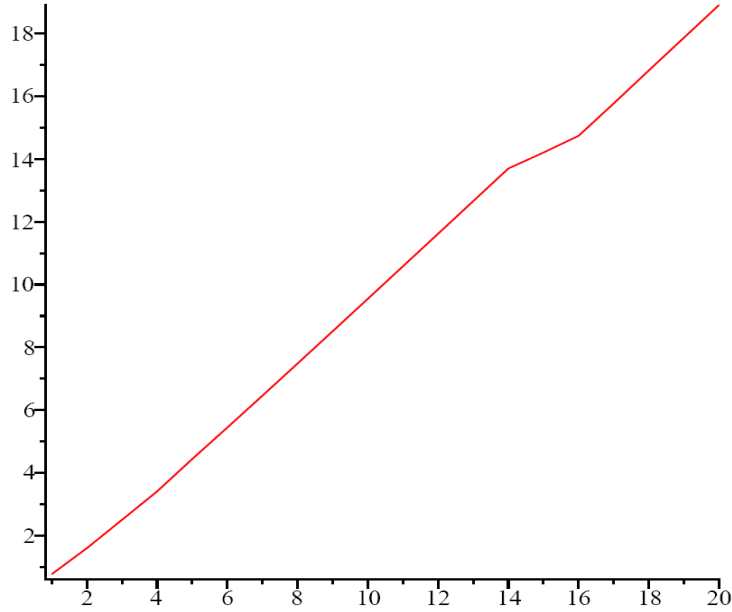
(14)

```
> Matrix(2, Nr, [seq(Root[i], i = 1..Nr), seq(EqVp(Root[i]), i = 1..Nr)])
```

(15)

```
[
2 x 20 Matrix
Data Type: anything
Storage: rectangular
Order: Fortran_order
]
```

```
> plot((seq(i, i = 1..Nr))|(seq(Root[i], i = 1..Nr))) # Figure 3.3
```

```

> for n from 1 to Nr do beta := (n) → Root[n] end do:
> beta(1)
0.7674332984

```

(5) Dimensionless Constants

```

> Tamb := 300; T01 := 350; T02 := 200; F := (Tamb - T02) / (Tamb - T01)
Tamb := 300
T01 := 350
T02 := 200
F := -2

```

$$c := (n) \rightarrow \frac{\kappa}{2} \cdot (1 + \text{PI}(1, n)^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{\text{beta}(n)^2}{\text{Biot}[1]} + \text{Biot}[1]} \right) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \text{PI}(2, n)^2) \cdot \left(Y + \frac{1}{\frac{\omega^2 \cdot \text{beta}(n)^2 \cdot \kappa}{\text{Biot}[2]} + \frac{\text{Biot}[2]}{\kappa}} \right)$$

