République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Saida Dr. Moulay Tahar
Faculté de la technologie

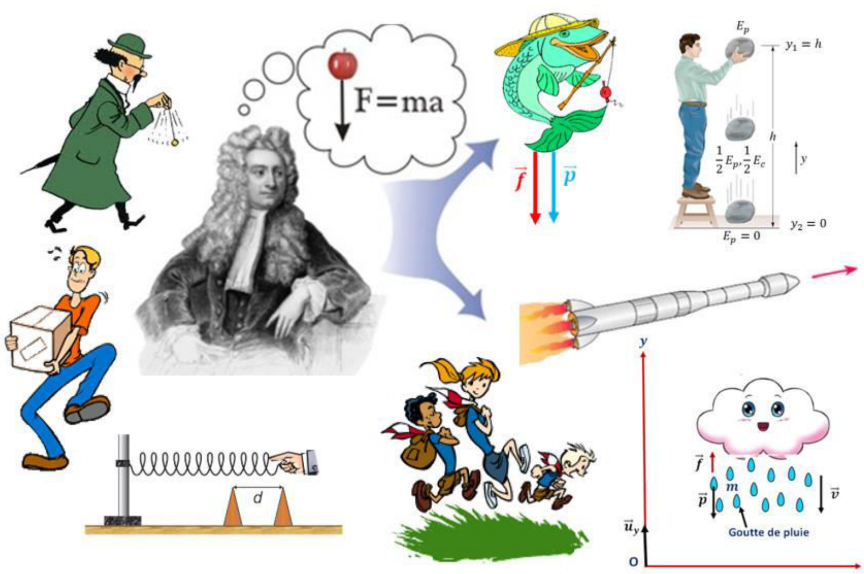
Polycopié

Cinématique et dynamique du point matérielle (Rappels de cours et exercices corrigés)

1[èr] année Tronc Commun

Présenté par :

Dr. BENHALIMA NADIA
DR. HOCINE HAYAT



Ce cours est rédigé à l'intention des étudiants de 1ère Année Licence LMD domaine ST, STI, SM et MI.

Année universitaire 2022-223

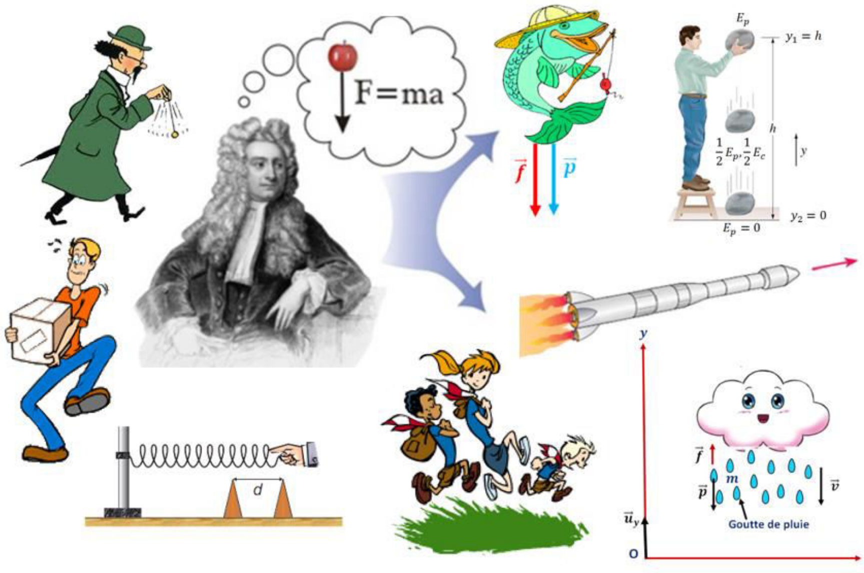
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Saida Dr. Moulay Tahar
Faculté de la technologie

Polycopié

Cinématique et dynamique du point matérielle (Rappels de cours et exercices corrigés)

1èr année Tronc Commun

Présenté par :
Dr. BENHALIMA NADIA
DR. HOCINE HAYAT



Ce cours est rédigé à l'intention des étudiants de 1ère Année Licence LMD domaine ST, STI, SM et MI.

Année universitaire 2022-223

Avant-propos

Le présent travail est un résumé et travaux dirigés corrigés de physique 1 adressé essentiellement aux étudiants de 1ère année Licence, en particuliers, Sciences et Techniques ST, Sciences et Techniques pour l'ingénieur ST-ING, Sciences de la Matière SM et Mathématiques informatique MI. Ce cours facilite aux étudiants la compréhension et l'apprentissage des notions de la mécanique du point matériel.

Ce travail s'articule autour de quatre chapitres :

Rappel Mathématique : Chapitre I est consacré aux notions mathématiques élémentaires nécessaires pour étudier et développer les concepts de la mécanique recommandés par le programme officiel.

Cinématique : Chapitre II est dédié à la cinématique qui s'intéresse à l'étude des mouvements des corps considérés comme points matériels. Les éléments nécessaires pour étudier la nature du mouvement sont définis, à savoir le vecteur position, la trajectoire, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Ces grandeurs sont étudiées par rapport à plusieurs types de repères, dans l'espace et dans le plan.

Dynamique du point : Chapitre III : est traitée, le principe d'inertie et le principe de la conservation de la quantité de mouvement ont été introduits. Les trois lois de Newton, la notion des pseudo-forces ainsi que le théorème du moment cinétique ont été également étudiés. La loi fondamentale de la dynamique est appliquée pour décrire différents états du mouvement.

Travail et Energie : Chapitre VI concerne la notion de travail et d'énergie. Ces deux grandeurs permettent de résoudre des problèmes qui sont difficiles à traiter par la loi de Newton. La relation entre le travail d'une force et l'énergie a été établie. Ces concepts nous conduisent au théorème de l'énergie cinétique et celui de l'énergie mécanique qui constituent une autre approche permettant d'examiner différentes situations dans la pratique.

Sommaire

CHAPITRE : I Rappels mathématiques

CHAPITRE : I Rappels mathématiques

I.1. Vecteurs

Les grandeurs physiques peuvent être de nature scalaire ou vectorielle.

I.1.1.Grandeur scalaire

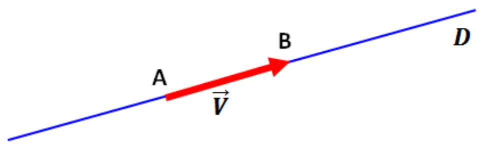
Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

Exemple : le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie…

I.1.2.Grandeur vectorielle

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

Exemple : le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique…



Un vecteur est ainsi caractériser par :

- **A** : Son point d'application, c'est l'origine du vecteur.
- $\vec{V} = |\vec{AB}|$ Le module du vecteur.
- **(D)** : La direction du vecteur.
- Le sens du vecteur est indiqué par la flèche pointant de l'origine (point A) vers l'extrémité (point **B**).

I.1.3.Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire est un vecteur dont le module est égal à 1.

I.2. Produit scalaire

I.2.1.Produit scalaire dans un repère orthonormé du plan

Dans un repère orthonormé du plan, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\binom{u_x}{u_y}$ et $\binom{v_x}{v_y}$, alors le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, noté $\vec{u}\,.\vec{v}$, est donné par la relation :

$$\vec{u}\,.\vec{v} = u_x v_x + u_y\, v_y$$

I.2.2.Propriétés du produit scalaire

Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et soit le réel λ .

- Carré scalaire : $\vec{u}\,.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

- Symétrie : $\vec{u}\,.\vec{v} = \vec{v}\,.\vec{u}$
- Bilinéarité :
  - ❖ Linéarité par rapport à la première variable :
    $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} \;=\; \vec{u}\,.\vec{w} + \vec{v}\,.\vec{w}$ et $(\lambda\vec{u})\,.\vec{v} = \lambda\vec{u}\,.\vec{v}$
  - ❖ Linéarité par rapport à la seconde variable :
    $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{u}\,.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\lambda\vec{v})\,. = \lambda\vec{u}\,.\vec{v}$

I.2.3.Identités remarquables

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

I.2.4.Orthogonalité et produit scalaire nul

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\,.\vec{v} = 0$.

I.2.5.Produit scalaire de vecteurs colinéaires

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et distincts du vecteur nul.

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u}\,.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u}\,.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

I.2.6.Produit scalaire, normes de vecteurs et angle orienté

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\vec{u}\,.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,,\vec{v})$

I.2.7.Vecteurs colinéaires

Dans un repère, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si,

$$u_x v_x - u_y\, v_y = 0$$

I.2.8.Dérivée d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} + v_z(t)\vec{k}$ La dérivée du vecteur $\vec{v}(t)$ dans la base fixe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur $\vec{v}(t)$:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k}$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérés fixe ; c.à.d.

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} + \frac{d\vec{\jmath}}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

Propriétés

- Linéarité : $\frac{d(\alpha\vec{V}_1+\beta\vec{V}_2)}{dt} = \alpha\frac{d\vec{V}_1}{dt} + \beta\frac{d\vec{V}_2}{dt}$
- Dérivée d'un produit scalaire : $\frac{d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt}.\vec{V}_2 + \vec{V}_1.\frac{d\vec{V}_2}{dt}$

I.3.Produit vectoriel

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques. Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est le vecteur noté $\vec{\Pi} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ tel que :

- le vecteur $\vec{\Pi}$ est orthogonal à $\vec{A}$ et orthogonal à $\vec{B}$.
- le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{\Pi})$ est direct
- $\|\vec{\Pi}\| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\| \sin(\vec{A}, \vec{B})$

I.3.1.Propriétés du produit vectoriel

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction ($\theta = 0$) ou l'un des vecteurs est nul.
- Le produit vectoriel est anticommutatif (antisymétrique) : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ \vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ \vec{C} = C_x\vec{\imath} + C_y\vec{\jmath} + C_z\vec{k} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{matrix} +(A_yB_z - A_zB_y).\vec{\imath} \\ +(A_zB_x - A_xB_z).\vec{\jmath} \\ +(A_xB_y - A_yB_x).\vec{k} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_x & & B_x \end{matrix}$$

Où

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{\imath}(A_yB_z - B_yA_z) - \vec{\jmath}(A_xB_z - B_xA_z) + \vec{k}(A_xB_y - B_xA_y)$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{\imath}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$$

I.3.2.Produit mixte

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \bigwedge \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Dérivée d'un produit vectoriel : $\frac{d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$

I.4.Dérivées usuelles

$f(t)$	$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$f(t)$	$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$
A = constante	0		
t^n	$n\, t^{n-1}$	$f^n(t)$	$nf'(t)f^{n-1}(t)$
$cos\, t$	$-\sin t$	$\cos f(t)$	$-f'(t) \sin f(t)$
$sin\, t$	$\cos t$	$\sin f(t)$	$f'(t) \cos f(t)$
$tan\, t$	$\frac{1}{\cos^2 t}$		
$ln\, t$	$\frac{1}{t}$	$ln\, f(t)$	$\frac{f'(t)}{\ln f(t)}$
e^t	e^t		$f'(t)\, e^t$

I.4.1.Propriétés

$$\frac{d}{dt}\big(f(t) + g(t)\big) = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\big(f(t).g(t)\big) = \frac{df(t)}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{\frac{df(t)}{dt}g(t) - \frac{dg(t)}{dt}f(t)}{g^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{f(t)}\right) = -\frac{\frac{df(t)}{dt}}{f^2(t)}$$

I.4.2.Dérivées partielles

Dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables : Soit la fonction $f(x, y, z)$ dépendant de trois variables. La dérivée partielle de $f(x, y, z)$ par rapport à l'une des variables est obtenue en calculant la dérivée en considérant les deux autres variables constantes. Ainsi :

- la dérivée partielle de $f(x, y, z)$ par rapport à x, notée $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ est obtenue en dérivant par rapport à x et en considérant y et z comme des constantes.

- ♣ la dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à y, notée $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$ est obtenue en dérivant par rapport à y et en considérant x et z comme des constantes.
- ♣ la dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à z, notée $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$ est obtenue en dérivant par rapport à z et en considérant x et y comme des constantes.

I.4.3.Dérivées successives

On définit les dérivées partielles d'ordre supérieur par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

I.5.Différentielle totale

- ♣ différentielle du champ scalaire $f(x,y,z)$ est définie par :

$$df = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\,dz$$

- ♣ différentielle d'un champ vectoriel $\vec{V}(x,y,z)$ est défini par :

$$d\vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial \vec{V}(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{V}(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{V}(x,y,z)}{\partial z}\,dz$$

I.5.1.Opérateurs différentiels

Gradient

Soit $f(x,y,z)$ une fonction continue et dérivable. Le vecteur gradient de la fonction scalaire $f(x,y,z)$ est le vecteur noté $\overrightarrow{grad}$ et défini de la façon suivante :

$$\overrightarrow{grad}\, f(x,y,z) \ = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

Il est commode d'introduire l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ (nabla) défini par :

$$\overrightarrow{grad} = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ceci permet d'écrire le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ sous la forme suivante $\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f$

Divergence

L'opérateur nabla définit précédemment permet de définir aussi la divergence d'un vecteur :

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}$$

Ainsi, la divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ est donnée par :

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Rotationnel

Le rotationnel du vecteur $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ est un vecteur définit en utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V}(x, y, z) = \vec{\nabla} \bigwedge \vec{V}(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} \bigwedge \vec{V}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

I.6.Analyse dimensionnelle

I.6.1.Système international d'unités

- Les définitions des unités légales reposent sur le système international (S I).
- Le système international comporte sept unités de base correspondant à une grandeur physique et à une dimension.
- Deux unités peuvent également être considérées comme unités de base : pour l'angle plan : le radian (rad) et pour l'angle solide : le stéradian (sr)

Grandeur fondamentale	Dimension	Unité	Symbole
Longueur	L	mètre	(m)
Masse	M	kilogramme	(kg)
Temps	T	seconde	(s)
Température	θ	kelvin	(K)
Intensité du courant	I	ampère	(A)
Quantité de matière	N	mole	(mol)

Intensité lumineuse	J	candela	(cd)

I.6.2.Équations aux dimensions

En mécanique et en électricité les grandeurs fondamentales sont : Longueur **(L)**, Masse **(M)**, Temps **(T)**, Intensité du courant **(I)**, Température **(θ)**.

On appelle équation aux dimensions, toute équation écrite en remplaçant, dans la formule, chaque grandeur fondamentale par sa dimension. Les équations aux dimensions obéissent aux règles suivantes :

- on n'additionne que les termes ayant la même dimension
- la dimension d'un produit de grandeurs est égale au produit des grandeurs
- la dimension de $\boldsymbol{G^n}$ est la dimension de **G** à la puissance **n**
- les termes $\boldsymbol{e^x}$, $\boldsymbol{log x}$, $\boldsymbol{\sin x}$, $\boldsymbol{\cos x}$, $\boldsymbol{\tan x}$ et $\boldsymbol{\cot x}$ sont sans dimension

Cette équation permet :

- De déterminer l'unité composée d'une grandeur en fonction des grandeurs fondamentales
- De tester si une formule est homogène
- De faire des conversions d'unités

I.6.3.Ecriture d'une équation aux dimensions

Soit **G** une grandeur physique. Sa dimension est notée **[G]**. Par exemple, si **G** est une longueur on écrira : **[G] = L**.

- Pour une vitesse :$[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{L.T^{-1}}$
- Accélération de la pesanteur : $[\boldsymbol{g}] = \boldsymbol{L.T^{-2}}$
- Dimension d'une force :$[\boldsymbol{F}] = \boldsymbol{M.L.T^{-2}}$
- Dimension d'une énergie :$[\boldsymbol{E}] = \boldsymbol{M.L^2.T^{-2}}$
- Pression :$[\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{M.L^{-1}.T^{-2}}$

Toute grandeur dérivée **G** est relié aux grandeurs fondamentales par une équation aux dimensions sous la forme :

$$[\boldsymbol{G}] = \boldsymbol{L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta} \theta^{\varepsilon} N^{\lambda} J^{\mu}}$$

Toutes les grandeurs mécaniques ont une équation aux dimensions sous la forme :

$$[\boldsymbol{G}] = \boldsymbol{L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}}$$

I.7.Incertitude

I.7.1.Calcul d'erreurs

Erreur absolue ΔG : L'erreur absolue commise sur une grandeur physique **G** est la différence entre la valeur mesurée G_m et la valeur exacte G_e **:** $\Delta G = |G_m - G_e|$

Dans la pratique, lorsque la valeur exacte G_e est inaccessible, nous effectuons la moyenne d'une série G_i: $G_e = G_{moy} = \frac{\sum_i^n G_i}{n}$

Calcul de l'erreur composé

On parle d'erreurs composées quand il s'agit d'une grandeur **G** dépendant d'autres grandeurs **x, y, z** c'est-à-dire $G = f(x, y, z)$. L'erreur commis sur cette grandeur, **ΔG**, peut être exprimé en fonction des erreurs absolue $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ en appliquant une des méthodes suivantes :

I.7.2.Méthode de différentielle totale

Afin de calculer l'erreur ΔG :

- Nous prenons la différentielle totale de **G**

$$dG = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| dx + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| dy + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| dz$$

- Nous remplaçons les différentielles dx, dy, dz par les erreurs absolues Δx, Δy, Δz et nous prenons les valeurs absolues des dérivées partielles

$$\Delta G = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z$$

Exemple :

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

$$dE = \left|\frac{\partial E}{\partial m}\right| dm + \left|\frac{\partial E}{\partial v}\right| dv$$

$$dE = \frac{1}{2}v^2 dm + mvdv$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}v^2 \Delta m + mv\Delta v$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}v^2 \Delta m}{E} + \frac{mv\Delta v}{E}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}v^2 \Delta m}{\frac{1}{2}mv^2} + \frac{mv\Delta v}{\frac{1}{2}mv^2}$$

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\Delta v}{v}$$

I.7.3.Méthode logarithmique

Dans certains cas, multiplication ou division, nous pouvons appliquer la méthode logarithmique qui consiste à :

- prendre le logarithme de la grandeur **G**, puis sa différentielle
- de prendre la valeur absolue des expressions obtenues
- et de remplacer les différentielles par les erreurs absolues.

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

$$lnE=ln\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$lnE=ln\frac{1}{2}+lnm+lnv^2$$

$$lnE=ln\frac{1}{2}+lnm+2lnv$$

$$\frac{dE}{E}=0+\frac{dm}{m}+2\frac{dv}{v}$$

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\Delta v}{v}$$

Incertitude absolue δG : l'incertitude absolue δG est la limite supérieure de l'erreur absolue

$$\delta G=max\,(\Delta G)$$

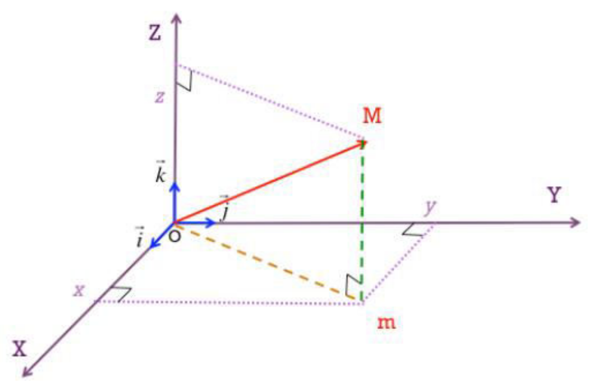
Erreur relative :$\frac{\Delta G}{G_e}$

Incertitude relative :$\frac{\delta G}{G_m}$

I.8.Systèmes de coordonnées

I.8.1.Coordonnées Cartésiennes

C'est un repère d'espace orthonormé, noté **R**, d'origine **O** et de vecteurs de base **($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$)** .



La position du point M est caractérisée par ses coordonnées cartésiennes **x, y, z.** Le vecteur d'équations $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$est définie par :

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes :

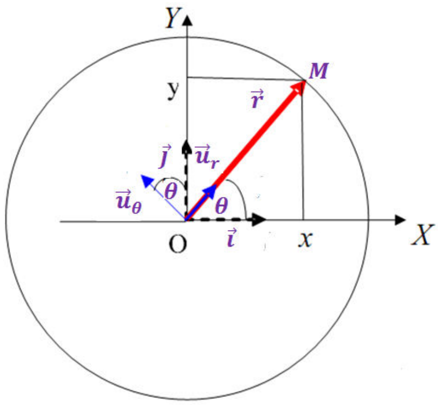
$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

Élément de volume en coordonnées cartésiennes :

$$dV = dx\,dy\,dz$$

I.8.2.Coordonnées Polaires

La position du point matériel **M** est alors définie par la distance **r** du point **M** au point **O** (**r =** $|\overrightarrow{OM}|$) et par l'angle polaire **θ** (angle orienté de rotation). La base des coordonnées polaires est ($\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$)



Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

- $\vec{u}_r$= vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- $\vec{u}_\theta$= vecteur unitaire obtenu à partir de $\vec{u}_r$ par rotation de **+π/2** autour de l'axe **Oz**.

Les coordonnées polaires de **M** sont donc (r, θ) tel que $r\in[0, +\infty]$et $\theta\in[0, 2\pi]$

Lorsque l'on souhaite passer du système de coordonnées polaires au système de coordonnés cartésiennes (ou inversement) il existe des relations simples entre les différentes composantes (coordonnées et vecteur de base) :

- Relations sur les coordonnées : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

- Relations sur les vecteurs : $\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$

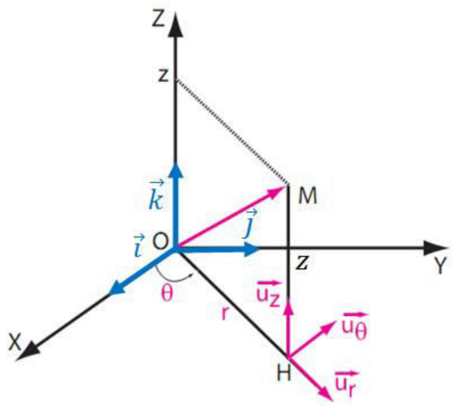
$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dfrac{d(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})}{d\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}_\theta \end{cases} \rightarrow \left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \perp \vec{u}_r\right)$$

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \dfrac{d(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})}{d\theta} = -(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\vec{u}_r \end{cases} \rightarrow \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \perp \vec{u}_\theta\right)$$

I.8.3. Coordonnées Cylindriques

C'est un repère d'espace orthonormé : d'origine **O** et de vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. La position du point **M** est caractérisée par ses coordonnées cylindriques **r, θ** et **z**. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$



❖ $\vec{u}_\theta$ vecteur unitaire obtenu à partir de $\vec{u}_r$ par rotation de **π/2** autour de l'axe **Oz**.

❖ **H** est la projection orthogonale de **M** sur le plan xOy (et **r = OH**).

❖ **θ** est l'angle formé entre $\vec{i}$ et $\vec{u}_r$.

La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est définie par:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Lorsque l'on souhaite passer du système de coordonnées polaires au système de coordonnés cartésiennes (ou inversement) il existe des relations simples entre les différentes composantes (coordonnées et vecteur de base):

- Relations sur les coordonnées : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

- Relations sur les vecteurs : $\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$

I.8.4. Coordonnées Sphériques

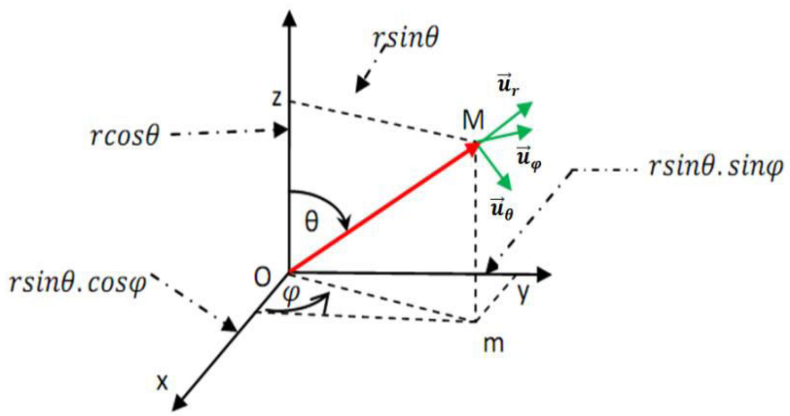
Considéronslerepère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ des coordonnées cartésiennes. On construit la sphère de centre **O** et contenant le point matériel **M** sur sa surface.

On appelle **m** le projeté du point **M**d'étude dans le plan (x, o, y).

On note : $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r > 0$

$\vec{u}_r$: le vecteur unitaire orienté par $\overrightarrow{OM}$

Les vecteurs de base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ forment la base orthonormée du système. Cette base est utilisée dans tous les problèmes présentant une symétrie sphérique.



Tout point **M** de l'espace est repéré par ses trois coordonnées sphériques **r,** θ et φ. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est radial ; il est défini par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

$$\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{mM} = r\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}) \\ \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}|\vec{u}_r = r\vec{u}_r \end{cases}$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est définie par : $|\overrightarrow{OM}| = r$

$$\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\frac{d\,\vec{u}_r}{d\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} = \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi$ base orthonormée directe: $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r$, $\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi$.

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{i}\begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{i}(-\sin\theta^2\sin\varphi - \cos\theta^2\sin\varphi) - \vec{j}(-\sin\theta^2\cos\varphi - \cos\theta^2\cos\varphi)$$

$$+\vec{k}(\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi - \cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi)$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{i}\sin\varphi\,(-\sin\theta^2 - \cos\theta^2) - \vec{j}\cos\varphi\,(-\sin\theta^2 - \cos\theta^2)$$

$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi\,(\sin\theta^2 + \cos\theta^2) + \vec{j}\cos\varphi\,(\sin\theta^2 + \cos\theta^2)$$

$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

Lorsque l'on souhaite passer du système de coordonnées sphériques au système de coordonnés cartésiennes (ou inversement) il existe des relations simples entre les différentes composantes (coordonnées et vecteur de base) :

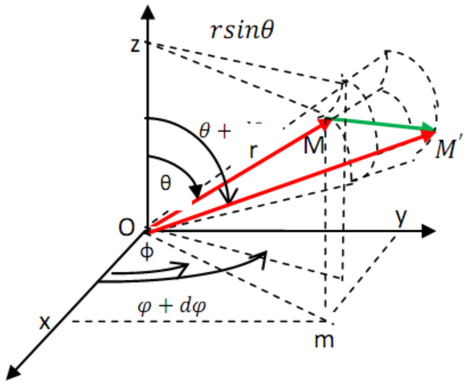
- Relations sur les coordonnées : $\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = r\,cos\theta \end{cases}$
- Relations sur les vecteurs : $\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$

Différentielle d'un vecteur en coordonnées sphériques

M se déplace de :

- dr quand il passe de r à $r + dr$;
- $rd\theta$ quand il passe de θ à $\theta + d\theta$;
- $rsin\theta d\varphi$ quand il passe de φ à $\varphi + d\varphi$

Il est plus facile de déterminer $d\overrightarrow{OM}$ graphiquement :



$$d\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

$d\overrightarrow{OM}$est appelé déplacement élémentaire, noté dl

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \rightarrow dx = sin\theta cos\varphi\ dr + rcos\theta cos\varphi\ d\theta - rsin\theta sin\varphi\ d\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \rightarrow dy = sin\theta sin\varphi\ dr + rcos\theta sin\varphi\ d\theta + rsin\theta cos\varphi\ d\varphi \\ z = r\ cos\theta \rightarrow dz = cos\theta\ dr - r\ sin\theta\ d\theta \end{cases}$$

En remplaçant dans

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$d\overrightarrow{OM} = (sin\theta cos\varphi\ dr + rcos\theta cos\varphi\ d\theta - rsin\theta sin\varphi\ d\varphi)\vec{\imath} + (sin\theta sin\varphi\ dr + rcos\theta sin\varphi\ d\theta + rsin\theta cos\varphi\ d\varphi)\vec{\jmath} + (cos\theta\ dr - r\ sin\theta\ d\theta)\vec{k}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$d\overrightarrow{OM} = sin\theta cos\varphi\ dr\vec{\imath} + rcos\theta cos\varphi\ d\theta\vec{\imath} - rsin\theta sin\varphi\ d\varphi\vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\ dr\vec{\jmath} + rcos\theta sin\varphi\ d\theta\vec{\jmath} + rsin\theta cos\varphi\ d\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\ dr\vec{k} - r\ sin\theta\ d\theta\vec{k}$$

$$d\overrightarrow{OM} = \left(sin\theta cos\varphi\ \vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}\right)dr + \left(rcos\theta cos\varphi\,\vec{\imath} + rcos\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} - r\ sin\theta\,\vec{k}\right)d\theta(-rsin\theta sin\varphi\,\vec{\imath} + rsin\theta cos\varphi\,\vec{\jmath})d\varphi$$

- $d\overrightarrow{OM} = \left(sin\theta cos\varphi\ \vec{\imath} + sin\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos\theta\,\vec{k}\right)dr + \left(cos\theta cos\varphi\,\vec{\imath} + cos\theta sin\varphi\,\vec{\jmath} - r\ sin\theta\,\vec{k}\right)rd\theta + (-sin\varphi\,\vec{\imath} + cos\varphi\,\vec{\jmath})\ rsin\theta d\varphi$

$$\begin{cases} d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + rd\theta\,\vec{u}_\theta + rsin\theta d\varphi\,\vec{u}_\varphi \\ d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \end{cases}$$

I.9.Exercices corrigés

Exercice 1

a/ Calculez les dérivées des fonctions suivantes

1) $f(x) = 2x^2 - 7x + 9$ *2)* $f(y) = 3y^2 - 4y - 5$ *3)* $f(z) = 3 - 4z$

4) $f(t) = \frac{1}{4}t^2 + 4t + 3$ *5)* $f(x) = 5\,e^{2x+2}$ *6)* $f(x) = 3\cos x$

7) $f(x) = 3\sin 2x$ *8)* $f(x) = 3\cos\sin x^2$ *9)* $f(t) = 5\,e^{\cos\omega t}$

10) $f(x) = \ln x$ *11)* $f(x) = 2\ln(x^2 + 5x)$ *12)* $f(x) = \ln\cos x^2$

13) $f(x) = \tan x$

b/ Calculez les dérivées partielles des fonctions suivantes

1) $f(x,y) = x^2\ e^{xy}$ 2) $f(x,y) = \ln\left(x + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right)$

3) $f(x,y) = \sin 2x + \cos 2y$ 4) $f(x,y,z) = x^2 y^2 z^{\frac{1}{2}}$

5) $f(x,y) = \tan(xy) + y$ 6) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+x^2y}$

7) $f(x,y) = e^{x+y} + \ln\frac{x}{y}$

c/ Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ des fonctions suivantes

1) $f(x,y) = x^3 - 5xy + y^2$ 2) $f(x,y) = x^2\ e^{xy}$ 3) $f(x,y) = \sin 2x + \cos 2y$

Exercice 1 Solution

a/

1) $f(x) = 2x^2 - 7x + 9 \rightarrow f'(x) = 4x - 7$

2) $f(y) = 3y^2 - 4y - 5 \rightarrow) f'(y) = 6y - 4$

3) $f(z) = 3 - 4z \rightarrow f'(z) = -4$

4) $f(t) = \frac{1}{4}t^2 + 4t + 3 \rightarrow f'(t) = \frac{1}{2}\ t^2 + 4$

5) $f(x) = 5\,e^{2x+2} \rightarrow f'(x) = 10\,e^{2x+2}$

6) $f(x) = 3\cos x \rightarrow f'(x) = -3\sin x$

7) $f(x) = 3\sin 2x \rightarrow f'(x) = 6\cos 2x$

8) $f(x) = 3\cos\sin x^2 \rightarrow f'(x) = -3(\sin x^2)'\sin\sin x^2 = -3(2x\cos x^2)\sin\sin x^2$

9) $f(t) = 5\,e^{\cos\omega t} \rightarrow f'(x) = 5\,(\cos\omega\,t)' e^{\cos\omega t} = -5\,(\omega\sin\omega\,t)e^{\cos\omega t}$

10) $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

11) $f(x) = 2\ln(x^2 + 5x) \rightarrow f'(x) = 2\frac{2x+5}{x^2+5x}$

12) $f(x) = \ln\cos x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x^2)'}{\cos x^2} = \frac{-2x\sin x^2}{\cos x^2} = -2x\tan x^2$

13) $f(x) = tanx = \frac{\sin x}{\cos x} \to f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x.\cos x-(-\sin x).\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

b/

1) $f(x,y) = x^2\ e^{xy} \to \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xe^{xy} + x^2y\ e^{xy} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2\ x\ e^{xy} \end{cases}$

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

$$df(x,y) = (2xe^{xy} + x^2y\ e^{xy})dx + (x^2\ x\ e^{xy})dy$$

2) $f(x,y) = ln\left(x + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right) \to \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1+\frac{1}{2}(2x)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}}{x+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}(2y)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-1}}{x+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$

3) $f(x,y) = sin2\,x + cos2y \to \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2\cos 2x \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2\sin 2y \end{cases}$

4) $f(x,y,z) = x^2\,y^2\ z^{\frac{1}{2}} \to \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy^2\ z^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 2yz^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = x^2\,y^2 \frac{1}{2}\ z^{\frac{1}{2}-1} \end{cases}$

5) $f(x,y) = tan(xy) + y = \frac{\sin xy}{\cos xy} + y \to \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y\cos xy.\cos xy-(-ysin\,xy)\sin xy}{\cos^2 xy} = \frac{y}{\cos^2 xy} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{\cos^2 xy} + 1 \end{cases}$

6) $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2y} \to \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(1+x^2y)-2xy}{(1+x^2y)^2} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(1+x^2y)-x^2}{(1+x^2y)^2} \end{cases}$

7) $f(x,y) = e^{x+y} + ln\frac{x}{y} \to \begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x+y} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{x+y} - \frac{\frac{x}{y^2}}{\frac{x}{y}} \end{cases}$

c/

1) $f(x,y) = x^3 - 5xy + y^2$

2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(x^3 - 5xy + y^2)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}[3x^2 - 5y] = 6x \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial(x^3 - 5xy + y^2)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}[-5x + 2y] = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial(x^3 - 5xy + y^2)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}[3x^2 - 5y] = -5 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(x^3 - 5xy + y^2)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}[-5x + 2y] = -5 \end{cases}$$

2) $f(x,y) = x^2 \ e^{xy}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(x^2 \ e^{xy})}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}[2xe^{xy} + x^2y \ e^{xy}] = \\ \qquad 2e^{xy} + 2xye^{xy} + 2xy \ e^{xy} + x^2y^2 \ e^{xy} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial(x^2 \ e^{xy})}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}[x^3 \ e^{xy}] = x^4 \ e^{xy} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial(x^2 \ e^{xy})}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}[2xe^{xy} + x^2y \ e^{xy}] = \\ \qquad 2x^2e^{xy} + x^2 \ e^{xy} + x^3y \ e^{xy} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(x^2 \ e^{xy})}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}[x^3 \ e^{xy}] = 3x^2 \ e^{xy} + x^3 \ y \ e^{xy} \end{cases}$$

3) $f(x,y) = sin2\,x + cos2y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(sin2\,x + cos2y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}[2\cos 2x] = -4\sin 2x \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial(sin2\,x + cos2y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}[-2\sin 2y] = -4\cos\ 2y \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial(sin2\,x + cos2y)}{\partial x}\right] = \dfrac{\partial}{\partial y}[2\cos 2x] = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial(sin2\,x + cos2y)}{\partial y}\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}[-2\sin 2y] = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soient les vecteurs $\vec{u} = 2\,\vec{e}_x + \vec{e}_y - 3\vec{e}_z$, $\vec{v} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$ et $\vec{w} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y + 4\vec{e}_z$

1/ Calculer : $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $-3\vec{w}$, $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ et $2\vec{w} - \vec{u} + 3\vec{v}$

2/ Trouver les modules des vecteurs : $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} - \vec{w}$

3/ Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$

4/ Déterminer les angles $(\vec{u}\ ,\vec{v}\ )$, $(\vec{u}\ ,\ \vec{w}\ )$ et $(\ \vec{v}\ ,\ \vec{w}\ )$

5/ calculer le grandeur suivante : $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$

Exercice 2 Solution

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1/ Calculer : $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $-3\vec{w}$, $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ et $2\vec{w} - \vec{u} + 3\vec{v}$

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 3\vec{e}_x - 1\vec{e}_y - 2\vec{e}_z \\ \vec{v} - \vec{w} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y - 3\vec{e}_z \\ -3\vec{w} = 3\vec{e}_x - 3\vec{e}_y - 12\vec{e}_z \\ \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = 1\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + 11\vec{e}_z \\ 2\vec{w} - \vec{u} + 3\vec{v} = 0\vec{e}_x + 7\vec{e}_y + 5\vec{e}_z \end{cases}$$

2/ Trouver les modules des vecteurs : $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{v} - \vec{w}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \\ \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \\ \|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \end{cases}$$

3/ Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$

$$\vec{u}.\vec{v} = 2 - 2 - 3 = -3$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(-8 - 1) - \vec{e}_y(4 + 1) + \vec{e}_z(1 - 2)$$

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = -9\vec{e}_x - 5\vec{e}_y - \vec{e}_z$$

4/ Déterminer les angles ($\vec{u}$, $\vec{v}$), ($\vec{u}$, $\vec{w}$) et ($\vec{v}$, $\vec{w}$)

$\vec{u}\,.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

$$\begin{cases} \vec{u}\,.\vec{v} = -3 \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{14}\ et\ \|\vec{v}\| = \sqrt{6} \end{cases} \rightarrow \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{14} \times \sqrt{6}} = -1{,}96 \rightarrow \alpha =$$

$$\begin{cases} \vec{u}\,.\vec{w} = -13 \\ \|\vec{u}\| = \sqrt{14}\ et\ \|\vec{w}\| = \sqrt{18} \end{cases} \rightarrow \cos\beta = \frac{-13}{\sqrt{14} \times \sqrt{18}} = -14{,}74 \rightarrow \beta =$$

$$\begin{cases} \vec{v}\,.\vec{w} = 1 \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{6}\ et\ \|\vec{w}\| = \sqrt{18} \end{cases} \rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6} \times \sqrt{18}} = 1{,}73 \rightarrow \gamma =$$

5/ calculer le grandeur suivante : $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$ et $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$

$$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (2\,\vec{e}_x + \vec{e}_y - 3\vec{e}_z).(-9\vec{e}_x - 5\vec{e}_y - \vec{e}_z) = -18 - 5 + 3 = -20$$

$$\vec{u}.\left(\vec{v} \bigwedge \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-8 - 1) - (4 + 1) - 3(1 - 2) = -18 - 5 + 3 = 20$$

Exercice 3

Déterminer la valeur du nombre λ pour laquelle les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{e}_x + \lambda\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ et $\vec{v} = 4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ soient perpendiculaires

Exercice 3 Solution

On utilise $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$$\begin{cases} \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow 8 + 2\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 6 \\ \vec{u}.\vec{v} = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Soient les vecteurs :

$\vec{u} = sin2t\,\vec{e}_x + cos2t\,\vec{e}_y + 4t\,\vec{e}_z$ et $\vec{v} = 2e^{2t}\,\vec{e}_x + 2cos3t\,\vec{e}_y + 2sin3t\,\vec{e}_z$

1/ Calculer les dérivées de ces vecteurs par rapport au temps $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$ puis déduire leur modules

2/ Trouver les expressions des grandeurs :

$$\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\cdot\vec{u}),\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\wedge\vec{u})\;et\,\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

Exercice 4 Solution

1/ Calculer les dérivées de ces vecteurs par rapport au temps $\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)$ et $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$ puis déduire leur modules

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(sin2t\,\vec{e}_x + cos2t\,\vec{e}_y + 4t\,\vec{e}_z\right)$$

$$= \left(\frac{dsin2t}{dt}\,\vec{e}_x + sin2t\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right) + \left(\frac{dcos2t}{dt}\,\vec{e}_y + cos2t\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right) + \left(\frac{d4t}{dt}\,\vec{e}_z + 4t\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)$$

Avec

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \frac{d\vec{e}_y}{dt} + \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 2cos2t\,\vec{e}_x - 2sin2t\,\vec{e}_y + 4\,\vec{e}_z$$

$$\left\|\frac{d\vec{u}}{dt}\right\| = \sqrt{(2cos2t)^2 + (-2sin2t)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2e^{2t}\,\vec{e}_x + 2cos3t\,\vec{e}_y + 2sin3t\,\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{d2e^{2t}}{dt}\,\vec{e}_x + \frac{d\,2cos3t}{dt}\,\vec{e}_y + \frac{d2sin3t}{dt}\,\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 4e^{2t}\vec{e}_x - 6sin3t\,\vec{e}_y + 6cos3t\,\vec{e}_z$$

$$\left\|\frac{d\vec{v}}{dt}\right\| = \sqrt{(4e^{2t})^2 + (-6sin3t)^2 + (6cos3t)^2} = \sqrt{16e^{4t} + 36}$$

2/ Trouver les expressions des grandeurs :

$$\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\cdot\vec{u}),\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\cdot\vec{v})\;et\,\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\wedge\vec{u})$$

$$\frac{d}{dt}\,(\vec{v}\cdot\vec{u}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\vec{u} + \vec{v}\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(2e^{2t}\,\vec{e}_x + 2cos3t\,\vec{e}_y + 2sin3t\,\vec{e}_z\right).\vec{u} + \vec{v}.\frac{d}{dt}\left(sin2t\,\vec{e}_x + cos2t\,\vec{e}_y + 4t\,\vec{e}_z\right)$$

$$\frac{d}{dt}\ (\vec{v}\cdot\vec{u}\,) = \left(4e^{2t}\vec{e}_x - 6sin3t\ \vec{e}_y\ + 6cos3t\ \ \vec{e}_z\right).\left(sin2t\ \vec{e}_x\ +\ cos2t\ \vec{e}_y\ +\ 4t\ \vec{e}_z\right)$$
$$+\left(2e^{2t}\ \vec{e}_x\ +\ 2cos3t\ \vec{e}_y\ +\ 2sin3t\ \vec{e}_z\right).\left(2cos2t\ \vec{e}_x - 2sin2t\ \vec{e}_y + 4\ \vec{e}_z\right)$$

$$\frac{d}{dt}\ (\vec{v}\ \cdot\ \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\ \vec{v}\ +\ \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\ \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\ (\vec{v}\wedge\vec{u}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\ \wedge\vec{u} + \vec{v}\wedge\frac{d\vec{u}}{dt}$$

Exercice 5

1/ Soit un vecteur $\vec{r}$ définit par : $\vec{r} = x\ \vec{e}_x\ +\ y\ \vec{e}_y\ +\ z\ \vec{e}_z$

Calculer en fonction de r et $\vec{r}$: $\overrightarrow{grad}\, r, \overrightarrow{grad}\ \frac{1}{r}\ et\ \overrightarrow{grad}\ln r$

2/ Soit un vecteur $\vec{u}$ définit par : $\vec{u} = (2x^2 - yz)\ \vec{e}_x\ +\ (y^2 - 2xz)\ \vec{e}_y\ + x^2z^3\ \vec{e}_z$.Montrer que $div\left[\overrightarrow{rot}(\vec{u})\right] = 0$

Exercice 5 Solution

$$\|\vec{r}\| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

1) $\overrightarrow{grad}\, r\ \ = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{e}_z$

$$\overrightarrow{grad}\, r\ \ = \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial z}\vec{e}_z$$
$$\overrightarrow{grad}\, r\ \ = \left[\frac{1}{2}2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\vec{e}_x + \left[\frac{1}{2}2y\ (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\vec{e}_y$$
$$+\left[\frac{1}{2}\ 2z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\vec{e}_z$$
$$\overrightarrow{grad}\, r\ \ = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\left[x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right]$$
$$\overrightarrow{grad}\, r\ \ = \frac{\left[x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right]}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\vec{r}}{r}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{grad}\, r\ \ = \frac{\vec{r}}{r}}$$

2) $\overrightarrow{grad}\ \frac{1}{r}\ \ = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\vec{e}_z$

$$\overrightarrow{grad}\ \frac{1}{r} = \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z}\vec{e}_z$$
$$\overrightarrow{grad}\ \frac{1}{r}\ \ = \left[-\frac{1}{2}2x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\vec{e}_x + \left[-\frac{1}{2}2y\ (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\vec{e}_y$$
$$+\left[-\frac{1}{2}\ 2z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\vec{e}_z$$
$$\overrightarrow{grad}\ \frac{1}{r}\ \ = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left[x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right]$$
$$\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}\ \ = -\frac{\left[x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right]}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

3) $\overrightarrow{grad}\ \ln r = \frac{\partial \ln r}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \ln r}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \ln r}{\partial z}\vec{e}_z$

$$\ln r = \ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$\overrightarrow{grad}(\ln r) = \frac{\partial \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(\ln r) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\vec{e}_y + \frac{1}{2}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}(\ln r) = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\vec{r}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\overrightarrow{grad}(\ln r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\vec{u} = (2x^2 - yz)\,\vec{e}_x + (y^2 - 2xz)\,\vec{e}_y + x^2z^3\,\vec{e}_z$$

$div\left[\overrightarrow{rot}(\vec{u})\right] = 0$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u}(x,y,z) = \vec{\nabla} \bigwedge \vec{u}(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla} \bigwedge r(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x^2 - yz) & (y^2 - 2xz) & x^2z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}x^2z^3 - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - 2xz)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}x^2z^3 - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2 - yz)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - yz)\right]\vec{k}$$

$$= 2\mathrm{x}\,\vec{i} - [2xz^3 + \mathrm{y}]\vec{j} - z\vec{k}$$

$$div\left[\overrightarrow{rot}(\vec{u})\right] = \frac{\partial 2\mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial[-2xz^3 - \mathrm{y}]}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 2 - 1 - 1 = 0$$

Exercice 6

Soit le vecteur $\vec{r} = \cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y + \mathrm{e}^{-\omega t}\ \vec{e}_z$

Exprimer les vecteurs $\frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ainsi que leurs module au temps $t = 0s$

Exercice 6 Solution

2/

$$\vec{r} = \cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y + e^{-\omega t}\,\vec{e}_z \rightarrow \vec{r} = \begin{cases}\cos\omega t\\ \sin\omega t\\ e^{-\omega t}\end{cases} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases}-\omega\sin\omega t\\ \omega\cos\omega t\\ -\omega e^{-\omega t}\end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega\sin\omega t\,\vec{e}_x + \omega\cos\omega t\,\vec{e}_y - \omega e^{-\omega t}\,\vec{e}_z$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{cases}-\omega^2\cos\omega t\\ -\omega^2\sin\omega t\\ \omega^2 e^{-\omega t}\end{cases}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\cos\omega t\,\vec{e}_x - \omega^2\sin\omega t\,\vec{e}_y + \omega^2 e^{-\omega t}\,\vec{e}_z$$

$$t = 0s \rightarrow \begin{cases}\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases}0\\ \omega\\ -\omega\end{cases}\\[2ex] \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{cases}-\omega^2\\ 0\\ \omega^2\end{cases}\end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 0\,\vec{e}_x + \omega\vec{e}_y - \omega\,\vec{e}_z \rightarrow \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \omega\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + \omega^2\,\vec{e}_z \rightarrow \left\|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right\| = \omega^2\sqrt{2}$$

Exercice 7

Soient le vecteur $\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$

- a) montrer que le vecteur $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire
- b) calculer $\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$
- c) calculer l'angle entre $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$
- b) calculer les produits $(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}_\theta \wedge \vec{k})$

Exercice 7 Solution

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$$

a)

$$\vec{u}_r = \sqrt{(\cos\theta\,)^2 + (\sin\theta\,)^2} = 1$$

$$\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right) = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$$

b)

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y\right)=-\cos\theta\,\vec{e}_x-\sin\theta\,\vec{e}_y=-\vec{u}_r$$

c) $\vec{u}_r.\vec{u}_\theta=\|\vec{u}_r\|\,\|\vec{u}_\theta\|\ \cos\theta=\cos\theta$

$$\vec{u}_r.\vec{u}_\theta=\ \cos\theta\rightarrow\left(\cos\theta\,\vec{e}_x+\sin\theta\,\vec{e}_y\right)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_x+\cos\theta\,\vec{e}_y\right)=0$$

$$\cos\theta=0\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

d)

$$(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta)=\vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta\wedge\vec{k}=\vec{u}_r$$

Exercice 8

Soient les deux vecteurs **:** $\vec{r}_1=3t^2\vec{\imath}+2t^3\vec{\jmath}-t\vec{k}$ *et* **:** $\vec{r}_2=4t\vec{\imath}+t\vec{\jmath}+t\vec{k}$

Calculer :

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}\ \ et\ \ \frac{d(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2)}{dt}$$

Exercice 8 Solution

1 ère méthode (règles de dérivations)

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}.\vec{r}_2+\vec{r}_1.\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\vec{r}_1=3t^2\vec{\imath}+2t^3\vec{\jmath}-t\vec{k}=\begin{pmatrix}3t^2\\2t^3\\-t\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}3t^2\\2t^3\\-t\end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt}=\frac{d\left(3t^2\vec{\imath}+2t^3\vec{\jmath}-t\vec{k}\right)}{dt}=\left(6t\vec{\imath}+6t^2\vec{\jmath}-\vec{k}\right)=\begin{pmatrix}6t\\6t^2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt}=\begin{pmatrix}6t\\6t^2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2=4t\vec{\imath}+t\vec{\jmath}+t\vec{k}=\begin{pmatrix}4t\\t\\t\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2=\begin{pmatrix}4t\\t\\t\end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt}=\frac{d\left(4t\vec{\imath}+t\vec{\jmath}+t\vec{k}\right)}{dt}=\left(4\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\right)=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{r}_1}{dt}=\begin{pmatrix}6t\\6t^2\\-1\end{pmatrix}\\ \vec{r}_2=\begin{pmatrix}4t\\t\\t\end{pmatrix}\\ \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\\ \vec{r}_1=\begin{pmatrix}3t^2\\2t^3\\-t\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}.\vec{r}_2+\vec{r}_1.\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}=\left((6t\times 4t)+(6t^2\times t)+(-1\times t)\right)+\left((3t^2\times 4)+(2t^3\times 1)+(-t\times 1)\right)$$

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}=24t^2+6t^3-t+12t^2+2t^3-t$$

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}=36t^2+8t^3-2t$$

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}=8t^3+36t^2-2t$$

2ème méthode (on calcule le produit scalaire puis on dérive)

$$\vec{r}_1.\vec{r}_2=\left(3t^2\vec{\imath}+2t^3\vec{\jmath}-t\vec{k}\right).\left(4t\vec{\imath}+t\vec{\jmath}+t\vec{k}\right)$$

$$\vec{r}_1.\vec{r}_2=(3t^2\times 4t)+(2t^3\times t)+(-t\times t)$$

$$\vec{r}_1.\vec{r}_2=12t^3+2t^4-t^2$$

$$\frac{d(\vec{r}_1.\vec{r}_2)}{dt}=\frac{d(12t^3+2t^4-t^2)}{dt}=24t^2+8t^3-2t$$

1 ère méthode (règles de dérivations)

$$\frac{d(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2)}{dt}=\frac{d\vec{r}_1}{dt}\wedge\vec{r}_2+\vec{r}_1\wedge\frac{d}{dt}\vec{r}_2=\begin{vmatrix}\vec{e}_x&\vec{e}_y&\vec{e}_z\\6t&6t^2&-1\\\boldsymbol{4t}&\boldsymbol{t}&\boldsymbol{t}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{e}_x&\vec{e}_y&\vec{e}_z\\3t^2&2t^3&-t\\\mathbf{4}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{vmatrix}$$

$$\frac{d(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{dt} = \Big[[(6t^2 \times t) - (t \times (-1))]\vec{e}_x - [(6t \times t) - (4t \times (-1))]\vec{e}_y + [(6t \times t) - (4t \times 6t^2)]\vec{e}_z\Big] + \Big[[(2t^3 \times 1) - (1 \times (-t))]\vec{e}_x - [(3t^2 \times 1) - (4 \times (-t))]\vec{e}_y + [(3t^2 \times 1) - (4 \times 2t^3)]\vec{e}_z\Big]$$

$$\frac{d(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{dt} = \Big[[6t^3 + t]\vec{e}_x - [6t^2 + 4t]\vec{e}_y + [6t^2 - 24t^3]\vec{e}_z\Big] + \Big[[2t^3 + t]\vec{e}_x - [3t^2 + 4t]\vec{e}_y + [3t^2 - 8t^3]\vec{e}_z\Big]$$

$$\frac{d(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{dt} = \Big[[8t^3 + 2t]\vec{e}_x - [9t^2 + 8t]\vec{e}_y + [9t^2 - 32t^3]\vec{e}_z\Big]$$

2ème méthode (on calcule le produit vectoriel puis on dérive)

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3t^2 & 2t^3 & -t \\ 4t & t & t \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \Big[[(2t^3 \times t) - (t \times (-t))]\vec{e}_x - [(3t^2 \times t) - (4t \times (-t))]\vec{e}_y + [(3t^2 \times t) - (4t \times 2t^3)]\vec{e}_z\Big]$$

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = [2t^4 + t^2]\vec{e}_x - [3t^3 + 4t^2]\vec{e}_y + [3t^3 - 8t^4]\vec{e}_z$$

$$\frac{d(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\big([2t^4 + t^2]\vec{e}_x - [3t^3 + 4t^2]\vec{e}_y + [3t^3 - 8t^4]\vec{e}_z\big)}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{dt} = [8t^3 + 2t]\vec{e}_x - [9t^2 + 8t]\vec{e}_y + [9t^2 - 32t^3]\vec{e}_z$$

Exercice 9

Soit le vecteur $\vec{A} = (2xy + z^3)\vec{e}_x + (x^2 + 2y)\vec{e}_y + (3xz^2 - 2)\ \vec{e}_z$

a) Calculer $div.\vec{A}$

b) Montrer que $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$

Exercice 9 Solution

a)

$$\vec{A} = (2xy + z^3)\vec{e}_x + (x^2 + 2y)\vec{e}_y + (3xz^2 - 2)\ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} (2xy + z^3) \\ (x^2 + 2y) \\ (3xz^2 - 2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$div.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right).\Big((2xy + z^3)\vec{e}_x + (x^2 + 2y)\vec{e}_y + (3xz^2 - 2)\ \vec{e}_z\Big)$$

$$div.\vec{A} = \frac{\partial(2xy + z^3)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 + 2y)}{\partial y} + \frac{\partial\,(3xz^2 - 2)}{\partial z}$$

$$div.\vec{A} = 2y + 2 + 6xz$$

$$\vec{e}_i.\vec{e}_j = 1 \rightarrow i = j$$
$$\vec{e}_i.\vec{e}_j = 0 \rightarrow i \neq j$$

b)

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}(x,y,z) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2xy + z^3) & (x^2 + 2y) & (3xz^2 - 2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x,y,z) &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - 2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + 2y)\right]\vec{e}_x \\ &- \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - 2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy + z^3)\right]\vec{e}_y \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy + z^3)\right]\vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x,y,z) = [0 - (O)]\vec{e}_x - [(3z^2) - (3z^2)]\vec{e}_y + [(2x) - (2x)]\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x,y,z) = 0\ \vec{e}_x - 0\ \vec{e}_y + 0\ \vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x,y,z) = \vec{0}$$

Exercice 10

Soit

$$\begin{cases} \vec{r} = \ cos\,(bt)\,\vec{i}\ +\ sin\,(bt)\,\vec{j}\ +\ t^2\,\vec{k} \rightarrow \text{une fonction vectorielle} \\ \lambda(t) = e^{-at} \rightarrow \text{une fonction scalaire} \end{cases}$$

où a et b sont des constantes

Calculer : $\|\vec{r}\|$, $\frac{d\vec{r}}{dt}$, $\frac{d\lambda}{dt}$, $\lambda\vec{r}$, $\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt}$

Exercice 10 Solution

1/

$$\vec{r} = \ cos\,(bt)\,\vec{i}\ +\ sin\,(bt)\,\vec{j}\ +\ t^2\,\vec{k}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{\cos^2(bt) + \sin^2(bt) + (t^2)^2}$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{1 + t^4}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos(bt)\,\vec{\imath} + \sin(bt)\,\vec{\jmath} + t^2\,\vec{k}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -b\sin(bt)\vec{\imath} + b\cos(bt)\vec{\jmath} + 2t\,\vec{k}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(e^{-at})}{dt} = -ae^{-at}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -ae^{-at}$$

$$\lambda\vec{r} = e^{-at}\left(\cos(bt)\,\vec{\imath} + \sin(bt)\,\vec{\jmath} + t^2\,\vec{k}\right)$$

$$\lambda\vec{r} = e^{-at}\cos(bt)\,\vec{\imath} + e^{-at}\sin(bt)\,\vec{\jmath} + e^{-at}\,t^2\,\vec{k}$$

$$\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} = \frac{d(\lambda)}{dt}\vec{r} + \lambda\frac{d(\vec{r})}{dt} = \frac{d(e^{-at})}{dt}\left(\cos(bt)\,\vec{\imath} + \sin(bt)\,\vec{\jmath} + t^2\,\vec{k}\right) + e^{-at}\frac{d}{dt}\left(\cos(bt)\,\vec{\imath} + \sin(bt)\,\vec{\jmath} + t^2\,\vec{k}\right)$$

$$\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} = -ae^{-at}\left(\cos(bt)\,\vec{\imath} + \sin(bt)\,\vec{\jmath} + t^2\,\vec{k}\right) + e^{-at}\left(-b\sin(bt)\vec{\imath} + b\cos(bt)\vec{\jmath} + 2t\,\vec{k}\right)$$

$$\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} = e^{-at}\left(-a\cos(bt)\,\vec{\imath} + -a\sin(bt)\,\vec{\jmath} + -a\,t^2\,\vec{k}\right) + e^{-at}\left(-b\sin(bt)\vec{\imath} + b\cos(bt)\vec{\jmath} + 2t\,\vec{k}\right)$$

$$\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} = e^{-at}\left[\left(\left(-a\cos(bt) - b\sin(bt)\right)\vec{\imath} + \left(-a\sin(bt) + b\cos(bt)\right)\vec{\jmath} + (-a\,t^2 + 2t)\,\vec{k}\right)\right]$$

Exercice 11

Établir les équations aux dimensions en fonction des grandeurs masse, longueur, temps, etc. :

1/ Surface, volume, fréquence, vitesse, accélération, force, pression, énergie mécanique, énergie cinétique et énergie potentiel.