$$c := n \rightarrow \frac{1}{2} \kappa (1 + \Pi(1, n)^2) \left(1 + \frac{1}{\frac{\beta(n)^2}{\text{Biot}_1} + \text{Biot}_1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Pi(2, n)^2 \right) \left(Y + \frac{1}{\frac{\omega^2 \beta(n)^2 \kappa}{\text{Biot}_2} + \frac{\text{Biot}_2}{\kappa}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 > \Pi := (i, n) \rightarrow \frac{(\kappa \cdot \omega)^{i-1} \cdot \text{beta}(n) + \text{Biot}[i] \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot \text{beta}(n))}{\text{Biot}[i] - (\kappa \cdot \omega)^{i-1} \cdot \text{beta}(n) \cdot \tan((\omega \cdot Y)^{i-1} \cdot \text{beta}(n))} \\
 \Pi := (i, n) \rightarrow \frac{(\kappa \omega)^{i-1} \beta(n) + \text{Biot}_i \tan((\omega Y)^{i-1} \beta(n))}{\text{Biot}_i - (\kappa \omega)^{i-1} \beta(n) \tan((\omega Y)^{i-1} \beta(n))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> C := (n) \rightarrow \frac{\text{kappa}}{\text{beta}(n) \cdot c(n)} \cdot (\cos(\text{beta}(n)) + \text{PI}(1, n) \cdot \sin(\text{beta}(n)) - 1 + F \cdot (1 - \cos(\text{omega} \\
&\quad \cdot Y \cdot \text{beta}(n)) - \text{PI}(2, n) \cdot \sin(\text{omega} \cdot Y \cdot \text{beta}(n)))) \\
C := n \rightarrow &\frac{1}{\beta(n) c(n)} (\kappa (\cos(\beta(n)) + \Pi(1, n) \sin(\beta(n)) - 1 + F (1 - \cos(\omega Y \beta(n)) \\
&\quad - \Pi(2, n) \sin(\omega Y \beta(n)))) \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> C(1); C(2); \text{beta}(1); \text{beta}(2) \\
&\quad \quad \quad -0.4160579733 \\
&\quad \quad \quad -1.160261952 \\
&\quad \quad \quad 0.7674332984 \\
&\quad \quad \quad 1.597456395 \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> X := (i, n, \xi) \rightarrow \frac{1}{(\text{omega} \cdot \text{kappa})^{i-1}} \left(\sin(\omega^{i-1} \cdot \xi \cdot \text{beta}(n)) + (-1)^{i-1} \text{PI}(i, n) \cdot \cos(\omega^{i-1} \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{beta}(n) \cdot \xi) \right) \\
X := (i, n, \xi) \rightarrow &\frac{\sin(\omega^{i-1} \xi \beta(n)) + (-1)^{i-1} \Pi(i, n) \cos(\omega^{i-1} \xi \beta(n))}{(\kappa \omega)^{i-1}} \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> X(2, 1, \text{xi}) \\
&\quad \quad \quad \sin(0.7674332984 \xi) + 2.915112125 \cos(0.7674332984 \xi) \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> XX := (i, \xi) \rightarrow \frac{1}{(\text{Omega} \cdot \text{Kappa})^{i-1}} \left(\sin(\text{Omega}^{i-1} \cdot \xi \cdot \text{Beta}) + (-1)^{i-1} \text{PIII}(i) \right. \\
&\quad \left. \cdot \cos(\text{Omega}^{i-1} \cdot \text{Beta} \cdot \xi) \right) \\
XX := (i, \xi) \rightarrow &\frac{\sin(\Omega^{i-1} \xi B) + (-1)^{i-1} \text{PIII}(i) \cos(\Omega^{i-1} \xi B)}{(\Omega K)^{i-1}} \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> XX(1, \text{xi}) \\
&\quad \quad \quad \sin(\xi B) + \text{PIII}(1) \cos(\xi B) \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> CC := (n) \rightarrow \frac{\text{Kappa}}{\text{phi}} \left(\text{int}(F11 \cdot XX(1, \text{xi}), \text{xi} = -1 .. 0) + \text{Kappa} \cdot \text{Omega}^2 \cdot \text{int}(F22 \cdot XX(2, \text{xi}), \text{xi} \right. \\
&\quad \left. = 0 .. Y) \right)
\end{aligned}$$

$$CC := n \rightarrow \frac{K \left(\int_{-1}^0 F11 XX(1, \xi) d\xi + K \Omega^2 \left(\int_0^Y F22 XX(2, \xi) d\xi \right) \right)}{\phi} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
&> \text{factor}(CC(n)) \\
&\frac{1}{\phi B} \left(K (F11 \cos(B) + F11 \text{PIII}(1) \sin(B) - F11 + 2 F22 - 2 F22 \cos(B \Omega)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 F22 \text{PIII}(2) \sin(B \Omega) \cos(B \Omega)) \right) \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> X(1, 1, \text{xi}); \text{PI}(1, 1) \\
&\quad \quad \quad \sin(0.7674332984 \xi) + 2.915112131 \cos(0.7674332984 \xi) \\
&\quad \quad \quad 2.915112131 \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \text{Theta} := (i, \xi, \text{tau}) \rightarrow \text{add}(C(n) \cdot X(i, n, \xi) \cdot \exp(-\text{beta}(n)^2 \cdot \text{tau}), n = 1 .. Nr) \\
&\quad \Theta := (i, \xi, \tau) \rightarrow \text{add}(C(n) X(i, n, \xi) e^{-\beta(n)^2 \tau}, n = 1 .. Nr) \quad (29)
\end{aligned}$$

```
> Theta := (i, xi, tau) → add(C(n) · X(i, n, xi) · exp(-beta(n)2 · tau), n = 1 .. Nr)
      Θ := (i, ξ, τ) → add(C(n) X(i, n, ξ) e-β(n)2τ, n = 1 .. Nr) (29)
```

```
> Theta(1, -1, 0); Theta(2, Y, 0); Theta(1, 0, 0); Theta(2, 0, 0)
      0.5604058071
      -1.834799039
      -0.1988020171
      -0.4743901463 (30)
```