2/ De la constante de Boltzmann k qui apparaît dans l'expression de l'énergie cinétique d'une molécule d'un gaz monoatomique à la température T ; à savoir :

$$Ec = \frac{3}{2}k_B T$$

3/de la constante de gravitation universelle **G**.

4/ des deux paramètres $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ qui apparaissent dans la loi : $\boldsymbol{F = \alpha\, m\, v + \beta\, v^2}$ où F est une force qui s'exprime en (N), m en (kg), v en (m/s).

Exercice 11 Solution

Surface

$$\begin{cases} S = l\ x\ l = l^2 \\ \text{Unité : m}^2 \end{cases} \rightarrow [S] = [l]^2 = L^2$$

Volume

$$\begin{cases} V = S\ l = l^3 \\ \text{Unité : m}^3 \end{cases} \rightarrow [V] = [l]^3 = L^3$$

Fréquence

$$\begin{cases} f = \dfrac{1}{t} \\ \text{Unité : Htz} \end{cases} \rightarrow [f] = \frac{[1]}{[t]} = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

Vitesse

$$\begin{cases} v = \dfrac{dx}{dt} = \\ \text{Unité : } \dfrac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \rightarrow [v] = \frac{[dx]}{[dt]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

Accélération

$$\begin{cases} a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dv}{dt} \\ \text{Unité : } \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases} \rightarrow [a] = \frac{[dv]}{[dt]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-1}T^{-1} = LT^{-2}$$

Force

$$\begin{cases} F = m\ g \\ \text{Unité : Newton (N)} \end{cases} \rightarrow [F] = [m]\,[g] = MLT^{-2}$$

Pression

$$\begin{cases} p = \dfrac{f}{S} \\ \text{Unité : Pascal (Pa)} \end{cases} \rightarrow [P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$$

Energie mécanique (Travail)

$$\begin{cases} W = F\ l \\ \text{Unité: Joule (J)} \end{cases} \rightarrow [W] = [F]\,[l] = MLT^{-2}\,L = ML^2T^{-2}$$

Energie cinétique

$$\begin{cases} Ec = \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{Unité: Joule (J)} \end{cases} \rightarrow [Ec] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 = M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}$$

Energie potentiel

$$\begin{cases} Ep = mgh \\ \text{Unité: Joule (J)} \end{cases} \rightarrow [Ep] = [m][g][h] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$$

$$Ec = \frac{3}{2}k_BT \rightarrow k_B = \frac{Ec}{\frac{3}{2}T} \rightarrow [k_B] = \frac{[Ec]}{\left[\frac{3}{2}\right][T]} = \frac{ML^2T^{-2}}{\theta} = ML^2T^{-2}\theta^{-1}$$

3/ de la constante de gravitation universelle **G**.

$$F = G\frac{mM}{r^2} \rightarrow G = \frac{F\,r^2}{m\,M} \rightarrow [G] = \frac{[F][r]^2}{[m][M]} = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

4/ des deux paramètres **α** et **β** qui apparaissent dans la loi : $F = \alpha\, m\, v + \beta\, v^2$ où F est une force qui s'exprime en (N), m en (kg), v en (m/s).

$$F = \alpha\, m\, v + \beta\, v^2 \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{F}{m\,v} \rightarrow [\alpha] = \frac{[F]}{[m]\,[v]} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-1}} = T^{-1} \\ \beta = \frac{F}{v^2} \rightarrow [\beta] = \frac{[F]}{[v]^2} = \frac{MLT^{-2}}{(LT^{-1})^2} = ML^{-1} \end{cases}$$

Exercice 12

1/ Écrire l'équation aux dimensions de la pression (P), la fréquence (ν) , la masse volumique (ρ) , l'énergie (E)et la force (F)

2/ Supposons que l'on prenne pour grandeurs fondamentales la pression la masse volumique et la fréquence. Quelles sont alors les dimensions de l'énergie $(E = kP^x\rho^y\nu^z)$ et la force $(F = kP^x\rho^y\nu^z)$ dans la nouvelle base.

Ou : **k** constante sans dimension

Exercice 12 Solution

1 /

- Pression

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[m][g]}{[S]} = \frac{M\,LT^{-2}}{L^2} = M\,LT^{-2}L^{-2} \rightarrow [P] = ML^{-1}T^{-2}$$

- Fréquence

$$[\nu] = \frac{[1]}{[t]} = \frac{1}{T} \rightarrow [\nu] = T^{-1}$$

- Masse volumique

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = ML^{-3}$$

- Energie

$$E = mgh \rightarrow [E] = [m][g][h]$$

$$\begin{cases} [m] = M \\ [g] = \dfrac{[v]}{[t]} = \dfrac{\frac{[x]}{[t]}}{[t]} = \dfrac{\frac{L}{T}}{T} = LT^{-2} \\ [h] = L \end{cases}$$

$$[E] = MLT^{-2}\,L$$

$$[E] = ML^2T^{-2}$$

- Force

$$[F] = [m][g] \rightarrow [F] = M\,LT^{-2}$$

2/

$$[E] = [k][P]^x[\rho]^y[\nu]^z \rightarrow ML^2T^{-2} = (ML^{-1}T^{-2})^x(ML^{-3})^y(T^{-1})^z$$

$$ML^2T^{-2} = M^xL^{-x}T^{-2x}M^yL^{-3y}T^{-z}$$

$$M^1L^2T^{-2} = M^{x+y}L^{-x-3y}T^{-2x-z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \\ -x - 3y = 2 \rightarrow -x - 3(1-x) = 2 \rightarrow -x - 3 + 3x = 2 \rightarrow 2x = 5 \\ -2x - z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{5}{2} \\ z = -3 \end{cases}$$

$$E = k\,P^{\frac{5}{2}x}\rho^{-\frac{3}{2}}\,\nu^{-3}$$

$$[F] = [k][P]^x[\rho]^y[\nu]^z \rightarrow M\,LT^{-2} = (ML^{-1}T^{-2})^x(ML^{-3})^y(T^{-1})^z$$

$$M\,LT^{-2} = M^xL^{-x}T^{-2x}M^yL^{-3y}T^{-z}$$

$$M^1\,L^1T^{-2} = M^{(x+y)}L^{(-x-3y)}\,T^{-2x-z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x \\ -x - 3y = 1 \rightarrow -x - 3(1-x) = 1 \rightarrow -x - 3 + 3x = 1 \rightarrow 2x = 4 \\ -2x - z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$[F] = [k][P]^x[\rho]^y[v]^z$$

$$F = kP^2\rho^{-1}v^{-2}$$

Exercice 13

1/ La formule de Stokes $F = 6\pi R\eta v$ donne la force résistante qui s'exerce sur une sphère de rayon R , de vitesse v , dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η . Déterminer l'équation aux dimensions du coefficient η .

2/ La fréquence de vibration d'une goutte d'eau va dépendre de plusieurs paramètres :

$$f = kR^x\rho^yA^z$$

Où R : désigne le rayon, ρ : la masse volumique , $A = \frac{F}{l}$ (la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur), k : une constante sans dimension.

Exercice 13 Solution

1/

$$F = 6\pi R\eta v$$

$$\eta = \frac{F}{6\pi Rv}$$

$$[\eta] = \frac{[F]}{[6][\pi][R][v]}$$

$$[\eta] = \frac{MLT^{-2}}{1\,.\,1L\;LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

2/

$$A = \frac{F}{l} \rightarrow [A] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

$$f = kR^x\rho^yA^z$$

$$[f] = [k][R]^x[\rho]^y[A]^z$$

$$T^{-1} = 1\,L^x(ML^{-3})^y.(MT^{-2})^z$$

$$T^{-1} = L^x.M^y.L^{-3y}.M^z.T^{-2z}$$

$$T^{-1} = L^{(x-3y)}.M^{(y+z)}.T^{-2z}$$

$$L^0M^0T^{-1} = L^{(x-3y)}.M^{(y+z)}.T^{-2z}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \rightarrow x = 3y \rightarrow x = -\dfrac{3}{2} \\ y + z = 0 \rightarrow y = -z \rightarrow y = -\dfrac{1}{2} \\ -2z = -1 \rightarrow z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$f = kR^{-\frac{3}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

$$f = k\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}\frac{A^{\frac{1}{2}}}{\rho^{-\frac{1}{2}}}$$

$$f = k\frac{1}{RR^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{A}{\rho}}$$

$$f = k\frac{1}{R}\sqrt{\frac{A}{R\,\rho}}$$

Exercice 14

On admet que la vitesse de propagation des ondes sonores dans un gaz est de la forme suivante $v = k\,P^x\rho^y$ (k est une constantes sans dimensions, P est une pression et ρ est la masse volumique du gaz)

- a) écrire l'équation de dimension de P et donner son unité dans le SI
- b) Montrer que P est aussi une énergie par unité de volume
- c) déterminer les exposantes **x** et **y**.

Exercice 14 Solution

a) $P = \frac{F}{S} \rightarrow [P] = \left[\frac{F}{S}\right] \rightarrow [P] = \left[\frac{m\,g}{S}\right]$

$$[P] = \frac{[m][g]}{[S]} \rightarrow [P] = \frac{[m]\left[\frac{l}{t^2}\right]}{[S]} = \frac{[m]}{[S]}\frac{[l]}{[t^2]} = \frac{ML}{L^2T^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[P] = ML^{-1}T^{-2} \rightarrow unit\acute{e}\ \ de\ P : (kg.m^{-1}.s^{-2})$$

b)

$$P = \frac{E}{V} \rightarrow [P] = \left[\frac{E}{V}\right] \rightarrow [P] = \left[\frac{\frac{1}{2}\, m\, g\, h}{V}\right] \rightarrow [P] = \frac{\left[\frac{1}{2}\right][m][g][h]}{[V]}$$

$$[P] = \frac{1\; MLT^{-2}L}{L^3} = ML^{-1}T^{-2}$$

c)

$$[v] = [k]\; [P]^x[\rho]^y$$

$$[v] = [k]\; \left[\frac{F}{S}\right]^x \left[\frac{m}{V}\right]^y$$

$$[v] = [k]\; \left[\frac{m\; g}{S}\right]^x \left[\frac{m}{V}\right]^y \rightarrow [v] = [k]\; \left[\frac{m}{S}\,\frac{l}{t^2}\right]^x \left[\frac{m}{V}\right]^y$$

$$[v] = 1\; \frac{M^x\; L^x}{L^{2x}T^{2x}}\; \frac{M^y}{L^{3y}} \rightarrow M^x\; L^x L^{-2x}T^{-2x}M^y L^{-y}$$

$$[v] = M^{x+y}\; L^{-(x+3y)}\; T^{-2x} \rightarrow \left[\frac{l}{t}\right] = M^{x+y}\; L^{-(x+3y)}\; T^{-2x}$$

$$\frac{L}{T} = M^{x+y}\; L^{-(x+3y)}\; T^{-2x}$$

$$LT^{-1} = M^{x+y}\; L^{-(x+3y)}\; T^{-2x}$$

$$\begin{cases} L = L^{-(x+3y)} \\ M^0 = M^{x+y} \\ T^{-1} = T^{-2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = -x - 3y \\ 0 = x + y \\ -1 = -2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{1}{2} - 3\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y = -x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$v = k\; P^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}} \rightarrow v = k\sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

Exercice 15

1/ Vérifier que les diverses expressions de l'énergie ont toutes pour dimension :

$$[E] = ML^2T^{-2}$$

Energie potentielle, l'énergie cinétique, l'énergie mécanique.

2/ La masse volumique (**ρ**) d'un cylindre de masse (**m**), de rayon (**R**) et de longueur (**l**) est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi\; l^y R^2}$$

En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes x et y.

3/ supposons que l'on prenne pour grandeurs fondamentales la pression **P**, la masse volumique ρ et la fréquence ν.

Quelles sont alors les dimensions de l'énergie **E**.

Exercice 15 Solution

1/

Energie potentielle :

$$E = mgh \rightarrow [E] = [m][g][h]$$

$$\begin{cases} [m] = M \\ [g] = \dfrac{[v]}{[t]} = \dfrac{\frac{[x]}{[t]}}{[t]} = \dfrac{\frac{L}{T}}{T} = LT^{-2} \\ [h] = L \end{cases}$$

$$[E] = MLT^{-2}\,L$$

$$[E] = ML^2T^{-2}$$

Energie cinétique :

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 \rightarrow [E] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2$$

$$[E] = 1\,M\,(LT^{-1})^2$$

$$[E] = \ M\,L^2T^{-2}$$

Energie mécanique (Travail)

$$W = F\,l \rightarrow [W] = [F][\,l]$$

$$[F] = [m][g] \rightarrow [F] = M\,LT^{-2}$$

$$[W] = M\,LT^{-2}\,L$$

$$[W] = ML^2T^{-2}$$

2/

$$\rho = \frac{m^x}{\pi\,l^yR^2} \rightarrow [\rho] = \frac{[m]^x}{[\pi][l]^y[R]^2}$$

$$\begin{cases} [\rho] = \dfrac{[m]}{[V]} = ML^{-3} \\ [\pi] = 1 \\ [l] = L \\ [R] = L \\ [m] = M \end{cases} \rightarrow ML^{-3} = \frac{(M)^x}{1\ (L)^y(L)^2} \rightarrow ML^{-3} = M^x(L^{-1})^yL^{-2}$$

$$M^1L^{-3} = M^xL^{-y-2}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ -y-2 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{m}{\pi\,lR^2}$$

3/

$$E = k\,P^x \rho^y\, \nu^z$$

$$[E] = [P]^x[\rho]^y[\nu]^z$$

$$\begin{cases} [P] = \dfrac{[F]}{[S]} = \dfrac{M\,LT^{-2}}{L^2} = M\,LT^{-2}L^{-2} \to [P] = ML^{-1}T^{-2} \\ [\rho] = \dfrac{[m]}{[V]} = ML^{-3} \\ [\nu] = \dfrac{[1]}{[t]} = \dfrac{1}{T} \to [\nu] = T^{-1} \end{cases}$$

$$[E] = [k][P]^x[\rho]^y[\nu]^z \to ML^2T^{-2} = (ML^{-1}T^{-2})^x(ML^{-3})^y(T^{-1})^z$$

$$ML^2T^{-2} = M^xL^{-x}T^{-2x}M^yL^{-3y}T^{-z}$$

$$M^1L^2T^{-2} = M^{x+y}L^{-x-3y}T^{-2x-z}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \to y = 1 - x \\ -x - 3y = 2 \to -x - 3(1 - x) = 2 \to -x - 3 + 3x = 2 \to 2x = 5 \\ -2x - z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{5}{2} \\ z = -3 \end{cases}$$

$$E = k\,P^{\frac{5}{2}x}\rho^{-\frac{3}{2}}\,\nu^{-3}$$

Exercice 16

La vitesse moyenne d'un gaz s'écrit sous la forme suivante

$$v = \sqrt{\frac{8.K_B.T}{\pi.m}}$$

(**m**) la masse de la molécule, (**T**) la température de gaz exprime en kelvin.

a. Trouver la dimension de la constant de Boltzmann(K_B).

b. La vitesse moyenne peut également s'écrite en fonction de la masse (**m**), le volume (**V**) et la pression (**P**) du gaz ($v = k\,P^x m^y V^z$). Trouver cette relation.

Exercice 16 Solution

a.

$$v = \sqrt{\frac{8.K_B.T}{\pi.m}} \to v^2 = \left(\sqrt{\frac{8.K_B.T}{\pi.m}}\right)^2$$

$$v^2 = \frac{8.K_B.T}{\pi.m} \rightarrow K_B = \frac{\pi.m.v^2}{8T}$$

$$[K_B] = \frac{[\pi].[m].[v]^2}{[8][T]}$$

$$[K_B] = \frac{1\ M(LT^{-1})^2}{1\ \theta} = ML^2T^{-2}\theta^{-1}$$

$$v = \frac{x}{t} \rightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} = LT^{-1}$$

b.

$$v = k\ P^x m^y V^z$$

$$[v] = [k\ ][P]^x[m]^y[V]^z$$

$$P = \frac{F}{S} \rightarrow [P] = \left[\frac{F}{S}\right] \rightarrow [P] = \left[\frac{mg}{S}\right]$$

$$[P] = \frac{[m][g]}{[S]} \rightarrow [P] = \frac{[m]\left[\frac{l}{t^2}\right]}{[S]} = \frac{[m]}{[S]}\frac{[l]}{[t^2]} = \frac{ML}{L^2T^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[P] = ML^{-1}T^{-2}$$

$$V = x\ y\ z\ \rightarrow [V] = [x][y][z] = L.L.L = L^3$$

$$[v] = 1\ (ML^{-1}T^{-2})^x(M)^y(L^3)^z$$

$$[v] = M^xL^{-x}T^{-2x}M^yL^{3z}$$

$$[v] = M^{x+y}L^{-x+3z}T^{-2x}$$

$$M^0L^1T^{-1} = M^{x+y}L^{-x+z}T^{-2x}$$

$$\begin{cases} M^0 = M^{x+y} \\ L^1 = L^{-x+3z} \\ T^{-1} = T^{-2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 3z = 1 \\ -2x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = \dfrac{1+x}{3} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$v = k\ P^{\frac{1}{2}}m^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$$

$$v = k\sqrt{\frac{PV}{m}}$$

Exercice 17

Le rayon r de la trajectoire d'un mobile de masse m et soumise à une force centrale $F = \frac{km}{r}$, s'exprime en coordonnées polaires (r, θ) par :

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + A\cos(\theta - \alpha)$$

- a) quelle sont les dimensions de **k** et **c** ?
- b) quelle est l'unité de **A** dans le système SI ?

Exercice 17 Solution

1/

$$F = \frac{km}{r}$$

$$F = \frac{km}{r} = k = \frac{F\,r}{m}$$

$$[k] = \frac{[F]\,[r]}{[m]} = \frac{MLT^{-2}\,L}{M} = L^2T^{-2} = (LT^{-1})^2 = (v)^2$$

$$\begin{cases} F = mg \rightarrow [F] = [m][g] \rightarrow [F] = MLT^{-2} \\ g = \frac{v}{t} = \frac{1}{t}\frac{x}{t} = \frac{x}{t^2} \rightarrow [g] = \frac{[x]}{[t]^2} = LT^{-2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + A\cos(\theta - \alpha) \rightarrow \left[\frac{1}{r}\right] = \left[\frac{k}{c^2}\right] + [A\cos(\theta - \alpha)]$$

$$\frac{1}{[r]} = \frac{[k]}{[c]^2} + [A][\cos(\theta - \alpha)] \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{[r]} = \frac{[k]}{[c]^2} \rightarrow \frac{[k]}{[c]^2} = [c]^2 = [k].[r] \\ \frac{1}{[r]} = [A] \rightarrow [A] = L^{-1} \rightarrow A = (m^{-1}) \\ [\cos(\theta - \alpha)] = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [c] = [k]^{\frac{1}{2}}.[r]^{\frac{1}{2}} \rightarrow [c] = L^{\left(\frac{2}{2}\right)}T^{\left(-\frac{2}{2}\right)}L^{\left(\frac{1}{2}\right)} = L^{\left(\frac{3}{2}\right)}T^{-1} \\ [A] = L^{-1} \rightarrow A = (m^{-1}) \end{cases}$$

Exercice 18

La fréquence de vibration d'une étoile va dépendre de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir : r le rayon de l'étoile, ρ la masse volumique de l'étoile et G la constante de gravitation universelle et k est une constante sans dimension. Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, ρ et g :

$$f \;=\; k^2\, r^a\, \rho^{\,b}\, G^c$$

Exercice 18 Solution

$$[f] = \;[k]^2\,[r]^a\,[\rho]^{\,b}\,[G]^c$$

$$\begin{cases} [\boldsymbol{f}] = \boldsymbol{T^{-1}} \\ [\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{L} \\ [\boldsymbol{\rho}] = \dfrac{[\boldsymbol{m}]}{[\boldsymbol{V}]} = \boldsymbol{ML^{-3}} \\ [\boldsymbol{G}] = \boldsymbol{M^{-1}L^{3}T^{-2}} \end{cases} \rightarrow [\boldsymbol{f}] = [\boldsymbol{r}]^{a}\,[\boldsymbol{\rho}]^{b}\,[\boldsymbol{g}]^{c} = \boldsymbol{T^{-1}} = \boldsymbol{L^{a}}\,(\boldsymbol{ML^{-3}})^{b}\,(\boldsymbol{M^{-1}L^{3}T^{-2}})^{c}$$

$$\boldsymbol{L^{0}M^{0}T^{-1}} = \boldsymbol{L^{a-3b+3c}\,M^{b-c}\,T^{-2c}} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{L^{0}} = \boldsymbol{L^{a-3b+3c}} \\ \boldsymbol{M^{0}} = \boldsymbol{M^{b-c}} \\ \boldsymbol{T^{-1}} = \boldsymbol{T^{-2c}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{0 = a - 3b + 3c} \\ \boldsymbol{0 = b - c} \\ \boldsymbol{-1 = -2c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \boldsymbol{b = \dfrac{1}{2}} \\ \boldsymbol{c = \dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

Exercice 19

Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement !?

1/ $x = v_0 t^2$, $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ et $x = v_0 t + 2at^2$ Tels que : x désigne la distance parcourue, a l'accélération et t le temps.

2/ $E = m\,c^2$, $E = m^2 c$ et $E = \frac{3}{2} m\,c^2$

3/ L'équation d'un gaz parfait s'écrit $RT = \left(P + \frac{a}{V_0}\right)(V_0 - b)$, avec p la pression du gaz, V_0 le volume molaire et T la température Déterminer les dimensions des constantes physiques R,b, a .

Exercice 19 Solution

$$[x] = [v_0][t]^2 \rightarrow L = LT^{-1}T^2 \rightarrow L = LT \rightarrow est\ fausse$$

$$[x] = [v_0][t] + \left[\frac{1}{2}\right][a][t]^2 \rightarrow L = LT^{-1}T + LT^{-2}T^2 \rightarrow L = L + L \rightarrow est\ homogène$$

$$[x] = [v_0][t] + [2][a][t]^2 \rightarrow L = LT^{-1}T + LT^{-2}T^2 \rightarrow L = L + L$$

$$\rightarrow est\ homogène\ bien\ que\ fausse$$

$$[E] = [m]\,[c]^2 \rightarrow ML^2T^{-2} = M(LT^{-1})^2 \rightarrow est\ homogène$$

$$[E] = [m]^2[c] \rightarrow ML^2T^{-2} = M^2LT^{-1} \rightarrow est\ fausse$$

$$[E] = \left[\frac{3}{2}\right][m]\,[c]^2 \rightarrow ML^2T^{-2} = M^2LT^{-1} \rightarrow est\ homogène\ bien\ que\ fausse$$

3/ $RT = \left(P + \frac{a}{V_0}\right)(V_0 - b)$

$$\begin{cases} \frac{a}{V_0} = P \rightarrow a = V_0P \rightarrow [a] = [V_0][P] = L^3ML^{-1}T^{-2} = ML^2T^{-2} \\ b = V \rightarrow [b] = [V] = L^3 \\ R\,T = PV \rightarrow R\ = \frac{PV}{T} \rightarrow [R]\ = \frac{[P][V]}{[T]} = \frac{ML^{-1}T^{-2}L^3}{\theta} = ML^2T^{-2}\theta^{-1} \end{cases}$$

Exercice 20

1/ Donner la dimension de P dans l'expression de la célérité du son dans l'air :

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{\rho}}}$$

où $(\boldsymbol{P})$: pression de l'air et $(\boldsymbol{\rho})$: masse volumique de l'air

2/ Taylor a supposé que le rayon du nuage est de la forme suivante :

$\boldsymbol{R = E^x\, t^y \rho^z}$ ($\boldsymbol{E}$: Energie, $\boldsymbol{t}$: temps et $\boldsymbol{\rho}$: masse volumique).

Déterminer les exposants x, **y** et **z**.

Exercice 20 Solution

$$\boldsymbol{v^2 = \frac{P}{\rho}}$$

$$\boldsymbol{P = v^2\rho}$$

$$\boldsymbol{[P] = [v]^2[\rho]}$$

$$\boldsymbol{[P] = (LT^{-1})^2(ML^{-3})}$$

$$\boldsymbol{[P] = L^2T^{-2}ML^{-3}}$$

$$\boldsymbol{[P] = ML^{-1}T^{-2}}$$

4/ Exposants x, **y** et **z**.

$$\boldsymbol{R = E^x\, t^y \rho^z}$$

$$\boldsymbol{L = (ML^2T^{-2})^x\, T^y (ML^{-3})^z}$$

$$\boldsymbol{L = M^xL^{2x}T^{-2x}\, T^yM^zL^{-3z}}$$

$$\boldsymbol{M^0L^1T^0 = M^{(x+z)}L^{(2x-3z)}T^{(-2x+y)}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 = x + z} \\ \boldsymbol{1 = 2x - 3z} \\ \boldsymbol{0 = -2x + y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -z \\ 1 = 2(-z) - 3z \rightarrow z = -\dfrac{1}{5} \\ 0 = -2(-z) + y \rightarrow y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$R = E^{\frac{1}{5}}\, t^{\frac{2}{5}} \rho^{-\frac{1}{5}}$$

Exercice 21

3/ L'énergie mécanique d'un satellite de masse **m** en orbite autour d'une planète de masse **M** à la distance **r** peut s'écrire :

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - G\frac{mM}{r}$$

Donner les dimensions des constantes **C** (constante des aires) et **G** (constante de gravitation universelle) ainsi que leurs unités dans le système international.