(6) Equilibrium Temperature Teq Between The Two Slabs

```
> Ce := (kappa.omega)
      Ce := 1 (31)
```

```
> Teq := evalf( (Ce · T02 + T01) / (Ce + 1) ) # `Température d'équilibre
      Teq := 275. (32)
```

```
> TEQ := (Tamb - Teq) / (Tamb - T01)
      TEQ := -0.5000000000 (33)
```

(7) Normalized Results Theta ≡ (Tamb - T)/(Tamb - T01)

(a) Theta(1,xi,tau), and Theta(2,xi,tau) # Résultats

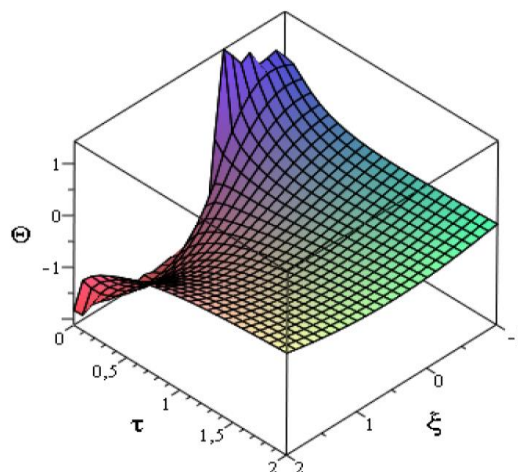
```
> T := (xi, tau) → piecewise(xi ≤ 0, Theta(1, xi, tau), xi ≥ 0, Theta(2, xi, tau))
      T := (ξ, τ) → piecewise(ξ ≤ 0, Θ(1, ξ, τ), 0 ≤ ξ, Θ(2, ξ, τ)) (34)
```

```
> Theta(1, x, tau) : Theta(2, x, tau) : Theta(1, -1, 0); T(-1, 0);
      Theta(2, 2, 0); T(2, 0)
      0.5604058071
      0.5604058071
      -1.834799039
      -1.834799039 (35)
```

```
> tau_i := 0; tau_f := 10
      tau_i := 0
      tau_f := 10 (36)
```

```
> a := 5;
```

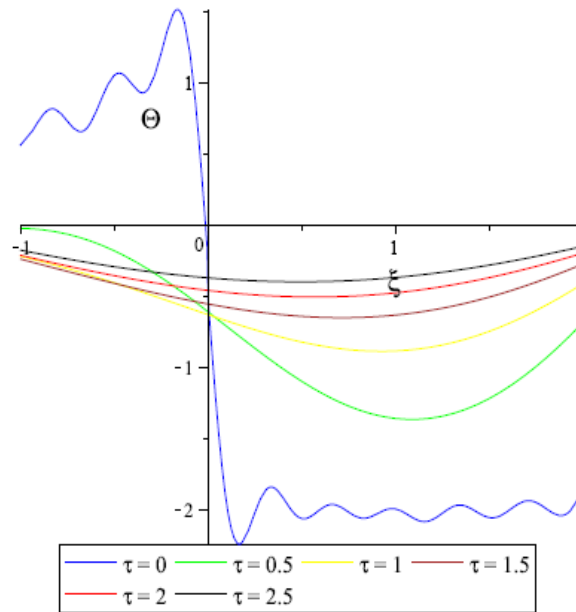
```
plot3d(T(x, tau), x = -1 .. Y, tau = tau_i / a .. tau_f / a, axes = boxed);
      a := 5
```



```

> Col := Vector[row]([ blue, red, green, black, yellow, orange, brown ])
      Col := [ blue red green black yellow orange brown ] (37)
> Line := Vector[row]([ Solid, Dot, Dash, DashDot, LongDash, SpaceDot, SpaceDash ])
      Line := [ Solid Dot Dash DashDot LongDash SpaceDot SpaceDash ] (38)
> a := 5;
      a := 5 (39)
> plot( [ seq( T( x, tau/a ), tau = tau_i .. tau_f, 2 ) ], x = -1 .. Y, color = [ seq( Col( tau mod 7 + 1 ), tau
= tau_i .. tau_f, 2 ) ], linestyle = [ seq( Line( 1 ), tau = tau_i .. tau_f ) ], legend = [ "τ = 0", "τ = 0.5",
"τ = 1", "τ = 1.5", "τ = 2", "τ = 2.5" ] ); seq( Col( tau mod 7 + 1 ), tau = tau_i .. tau_f, 2 );

```



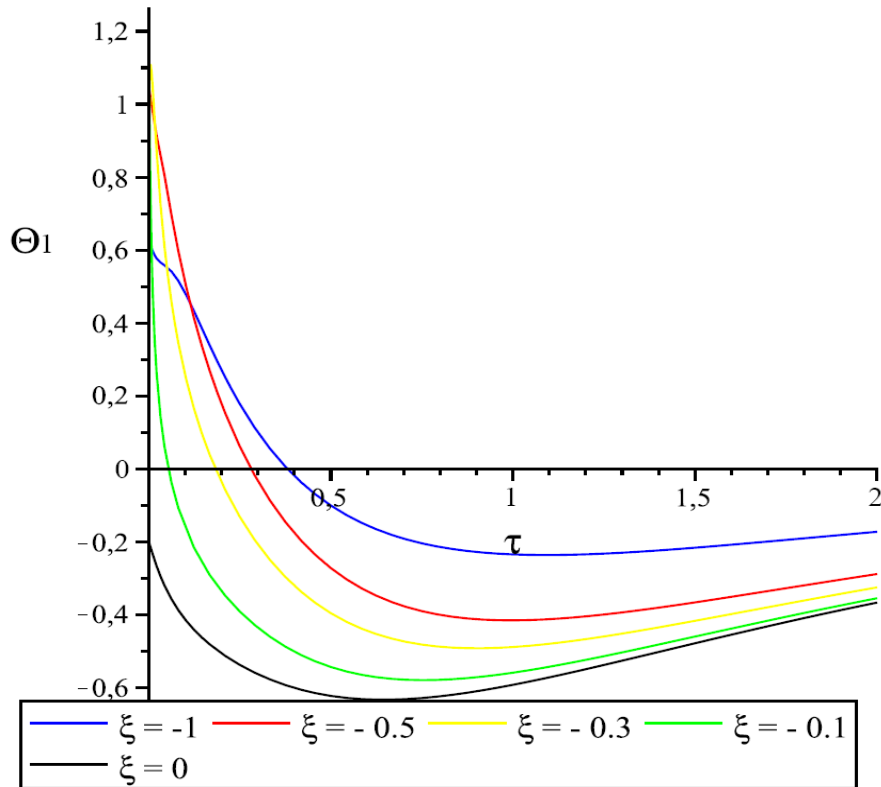
blue, green, yellow, brown, red, black

(40)