4/ On admet que la formule de la poussée d'Archimède est de la forme suivante : $F = V^x \rho^y g^z$ (V le volume du corps immergé, ρ la masse volumique du fluide et g l'accélération de la pesanteur)

Déterminer les exposantes x, **y** et **z**.

Exercice 21 Solution

1/

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{2} m\, v^2 \\ E = \dfrac{mC^2}{2r^2} \\ E = -G\dfrac{mM}{r} \end{cases}$$

$$E = \frac{mC^2}{2r^2} \rightarrow C^2 = \frac{2r^2 E}{m}$$

$$C^2 = \frac{2r^2 E}{m}$$

$$[C]^2 = \frac{[2][r]^2[E]}{[m]} = \frac{L^2\, M\, L^2 T^{-2}}{M} = L^4 T^{-2}$$

$$[C]^2 = L^4 T^{-2}$$

$$[C] = (L^4T^{-2})^{\frac{1}{2}} = L^2T^{-1}$$

$$[C] = L^2T^{-1}$$

$$C = m^2s^{-1}$$

$$E = -G\frac{mM}{r} \to G = \frac{rE}{mM}$$

$$[G] = \frac{[r][E]}{[m][M]} = \frac{L\,M\,L^2T^{-2}}{M.M} = \frac{L^3T^{-2}}{M} = L^3T^{-2}M^{-1}$$

$$[G] = L^3T^{-2}M^{-1}$$

$$G = m^3s^{-2}kg^{-1}$$

2/

$$F = V^x\,\rho^y g^z$$

Volume : $[V] = L^3$

Masse volumique : $[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = ML^{-3}$

Accélération de la pesanteur $g = \frac{v}{t} = \frac{x}{t^2} \to [g] = \frac{[x]}{[t]^2} = LT^{-2}$

Force : $[F] = M\,LT^{-2}$

$$M\,LT^{-2} = (L^3)^x\,(ML^{-3})^y(LT^{-2})^z$$

$$M\,LT^{-2} = L^{3x}\,M^yL^{-3y}L^zT^{-2z}$$

$$M^1\,L^1T^{-2} = L^{3x-3y+z}\,M^y\,T^{-2z}$$

$$\begin{cases} 1 = y \\ 1 = 3x - 3y + z \\ -2 = -2z \end{cases} \to \begin{cases} 1 = y \\ 1 = 3x - 3(1) + (1) \to x = 1 \\ 1 = z \end{cases}$$

$$F = V^x\,\rho^y g^z$$

$$F = V^1\,\rho^1 g^1$$

$$F = V\rho\,g$$

Exercice 22

3/ on recherche à déterminer l'accélération de la pesanteur (g) à partir d'un pendule simple, en utilisant la relation de la période (T) donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ou L est la longueur de pendule. Calculer la valeur de g et donner l'incertitude Δg en utilisant

- la méthode de la différentielle totale
- la méthode logarithmique

Exercice 22 Solution

- la méthode de la différence totale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T^2 = [2\pi]^2\ \frac{L}{g}$$

$$g = [2\pi]^2\ \frac{L}{T^2} \rightarrow dg = \frac{\partial g}{\partial L}dL + \frac{\partial g}{\partial T}dT$$

$$dg = \frac{\partial\left([2\pi]^2\ \frac{L}{T^2}\right)}{\partial L}dL + \frac{\partial\left(g[2\pi]^2\ \frac{L}{T^2}\right)}{\partial T}dT$$

$$dg = \frac{[2\pi]^2}{T^2}\ dL - \frac{[2\pi]^2 L2}{T^3}dT$$

$$dg = \left|\frac{[2\pi]^2}{T^2}\right|\ dL + \left|-\frac{[2\pi]^2 L2}{T^3}\right|dT$$

$$\Delta g = \frac{[2\pi]^2}{T^2}\ \Delta L + \frac{[2\pi]^2 L2}{T^3}\Delta T$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{[2\pi]^2}{T^2}\frac{1}{g}\ \Delta L + \frac{[2\pi]^2 L2}{T^3}\frac{1}{g}\Delta T \rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{[2\pi]^2}{T^2}\frac{T^2}{[2\pi]^2 L}\ \Delta L + \frac{[2\pi]^2 L2}{T^3}\frac{T^2}{[2\pi]^2 L}\Delta T$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

$$\Delta g = g\left(\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}\right)$$

- la méthode logarithmique

$$g = [2\pi]^2\ \frac{L}{T^2} \rightarrow \ln g = \ln\left([2\pi]^2\ \frac{L}{T^2}\right)$$

$$\ln g = \ln[2\pi]^2 + \ln\ \frac{L}{T^2}$$

$$\ln g = \ln[2\pi]^2 + \ln L - \ln T^2 \rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{d[2\pi]^2}{[2\pi]^2} + \frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\frac{dg}{g} = 0 + \frac{dL}{L} + |-2|\frac{dT}{T}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

$$\Delta g = g.\left(\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}\right)$$

Exercice 23

Trouver l'incertitude relatives de la grandeur G définie par :

$$G = \frac{xy}{x+z}$$

En utilisant :

- la méthode de la différentielle totale.
- la méthode logarithmique

Exercice 23 Solution

$$G = \frac{xy}{x+z}$$

- Méthode de la différentielle totale.

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz$$

$$dG = \frac{\partial\left(\frac{xy}{x+z}\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(\frac{xy}{x+z}\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial\left(\frac{xy}{x+z}\right)}{\partial z}dz$$

$$dG = \left[\frac{y(x+z)-xy}{(x+z)^2}\right]dx + \frac{x(x+z)}{(x+z)}dy - \frac{xy}{(x+z)^2}dz$$

$$dG = \left[\frac{y\,z}{(x+z)^2}\right]dx + \frac{x}{(x+z)}dy + \frac{xy}{(x+z)^2}dz$$

$$\Delta G = \left[\frac{y\,z}{(x+z)^2}\right]\Delta x + \frac{x}{(x+z)}\Delta y + \frac{xy}{(x+z)^2}\Delta z$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left[\frac{y\,z}{(x+z)^2}\right]\frac{1}{\frac{xy}{(x+z)}}\Delta x + \frac{x}{(x+z)}\frac{1}{\frac{xy}{(x+z)}}\Delta y + \frac{xy}{(x+z)^2}\frac{1}{\frac{xy}{(x+z)}}\Delta z$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \left[\frac{y\,z}{(x+z)^2}\right]\frac{(x+z)}{xy}\Delta x + \frac{x}{(x+z)}\frac{(x+z)}{xy}\Delta y + \frac{xy}{(x+z)^2}\frac{(x+z)}{xy}\Delta z$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{\Delta z}{z}$$

- la méthode logarithmique

$$G = \frac{xy}{x+z}$$

$$\ln G = \ln\left(\frac{xy}{x+z}\right)$$

$$\ln G = \ln(xy) - \ln(x+z)$$

$$\ln G = \ln x + \ln y - \ln(x+z)$$

$$\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} - \frac{d(x+z)}{(x+z)}$$

$$\frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{G}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{y}} - \frac{dx}{(x+z)} - \frac{dz}{(x+z)}$$

$$\frac{dG}{G}=\left[\frac{x}{x}-\frac{x}{(x+z)}\right]\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}-\frac{dz}{(x+z)}$$

$$\frac{dG}{G}=\left[\frac{xx+xz-xx}{x(x+z)}\right]\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}-\frac{dz}{(x+z)}$$

$$\frac{dG}{G}=\left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}-\left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{dz}{z}$$

$$\frac{dG}{G}=\left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{dz}{z}$$

$$\frac{\Delta G}{G}=\left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\left[\frac{z}{(x+z)}\right]\frac{\Delta z}{z}$$

Exercice 24

Un objet placé à une distance p d'une lentille, voit son image formée à une distance q de celle-ci. La distance focale de la lentille est alors donner par la relation :

$$f=\frac{p.q}{p+q}$$

Déterminer l'incertitude absolue de la distance focale (Δf) en fonction de p, q, Δp et Δq par deux méthodes (la méthode de la différentielle totale et la méthode du logarithme)

Exercice 24 Solution

Méthode du logarithme

$$f=\frac{p.q}{p+q}$$

$$\ln f=\ln\left(\frac{p.q}{p+q}\right)$$

$$\ln f=\ln(p.q)-\ln(p+q)$$

$$\ln f=\ln p+\ln q-\ln(p+q)$$

$$\frac{df}{f}=\frac{dp}{p}+\frac{dq}{q}-\frac{d(p+q)}{p+q}$$

$$\frac{df}{f}=\frac{dp}{p}+\frac{dq}{q}-\frac{dp}{p+q}-\frac{dq}{p+q}$$

$$\frac{df}{f}=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+q}\right)dp+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p+q}\right)dq$$

$$\frac{df}{f}=\left(\frac{p+q-p}{p(p+q)}\right)dp+\left(\frac{p+q-q}{q(p+q)}\right)dq$$

$$\frac{df}{f}=\left(\frac{q}{(p+q)}\right)\frac{dp}{p}+\left(\frac{p}{(p+q)}\right)\frac{dq}{q}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left(\frac{q}{(p+q)}\right)\frac{\Delta p}{p} + \left(\frac{p}{(p+q)}\right)\frac{\Delta q}{q}$$

$$\Delta f = f\left(\frac{q}{(p+q)}\right)\frac{\Delta p}{p} + \left(\frac{p}{(p+q)}\right)\frac{\Delta q}{q}$$

Méthode de la différentielle totale

$$f = \frac{p.q}{p+q}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial p}\,dp + \frac{\partial f}{\partial q}\,dq$$

$$df = \frac{\partial\left(\frac{p.q}{p+q}\right)}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\left(\frac{p.q}{p+q}\right)}{\partial q}\,dq$$

$$df = \left[\frac{q(p+q)-(p.q)}{(p+q)^2}\right]dp + \left[\frac{p(p+q)-(p.q)}{(p+q)^2}\right]dq$$

$$df = \left[\frac{q.p+q^2-p.q}{(p+q)^2}\right]dp + \left[\frac{p^2+p.q-p.q}{(p+q)^2}\right]dq$$

$$df = \left[\frac{q^2}{(p+q)^2}\right]dp + \left[\frac{p^2}{(p+q)^2}\right]dq$$

$$\frac{df}{f} = \frac{\left[\frac{q^2}{(p+q)^2}\right]}{f}\,dp + \frac{\left[\frac{p^2}{(p+q)^2}\right]}{f}\,dq$$

$$\frac{df}{f} = \frac{\left[\frac{q^2}{(p+q)^2}\right]}{\frac{p.q}{(p+q)}}\,dp + \frac{\left[\frac{p^2}{(p+q)^2}\right]}{\frac{p.q}{(p+q)}}\,dq$$

$$\frac{df}{f} = \left[\frac{q^2}{(p+q)^2}\right]\left[\frac{(p+q)}{p.q}\right]dp + \left[\frac{p^2}{(p+q)^2}\right]\left[\frac{(p+q)}{p.q}\right]dq$$

$$\frac{df}{f} = \left[\frac{q}{(p+q)}\right]\frac{dp}{p} + \left[\frac{p}{(p+q)}\right]\frac{dq}{q}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left[\frac{q}{(p+q)}\right]\frac{\Delta p}{p} + \left[\frac{p}{(p+q)}\right]\frac{\Delta q}{q}$$

$$\Delta f = f\left[\frac{q}{(p+q)}\right]\frac{\Delta p}{p} + \left[\frac{p}{(p+q)}\right]\frac{\Delta q}{q}$$

Exercice 25

La constante de torsion C d'un fil métallique de section circulaire s'exprime, en fonction de sa longueur L et de son diamètre D, par la relation : $C = \gamma\frac{D^4}{L}$

où γ est le module de torsion caractéristique de la nature de fil.

Donner l'incertitude ΔC en utilisant

- a) la méthode de la différentielle totale
- b) la méthode logarithmique

Exercice 25 Solution

a) Méthode de différentielle totale

$$C = \gamma \frac{D^4}{L}$$

$$dC = \frac{\partial C}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial C}{\partial d} dD + \frac{\partial C}{\partial L} dL$$

$$dC = \frac{\partial\left(\gamma \frac{D^4}{L}\right)}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial\left(\gamma \frac{D^4}{L}\right)}{\partial d} dD + \frac{\partial\left(\gamma \frac{D^4}{L}\right)}{\partial L} dL$$

$$dC = \frac{D^4}{L} d\gamma + 4\gamma \frac{D^3}{L} dD - \gamma \frac{D^4}{L^2} dL$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{D^4}{L}\frac{1}{C} d\gamma + 4\gamma \frac{D^3}{L}\frac{1}{C} dD - \gamma \frac{D^4}{L^2}\frac{1}{C} dL$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{D^4}{L}\frac{1}{\gamma \frac{D^4}{L}} d\gamma + 4\gamma \frac{D^3}{L}\frac{1}{\gamma \frac{D^4}{L}} dD - \gamma \frac{D^4}{L^2}\frac{1}{\gamma \frac{D^4}{L}} dL$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{D^4}{L}\frac{L}{\gamma D^4} d\gamma + 4\gamma \frac{D^3}{L}\frac{L}{\gamma D^4} dD - \gamma \frac{D^4}{L^2}\frac{L}{\gamma D^4} dL$$

$$\frac{dC}{C} = \frac{d\gamma}{\gamma} + 4\frac{dD}{D} - \frac{dL}{L}$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} + 4\frac{\Delta D}{D} - \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} + 4\frac{\Delta D}{D} + \left|-\frac{\Delta L}{L}\right|$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} + 4\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta L}{L}$$

b) Méthode logarithmique

$$C = \gamma \frac{D^4}{L} \rightarrow \ln C = \ln \gamma \frac{D^4}{L}$$

$$\ln C = \ln \gamma \frac{D^4}{L} \rightarrow \ln C = \ln \gamma + \ln \frac{D^4}{L}$$

$$\ln C = \ln \gamma + \ln D^4 - \ln L$$

$$\ln C = \ln\gamma + 4\ln D - \ln L$$

$$\frac{\mathrm{d}\,C}{C} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\gamma} + 4\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{D}} - \frac{dL}{L}$$

$$\frac{\Delta\,C}{C} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} + 4\frac{\Delta D}{\mathrm{D}} - \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{\Delta\,C}{C} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} + 4\frac{\Delta D}{\mathrm{D}} + \left|-\frac{\Delta L}{L}\right|$$

$$\frac{\Delta\,C}{C} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} + 4\frac{\Delta D}{\mathrm{D}} + \frac{\Delta L}{L}$$

Exercice 26

À l'altitude **z** au-dessus de la surface de la Terre, le champ de pesanteur est égal à :

$$g = G\frac{M}{(R+z)^2}$$

où **M** est la masse de la Terre, **R** son rayon et **G** la constante de gravitation universelle.

Donner l'incertitude $\frac{\Delta g}{g}$ en utilisant

a) la méthode de la différentielle totale

b) la méthode logarithmique

Exercice 26 Solution

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial G}\right)_{M,R,z} dG + \left(\frac{\partial g}{\partial M}\right)_{G,R,z} dM + \left(\frac{\partial g}{\partial R}\right)_{G,M,z} dR + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{G,M,R} dz$$

$$dg = \left(\frac{\partial G\frac{M}{(R+z)^2}}{\partial G}\right)_{M,R,z} dG + \left(\frac{\partial G\frac{M}{(R+z)^2}}{\partial M}\right)_{G,R,z} dM + \left(\frac{\partial G\frac{M}{(R+z)^2}}{\partial R}\right)_{G,M,z} dR + \left(\frac{\partial G\frac{M}{(R+z)^2}}{\partial z}\right)_{G,M,R} dz$$

$$dg = \frac{M}{(R+z)^2}dG + G\frac{1}{(R+z)^2}dM - \frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}dR - \frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}dz$$

$$dg = \frac{M}{(R+z)^2}dG + G\frac{1}{(R+z)^2}dM - \frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}dR - \frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}dz$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{\frac{M}{(R+z)^2}}{G\frac{M}{(R+z)^2}}dG + \frac{\frac{G}{(R+z)^2}}{G\frac{M}{(R+z)^2}}dM - \frac{\frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}}{G\frac{M}{(R+z)^2}}dR - \frac{\frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}}{G\frac{M}{(R+z)^2}}dz$$

$$\frac{dg}{g}=\frac{M}{(R+z)^2}\frac{(R+z)^2}{GM}dG+\frac{G}{(R+z)^2}\frac{(R+z)^2}{GM}dM-\frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}\frac{(R+z)^2}{GM}dR$$
$$-\frac{GM2(R+z)}{(R+z)^4}\frac{(R+z)^2}{GM}dz$$

$$\frac{dg}{g}=\frac{dG}{G}+\frac{dM}{M}-\frac{2}{R+z}dR-\frac{2}{R+z}dz$$

$$\frac{dg}{g}=\left|\frac{dG}{G}\right|+\left|\frac{dM}{M}\right|+\left|-2\frac{dR}{(R+z)}\right|+\left|-2\frac{dz}{(R+z)}\right|$$

$$\frac{dg}{g}=\frac{dG}{G}+\frac{dM}{M}+2\frac{dR}{(R+z)}+2\frac{dz}{(R+z)}$$

$$\frac{\Delta g}{g}=\frac{\Delta G}{G}+\frac{\Delta M}{M}+2\frac{\Delta R}{(R+z)}+2\frac{\Delta z}{(R+z)}$$

Méthode logarithmique

$$g=G\frac{M}{(R+z)^2}$$

$$ln\ g=ln\left(G\frac{M}{(R+z)^2}\right)$$

$$ln\ g=ln\ G+ln\ \frac{M}{(R+z)^2}$$

$$ln\ g=ln\ G+ln\ M-ln\ (R+z)^2$$

$$ln\ g=ln\ G+ln\ M-2\ ln\ (R+z)$$

$$\frac{dg}{g}=\frac{dG}{G}+\frac{dM}{M}-2\frac{d\,(R+z)}{(R+z)}$$

$$\frac{dg}{g}=\frac{dG}{G}+\frac{dM}{M}-2\frac{(dR+dz)}{(R+z)}$$

$$\frac{dg}{g}=\frac{dG}{G}+\frac{dM}{M}-2\frac{dR}{(R+z)}-2\frac{dz}{(R+z)}$$

$$\frac{dg}{g}=\left|\frac{dG}{G}\right|+\left|\frac{dM}{M}\right|+\left|-2\frac{dR}{(R+z)}\right|+\left|-2\frac{dz}{(R+z)}\right|$$

$$\frac{dg}{g}=\frac{dG}{G}+\frac{dM}{M}+2\frac{dR}{(R+z)}+2\frac{dz}{(R+z)}$$

$$\frac{\Delta g}{g}=\frac{\Delta G}{G}+\frac{\Delta M}{M}+2\frac{\Delta R}{(R+z)}+2\frac{\Delta z}{(R+z)}$$

Exercice 27

L'indice de réfraction n d'une substance, déterminé à l'aide du réfractomètre, est donné par la relation : $n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}$ ou N étant l'indice du prisme de forme rectangulaire du réfractomètre et α l'angle d'émergence.

1/ Calculer l'incertitude absolue Δn , en supposant que n ne dépend que N et α .

2/ Calculer l'incertitude relative $\frac{\Delta n}{n}$

AN : $N = 1{,}626 \pm 0.001$ et $\alpha = 60° \pm 0.001'$

Exercice 27 Solution

1/ $\Delta \boldsymbol{n}$

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} = (N^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

$$dn = \left(\frac{\partial n}{\partial N}\right) dN + \left(\frac{\partial n}{\partial \alpha}\right) d\alpha$$

$$dn = \left(\frac{1}{2}.2N.(N^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}\right) dN - \left(\frac{1}{2}.2\cos\alpha.\sin\alpha.(N^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}\right) d\alpha$$

$$\Delta n = \left(\frac{1}{2}.2N.(N^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}\right) \Delta N - \left(\frac{1}{2}.2\cos\alpha.\sin\alpha.(N^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}\right) \Delta\alpha$$

$$\Delta n = \left|\frac{1}{2}.2N.(N^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}\right| \Delta N + \left|-\left(\frac{1}{2}.2\cos\alpha.\sin\alpha.(N^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}\right)\right| \Delta\alpha$$

$$\Delta n = (N.\Delta N + \cos\alpha.\sin\alpha\,\Delta\alpha)(N^2 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta n = \frac{N.\Delta N + \cos\alpha.\sin\alpha\,\Delta\alpha}{(N^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

2/ $\frac{\Delta \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{(N^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}} . \frac{N.\Delta N + \cos\alpha.\sin\alpha\,\Delta\alpha}{(N^2 - \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{N.\Delta N + \cos\alpha.\sin\alpha\,\Delta\alpha}{(N^2 - \sin^2 \alpha)}$$

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{(1{,}626)^2 - 0.75} = 1.89$$

$$\begin{cases} 1°(degree) \rightarrow 60'\ (minute) \\ \quad x \rightarrow 0.001' \end{cases} \rightarrow x = \frac{0.001'.1°}{60'} = 1.67°.10^{-5}$$

$$\begin{cases} 360° \rightarrow 2\pi\, rad \\ 1.67°.10^{-5} \rightarrow y \end{cases} \rightarrow y = \frac{1.67°.10^{-5}.2\pi\, rad}{360°} = 3.10^{-7}\, rad$$

$$\frac{\Delta n}{n}=\frac{(1,626).(0.001)+(0.5)\,(0.87)(3.10^{-7})}{\left((1,626)^2-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{0,002}{1.89}=0.001\rightarrow\Delta n$$

$$=(0.001).(1.89)$$

$$\Delta n\cong 0.002$$

Exercice 28

En dynamique des fluides la vitesse d'un fluide est donnée par la relation suivante :

$$v=\sqrt{2gh\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}}$$

Avec g accélération de la pesanteur, ρ_2 *et* ρ_1 sont des masses volumiques et h une hauteur.

Démontrer que l'incertitude relative sur v est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta g}{g}+\frac{\Delta h}{h}+\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\frac{\Delta\rho_2}{\rho_2}+\left|-\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\right|\frac{\Delta\rho_1}{\rho_1}\right]$$

Exercice 28 Solution

$$v=\sqrt{2gh\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}}$$

$$v=\left(2gh\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln v=\ln\left(2gh\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln v=\frac{1}{2}\ln\left(2gh\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}\right)$$

$$\ln v=\frac{1}{2}\left[\ln 2gh+\ln\left(\frac{(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1}\right)\right]$$

$$\ln v=\frac{1}{2}[\ln 2gh+\ln(\rho_2-\rho_1)-\ln\rho_1]$$

$$\ln v=\frac{1}{2}[\ln 2+\ln g+\ln h+\ln(\rho_2-\rho_1)-\ln\rho_1]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{d2}{2}+\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{d(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_2-\rho_1)}-\frac{d\rho_1}{\rho_1}\right]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[0+\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{d\rho_2-d\rho_1}{(\rho_2-\rho_1)}-\frac{d\rho_1}{\rho_1}\right]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{\rho_1(d\rho_2-d\rho_1)-(\rho_2-\rho_1)d\rho_1}{(\rho_2-\rho_1)\rho_1}\right]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{\rho_1 d\rho_2-\rho_1 d\rho_1-\rho_2 d\rho_1+\rho_1 d\rho_1}{\rho_1(\rho_2-\rho_1)}\right]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{\rho_1 d\rho_2-\rho_2 d\rho_1}{\rho_1(\rho_2-\rho_1)}\right]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{\rho_1 d\rho_2}{\rho_1(\rho_2-\rho_1)}-\frac{\rho_2 d\rho_1}{\rho_1(\rho_2-\rho_1)}\right]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{\rho_2}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}-\frac{\rho_2 d\rho_1}{\rho_1(\rho_2-\rho_1)}\right]$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{dg}{g}+\frac{dh}{h}+\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\frac{d\rho_2}{\rho_2}-\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\frac{d\rho_1}{\rho_1}\right]$$

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta g}{g}+\frac{\Delta h}{h}+\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\frac{\Delta\rho_2}{\rho_2}-\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\frac{\Delta\rho_1}{\rho_1}\right]$$

$$\frac{\Delta v}{v}=\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta g}{g}+\frac{\Delta h}{h}+\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\frac{\Delta\rho_2}{\rho_2}+\left|-\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)}\right|\frac{\Delta\rho_1}{\rho_1}\right]$$

Exercice 29

La résistivité électrique (ρ) d'un fil électrique de cuivre de diamètre (D) , de longueur (L) et de résistance (R) est donnée par la formule :

$$\rho=\frac{\pi.R.D^2}{4.L}$$

Calculer l'incertitude $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ en utilisant :

- a) la méthode de la différentielle totale
- b) la méthode logarithmique

Exercice 29 Solution

Incertitude relative $\frac{\Delta\rho}{\rho}$: méthode logarithmique

$$ln\,\rho=ln\left(\frac{\pi.R.D^2}{4.L}\right)$$

$$ln\,\rho=ln\,(\pi.R.D^2)-\,ln\,(4.L)$$

$$ln\,\rho=ln\,\pi+ln\,R+ln\,D^2-\,ln\;4-ln\,L$$

$$ln\,\rho=ln\,\pi+ln\,R+2\,ln\,D-\,ln\;4-ln\,L$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dR}{R}+2\,\frac{dD}{D}-\frac{dL}{L}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dR}{R}+2\,\frac{dD}{D}+\frac{dL}{L}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta R}{R}+2\,\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta L}{L}$$

$$\rho=\frac{\pi.R.D^2}{4.L}$$

Incertitude relative $\frac{\Delta\rho}{\rho}$: méthode de la différentielle totale

$$d\rho=\left(\frac{\partial\rho}{\partial R}\right)_{D,L}dR+\left(\frac{\partial\rho}{\partial D}\right)_{R,L}dD+\left(\frac{\partial\rho}{\partial L}\right)_{R,D}dL$$

$$d\rho=\left(\frac{\partial\frac{\pi.R.D^2}{4.L}}{\partial R}\right)_{D,L}dR+\left(\frac{\partial\frac{\pi.R.D^2}{4.L}}{\partial D}\right)_{R,L}dD+\left(\frac{\partial\frac{\pi.R.D^2}{4.L}}{\partial L}\right)_{R,D}dL$$

$$d\rho=\frac{\pi.D^2}{4.L}\,dR+\frac{\pi.R\,.2D}{4.L}\,dD-\frac{\pi.R.D^2}{4.L^2}\,dL$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\pi.D^2}{4.L}\frac{1}{\frac{\pi.R.D^2}{4.L}}dR+\frac{\pi.R\,.2D}{4.L}\frac{1}{\frac{\pi.R.D^2}{4.L}}dD-\frac{\pi.R.D^2}{4.L^2}\frac{1}{\frac{\pi.R.D^2}{4.L}}dL$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\pi.D^2}{4.L}\frac{4.L}{\pi.R.D^2}dR+\frac{\pi.R\,.2D}{4.L}\frac{4.L}{\pi.R.D^2}dD-\frac{\pi.R.D^2}{4.L^2}\frac{4.L}{\pi.R.D^2}dL$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dR}{R}+2\,\frac{dD}{D}-\frac{dL}{L}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{dR}{R}+2\,\frac{dD}{D}+\frac{dL}{L}$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta R}{R}+2\,\frac{\Delta D}{D}+\frac{\Delta L}{L}$$

Exercice 30

Le long d'un tube cylindrique étroit de rayon **R** et de longueur **L**, le débit volumique Q_V d'un liquide réel, en écoulement en régime permanent, est donnée par la loi de Poiseuille :

$$Q_V=\frac{\pi\,R^4(P_1-P_2)}{8\eta L}$$

Où P la pression et η le coefficient de viscosité. Trouver l'incertitude relatives sur Q_V.

Exercice 30 Solution

$$Q_V=\frac{\pi\,R^4(P_1-P_2)}{8\eta L}$$

$$ln\;Q_V=ln\left(\frac{\pi\,R^4(P_1-P_2)}{8\eta L}\right)$$

$$ln\;Q_V=ln\left(\pi\,R^4(P_1-P_2)\right)-ln\,(8\eta L)$$

$$\ln\ Q_V = \ln\pi + \ln R^4 + \ln(P_1 - P_2) - \ln 8 - \ln\eta - \ln L$$
$$\ln\ Q_V = \ln\pi + 4\ln R + \ln(P_1 - P_2) - \ln 8 - \ln\eta - \ln L$$
$$\frac{dQ_V}{Q_V} = \frac{d\pi}{\pi} + 4\frac{dR}{R} + \frac{d(P_1 - P_2)}{(P_1 - P_2)} - 0 - \frac{d\eta}{\eta} - \frac{dL}{L}$$

$$\frac{dQ_V}{Q_V} = 4\frac{dR}{R} + \frac{dP_1 - dP_2}{(P_1 - P_2)} - \frac{d\eta}{\eta} - \frac{dL}{L}$$
$$\frac{dQ_V}{Q_V} = 4\frac{dR}{R} + \frac{dP_1}{(P_1 - P_2)} - \frac{dP_2}{(P_1 - P_2)} - \frac{d\eta}{\eta} - \frac{dL}{L}$$
$$\frac{\Delta Q_V}{Q_V} = 4\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta P_1}{(P_1 - P_2)} - \frac{\Delta P_2}{(P_1 - P_2)} - \frac{\Delta\eta}{\eta} - \frac{\Delta L}{L}$$
$$\frac{\Delta Q_V}{Q_V} = 4\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta P_1}{(P_1 - P_2)} + \frac{\Delta P_2}{(P_1 - P_2)} + \frac{\Delta\eta}{\eta} + \frac{\Delta L}{L}$$

Exercice 31

La vitesse d'une masse suspendue par un fil à l'extrémité d'un pendule simple est donnée par la relation suivante :

$$V = \sqrt{g\,L\,(1 - \cos\theta)}$$

où (g) est l'accélération de la pesanteur, (L) est la longueur du fil et (θ) est l'amplitude angulaire du pendule. Donner l'incertitude relative $\frac{\Delta V}{V}$

Exercice 31 Solution

$$V = \sqrt{g\,L\,(1 - \cos\theta)}$$

$$V = \left(g\,L\,(1 - \cos\theta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln V = \ln\left(g\,L\,(1 - \cos\theta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln V = \frac{1}{2}\ln\left(g\,L\,(1 - \cos\theta)\right)$$

$$\ln V = \frac{1}{2}\left(\ln g + \ln L + \ln(1 - \cos\theta)\right)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{g} + \frac{dL}{L} + \frac{d(1 - \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)}\right)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{g} + \frac{dL}{L} + \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)}\,d\theta\right)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)}\,\Delta\theta\right)$$

Exercice 32

1/ Convertir le vecteur $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ des coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j})$ en coordonnées polaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et déterminer : $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$

2/Convertir le vecteur $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

3/ Convertir le vecteur $\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_\varphi\vec{u}_\varphi$ des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ en coordonnées cartésiennes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 32 Solution

1/

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \\ \vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta \end{cases} \rightarrow \vec{v} = v_r(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + v_\theta(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{v} = v_r\cos\theta\,\vec{i} + v_r\sin\theta\,\vec{j} + -v_\theta\sin\theta\,\vec{i} + v_\theta\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta)\,\vec{i} + (v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta)\,\vec{j} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \\ v_y = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta \end{cases}$$

Ainsi nous aboutissons à un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \\ v_y = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x\cos\theta = (v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta)\cos\theta \\ v_y\sin\theta = (v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x\cos\theta = v_r\cos^2\theta - v_\theta\sin\theta\cos\theta \\ v_y\sin\theta = v_r\sin^2\theta + v_\theta\cos\theta\sin\theta \end{cases} \rightarrow v_x\cos\theta + v_y\sin\theta = v_r$$

$$\begin{cases} v_x\sin\theta = (v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta)\sin\theta \\ v_y\cos\theta = (v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta)\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x\sin\theta = v_r\cos\theta\sin\theta - v_\theta\sin^2\theta \\ v_y\cos\theta = v_r\sin\theta\cos\theta + v_\theta\cos^2\theta \end{cases} \rightarrow v_y\cos\theta - v_x\sin\theta = v_\theta$$

$$\begin{cases} v_x\cos\theta + v_y\sin\theta = v_r \\ -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta = v_\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta \rightarrow (v_x\cos\theta + v_y\sin\theta)\vec{u}_r + (-v_x\sin\theta + v_y\cos\theta)\vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dfrac{d(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}_\theta \end{cases} \rightarrow \left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \perp \vec{u}_r\right)$$

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \\ \dfrac{d\,\vec{u}_\theta}{d\theta} = \dfrac{d(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath})}{d\theta} = -(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) = -\vec{u}_r \end{cases} \rightarrow \left(\frac{d\,\vec{u}_\theta}{d\theta} \perp \vec{u}_\theta\right)$$

2/

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} \\ \vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_\varphi\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{\imath}\sin\varphi + \vec{\jmath}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_r(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}) + v_\theta(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}) + v_\varphi(-\vec{\imath}\sin\varphi + \vec{\jmath}\cos\varphi)$$

$$\vec{v} = (v_r\sin\theta\cos\varphi + v_\theta\cos\theta\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi)\vec{\imath} + (v_r\sin\theta\sin\varphi + v_\theta\cos\theta\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi)\vec{\jmath} + \vec{k}(v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta)$$

$$\begin{cases} v_x = v_r\sin\theta\cos\varphi + v_\theta\cos\theta\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi \\ v_y = v_r\sin\theta\sin\varphi + v_\theta\cos\theta\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi \\ v_z = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{bmatrix}$$

Nous créons une matrice de déplacement :

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_r = \sin\theta\cos\varphi\; v_x + \sin\theta\sin\varphi\; v_y + \cos\theta\; v_z \\ v_\theta = \cos\theta\cos\varphi\, v_x + \cos\theta\sin\varphi\, v_y - \sin\theta\; v_z \\ v_\varphi = -\sin\varphi\; v_x + \cos\varphi\; v_y \end{cases}$$

$$\vec{v} = (\sin\theta\cos\varphi\; v_x + \sin\theta\sin\varphi\; v_y + \cos\theta\; v_z)\vec{u}_r + (\cos\theta\cos\varphi\; v_x + \cos\theta\sin\varphi\, v_y - \sin\theta\; v_z)\vec{u}_\theta + (-\sin\varphi\; v_x + \cos\varphi\, v_y)\,\vec{u}_\varphi$$

3/

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} \\ \vec{v} = v_r\vec{u}_r + v_\theta\vec{u}_\theta + v_\varphi\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\vec{\imath}\sin\varphi + \vec{\jmath}\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_r(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}) + v_\theta(\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}) + v_\varphi(-\vec{\imath}\sin\varphi + \vec{\jmath}\cos\varphi)$$

$$\vec{v} = \left(v_r \sin\theta\cos\varphi + v_\theta \cos\theta\cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi\right)\vec{\imath} + \left(v_r \sin\theta\sin\varphi + v_\theta \cos\theta\sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi\right)\vec{\jmath} + \vec{k}\left(v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta\right)$$

$$\begin{cases} v_x = v_r \sin\theta\cos\varphi + v_\theta \cos\theta\cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi \\ v_y = v_r \sin\theta\sin\varphi + v_\theta \cos\theta\sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi \\ v_z = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \left(v_r \sin\theta\cos\varphi + v_\theta \cos\theta\cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi\right)\vec{\imath} + \left(v_r \sin\theta\sin\varphi + v_\theta \cos\theta\sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi\right)\vec{\jmath} + \left(v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta\right)\vec{k}$$

CHAPITRE : II Cinématique du point matériel

II. Cinématique du point matériel

II.1. Définitions Générales

L'objet de la cinématique est l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui le produisent.

Les grandeurs physiques de la cinématique sont le temps, la position, la vitesse et l'accélération.

"Etudier le mouvement" veut dire :

- ♣ Trouver l'équation de la trajectoire du mobile.
- ♣ Trouver la relation mathématique entre vitesse et temps.
- ♣ Trouver la relation entre position et temps.
- ♣ Trouver la relation entre vitesse et position.

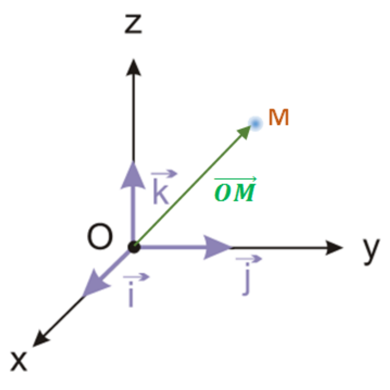
Pour étudier un mouvement, il faut :

- ❖ un système de référence ou repère = (trois axes orientés + une origine)
- ❖ une horloge

Un point matériel est un objet infiniment petit devant les distances caractéristiques du mouvement pour être considéré comme ponctuel.

Pour décrire la position d'un point nous avons besoin d'un repère : repère = origine + base

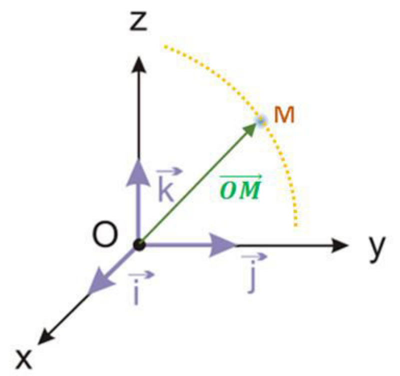
Le plus souvent la base est orthonormée : le repère est alors appelé repère cartésien $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$



Un point **M** de l'espace est repéré par ses coordonnées **x, y** et **z** tel que:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t})\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

Si le point $\boldsymbol{M}$ est en mouvement (On distingue essentiellement trois type de mouvements : translation, Rotation et Vibration) : le Vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ dépend du temps



La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile M lors de son mouvement. Celle–ci peut être rectiligne ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.

Exemple

Un mobile est repéré par les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = Acoswt \\ y(t) = Asinwt \end{cases}$$

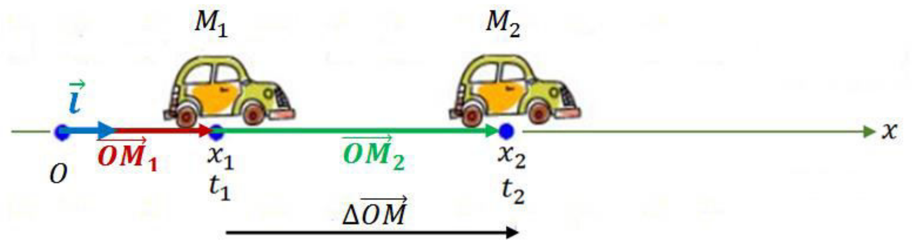
En supprimant le temps, on obtient : $x^2 + y^2 = A^2$

La trajectoire est donc un cercle de centre **O** et de rayon **A**

L'équation de la trajectoire est une relation qui lie les coordonnées du point entre elles.

II.2. Mouvement rectiligne

Trajectoire d'un mouvement rectiligne est une droite



Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i}$ avec $x(t)$ est appelée équation horaire du mouvement

Vecteur déplacement : $\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i}$

Vecteur vitesse moyenne : Si $\Delta t = t_2 - t_1$ est le temps mis entre M_1 et M_2 , la vitesse moyenne est :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{V}_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}$$

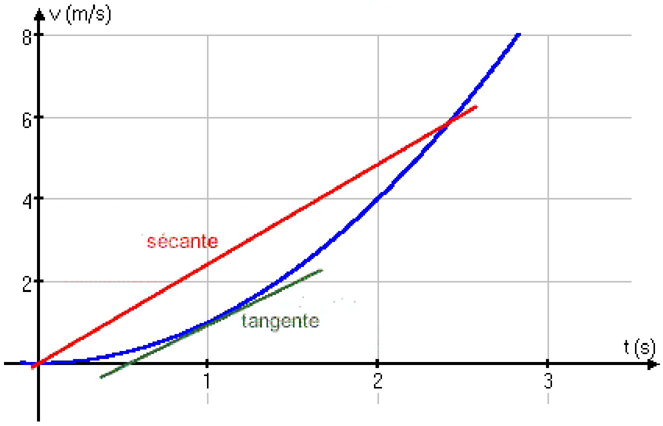
Vecteur vitesse instantanée : c'est la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps très petit, qui à la limite tend vers zéro

$$\vec{V} = \vec{V}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

- Si on a l'expression de $x(t)$, alors $\frac{dx}{dt}$ désigne la dérivée de $x(t)$.
- Si on a le graphe de $x(t)$, alors $\frac{dx}{dt}$ désigne la pente de la tangente à la courbe x(t).

Vecteur accélération moyenne : $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$ avec $\vec{a}_m$ et $\Delta\vec{V}$ Sont dans le même sens et direction.



Vecteur accélération instantanée : $\vec{a} = \vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

- Si on a l'expression de **v(t)**, alors $\frac{dV}{dt}$ désigne la dérivée de **v(t).**
- Si on a le graphe de **v(t)**, alors $\frac{dV}{dt}$ désigne la pente de la tangente à la courbe **v(t)**.

Mouvement rectiligne uniforme : $\vec{V} = constante$ et $\vec{a} = \vec{0}$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré : $\vec{a} = constante$ et $\vec{a}.\vec{V} > 0$

Mouvement rectiligne uniformément retardé ou décéléré : $\vec{a} = constante$ et $\vec{a}.\vec{V} < 0$

Passage de la vitesse à la position :

$$V = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = Vdt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} Vdt \rightarrow \ x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} Vdt$$

$$x_2 = \int_{t_1}^{t_2} V dt + x_1$$

Passage de l'accélération à la vitesse :

$$a = \frac{dV}{dt} \rightarrow dV = a\,dt$$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

Mouvement rectiligne uniforme (MRU) : Le MRU est un mouvement rectiligne à vitesse constante :

$$V(t) = V_0$$

Par conséquent :

$$a = \frac{dV_0}{dt} \rightarrow a = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \rightarrow dx = V_0 dt \rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} V_0 dt \rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = V_0 \int_{t_0}^{t} dt$$

$$x(t) - x(t_0) = V_0 \int_{t_0}^{t} dt$$

$$x(t) - x(t_0) = V_0(t - t_0)$$

$$x(t) = x(t_0) + V_0(t - t_0)$$

où $x_0 = x(t_0)$ C'est une équation, représentée par une droite.

Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA ou MRUV) : Un mouvement est dit uniformément accéléré si la trajectoire est une droite et si l'accélération est constante.

$$a = a_0$$

Par conséquent :

$$\frac{dV}{dt} = a_0 \rightarrow V(t) = V(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_0\,dt$$

$$V(t) = V(t_0) + a_0(t - t_0)$$

où $V_0 = V(t_0)$

$$V(t) = V_0 + a_0(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = V_0 + a_0(t - t_0) \rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(V_0 + a_0(t - t_0)\big)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$$

La représentation graphique de l'abscisse x en fonction du temps t est une parabole.

Relation entre a, v et x :

$$\begin{cases} V = V_0 + a_0(t - t_0) \rightarrow (t - t_0) = \dfrac{V - V_0}{a_0} \\ x = x_0 + v_0\dfrac{V - V_0}{a_0} + \dfrac{1}{2}a_0\left[\dfrac{V - V_0}{a_0}\right]^2 \end{cases}$$

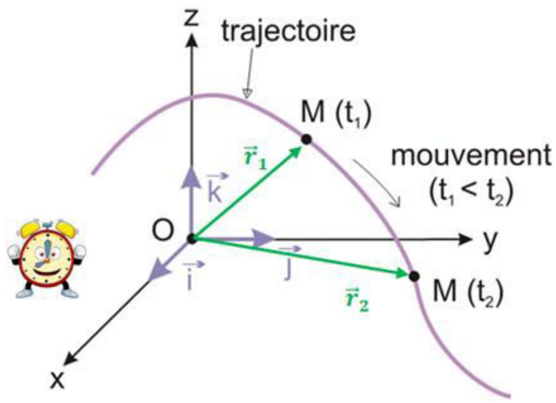
$$V^2 = V_0^2 + 2a_0(x - x_0)$$

II.3.Mouvement dans l'espace ou curviligne

II.3.1.Position d'un mobile

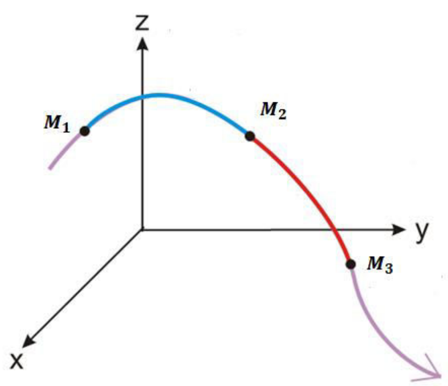
On peut définir la position d'un point dans l'espace de deux manières:

- ♣ En repérant le point par rapport à un repère orthonormé



Le vecteur position s'écrit :$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$

- ♣ En considérant un point sur la trajectoire pris comme origine



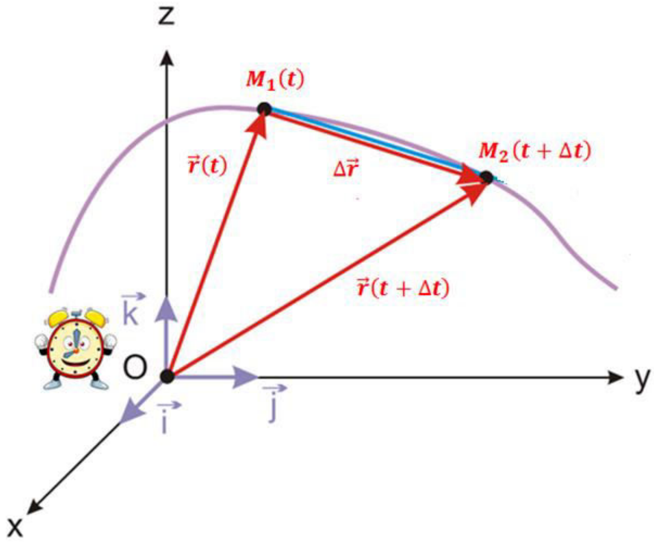
On parle d'abscisse curviligne notée : $s = \widehat{M_1M_2}$

La loi décrivant **s(t)** en fonction du temps est appelée équation horaire

II.3.2.Vecteur déplacement

C'est la distance pour aller du point $\boldsymbol{M_1}$ au point $\boldsymbol{M_2}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM}(t) = \Delta\vec{r}(t)$$



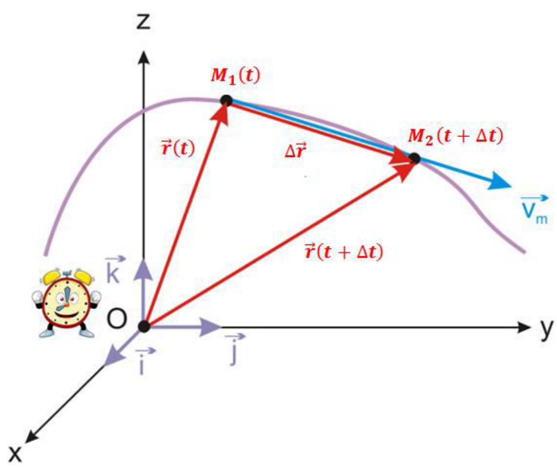
II.3.3.Vecteur vitesse d'un point

La vitesse d'un mobile caractérise la variation de sa position au cours du temps.

Vecteur vitesse moyenne

Soit deux positions du mobile $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$ à deux instants $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{t+\Delta t}$.

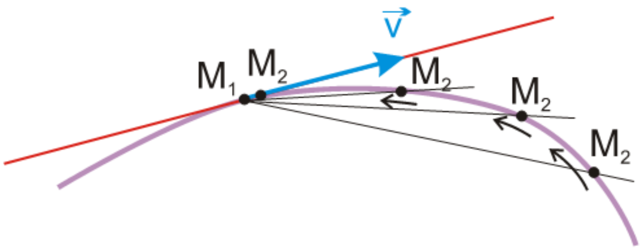
$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$



Le vecteur vitesse moyenne est parallèle au vecteur déplacement

Vecteur vitesse instantanée

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$



Où le sigle Δ désigne la variation de la grandeur qu'il accompagne.

Mathématiquement, cette limite de taux d'accroissement est la dérivée du vecteur position par rapport au temps

Conclusion

la vitesse instantanée à l'instant t est assimilée à la vitesse moyenne entre deux instants $t_1$ett_2, tel que t est milieu de $[t_1 , t_2]$ et Δt petit.

II.3.4.Vecteur accélération

Accélération moyenne

Elle caractérise la variation du vecteur vitesse

$$\vec{a}_m(t) = \frac{\Delta\vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_m(t)$ a le même sens et direction que $\Delta\vec{V}(t)$

Accélération instantanée

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

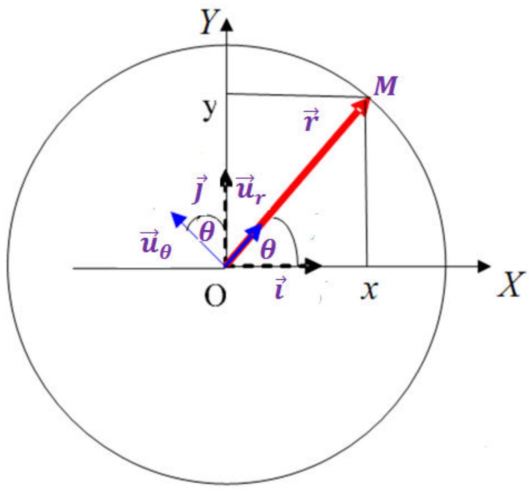
II.4.mouvement dans le plan

II.4.1.Etude du mouvement en coordonnées polaires

On repère le point M par la distance $OM = r$ et l'angle θ

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \end{cases}$$

$\boldsymbol{r(t)}$ et $\boldsymbol{\theta(t)}$ sont les équations paramétriques en coordonnées polaires



On prend deux vecteurs nouveaux unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$

Puisque : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Nous dérivons le vecteur position

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d[r\vec{u}_r]}{dt} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt}$$

Or :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \frac{d(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})}{d\theta} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}_\theta$$

donc :

$$\vec{V}(t) = r\vec{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \dfrac{dr}{dt} = \dot{r} \end{cases}$$

$$\vec{V} = r\vec{u}_\theta\dot{\theta} + \vec{u}_r\dot{r}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

ou encore :

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta$$

soit

$$\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta$$

où : V_r et V_θ sont les vitesses radiale et orthoradiale respectivement.

Nous avons

$$\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta$$

alors :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left[\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right]}{dt}$$

$$\vec{a} = \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + r\vec{u}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\frac{dr}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta} \\ \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\vec{u}_r\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \frac{d(-sin\theta\vec{\imath} + \ cos\theta\vec{\jmath})}{d\theta} = -cos\theta\vec{\imath} - sin\theta\vec{\jmath} = -(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) = -\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = \dot{r}\vec{u}_\theta.\dot{\theta} + \vec{u}_r\ddot{r} + r\dot{\theta}\left(-\vec{u}_r\dot{\theta}\right) + r\vec{u}_\theta\ddot{\theta} + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\dot{r}$$

$$\vec{a} = \dot{r}\vec{u}_\theta.\dot{\theta} + \vec{u}_r\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta\ddot{\theta} + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\dot{r}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

II.4.2.Mouvement circulaire

$r = R = Cte$ le vecteur vitesse est donc :

$$\vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\left\|\vec{V}\right\| = R\dot{\theta}$$

Et l'expression du vecteur accélération est :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$$

Remarquons que cette accélération a deux composantes :

- Accélération normale notée par $\vec{a}_N$portée par la normale, dirigée vers le centre, et de sens contraire à $\vec{a}$elle indique la variation de la direction de la vitesse.

$$\vec{a}_N = -\vec{a}_r = -\left(-R\dot{\theta}^2\vec{u}_r\right) = R\dot{\theta}^2\vec{u}_r \rightarrow a_r = a_N = R\dot{\theta}^2$$

- Accélération tangentielle notée par $\vec{a}_T$, portée par la tangente à la trajectoire au point M, elle indique la variation du module de la vitesse.

$$\vec{a}_\theta = \vec{a}_T = R\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow a_\theta = a_T = R\ddot{\theta}$$

II.4.3.Mouvement circulaire uniforme

Pour ce mouvement la vitesse est constante en module. Et puisque $r = R = Cte$, Dans ce cas :

$$\vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \omega$$

où $\omega(\mathbf{rad/s})$ est la vitesse angulaire (constante).

$$\vec{V} = R\omega\,\vec{u}_\theta$$

$$\|\vec{V}\| = V = R\omega\ (m/s)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r = -R\omega^2\vec{u}_r$$

$$\vec{a}_N = -\vec{a}_r = -(-R\omega^2) = R\omega^2\vec{u}_r = \frac{V^2}{R}\vec{u}_r$$

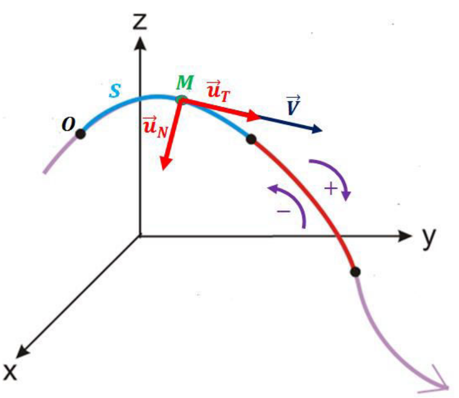
$$a_N = \frac{V^2}{R}(m/s^2)$$

Dans le cas d'une trajectoire quelconque il suffit de remplacer **R** par le rayon de courbure de la trajectoire, ρ , qui est en général fonction du temps : $\rho = \rho(t)$

$$a_N = \frac{V^2}{\rho}(m/s^2)$$

II.5.Coordonnées curvilignes ou intrinsèques

Si la trajectoire d'un mobile **M** est connue, on peut l'orienter et choisir un point origine **O**. La valeur algébrique de l'arc $s(t) = \widehat{OM}$ est l'abscisse curviligne s du point **M**.



- ♣ **s > 0** si en allant de **O** à **M** on se déplace dans le sens de l'orientation.
- ♣ **s < 0** si en allant de **O** à **M** on se déplace dans le sens inverse de l'orientation.

Le bon sens impose qu'on oriente la trajectoire dans le sens du mouvement.