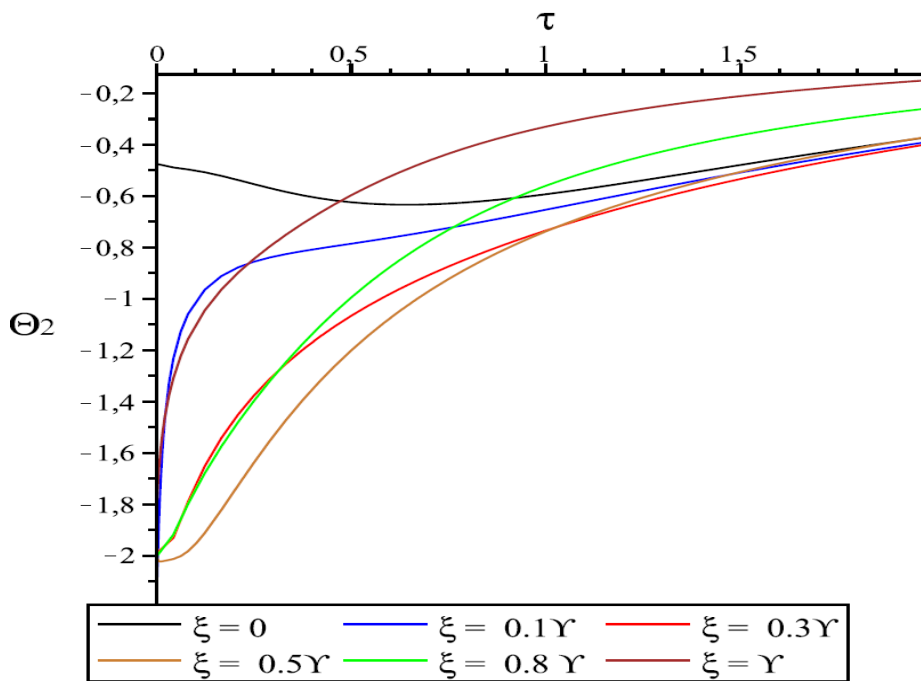
```

> x := < -1, -0.5, -0.3, -0.1, 0, 0.1 Y, 0.3 Y, 0.5 Y, 0.8 Y, Y > :
> a := 5; tau_i := 0; tau_f := 40;
plot( [ seq( Theta( 1, x(x), tau ), x = 1 .. 5 ) ], tau = tau_i / a .. tau_f / (4 a), color = [ blue, red, yellow,
green, black ], linestyle = [ seq( Line( 1 ), x = 1 .. 5 ) ], legend = [ "ξ = -1", "ξ = -0.5",
"ξ = -0.3", "ξ = -0.1", "ξ = 0" ] ); [ blue, red, yellow, green, black ]; seq( x(i), i = 1 .. 5 );
plot( [ seq( Theta( 2, x(x), tau ), x = 5 .. 10 ) ], tau = tau_i / a .. tau_f / (4 a), color = [ black, blue, red, gold,
green, brown ], linestyle = [ seq( Line( 1 ), x = 1 .. 5 ) ], legend = [ "ξ = 0", "ξ = 0.1Y",
"ξ = 0.3Y", "ξ = 0.5Y", "ξ = 0.8 Y", "ξ = Y" ] ); [ black, blue, red, yellow, green, brown ];
seq( x(i), i = 5 .. 10 )
      a := 5
      tau_i := 0
      tau_f := 40

```



[blue, red, yellow, green, black]
-1, -0.5, -0.3, -0.1, 0



[black, blue, red, yellow, green, brown]
0, 0.2, 0.6, 1.0, 1.6, 2

Nomenclature

i	L'index de couche ($i = 1,2$)
T_i	Température de la couche i (K)
T_{amb}	Température ambiante (K)
T_{0i}	Température initiale de la couche i (K)
θ_{0i}	Différence initiale de température (K)
θ_i	Différence de température (K)
a_i	Épaisseur de la couche i (m)
k_i	Conductivité ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
α_i	Diffusivité ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
Cp_i	Chaleur spécifique ($\text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)
ρ_i	Masse volumique (Kg.m^{-3})
h_i	Coefficient de convection ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$)
$\omega = \sqrt{\alpha_1/\alpha_2}$	Diffusivité adimensionnelle
$\kappa = k_2/k_1$	Conductivité adimensionnelle
$\gamma = a_2/a_1$	Épaisseur adimensionnel
$Biot_i = h_i a_1/k_1$	Nombres de Biot
β	Valeur propre adimensionnelle
$\tau = \alpha_1 t/a_1^2$	Temps adimensionnel
$\xi = x/a_1$	Position adimensionnelle
F	Température initiale adimensionnelle
Θ_i	Température adimensionnelle

Références

- [1] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000.
- [2] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, 2nd ed., Oxford University Press, 1959.
- [3] L. M. Jiji, *Non-linear conduction problems*. Ch. 7 in: *Heat conduction*, 3rd ed., pp. 215-235. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [4] S. Filipov and I. Faragó, *Implicit Euler time discretization and FDM with Newton method in non-linear heat transfer modeling*. International Scientific Journal, Mathematical Modeling, Vol. 2 pp. 94-98, 2018.
- [5] D. Singh, B. N. Tiwari and N. Yadav, *Fractional Order Heat Equation in Higher Space-Time Dimensions*, [arXiv:1704.04101 v1](https://arxiv.org/abs/1704.04101), [physicsgen-ph], 2017.
- [6] F. De Monte, *An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp. 1333-1343, 2002.
- [7] F. De Monte, *Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 46, pp. 1455-1469, 2003.
- [8] A. Haji-Sheikh and E. M. Sparrow, *The Floating Random Walk and Its Application to Monte Carlo Solutions of Heat Equations*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 14, No. 2, pp. 370-389, 1966.
- [9] Z. S. Deng and J. Liu, *Monte Carlo method to solve multidimensional bio-heat transfer problem*, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, Vol. 42, pp. 543-567, 2002.