La fonction $s = s(t)$ est appelée équation horaire du mouvement

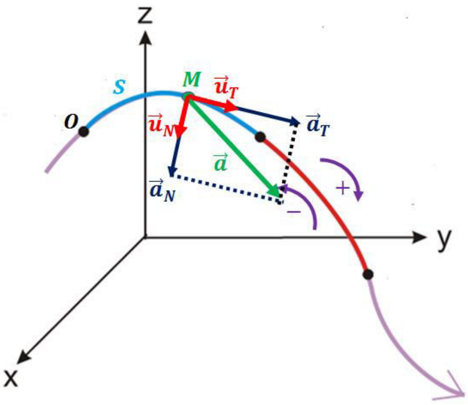
$\vec{u}_T$: porté par la tangente à la trajectoire en **M** est orienté dans le sens positif

$\vec{u}_N$:porté par la perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers l'intérieur

- Vitesse

$$\vec{V} = \frac{ds(t)}{dt}\vec{u}_T = V\vec{u}_T$$

- Accélération

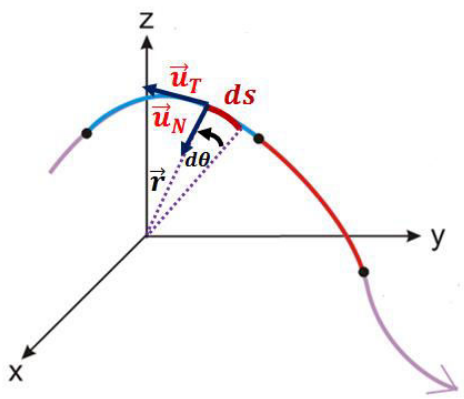


$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\vec{u}_T)}{dt} = V\frac{d\vec{u}_T}{dt} + \vec{u}_T\frac{dV}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_T}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_T}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{d\vec{u}_T}{d\theta} = \vec{u}_N \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + V\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

Avec $\begin{cases} a_T = \dfrac{dV}{dt} \\ a_N = V\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \rightarrow a = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2}$



$$ds = rd\theta \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{rd\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{V}{r}$$

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dV}{dt} \\ a_N = \dfrac{V^2}{r} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + V\frac{V}{r}\vec{u}_N = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{r}\vec{u}_N = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

II.5.1.Composantes de Frenet

Les composantes de Frenet sont relatives au trièdre défini en un point de la trajectoire **(c)** par les trois vecteurs unitaires suivants

- $\vec{u}_T$tangent à la trajectoire
- $\vec{u}_N$normal à la trajectoire
- $\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$vecteur unitaire bi-normale

$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{dV}{dt}\vec{u}_T + \dfrac{V^2}{r}\vec{u}_N \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d(V\vec{u}_T)}{dt} = \vec{u}_T\dfrac{dV}{dt} + V\dfrac{d\vec{u}_T}{dt} \end{cases} \rightarrow \frac{V^2}{r}\vec{u}_N = V\frac{d\vec{u}_T}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{\frac{V^2}{r}\vec{u}_N}{V}$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{V}{r}\vec{u}_N$$

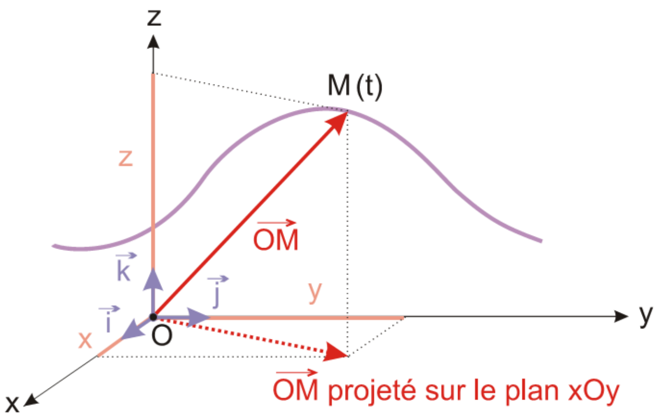
$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{1}{r}\vec{u}_N \rightarrow \frac{d\vec{u}_T}{ds} = \frac{1}{r}\vec{u}_N$$

II.6.Mouvement dans l'espace

II.6.1. Etude du mouvement en Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$x(t), y(t)$ et $z(t)$ sont les équations paramétriques du mouvement



- Vitesse moyenne

$$\vec{V}_m(t) = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\vec{V}_m(t) = V_{m_x}(t)\vec{i} + V_{m_y}(t)\vec{j} + V_{m_z}(t)\vec{k}$$

- Vitesse instantanée

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{i}\,,\ \vec{j}\,, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes étant fixes, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

- Accélération moyenne

$$\vec{a}_m(t) = \frac{\Delta\vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta V_x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta V_y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta V_z(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\vec{a}_m(t) = a_{m_x}(t)\vec{i} + a_{m_y}(t)\vec{j} + a_{m_z}(t)\vec{k}$$

- Accélération instantanée

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

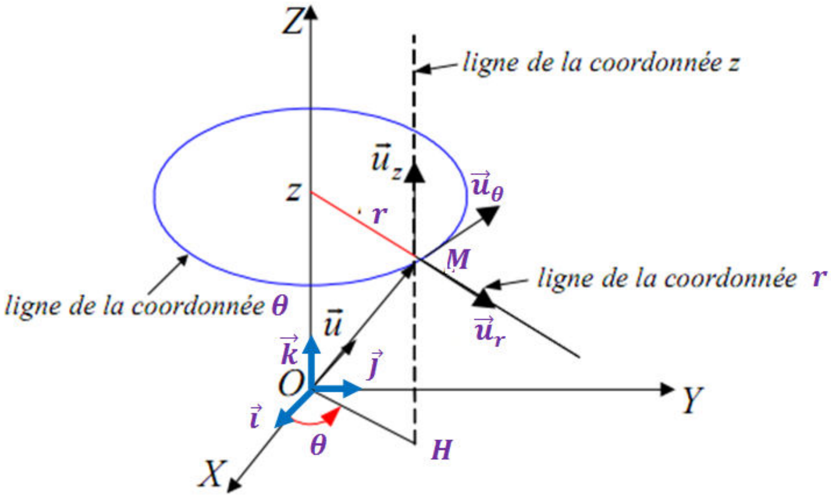
$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

II.6.2.Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

H est la projection de **M** dans le plan xoy



$$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d[r\vec{u}_r\ +\ z\,\vec{u}_z]}{dt}=r\frac{d\vec{u}_r}{dt}+\vec{u}_r\frac{dr}{dt}+z\frac{d\vec{u}_z}{dt}+\vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

En coordonnés cylindriques la vitesse est :

$$\vec{V}=r\frac{d\vec{u}_r}{dt}+\vec{u}_r\frac{dr}{dt}+\vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

$$\vec{u}_z=\vec{k}\ (constant)$$

$$\vec{V}=\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\ \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{V}=V_r\vec{u}_r+V_\theta\vec{u}_\theta+\ V_z\ \vec{u}_z$$

où : V_r et V_θ sont les vitesses radiale et orthoradiale respectivement. et l'accélération:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d\left[\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\ \dot{z}\vec{u}_z\right]}{dt}$$

$$\vec{a}=\dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}+\vec{u}_r\frac{d\dot{r}}{dt}+r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}+r\vec{u}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt}+\dot{\theta}\vec{u}_\theta\frac{dr}{dt}+\dot{z}\frac{d\vec{u}_z}{dt}+\vec{u}_z\frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\vec{a}=\dot{r}\vec{u}_\theta\dot{\theta}+\vec{u}_r\ddot{r}+r\dot{\theta}\left(-\vec{u}_r\dot{\theta}\right)+r\vec{u}_\theta\ddot{\theta}+\dot{\theta}\vec{u}_\theta\dot{r}+0+\vec{u}_z\ddot{z}$$

$$\vec{a}=\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\ddot{r}\vec{u}_r-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r+r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{\theta}\dot{r}\vec{u}_\theta+0+\ddot{z}\vec{u}_z$$

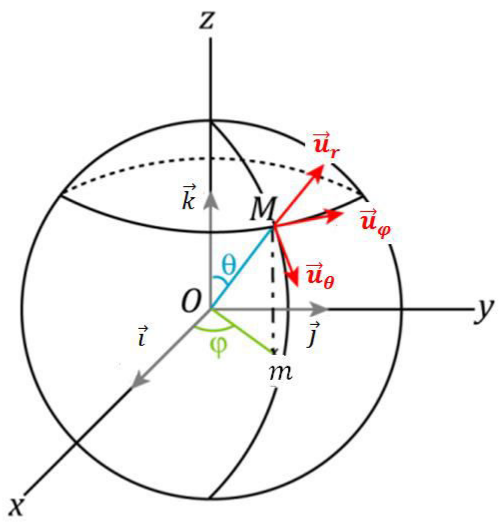
$$\vec{a}=\left(r\ddot{\theta}+2\,\dot{\theta}\dot{r}\right)\vec{u}_\theta+\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+\ddot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{a}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r+\left(r\ddot{\theta}+2\,\dot{\theta}\dot{r}\right)\vec{u}_\theta+\ddot{z}\vec{u}_z$$

II.6.3.Etude du mouvement en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM}=r\,\vec{u}_r$$

$$\begin{cases}\vec{u}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k}\\ \vec{u}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k}\\ \vec{u}_\varphi=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j}\end{cases}$$



- $\frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = \frac{d[\sin\theta\cos\varphi\vec{\imath}+\sin\theta\sin\varphi\vec{\jmath}+\cos\theta\,\vec{k}]}{d\varphi} = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = \sin\theta\,(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) = \sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

- $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \frac{d[\sin\theta\cos\varphi\vec{\imath}+\sin\theta\sin\varphi\vec{\jmath}+\cos\theta\,\vec{k}]}{d\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} = \vec{u}_\theta$
- $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \frac{d[\cos\theta\cos\varphi\vec{\imath}+\cos\theta\sin\varphi\vec{\jmath}-\sin\theta\,\vec{k}]}{d\theta} = -\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \cos\theta\,\vec{k}$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right) = -\vec{u}_r$$

- $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi} = \frac{d(\cos\theta\cos\varphi\vec{\imath}+\cos\theta\sin\varphi\vec{\jmath}-\sin\theta\,\vec{k})}{d\varphi} = -\cos\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath}$
- $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi} = \cos\theta\,(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath}) = \cos\theta\vec{u}_\varphi$
- $\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\theta} = \frac{d(-\sin\varphi\vec{\imath}+\cos\varphi\vec{\jmath})}{d\theta} = 0$
- $\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = \frac{d(-\sin\varphi\vec{\imath}+\cos\varphi\vec{\jmath})}{d\varphi} = -\cos\varphi\,\vec{\imath} + -\sin\varphi\,\vec{\jmath} = -(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})$
- $\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} == -(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$

Multiplions $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ respectivement par $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

$$\begin{cases} \left(\vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}\right)\sin\theta \\ \left(\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}\right)\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\theta\,\vec{u}_r = \sin\theta^2\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta^2\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \sin\theta\cos\theta\,\vec{k} \\ \cos\theta\,\vec{u}_\theta = \cos\theta^2\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta^2\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \cos\theta\sin\theta\,\vec{k} \end{cases}$$

la somme des deux équations du système donne :

$$\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta = \sin\theta^2\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta^2\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta^2\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta^2\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta = \cos\varphi\,\vec{i}(\sin\theta^2 + \cos\theta^2) + (\sin\theta^2 + \cos\theta^2)\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

- $\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} == -(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$

vecteur position en coordonnées sphériques dépend du vecteur $\vec{u}_r$. Ce dernier dépend de sangles θ et φ donc sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d[r\vec{u}_r]}{dt} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} = r\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}\right] + \vec{u}_r\frac{dr}{dt}$$

$$\vec{V} = r\left[\vec{u}_\theta.\dot{\theta} + \sin\theta\,\vec{u}_\varphi.\dot{\varphi}\right] + \vec{u}_r\dot{r}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left[\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right]}{dt}$$

$$\vec{a} = \dot{r}\,\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + r\,\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + r\vec{u}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\frac{dr}{dt} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + r\,\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi\frac{d\sin\theta}{dt}$$
$$+ r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\frac{d\dot{\varphi}}{dt} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$\vec{a} = \dot{r}\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}\right] + \vec{u}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + r\,\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}\right] + r\vec{u}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\frac{dr}{dt}$$
$$+ r\,\dot{\varphi}\sin\theta\left[\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}\right] + r\,\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi\frac{d\sin\theta}{dt} + r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$$
$$+ \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$\vec{a} = \dot{r}\left[\vec{u}_\theta\dot{\theta} + \sin\theta\,\vec{u}_\varphi\dot{\varphi}\right] + \vec{u}_r\ddot{r} + r\,\dot{\theta}\left[-\vec{u}_r\dot{\theta} + \cos\theta\vec{u}_\varphi\,\dot{\varphi}\right] + r\vec{u}_\theta\ddot{\theta} + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\dot{r}$$
$$+ r\,\dot{\varphi}\sin\theta\left[0.\dot{\theta} - (\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)\dot{\varphi}\right] + r\,\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi\dot{\theta}\cos\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\ddot{\varphi}$$
$$+ \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\dot{r}$$

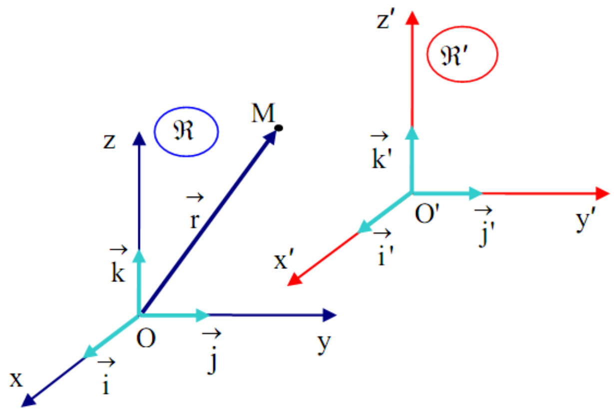
$$\vec{a} = \dot{r}\,\vec{u}_\theta\dot{\theta} + \dot{r}\,\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\dot{\varphi} + \vec{u}_r\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_\varphi\,\dot{\varphi} + r\vec{u}_\theta\ddot{\theta} + \dot{\theta}\vec{u}_\theta\dot{r}$$
$$- r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta^2\,\vec{u}_r - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi\dot{\theta}\cos\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\ddot{\varphi}$$
$$+ \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\dot{r}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta^2\right)\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{u}_\theta$$
$$+ \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

II.7.Mouvements relatifs

Soit à étudier le mouvement d'une particule **M** par rapport à un repère fixe $\mathfrak{R}$, appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère $\mathfrak{R}'$, dit repère relatif, par rapport au quel le mouvement de M soit simple à étudier.Soient,

- $\mathfrak{R}(O, xyz)$ un repère absolu (repère fixe).
- $\mathfrak{R}'(O', x'y'z')$ un repère relatif (repère mobile par rapport à $\mathfrak{R}$).



II.7. 1.Mouvement absolu

Le mouvement de **M** considéré par rapport au repère absolu $\mathfrak{R}(O, x, y, z)$ est caractérisé par les grandeurs :

- **Vecteur position**

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

- **Vitesse absolue**

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$$

- **Accélération absolue**

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}$$

Les dérivations sont effectuées dans $\mathfrak{R}$ dans lequel la base ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) est invariable.

II.7.2.Mouvement relatif

Le même mouvement, considéré par rapport au repère relatif $\mathfrak{R}'\,(O', x', y', z')$, est caractérisé par les grandeurs :

- **Vecteur position**

$$\overrightarrow{O'M}(t) = \vec{r'} = x'(t)\,\vec{\imath'} + y'(t)\,\vec{\jmath'} + z'(t)\,\vec{k'}$$

- **Vitesse relative**

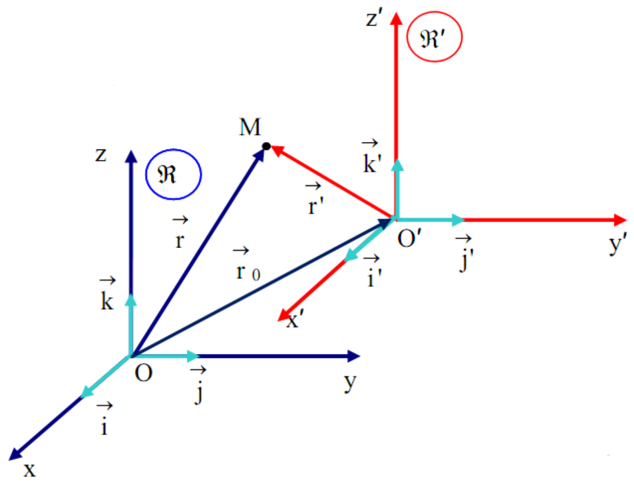
$$\vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\left(x'(t)\,\vec{\imath'} + y'(t)\,\vec{\jmath'} + z'(t)\,\vec{k'}\right)}{dt} = \dot{x}'(t)\,\vec{\imath'} + \dot{y}'(t)\,\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t)\,\vec{k'}$$

- **Accélération relative**

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d\left(\dot{x}'(t)\,\vec{\imath'} + \dot{y}'(t)\,\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t)\,\vec{k'}\right)}{dt} = \ddot{x}'(t)\,\vec{\imath'} + \ddot{y}'(t)\,\vec{\jmath'} + \ddot{z}'(t)\,\vec{k'}$$

Remarque: les dérivations sont effectuées dans $\mathfrak{R}'$ dans lequel la base $(\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ est invariable.

Composition des vecteurs vitesses



Par ailleurs, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ donc :

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r'}$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\left(x'(t)\,\vec{\imath'} + y'(t)\,\vec{\jmath'} + z'(t)\,\vec{k'}\right)}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\left(x'(t)\,\vec{\imath'}\right)}{dt} + \frac{d\left(y'(t)\,\vec{\jmath'}\right)}{dt} + \frac{d\left(z'(t)\,\vec{k'}\right)}{dt}$$

Si on dérive par rapport au temps, en tenant compte du fait que la base $(\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$ peut varier dans $\mathfrak{R}$, on obtient :

$$\vec{V}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\imath'}\frac{dx'(t)}{dt} + x'(t)\frac{d\,\vec{\imath'}}{dt} + \vec{\jmath'}\frac{dy'(t)}{dt} + y'(t)\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + \vec{k'}\frac{dz'(t)}{dt} + z'(t)\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{V}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(t)\frac{d\,\vec{\imath'}}{dt} + y'(t)\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'(t)\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \left(\frac{dx'(t)}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'(t)}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'(t)}{dt}\vec{k'}\right)$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

Vitesse d'entraînement

La vitesse d'entraînement nous permet de déterminer la nature du mouvement du repère mobile $\mathfrak{R}'(O', x'y'z')$ par rapport au repère fixe $\mathfrak{R}(O, xyz)$.

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(t)\frac{d\,\vec{\imath'}}{dt} + y'(t)\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + z'(t)\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

Lorsqu'il existe un vecteur de rotation $\vec{\omega}$ lié au repère de rotation, la formule de poisson nous permet d'écrire:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\vec{\imath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath'} \\ \dfrac{d\,\vec{\jmath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'} \\ \dfrac{d\,\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'} \end{cases}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(t)(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}) + y'(t)(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}) + z'(t)(\vec{\omega} \wedge \vec{k'})$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge x'(t)\vec{\imath'}) + (\vec{\omega} \wedge y'(t)\vec{\jmath'}) + (\vec{\omega} \wedge z'(t)\vec{k'})$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \left(x'(t)\vec{\imath'} + y'(t)\vec{\jmath'} + z'(t)\vec{k'}\right)$$

$$\overrightarrow{O'M}(t) = \vec{r'} = x'(t)\,\vec{\imath'} + y'(t)\,\vec{\jmath'} + z'(t)\,\vec{k'}$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)$$

- lorsqu'il y'a translation et rotation:

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)$$

- lorsqu'il y'a translation pure : il n'y'a pas de rotation $\vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

Lorsqu'il y'a rotation pure: Les deus repère sont superposés, ils ont la même origine: $(\overrightarrow{OO'} = \vec{0})$

$$\vec{V}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)$$

Vecteurs accélérations

- **Accélération absolue**

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_a}{dt}$$

- **Accélération relative**

$$\vec{a}_r = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_r}{dt}$$

Accélération d'entraînement

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}(t) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)\right)$$

Accélération de Coriolis

Cette accélération est due à l'effet de rotation du repère mobile

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r)$$

Relation entre les accélérations

En dérivant l'expression de $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ par rapport au temps, on montre que l'accélération absolue peut se mettre sous la forme:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)\right] + \left[\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)\right)\right] \\ \vec{a}_r = \dfrac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \\ \vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) \end{cases}$$

$\vec{a}_e$: Accélération d'entraînement

$\vec{a}_r$: Accélération relative

$\vec{a}_c$: Accélération de Coriolis

Démonstration

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}_a}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(t)\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'(t)\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'(t)\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \left(\frac{dx'(t)}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'(t)}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'(t)}{dt}\vec{k}'\right)\right]$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(x'(t)\frac{d\vec{\imath}'}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(y'(t)\frac{d\vec{\jmath}'}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(z'(t)\frac{d\vec{k}'}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'(t)}{dt}\vec{\imath}'\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy'(t)}{dt}\vec{\jmath}'\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz'(t)}{dt}\vec{k}'\right)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'(t)\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + \frac{dx'(t)}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'(t)\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + \frac{dy'(t)}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'(t)\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} + \frac{dz'(t)}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'(t)}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \vec{\imath}'\frac{d^2x'(t)}{dt^2} + \frac{dy'(t)}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \vec{\jmath}'\frac{d^2y'(t)}{dt^2} + \frac{dz'(t)}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt} + \vec{k}'\frac{d^2z'(t)}{dt^2}$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'(t)\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'(t)\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'(t)\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2x'(t)}{dt^2}\vec{\imath}' + \frac{d^2y'(t)}{dt^2}\vec{\jmath}' + \frac{d^2z'(t)}{dt^2}\vec{k}'\right) + 2\left(\frac{dx'(t)}{dt}\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \frac{dy'(t)}{dt}\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'(t)}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'(t)\dfrac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'(t)\dfrac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'(t)\dfrac{d^2\vec{k}'}{dt^2} \\ \vec{a}_r = \dfrac{d^2x'(t)}{dt^2}\vec{i}' + \dfrac{d^2y'(t)}{dt^2}\vec{j}' + \dfrac{d^2z'(t)}{dt^2}\vec{k}' = \dfrac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \\ \vec{a}_c = 2\left(\dfrac{dx'(t)}{dt}\dfrac{d\vec{i}'}{dt} + \dfrac{dy'(t)}{dt}\dfrac{d\vec{j}'}{dt} + \dfrac{dz'(t)}{dt}\dfrac{d\vec{k}'}{dt}\right) \end{cases}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

- $x'(t)\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2}+y'(t)\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2}+z'(t)\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}=x'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\vec{\imath'}}{dt}\right)+y'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right)+z'(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$

$$=x'(t)\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath'})+y'(t)\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'})+z'(t)\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{k'})$$

$$=\left[x'(t)\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{\imath'}+y'(t)\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{\jmath'}+z'(t)\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{k'}\right]$$

$$+\left[x'(t)\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{\imath'}}{dt}+y'(t)\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}+z'(t)\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$$

$$=\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x'(t)\vec{\imath'}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y'(t)\vec{\jmath'}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z'(t)\vec{k'}\right]$$

$$+\left[x'(t)\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath'})+y'(t)\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'})+z'(t)\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{k'})\right]$$

$$=\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x'(t)\vec{\imath'}+y'(t)\vec{\jmath'}+z'(t)\vec{k'}\right)\right]$$

$$+\left[\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge x'(t)\vec{\imath'})+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge y'(t)\vec{\jmath'})+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge z'(t)\vec{k'})\right]$$

$$=\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x'(t)\vec{\imath'}+y'(t)\vec{\jmath'}+z'(t)\vec{k'}\right)\right]+\left[\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\left(x'(t)\vec{\imath'}+y'(t)\vec{\jmath'}+z'(t)\vec{k'}\right)\right)\right]$$

$$=\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right]+\left[\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right)\right]$$

$$x'(t)\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2}+y'(t)\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2}+z'(t)\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}=\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right]+\left[\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right)\right]$$

- $2\left(\frac{dx'(t)}{dt}\frac{d\,\vec{\imath'}}{dt}+\frac{dy'(t)}{dt}\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}+\frac{dz'(t)}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)=2\left(\frac{dx'(t)}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath'})+\frac{dy'(t)}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'})+\right.$

$\left.\frac{dz'(t)}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{k'})\right)$

$$=2\left(\vec{\omega}\wedge\frac{dx'(t)}{dt}\vec{\imath'}+\vec{\omega}\wedge\frac{dy'(t)}{dt}\vec{\jmath'}+\vec{\omega}\wedge\frac{dz'(t)}{dt}\vec{k'}\right)$$

$$=2\left(\vec{\omega}\wedge\left(\frac{dx'(t)}{dt}\vec{\imath'}+\frac{dy'(t)}{dt}\vec{\jmath'}+\frac{dz'(t)}{dt}\vec{k'}\right)\right)=2(\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r)$$

$$2\left(\frac{dx'(t)}{dt}\frac{d\vec{\imath'}}{dt}+\frac{dy'(t)}{dt}\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}+\frac{dz'(t)}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)=2(\vec{\omega}\wedge\vec{V}_r)=\vec{a}_c$$

$$\vec{a}_a=\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right]+\left[\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right)\right]\right)+\vec{a}_r+\vec{a}_c$$

$$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_c$$

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$$

$$\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}(t)\right)=\left(\vec{\omega}.\overrightarrow{O'M}(t)\right)\vec{\omega}-(\vec{\omega}.\vec{\omega})\overrightarrow{O'M}(t)=\left(\vec{\omega}.\overrightarrow{O'M}(t)\right)\vec{\omega}-\omega^2\overrightarrow{O'M}(t)$$

II.8.Exercices corrigés

Exercice 1

Dans un repère cartésien $(\mathbf{O},\mathbf{x},\mathbf{y})$, muni de la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$ un point M en mouvement a pour équations horaires

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire
2. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}$, Donner la valeur de la vitesse V du point M et montrer que le mouvement est uniforme.
3. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$

Exercice 1 Solution

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = \cos^2 t \\ y^2 = \sin^2 t \end{cases} \rightarrow (x-1)^2+y^2 = \cos^2 t+\sin^2 t$$

$$(x-1)^2+y^2=1^2$$

Trajectoire est un cercle de centre $(x=1)$, $(y=0)$ et de rayon $(R=1)$

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d(1+\cos t)}{dt}=-\sin t \\ v_y=\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d(\sin t)}{dt}=\cos t \end{cases} \rightarrow \vec{v}=v_x\,\vec{e}_x+v_y\,\vec{e}_y$$

$$\vec{v}=-\sin t\,\vec{e}_x+\cos t\,\vec{e}_y$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1ms^{-1}$$

La vitesse est constante, le mouvement est donc uniforme

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d(-\sin t)}{dt} = -\cos t \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d(\cos t)}{dt} \quad = -\sin t \end{cases} \rightarrow \vec{a} = a_x\,\vec{e}_x + a_y\,\vec{e}_y$$

$$\vec{a} = -\cos t\,\vec{e}_x + -\sin t\,\vec{e}_y$$

Exercice 2

Un point matériel **M** est en mouvement dans le plan (xOy). Les composantes cartésiennes de son vecteur position sont :

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = -t^2 + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule.

2. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\left(v_x(t), v_y(t)\right)$ et du vecteur accélération $\left(a_x(t), a_y(t)\right)$.

3. Déterminer les composantes tangentielle $a_T(t)$ et normale $a_N(t)$ de l'accélération

4. Déduire le rayon de courbure **R** de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 2 Solution

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = -t^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) + 1 = t \\ y(t) = -(x(t) + 1)^2 + 1 \end{cases}$$

$$y(t) = -x^2(t) - 2x - 1 + 1$$

$$y(t) = -x^2(t) - 2x$$

La trajectoire est une parabole

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d(t-1)}{dt} = 1 \\ v_y = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{d(-t^2+1)}{dt} = -2t \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}$$

$$\vec{v} = \vec{i} - 2t\,\vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(1)^2 + (-2t)^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$v = (1 + 4t^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d(1)}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d(-2t)}{dt} = -2 \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{\imath} + a_y(t)\vec{\jmath}$$

$$\vec{a} = 0\,\vec{u}_x - 2\,\vec{u}_y$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$a = 2$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left((1+4t^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}8t(1+4t^2)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$a_T = \frac{4t}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$a_T = \frac{t}{4\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

$$a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2$$

$$a_N{}^2 = a^2 - a_T{}^2$$

$$a_N{}^2 = (2)^2 - \left(\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}\right)^2$$

$$a_N{}^2 = 4 - \frac{16t^2}{1+4t^2}$$

$$a_N{}^2 = \frac{4(1+4t^2) - 16t^2}{1+4t^2}$$

$$a_N{}^2 = \frac{4 + 16t^2 - 16t^2}{1+4t^2} = \frac{4}{1+4t^2}$$

$$a_N{}^2 = \frac{4}{1+4t^2}$$

$$a_N = \sqrt{\frac{4}{1+4t^2}}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^2}{\sqrt{\dfrac{4}{1+4t^2}}} = \frac{1+4t^2}{\dfrac{2}{\sqrt{1+4t^2}}} = (1+4t^2)^1.\frac{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$R = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Exercice 3

Les coordonnées (x, y) d'une particule dans un repère orthonormé xOy sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x(t) = 2\,t + 1 \\ y(t) = 4\,t\,(t-1) \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule.

2. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\left(v_x(t), v_y(t)\right)$ et du vecteur accélération $\left(a_x(t), a_y(t)\right)$.

3. Déterminer les composantes tangentielle $a_T(t)$ et normale $a_N(t)$ de l'accélération et déduire le rayon de courbure **R** de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 3 Solution

Equation de la trajectoire :

$$x(t) = 2\,t + 1 \rightarrow 2t = x(t) - 1$$

$$t = \frac{x(t) - 1}{2}$$

$$y(t) = 4\,t^2 - 4t$$

$$y(t) = 4\left(\frac{x(t)-1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x(t)-1}{2}\right)$$

$$y(t) = (x^2(t) - 2x(t) + 1) - 2(x(t) - 1)$$

$$y(t) = x^2(t) - 2x(t) + 1 - 2x(t) + 2$$

$$y(t) = x^2(t) - 4x(t) + 1 + 2$$

$$y(t) = x^2(t) - 4x(t) + 3$$

Les composantes du vecteur position

$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow v_x = \frac{d(2\,t + 1)}{dt} = 2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \rightarrow v_y = \frac{d\,(4\,t^2 - 4t)}{dt} = 8t - 4 = 4(2t - 1)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$$

$$\vec{v} = 2\,\vec{i} + 4(2t-1)\vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(2)^2 + \left(4(2t-1)\right)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{4 + \left(16(4t^2 - 4t + 1)\right)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{4 + 4\left(4(4t^2 - 4t + 1)\right)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{4\left(1 + \left(4(4t^2 - 4t + 1)\right)\right)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = 2\sqrt{(1 + 16t^2 - 16t + 4)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = 2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}$$

$$\|\vec{v}\| = v = 2(16t^2 - 16t + 5)^{\frac{1}{2}}$$

Les composantes cartésiennes du vecteur accélération.

$$\begin{cases} v_x = 8 \rightarrow a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d(8)}{dt} = 0 \\ v_y = 8t - 4 \rightarrow a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d(8t-4)}{dt} = 8 \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = 0\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(0\,)^2 + (8)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = 8$$

Les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mathrm{d}\left(2(16t^2 - 16\,t + 5)^{\frac{1}{2}}\right)}{\mathrm{dt}} = 2\,\dfrac{1}{2}(32\mathrm{t} - 16)(16t^2 - 16t + 5)^{-\frac{1}{2}} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{(32\mathrm{t} - 16)}{(16t^2 - 16t + 5)^{\frac{1}{2}}} = 16\dfrac{2\mathrm{t} - 1}{(16t^2 - 16t + 5)^{\frac{1}{2}}} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$\|\vec{a}\| = a = 8$$

$$a = \sqrt{(a_T)^2 + (a_N)^2}$$

$$a^2 = (a_T)^2 + (a_N)^2$$

$$(a_N)^2 = a^2 - (a_T)^2$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - (a_T)^2}$$

$$a_N = \frac{8}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}$$

Rayon R de courbure de la trajectoire :

$$a_N = \frac{v^2}{R} \to R = \frac{v^2}{a_N}$$

$$R = \frac{\left(2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}\right)^2}{\frac{8}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}}$$

$$R = \frac{4(16t^2 - 16t + 5)}{\frac{8}{\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}}$$

$$R = \frac{(16t^2 - 16t + 5)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Exercice 4

Un mobile se déplace sur l'axe OX avec une vitesse v qui, à l'instant t, est liée à son abscisse par la relation : $x = a\sqrt{v} - b$

Déterminer l'équation horaire $x(t)$.on suppose qu'à $t = 0$, $x = 0$

Exercice 4 Solution

$$v = \frac{dx}{dt} \to x = a\sqrt{\frac{dx}{dt}} - b$$

$$x + b = a\sqrt{\frac{dx}{dt}} \to \frac{x+b}{a} = \sqrt{\frac{dx}{dt}} \to \frac{(x+b)^2}{a^2} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{(x+b)^2}{a^2} = \frac{dx}{dt} \to \frac{dx}{(x+b)^2} = \frac{dt}{a^2} \to \int \frac{dx}{(x+b)^2} = \int_0^t \frac{dt}{a^2}$$

$$-\frac{1}{x+b} = \frac{t}{a^2} + c$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to c = -\frac{1}{b}$$

$$-\frac{1}{x+b} = \frac{t}{a^2} - \frac{1}{b} = \frac{bt - a^2}{ba^2}$$

$$\frac{1}{x+b} = -\frac{bt - a^2}{ba^2}$$

$$x + b = -\frac{ba^2}{bt - a^2} \to x = -b - \frac{ba^2}{bt - a^2}$$

$$x = \frac{-b(bt-a^2)-ba^2}{bt-a^2} = \frac{-b^2t+ba^2-ba^2}{bt-a^2} = -\frac{b^2t}{bt-a^2}$$

$$x = -\frac{b^2t}{bt-a^2}$$

Exercice 5

Supposant que l'accélération d'un mouvement rectiligne soit une fonction connue de l'abscisse x du mobile $a = a(x)$, et qu'au point particulier x_0 la vitesse v du mobile soit v_0

1. Déterminer en fonction de **x** : $(v^2 - v_0^2)$
2. Examiner les cas particuliers suivants
   - $a(x) = a_0$
   - $a(x) = a_0 x$
   - $a(x) = a_0 \sin x$

Exercice 5 Solution

1/

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$a(x) = \frac{dv}{dx}v \rightarrow v\,dv = a(x)\ dx$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a(x)\ dx \rightarrow \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = \int_{x_0}^{x} a(x)\ dx$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\int_{x_0}^{x} a(x)\ dx$$

- $a(x) = a_0$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\int_{x_0}^{x} a_0\ dx = 2a_0\int_{x_0}^{x} dx = 2a_0\,[x]_{x_0}^{x}$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a_0\,(x - x_0)$$

- $a(x) = a_0\,x$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\int_{x_0}^{x} a_0\,x\ dx = 2a_0\int_{x_0}^{x} x\ dx = 2a_0\ \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x}$$

$$v^2 - {v_0}^2 = a_0\left(x^2 - x_0^2\right)$$

- $a(x) = a_0 \sin x$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\int_{x_0}^{x} a_0 \sin x \ dx = 2a_0 \int_{x_0}^{x} \sin x \ dx = 2a_0[-\cos x]_{x_0}^{x}$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(\cos x_0 - \cos x)$$

Exercice 6

Une particule M se déplace sans vitesse initiale, à partir d'un point O sur l'axe $x'ox$, avec une accélération a , telle que $a = (\alpha - \beta v)$ avec α, β : constantes positives et v la vitesse de particule.

a) Exprimer la vitesse en fonction du temps t

b) que devient cette vitesse après un temps très grand. Que conclut-on ?

c) trouver la position $x(t)$ du point M

Exercice 6 Solution

a) la vitesse en fonction du temps t

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v \rightarrow \frac{dv}{\alpha - \beta v} = dt$$

$$\int \frac{dv}{\alpha - \beta v} = \int dt \rightarrow \int \frac{-\beta\, dv}{\alpha - \beta v} = \int -\beta dt$$

$$u = \alpha - \beta v \rightarrow du = -\beta dv \rightarrow dv = -\frac{du}{\beta}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int -\beta dt$$

$$\ln(\alpha - \beta v) = -\beta t + A$$

à $t = 0 \rightarrow \ v(0) = 0 \rightarrow A = \ln \alpha$

$$\ln(\alpha - \beta v) = -\beta t + \ln \alpha$$

$$(\alpha - \beta v) = e^{-\beta t + \ln \alpha} = \alpha e^{-\beta t}$$

$$\alpha - \beta v = \alpha e^{-\beta t} \rightarrow \beta v = \alpha - \alpha e^{-\beta t}$$

$$\beta v = \alpha\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$v = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

b) si $t = \infty \ \rightarrow v = \frac{\alpha}{\beta}$

$v = cte$ le mouvement est uniforme

c) la position $x(t)$ du point M

$$v = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

$$dx = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)dt \rightarrow dx = \frac{\alpha}{\beta}dt - \frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta t}dt$$

$$x = \frac{\alpha}{\beta}t + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta t} + B$$

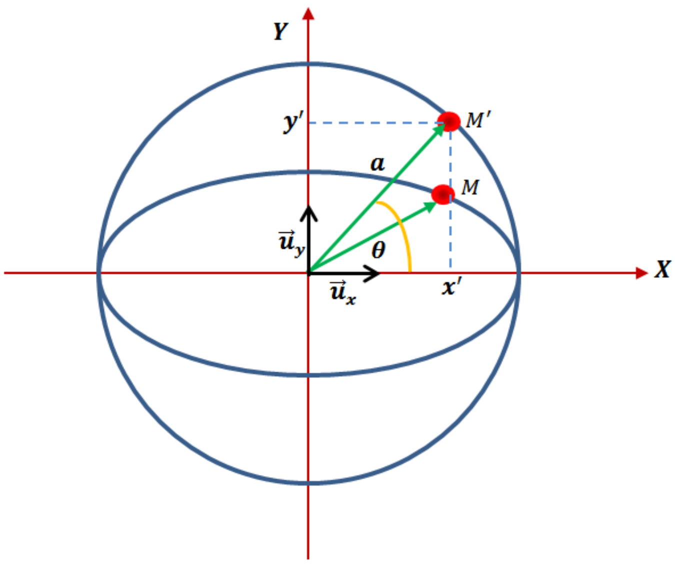
$$x = \frac{\alpha}{\beta}\left(t + \frac{1}{\beta^2}e^{-\beta t}\right) + B$$

Exercice 7

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, un mobile M décrit dans le sens direct l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le point M est repéré sur l'ellipse par l'angle θ. Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ et en fonction des dérivées $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$



Exercice 7 Solution

Equation du cercle :

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

Equation de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Coordonnées du point M

$$\begin{cases} x' = a\cos\theta \\ y' = a\sin\theta \end{cases}$$

Remplaçons x' et y' dans l'équation du cercle : $x^2 + y^2 - a^2 = 0$

$$a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - a^2 = 0 \to \cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 0$$

$$a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - a^2 = 0 \to \cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 0$$

Par identification

$$\begin{cases} \cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta \to \dfrac{x}{a} = \cos\theta \to x = a\cos\theta \\ \dfrac{y^2}{b^2} = \sin^2\theta \to \dfrac{y}{b} = \sin\theta \to y = b\sin\theta \end{cases}$$

Maintenant que nous avons les coordonnées du point M, nous pouvons repérer ce point sur l'ellipse par l'angle θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{a} \\ \sin\theta = \frac{y}{b} \end{cases}$

La vitesse du point M est :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y \to \overrightarrow{OM} = a\cos\theta\,\vec{u}_x + b\sin\theta\,\vec{u}_y$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(a\cos\theta\,\vec{u}_x + b\sin\theta\,\vec{u}_y) = -a\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_x + b\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_y$$

L'accélération du point M est :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-a\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_x + b\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_y)$$

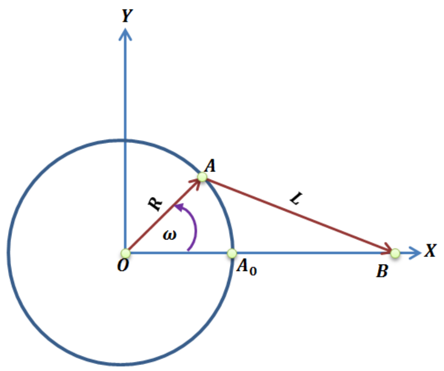
$$\vec{a} = -a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{u}_x + b(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{u}_y$$

Exercice 8

Une roue de rayon R , tourne autour de son centre à la vitesse angulaire ω_0. Elle entraine une bielle AB de longueur dont l'extrémité B est assujettie à se déplacer sur l'axe fixe Ox .On a : $AB = l\,, OA = R\,,\; l > R$ et $\theta(t) = \omega_0 t$

1. Trouver l'équation horaire du mouvement de B , si A passe en A_0 à $t = 0s$.
2. Déterminer la vitesse v.

Exercice 8 Solution



$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OA}\| = R \\ \|\overrightarrow{OB}\| = x \\ \|\overrightarrow{AB}\| = L \end{cases}$$

$$(\overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = \|\overrightarrow{OB}\|^2 + \|\overrightarrow{OA}\|^2 - 2(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA})$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{OB}\|^2 + \|\overrightarrow{OA}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OB}\|\|\overrightarrow{OA}\| \cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$$

$$L^2 = x^2 + R^2 - 2\,x\,R\cos\,\omega_0 t$$

$$x^2 + -2\,x\,R\cos\,\omega_0 t + (R^2 - L^2) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \rightarrow 4\,R^2\cos^2\,\omega_0 t - 4(R^2 - L^2)$$

$$\Delta = 4\,R^2\cos^2\,\omega_0 t - 4R^2 + 4L^2 \rightarrow \Delta = 4\,R^2(\cos^2\,\omega_0 t - 1) + 4L^2$$

$$\Delta = 4\,R^2\sin^2\,\omega_0 t + 4L^2$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\;R\cos\,\omega_0 t + 2\sqrt{R^2\sin^2\,\omega_0 t + L^2}}{2}$$

$$x = R\cos\,\omega_0 t + \sqrt{R^2\sin^2\,\omega_0 t + L^2}$$

$\mathbf{A}\ (t = 0) \rightarrow x = R + L$

Le mouvement est sinusoïdal de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\cos\,\omega_0 t + (R^2\sin^2\,\omega_0 t + L^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$v = -R\,\omega_0\sin\,\omega_0 t + \frac{1}{2}\,\omega_0 R^2(2\sin\,\omega_0 t\cos\,\omega_0 t)\;(R^2\sin^2\,\omega_0 t + L^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$v = -R\,\omega_0\sin\,\omega_0 t + \frac{\omega_0 R^2\,(2\sin\,\omega_0 t\cos\,\omega_0 t)}{2(R^2\sin^2\,\omega_0 t + L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v = -R\,\omega_0\sin\,\omega_0 t + \frac{\omega_0\,R^2\sin 2\,\omega_0 t}{2(R^2\sin^2\,\omega_0 t + L^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$v = R\,\omega_0 \left[-\sin\ \omega_0 t + \frac{R \sin 2\ \omega_0 t}{2(R^2 \sin^2\ \omega_0 t + L^2)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

Exercice 9

Un point matériel **M** est en mouvement dans le plan (xOy). Les composantes cartésiennes de son vecteur position sont :

$$\begin{cases} x = \alpha\, t \\ y = \ \beta\, t^2 \end{cases}$$

où α et β sont des constantes positives.

1. Ecrire les équations aux dimensions de α et β .
2. Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
3. Donner l'équation de la trajectoire.
4. Déterminer les composantes cartésiennes (v_x) et (v_y) du vecteur vitesse
5. Déterminer les composantes cartésiennes (a_x) et (a_y) du vecteur accélération
6. Déterminer les composantes tangentielle (a_T) et normale (a_N) du vecteur accélération.
7. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 9 Solution

$$\begin{cases} x = \alpha\, t \\ y = \ \beta\, t^2 \end{cases}$$

où α et β sont des constantes positives.

1/ Equations aux dimensions de α et β .

$$x = \alpha\, t$$

$$\alpha = \frac{x}{t}$$

$$[\alpha] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = L\,T^{-1}$$

$$[\alpha] = L\,T^{-1}$$

$$y = \ -\beta\, t^2$$

$$\beta = \frac{y}{t^2}$$

$$[\beta] = \frac{[y]}{[t]^2} = \frac{L}{T^2} = L\,T^{-2}$$

$$[\beta] = L\,T^{-2}$$

2/ Vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\, t\ \vec{i} + \beta\, t^2\ \vec{j}$$

3/ Equation de la trajectoire.

$$x = \alpha\, t$$

$$t = \frac{x}{\alpha}$$

$$y = \beta\, t^2$$

$$y = \beta \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2$$

4/ Composantes cartésiennes (v_x) et (v_y) du vecteur vitesse

$$\begin{cases} x = \alpha\, t \rightarrow v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d(\alpha\, t)}{dt} = \alpha \\ y = \beta\, t^2 \rightarrow v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d(\beta\, t^2)}{dt} = \beta 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \alpha \\ v_y = 2\beta t \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\, \vec{i} + v_y\, \vec{j}$$

$$\vec{v} = \alpha\, \vec{i} + 2\beta t\, \vec{j}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(\alpha)^2 + (2\beta t\,)^2}$$

$$v = \sqrt{\alpha^2 + 4\,\beta^{\,2} t^{\,2}}$$

$$v = (\alpha^2 + 4\,\beta^{\,2} t^{\,2})^{\frac{1}{2}}$$

5/ Composantes cartésiennes (a_x) et (a_y) du vecteur accélération

$$\begin{cases} v_x = \alpha \rightarrow a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d(\alpha\,)}{dt} = 0 \\ v_y = 2\beta t \rightarrow a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d(2\beta)}{dt} = 2\beta \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\, \vec{i} + a_y\, \vec{j}$$

$$\vec{a} = 0\, \vec{i} + 2\beta\, \vec{j}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(2\beta\,)^2} = 2\beta$$

$$\|\vec{a}\| = a = 2\beta$$

6/ Composantes tangentielle (a_T) et normale (a_N) du vecteur accélération.

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$a_T = \frac{d\left((\alpha^2 + 4\,\beta^{\,2} t^{\,2})^{\frac{1}{2}}\right)}{dt} = \frac{1}{2} 8\,\beta^{\,2}\, t(\alpha^2 + 4\,\beta^{\,2} t^{\,2})^{\frac{1}{2}-1}$$

$$a_T = \frac{1}{2} 8\,\beta^2 t(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$a_T = 4\frac{\beta^2 t}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{a} = a_T\,\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N$$

$$a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2$$

$${a_N}^2 = a^2 - {a_T}^2$$

$${a_N}^2 = (2\beta)^2 - \left(4\frac{\beta^2 t}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$$

$${a_N}^2 = 4\,\beta^2 - \frac{16\beta^4 t^2}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}$$

$${a_N}^2 = \frac{4\,\beta^2(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)} - \frac{-16\beta^4 t^2}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}$$

$${a_N}^2 = \frac{4\,\beta^2\alpha^2 + 16\,\beta^4 t^2}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)} - \frac{-16\beta^4 t^2}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}$$

$${a_N}^2 = \frac{4\,\beta^2\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}$$

$$a_N = \sqrt{\frac{4\,\beta^2\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}}$$

$$a_N = \frac{2\beta\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}}$$

7/ Rayon de courbure de la trajectoire.

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{v^2}{a_N}$$

$$R = \frac{\left(\sqrt{\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2}\right)^2}{\frac{2\beta\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}}}$$

$$R = (\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)^1 \times \frac{\sqrt{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)}}{2\beta\alpha}$$

$$R = (\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)^1 \times \frac{(\alpha^2 + 4\,\beta^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}{2\beta\alpha}$$

$$R=\frac{(\alpha^2\ +4\,\beta^{\,2}t^{\,2})^{\frac{3}{2}}}{2\beta\alpha}$$

Exercice 10

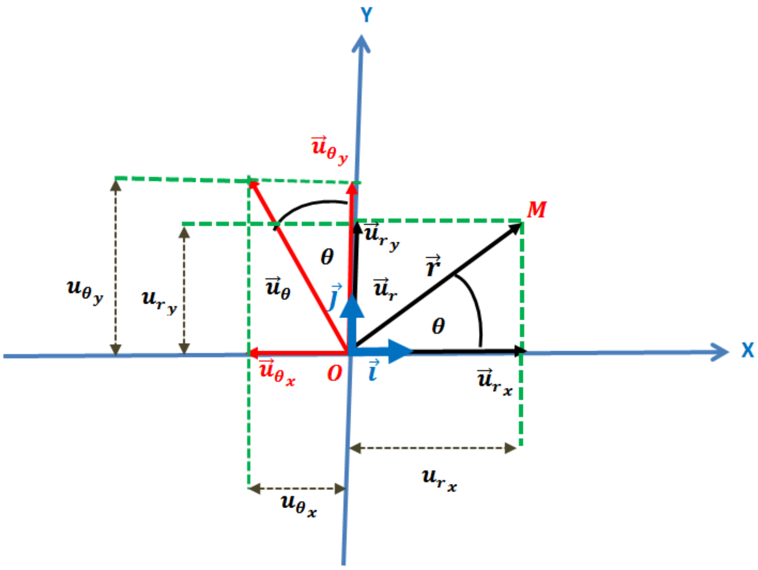
Une particule M se déplace dans le plan xOy. Sa vitesse est définie par :

$$\vec{v}=a\,\vec{u}_\theta+b\,\vec{j}$$

où a et b sont deux constantes.

Déterminer l'équation $r(\theta)$ de la trajectoire en coordonnées polaires.

Exercice 10 Solution



$$\vec{u}_r=\vec{u}_{r_x}+\vec{u}_{r_y}$$

$$\vec{u}_r=u_{r_x}\vec{i}+u_{r_y}\vec{j}$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{u_{r_x}}{\|\vec{u}_r\|}\rightarrow u_{r_x}=\cos\theta\\ \sin\theta=\dfrac{u_{r_y}}{\|\vec{u}_r\|}\rightarrow u_{r_y}=\sin\theta\\ \|\vec{u}_r\|=\|\vec{u}_\theta\|=1\end{cases}$$

$$\vec{u}_r=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta=\vec{u}_{\theta_x}+\vec{u}_{\theta_y}$$

$$\vec{u}_\theta=-u_{\theta_x}\vec{i}+u_{\theta_y}\vec{j}$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{u_{r_y}}{\|\vec{u}_\theta\|}\rightarrow u_{r_y}=\cos\theta\\ \sin\theta=\dfrac{u_{r_x}}{\|\vec{u}_\theta\|}\rightarrow u_{r_x}=\sin\theta\\ \|\vec{u}_r\|=\|\vec{u}_\theta\|=1\end{cases}$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

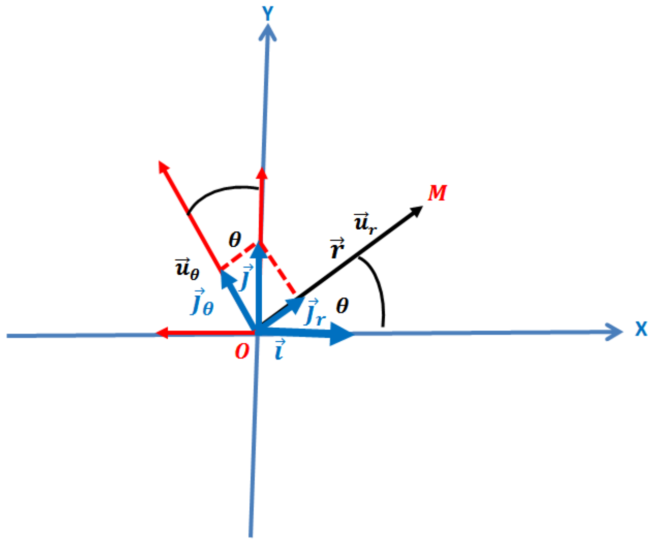
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\vec{u}_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})\dot{\theta} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = (-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j})\dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\,\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$



$$\vec{j} = \vec{j}_r + \vec{j}_\theta$$

$$\vec{j} = j_r\vec{u}_r + j_\theta\vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{j_\theta}{\|\vec{j}\|} \to j_\theta = \cos\theta \\ \sin\theta = \dfrac{j_r}{\|\vec{j}\|} \to j_r = \sin\theta \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$$

$$\vec{v} = a\,\vec{u}_\theta + b\,\vec{j}$$

$$\vec{j} = \sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = a\,\vec{u}_\theta + b\,(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{v} = a\,\vec{u}_\theta + b\,\sin\theta\,\vec{u}_r + b\cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = (a + b\cos\theta)\vec{u}_\theta + b\sin\theta\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = b\sin\theta\,\vec{u}_r + (a + b\cos\theta)\vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \\ \vec{v} = b\sin\theta\,\vec{u}_r + (a + b\cos\theta)\,\vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = b\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1 \\ r\,\dot{\theta} = r\dfrac{d\theta}{dt} = a + b\cos\theta \ldots\ldots 2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{a + b\cos\theta}{b\sin\theta} = \frac{r\frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = r\frac{d\theta}{dt}.\frac{dt}{dr} = r\frac{d\theta}{dr}$$

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{a + b\cos\theta}{b\sin\theta} \rightarrow \frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta} \rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}d\theta$$

$$\frac{dr}{r} = \frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}d\theta$$

$$\int\frac{dr}{r} = \int\frac{b\sin\theta}{a + b\cos\theta}d\theta$$

$$\ln r = -\ln(a + b\cos\theta) + C$$

Exercice 11

Les coordonnées cartésiennes d'une mobile M sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\left(\dfrac{1}{2}\omega t^2\right) \\ y(t) = R\sin\left(\dfrac{1}{2}\omega t^2\right) \end{cases}$$

- 1/ Donner l'équation de trajectoire décrit par le point M
- 2/ Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur vitesse $(\vec{v})$ et son module v
- 3/ Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération $(\vec{a})$ et son module a
- 4/ Quelles sont les composantes intrinsèques (a_T) et (a_N) de l'accélération?
- 5/ Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $(\vec{v})$ et accélération $(\vec{a})$en coordonnées polaires. Conclure.