- [10] Y. Chihab, M. Garoum, and N. Laaroussi, *Energy Performance of Earthen Walls In A Hot Climate of Morocco*. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering, Vol.8 pp. 2395-2404, 2019.
- [11] S. Subrina, D. Kotchetkov and A. A. Balandin, *Graphene Heat Spreaders for Thermal Management of Nanoelectronic Circuits*, [arXiv:0910.1883v1](https://arxiv.org/abs/0910.1883v1), [cond-mat.mtrl-sci], 2009.
- [12] H. Belghazi, M. ElGanaoui and J. C. Labbe, *Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source*, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 49, Issue 2, pp. 311-318, 2010.
- [13] O. M. Alifanov, *Inverse heat transfer problem*, 1st ed. Springer Verlag 1994.
- [14] M. Cicek and M. I. Ismailov, *Inverse source problem for a time-fractional heat equation with generalized impedance boundary condition*, [arXiv:1607.03311 v2](https://arxiv.org/abs/1607.03311v2), [math.AP].
- [15] F. De Monte, *Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000.
- [16] H. Belghazi, *Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement*, Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2008.
- [17] Toufik Sahabi, Smain Balaska. Analytical one-dimensionless study of unsteady heat transfer in bilayer, and three-layer materials. 2020. (hal-02966165).

Conclusion

Dans ce mémoire, on a vu que le transfert de chaleur entre deux couches, initialement de températures différents peut être décrit par la résolution analytique de l'équation de chaleur basée sur la méthode de séparation de variables. Le système d'équation (équation gouvernante & conditions) nous ramène au calcul par la méthode de Newton et à l'aide de programme Maple des valeurs propres adimensionnels apparent dans les deux parties (temporelle et spatiale) des solutions.

On observe des chutes de températures de la couche chaude pour atteindre l'équilibre instantané puis toutes les températures que ce soit de la couche chaude ou de la couche froide tendent vers la température ambiante. On peut proposer une étude de ces chutes en fonction des conditions initiales mise en jeu. Cela peut être l'objectif d'un futur travail.

ملخص

بعد عرضنا لإمكانية حل بعض المعادلات التفاضلية بعد فصل المتغيرات، بينا في هذه المذكرة كيفية انتقال الحرارة في معدن مكون من طبقتين باردة و ساخنة و ذلك بحل معادلة الحرارة ذات البعد الواحد. حيث تؤول الطريقة إلى إيجاد القيم الذاتية للمعادلة الذاتية. استعملنا طريقة نيوتن وعن طريق برنامج مابل وجدنا في المثال المدروس أن هناك هبوط لحرارة الطبقة الساخنة إلى التوازن غير المستقر ثم بعد زمن يسير تتوازن درجات الحرارة لتصل إلى درجة حرارة الغرفة.

Résumé

Après avoir présenté la possibilité de résoudre certaines équations différentielles après avoir séparé les variables, nous avons montré dans ce mémoire comment la chaleur se transfère dans un matériau bicouche constitué d'une couche froide et une chaude en résolvant l'équation de la chaleur unidimensionnelle. La méthode nous conduit à trouver les valeurs propres d'une équation appelé équation aux valeurs propres. Nous avons utilisé la méthode de Newton implémentée dans le programme Maple, et nous avons constaté dans l'exemple étudié qu'il y a chutes de températures de différents points de la couche chaude jusqu'à l'équilibre instable, puis après quelques instants les températures s'équilibrent pour atteindre la température ambiante.

Abstract

After presenting the possibility of solving some differential equations after separating the variables, we have shown in this thesis how heat is transferred in a bilayer material consisting of a cold and a hot layer by solving the one-dimensional heat equation. The method leads us to find the eigen values of an equation called the eigen value equation. We used Newton's method implemented in the Maple program, and we noted in the example studied that there are temperature drops of different points of the hot layer to the unsteady equilibrium, then after a few moments the temperatures balance to reach ambient temperature.