Exercice 11 Solution

1/

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \\ y = R\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = R^2\ \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \\ y^2 = R^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = R^2\ \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) + R^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)$$

$$x^2 + y^2 = R^2\ \left(\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

La trajectoire est un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon R

2/

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(R\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)\vec{u}_x + \left(R\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} x = R\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \rightarrow v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\left(R\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)}{dt} = -R\dfrac{1}{2}\omega 2t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \\ y = R\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \rightarrow v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\left(R\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)}{dt} == R\dfrac{1}{2}\omega 2t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = -R\omega t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \\ v_y = R\omega t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$$

$$\vec{v} = \left(-R\omega t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)\vec{u}_x + \left(R\omega t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)\vec{u}_y$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{\left(-R\omega t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)^2 + \left(R\omega t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(-R\omega t)^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) + (R\omega t)^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(R\omega t)^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) + (R\omega t)^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(R\omega t)^2\left(\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) + \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(R\omega t)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = v = R\omega t$$

3/ Les composantes cartésiennes du vecteur accélération.

$$\begin{cases} v_x = -R\omega t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(-R\omega t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)}{dt} = -R\frac{1}{2}\omega^2 2t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \\ v_y = R\omega t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(R\omega t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)}{dt} = -R\frac{1}{2}\omega^2 2t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = -R\omega^2 t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \\ a_y = -R\omega^2 t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y$$

$$\vec{a} = \left(-R\omega^2 t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)\vec{u}_x + \left(-R\omega^2 t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)\vec{u}_y$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{\left(-R\omega^2 t\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)^2 + \left(-R\omega^2 t\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(-R\omega^2 t\ )^2\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) + (-R\omega^2 t\ )^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(R\omega^2 t\ )^2\left(\cos^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)\right)}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(R\omega^2 t\ )^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = R\omega^2 t$$

4/ Les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération

$$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega t)}{dt} = R\omega \\ a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega t)^2}{R} = R\omega^2 t^2 \end{cases}$$

Exercice 12

Le référentiel d'étude ($\mathscr{R}$) est associé au repère d'espace orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Soit l'hélice droite définie en coordonnées cylindriques dans ($\mathscr{R}$) par (h est une constante positive) :

$$\begin{cases} r = R \\ z = h\theta \end{cases}$$

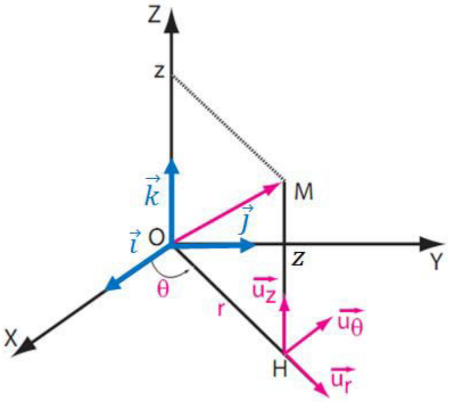
On s'intéresse à un point matériel $\boldsymbol{M}$ qui décrit cette hélice dans le sens des $\boldsymbol{\theta}$ croissants

1. Calculer les vecteurs vitesse et accélération de **M** dans ($\mathscr{R}$) en coordonnées cylindriques.
2. Calculer la vitesse $\boldsymbol{v}$ de **M** dans ($\mathscr{R}$).
3. $\boldsymbol{M}$ parcourt l'hélice à la vitesse constante $\boldsymbol{v_0}$. En déduire les vecteurs vitesse et accélération de **M** dans ($\mathscr{R}$) en fonction de $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{R}$ et **h**.

Exercice 12 solution

1 - La position du point **M** est caractérisée par ses coordonnées cylindriques r, θ et **z**. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$



❖ $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases}$

❖ $\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dfrac{d(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\vec{j} = \vec{u}_\theta \end{cases} \rightarrow \left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \perp \vec{u}_r\right)$$

$$\begin{cases} \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \\ \dfrac{d\,\vec{u}_\theta}{d\theta} = \dfrac{d(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})}{d\theta} = -(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) = -\vec{u}_r \end{cases} \rightarrow \left(\frac{d\,\vec{u}_\theta}{d\theta} \perp \vec{u}_\theta\right)$$

$$\overrightarrow{HM} = R\,\vec{u}_r + h\theta\,\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{HM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\,\vec{u}_r + \mathrm{h}\theta\,\vec{u}_z)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{dR}{dt}\right)\vec{u}_r + R\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathrm{h}}{dt}\right)\theta\,\vec{u}_z + \mathrm{h}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_z + \mathrm{h}\theta\left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = 0 + R\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) + 0 + \mathrm{h}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_z + \mathrm{h}\theta\left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = 0 + R\left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + 0 + \mathrm{h}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_z + \mathrm{h}\theta\left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)$$

$$\vec{v} = R\left(\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + \mathrm{h}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u}_z + 0$$

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \mathrm{h}\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\,\dot{\theta})^2 + (\mathrm{h}\dot{\theta})^2} \rightarrow v = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + \mathrm{h}^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \mathrm{h}\dot{\theta}\vec{u}_z)}{dt}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{dR}{dt}\right)\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt}\right)\vec{u}_\theta + R\,\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathrm{h}}{dt}\right)\dot{\theta}\vec{u}_z + \mathrm{h}\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt}\right)\vec{u}_z + \mathrm{h}\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{u}_z}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = 0 + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\,\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right) + 0 + \mathrm{h}\,\ddot{\theta}\vec{u}_z + 0$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\,\dot{\theta}\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) + \mathrm{h}\,\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\,\dot{\theta}(-\vec{u}_r\,\dot{\theta}) + \mathrm{h}\,\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + \mathrm{h}\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \mathrm{h}\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_z$$

2 - La vitesse v de M dans ($\mathscr{R}$) est donnée par :

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \mathrm{h}\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(R\,\dot{\theta})^2 + (\mathrm{h}\dot{\theta})^2} \rightarrow v = |\dot{\theta}|\sqrt{R^2 + \mathrm{h}^2}$$

Le point matériel M décrit l'hélice dans le sens des θ croissants donc $\theta\ \nearrow$ au cours du temps, ce qui signifie que $\theta\ >\ 0$:

$$v = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + \mathrm{h}^2}$$

M parcourt l'hélice à la vitesse constante v_0 On a donc :

$$v = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + \mathrm{h}^2} = v_0$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + h^2}} = cte \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0$$

$$\vec{v} = R\,\frac{v_0}{\sqrt{R^2 + h^2}}\vec{u}_\theta + h\frac{v_0}{\sqrt{R^2 + h^2}}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = -R\left(\frac{v_0}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right)^2 \vec{u}_r = -\frac{Rv_0^2}{R^2 + h^2}\,\vec{u}_r$$

Exercice 13

Un point matériel **M** est en mouvement dans le plan (xOy). Les composantes cartésiennes de son vecteur position sont :

$$\begin{cases} x = 5\cos 2\pi t \\ y = -3\sin 2\pi t \end{cases}$$

1. Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
2. Donner l'équation de la trajectoire.
3. Déterminer les composantes cartésiennes (v_x) et (v_y) du vecteur vitesse
4. Déterminer les composantes cartésiennes (a_x) et (a_y) du vecteur accélération

5-Quelle relation existe-t-il entre le vecteur accélération et le vecteur position ?

Exercice 13 Solution

1/ Vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = (5\cos 2\pi t)\,\vec{\imath} + (-3\sin 2\pi t)\,\vec{\jmath}$$

2/ l'équation de la trajectoire.

$$\begin{cases} x = 5\cos 2\pi t \rightarrow \dfrac{x}{5} = \cos 2\pi t \\ y = -3\sin 2\pi t \rightarrow \dfrac{y}{-3} = \sin 2\pi t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{5}\right)^2 = (\cos 2\pi t)^2 \\ \left(\dfrac{y}{-3}\right)^2 = (\sin 2\pi t)^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{-3}\right)^2 = (\cos 2\pi t)^2 + (\sin 2\pi t)^2$$

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{-3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La trajectoire est une ellipse de centre $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ et $\boldsymbol{a} = \mathbf{5}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{3}$

3/ les composantes cartésiennes (v_x) et (v_y) du vecteur vitesse

$$\begin{cases} x = 5\cos 2\pi t \rightarrow v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\cos 2\pi t) = -5.2\pi \sin 2\pi t \\ y = -3\sin 2\pi t \rightarrow v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-3\sin 2\pi t) = -3.2\pi \cos 2\pi t \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{v} = (-5.2\pi \sin 2\pi t)\,\vec{i} + (-3.2\pi os 2\pi t)\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = -2\pi(5.\sin 2\pi t)\,\vec{i} + (3.\cos 2\pi t)\,\vec{j}$$

4/ les composantes cartésiennes (a_x) et (a_y) du vecteur accélération

$$\begin{cases} v_x = -5.2\pi \sin 2\pi t \rightarrow a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-5.2\pi \sin 2\pi t) = -5.4\pi^2 \cos 2\pi t \\ v_y = -3.2\pi os 2\pi t \rightarrow a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-3.2\pi \cos 2\pi t) = 3.4\pi^2 osin 2\pi t \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = (-5.4\pi^2 \cos 2\pi t)\vec{i} + (3.4\pi^2 osin 2\pi t)\vec{j}$$

$$\vec{a} = -4\pi^2(5\cos 2\pi t)\vec{i} + (-3cosin 2\pi t)\vec{j}$$

5/ relation entre le vecteur accélération et le vecteur position

$$\vec{a} = -4\pi^2\ \overrightarrow{OM}$$

Donc l'accélération est centrale dirigé vers O.

Exercice 14

Un Point matériel M est en mouvement dans le plan (xOy). Les composantes cartésiennes de son vecteur vitesse sont :

$$\begin{cases} v_x = R\omega \cos \omega t \\ v_y = R\omega \sin \omega t \end{cases}$$

Où R et ω sont constantes réelles et positives. A l'instant $t = 0$, $(x_0 = 0)$ et $(y_0 = 0)$

1. Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération.
2. Déterminer les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération.
3. Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.
4. Déterminer les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

5. Déduire l'équation de la trajectoire.

6. Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 14 Solution

Les composantes cartésiennes du vecteur accélération.

$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y$$

$$\vec{v} = (R\omega \cos \omega t)\vec{u}_x + (R\omega \sin \omega t)\vec{u}_y$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(R\omega \cos \omega t)^2 + (R\omega \sin \omega t)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(R\omega\,)^2 \cos^2 \omega t \ + (R\omega\,)^2 \sin^2 \omega t}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(R\omega)^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(R\omega\,)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = v = R\omega$$

$$\begin{cases} v_x = R\omega \cos \omega t \rightarrow a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d(R\omega \cos \omega t)}{dt} = -R\omega^2 \sin \omega t \\ v_y = R\omega \sin \omega t \rightarrow a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d(R\omega \sin \omega t)}{dt} = R\omega^2 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y$$

$$\vec{a} = (-R\omega^2 \sin \omega t\,)\vec{u}_x + (R\omega^2 \cos \omega t)\vec{u}_y$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(-R\omega^2 \sin \omega t\,)^2 + (R\omega^2 \cos \omega t)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(R\omega^2\,)^2 \sin^2 \omega t + (R\omega^2\,)^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(R\omega^2\,)^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(R\omega^2\,)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = R\omega^2$$

Les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(R\omega)}{dt} = 0 \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(R\omega)^2}{R} \end{cases}$$

Les composantes du vecteur position

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x\, dt \rightarrow \displaystyle\int dx = \int v_x\, dt = \int R\omega \cos \omega t\ \, dt \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \rightarrow dy = v_y\ dt \rightarrow \displaystyle\int dy = \int v_y\ dt = \int R\omega \sin \omega t\, dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \int dx = R\omega \int \cos \omega t \ dt \\ y = \int dy = R\omega \int \sin \omega t \ dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R\omega \frac{1}{\omega} \sin \omega t + A \\ y = -R\omega \frac{1}{\omega} \cos \omega t + B \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R \sin \omega t + A \\ y = -R\cos \omega t + B \end{cases}$$

A l'instant $t = 0$, $(x(t = 0) = 0)$ et $(y(t = 0) = 0)$

$$\begin{cases} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 + A \\ y = -R + B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = R \sin \omega t \\ y = -R\cos \omega t + R \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$$

$$\overrightarrow{OM} = (R \sin \omega t)\,\vec{u}_x + (-R\cos \omega t + R)\,\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} x = R \sin \omega t \\ y = -R\cos \omega t + R \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = R \sin \omega t \\ y - R = -R\cos \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = R^2 \sin^2 \omega t \\ (y - R)^2 = R^2 \cos^2 \omega t \end{cases}$$

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \sin^2 \omega t + R^2 \cos^2 \omega t$$

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Le mouvement est circulaire

Exercice 15

Un point matériel **M** est en mouvement dans le plan (xOy). Les composantes cartésiennes de son vecteur position sont :

$$\begin{cases} x = b(\omega t - \sin \omega t) \\ y = b(1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

où **b** et **ω** sont des constantes réelles et positives.

- 1/ Déterminer les composantes cartésiennes (v_x) et (v_y) du vecteur vitesse
- 2/ Déterminer les composantes cartésiennes (a_x) et (a_y) du vecteur accélération.
- 3/ Déterminer les composantes tangentielle (a_T) et normale (a_N) du vecteur accélération.

4/Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 15 Solution

$$\begin{cases} x = b(\omega t - \sin \omega t) \\ y = b(1 - \cos \omega t) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$

$$\overrightarrow{OM} = b(\omega t - \sin \omega t)\,\vec{u}_x + b(1 - \cos \omega t)\,\vec{u}_y$$

1/ Composantes cartésiennes (v_x) et (v_y) du vecteur vitesse

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d\big(b(\omega t - \sin \omega t)\big)}{dt} = b(\omega - \omega \cos \omega t) = b\omega(1 - \cos \omega t) \\ v_y = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{d\big(b(1 - \cos \omega t)\big)}{dt} = b\omega \sin \omega t \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x(t)\,\vec{u}_x + v_y(t)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{v} = b\omega(1 - \cos \omega t)\,\vec{u}_x + b\omega \sin \omega t\,\vec{u}_y$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(b\omega(1 - \cos \omega t))^2 + (b\omega \sin \omega t)^2}$$

$$v = \sqrt{(b\omega)^2(1 - 2\cos \omega t + \cos^2 \omega t) + (b\omega)^2 \sin^2 \omega t}$$

$$v = \sqrt{(b\omega)^2\Big(1 - 2\cos \omega t + \underbrace{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}_{1}\Big)}$$

$$v = \sqrt{(b\omega)^2(1 - 2\cos \omega t + 1)}$$

$$v = \sqrt{(b\omega)^2(2 - 2\cos \omega t)}$$

$$v = b\omega\sqrt{(2 - 2\cos \omega t)}$$

$$v = b\omega\sqrt{2(1 - \cos \omega t)}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$v = b\omega\sqrt{2 \times 2\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$v = b\omega\sqrt{4\,\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$v = 2b\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$$

$$v = 2b\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$$

2/ Composantes cartésiennes (a_x) et (a_y) du vecteur accélération.

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d\big(b\omega(1-\cos\omega t)\big)}{dt} = b\omega^2 \sin\omega t \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d(b\omega \sin\omega t)}{dt} = b\omega^2 \cos\omega t \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x(t)\,\vec{u}_x + a_y(t)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{a} = (b\omega^2 \sin\omega t)\,\vec{u}_x + (b\omega^2 \cos\omega t)\,\vec{u}_y$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(b\omega^2 \sin\omega t)^2 + (b\omega^2 \cos\omega t)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(b\omega^2)^2 \sin^2\omega t + (b\omega^2)^2 \cos^2\omega t}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(b\omega^2)^2 \left(\underbrace{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{1}\right)}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(b\omega^2)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = b\omega^2$$

Rappel

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

$$\sin(a+a) = \sin a\cos a + \sin a\cos a$$

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a+a) = \cos a\cos a - \sin a\sin a$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 1 = \cos^2 a + \sin^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \to \cos 2a - 1 = (\cos^2 a - \sin^2 a) - (\cos^2 a + \sin^2 a)$$

$$\cos 2a - 1 = -2\sin^2 a \to \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$a = \frac{\omega t}{2}$$

$$\sin^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1-\cos\omega t}{2}$$

Composantes tangentielle (a_T) et normale (a_N) du vecteur accélération.

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2b\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|\right) = 2b\omega\,\frac{\omega}{2}\left|\cos\frac{\omega t}{2}\right|$$

$$a_T = b\omega^2\left|\cos\frac{\omega t}{2}\right|$$

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_T)^2 + (a_N)^2}$$

$$a^2 = (a_T)^2 + (a_N)^2$$

$$(a_N)^2 = a^2 - (a_T)^2$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - (a_T)^2}$$

$$a_N = \sqrt{(b\omega^2)^2 - \left(b\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}\right)^2}$$

$$a_N = \sqrt{(b\omega^2)^2 - (b\omega^2)^2\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$a_N = \sqrt{(b\omega^2)^2\left(1 - \cos^2\frac{\omega t}{2}\right)}$$

$$\cos^2\frac{\omega t}{2} + \sin^2\frac{\omega t}{2} = 1 \rightarrow \sin^2\frac{\omega t}{2} = 1 - \cos^2\frac{\omega t}{2}$$

$$a_N = b\omega^2\sqrt{\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

$$a_N = b\omega^2\sin\frac{\omega t}{2}$$

Rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_N}$$

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{\left(2b\omega\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2}{b\omega^2\sin\frac{\omega t}{2}}$$

$$R = 4b\sin\frac{\omega t}{2}$$

Exercice 16

On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel dans le système des coordonnées polaires, il décrit une trajectoire suivant une loi suivante :

$$r = 2b\cos\theta$$

avec $\theta = \omega t$ (b et ω étant des constantes)

Déterminer :

1. Les composantes polaires du vecteur vitesse $(\vec{v})$et son module v
2. Les composantes polaires du vecteur accélération $(\vec{a})$ et son module a
3. Les composantes intrinsèques (a_T) et (a_N) de l'accélération.
4. Le rayon de courbure **R**.

Exercice 16 Solution

1/

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r = r(t) = 2\,\mathrm{b}\cos\omega t\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dot{r} = \dfrac{d}{dt}(2\,\mathrm{b}\cos\omega\mathrm{t}\,) = -2b\omega\ \sin\omega t \\ \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \rightarrow \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} = \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \rightarrow \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) = -\vec{u}_r \\ \theta(t) = \omega t \rightarrow \dfrac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta} = \dfrac{d(\omega t)}{dt} = \omega \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = -2b\omega\ \sin\omega t\,\vec{u}_r + 2\,\mathrm{b}\,\omega\cos\omega t\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = 2b\omega\,(-\ \sin\omega t\,\vec{u}_r +\ \cos\omega t\,\vec{u}_\theta)$$

$$\|\vec{v}\| = v = 2b\omega\sqrt{(-\ \sin\omega t)^2 + (\cos\omega t)^2} = 2b\omega$$

$$\|\vec{v}\| = v = 2b\omega$$

2/

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\dot{r}}{dt}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) + \left(\frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\ +\ r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = (\dot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\ \dot{\theta}\ \vec{u}_\theta) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\ +\ r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(-2b\omega\ \sin\omega t) = -2b\omega^2\cos\omega t \\ \qquad\qquad \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r \\ \qquad\qquad \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} == \dfrac{d(\omega)}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\ \dot{\theta}\ \vec{u}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\ +\ r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}\,\dot{\theta}\ \vec{u}_r)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{\,2})\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta}\ +\ r\,\ddot{\theta}\,)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (-2b\omega^2\cos\omega t - 2\mathrm{b}\cos\omega t\,\omega^2)\vec{u}_r + (4b\omega^2\ \sin\omega t\ +\ 0)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -4\,b\omega^2\cos\omega t\,\vec{u}_r + 4b\omega^2\ \sin\omega t\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = 4\,b\omega^2(-\ \cos\omega t\,\vec{u}_r +\ \sin\omega t\,\vec{u}_\theta)$$

$$\|\vec{a}\| = a = 4\,b\,\omega^2\sqrt{(-\ \cos\omega t)^2 + (\ \sin\omega t)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = a = 4\,b\omega^2$$

3/

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2b\omega)}{dt} = 0$$

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N \rightarrow a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2$$

$$a^2 = 0 + a_N{}^2 \rightarrow a = a_N = 4\,b\,\omega^2$$

4/

$$a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(2b\omega)^2}{4\,b\,\omega^2} = b$$

$$R = b$$

Exercice 17

Un point matériel **M** est en mouvement dans l'espace$(Oxyz)$. Les composantes cartésiennes de son vecteur position sont :

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \\ z = 8t - 4 \end{cases}$$

1. Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$
2. Déterminer la nature de la trajectoire de **M** dans l'espace (O, x, y, z)
3. Déterminer les composantes cylindriques du vecteur vitesse $(\vec{v})$et son module v
4. Déterminer les composantes cylindriques du vecteur accélération $(\vec{a})$ et son module a
5. Trouver la vitesse et l'accélération dans la base de Frenet
6. Déduire le rayon de courbure r

Exercice 17 Solution

1/ vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = (3\cos 2t)\vec{i} + (3\sin 2t)\vec{j} + (8t - 4)\vec{k}$$

2/ la nature de la trajectoire de **M** dans l'espace (O, x, y, z)

La trajectoire dans le plan (O, x, y)

$$\begin{cases} x = 3\cos 2t \rightarrow x^2 = (3\cos 2t)^2 \\ y = 3\sin 2t \rightarrow y^2 = (3\sin 2t)^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = (3\cos 2t)^2 + (3\sin 2t)^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

La trajectoire dans le plan (O, x, y) est circulaire de rayon $R = 3$ et de centre $(0, 0)$

La trajectoire suivant l'axe **Oz** : $z = (8t - 4)$est l'équation d'une droite (mouvement est rectiligne)

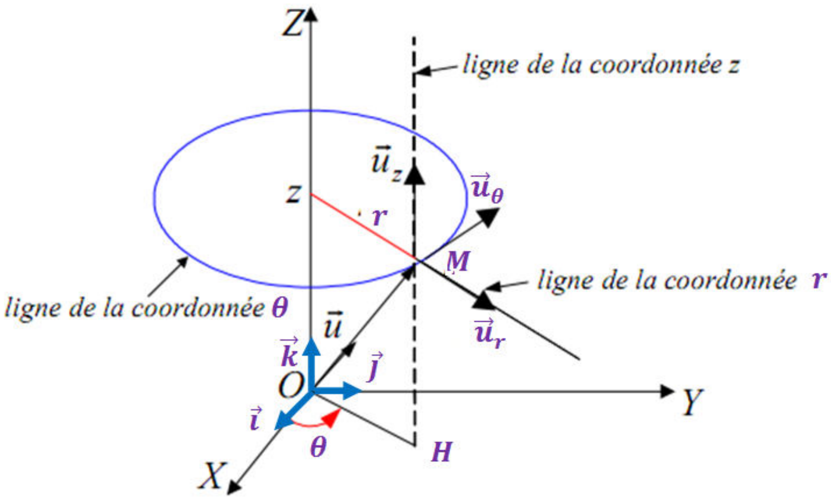
Donc le mouvement dans l'espace est hélicoïdal.

3/ les composantes cylindriques du vecteur vitesse $(\vec{v})$ et son module v

En coordonnées cylindriques le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit:

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z$$

H est la projection de **M** dans le plan xoy



$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d[R\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z]}{dt} = R\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dR}{dt} + z\frac{d\vec{u}_z}{dt} + \vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

En coordonnés cylindriques la vitesse est :

$$\vec{V} = R\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dR}{dt} + \vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

$$\vec{u}_z = \vec{k}\ (constant)$$

$$\vec{V} = \dot{R}\,\vec{u}_r + R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\begin{cases} R = 3 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \rightarrow \tan\theta = \dfrac{3\,\sin 2t}{3\,cos2t} \rightarrow \tan\theta = \dfrac{\sin 2t}{cos2t} \\ z = 8t - 4 \end{cases}$$

$$Arc\tan\theta = Arc\tan\left(\frac{\sin 2t}{cos2t}\right) \rightarrow \theta = 2t$$

$$\begin{cases} R = 3 \\ \theta = 2t \\ z = 8t - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{d3}{dt} = 0 = \dot{R} \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d(2t)}{dt} = 2 = \dot{\theta} \\ z = 8t - 4 \rightarrow \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d(8t-4)}{dt} = 8 = \dot{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{R} = 0 \\ \dot{\theta} = 2 \\ \dot{z} = 8 \end{cases}$$

$$\vec{V} = \dot{R}\,\vec{u}_r + R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{V} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{V} = 6\,\vec{u}_\theta + 8\,\vec{u}_z$$

$$\|\vec{V}\| = V = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

$$V = 10m/s$$

4/ les composantes cylindriques du vecteur accélération $(\vec{a})$ et son module a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left[R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z\right]}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dR}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \dot{z}\frac{d\vec{u}_z}{dt} + \vec{u}_z\frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$\vec{u}_z = \vec{k}\ (constant)$$

$$\vec{a} = \dot{R}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \vec{u}_z\ddot{z}$$

$$\vec{a} = \ddot{R}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right] + \vec{u}_z\ddot{z}$$

$$\vec{a} = \ddot{R}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \vec{u}_z\ddot{z}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{d3}{dt} = 0 = \dot{R} \rightarrow \ddot{R} = 0 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d(2t)}{dt} = 2 = \dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = 0 \\ \mathrm{z} = 8\mathrm{t} - 4 \rightarrow \dfrac{\mathrm{dz}}{dt} = \dfrac{d(8\mathrm{t} - 4)}{dt} = 8 = \dot{z} \rightarrow \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{R} = 0 \\ \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = -3.\ 2^2\ \vec{u}_r$$

$$\vec{a} = -12\ \vec{u}_r$$

$$\|\vec{a}\| = a = 12\ m/s^2$$

Exercice 18

Les coordonnées cartésiennes d'une mobile M sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x(t) = 2a\cos^2(bt) \\ y(t) = a\sin(2bt) \end{cases}$$

avec **a** et **b** sont des constantes positives

1/ donner l'équation de trajectoire décrit par le point M

2/ déterminer les composantes cartésiennes du vecteur vitesse ($\vec{v}$) et son module v

3/ déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération ($\vec{a}$) et son module a

4/quelle est la nature du mouvement

5/ Quelles sont les composantes intrinsèques (a_T) et (a_N) de l'accélération ?

Exercice 18 Solution

1/ l'équation de trajectoire décrit par le point M

$$\begin{cases} x(t) = 2a\cos^2(bt) \\ y(t) = a\sin(2bt) = 2a\cos(bt)\sin(bt) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4a^2\cos^2(bt)\ \cos^2(bt) \\ y^2 = 4a^2\cos^2(bt)\sin^2(bt) \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 4a^2\cos^2(bt)\left[\cos^2(bt) + \sin^2(bt)\right]$$

$$x^2 + y^2 = 4a^2\cos^2(bt)$$

$$x^2 + y^2 = 2\ a\ a\ \cos^2(bt) \rightarrow 2\ a\ x$$

$$x^2 + y^2 = 2\ a\ x$$

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = a^2$$

Ce qui correspond à un cercle de centre $(a, 0)$ et de rayon $R = a$

2/ les composantes cartésiennes du vecteur vitesse ($\vec{v}$) et son module v

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$$

$$\overrightarrow{OM} = 2a\cos^2(bt)\ \vec{u}_x + a\sin(2bt)\,\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} x(t) = 2a\cos^2(bt) \\ y(t) = a\sin(2bt) = 2a\cos(bt)\sin(bt) \end{cases}$$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{d(2a\cos^2(bt))}{dt} = -2ab\ 2\sin(bt)\cos(bt) = -2\ ab\ \sin(2bt) \\ v_y = \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{d(a\sin(2bt))}{dt} = a\ 2b\cos(2bt) \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x(t)\,\vec{u}_x + v_y(t)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{v} = -2\ ab\ \sin(2bt)\ \ \vec{u}_x + 2\ ab\cos(2bt)\ \ \vec{u}_y$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(-2\ ab\ \sin(2bt))^2 + (2\ ab\cos(2bt))^2} = 2\ ab$$

$$v = 2\ ab\ m/s$$

3/ les composantes cartésiennes du vecteur accélération ($\vec{a}$) et son module a

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d(-2\,ab\,sin(2bt))}{dt} = -4\,a\,b^2\,cos(2bt) \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d(2\,ab\cos 2bt)}{dt} = -4\,ab^2\,sin(2bt) \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x(t)\,\vec{u}_x + a_y(t)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{a} = -4\,a\,b^2\,cos(2bt)\,\vec{u}_x - 4\,ab^2\,sin(2bt)\,\vec{u}_y$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(-4\,a\,b^2\,cos(2bt))^2 + (-4\,ab^2\,sin(2bt)\,)^2}$$

$$a = 4\,a\,b^2\,m/s^2$$

4/ est la nature du mouvement

$$\begin{cases} \vec{a} = -4\,a\,b^2\,cos(2bt)\,\vec{u}_x - 4\,ab^2\,sin(2bt)\,\vec{u}_y \\ \vec{v} = -2\,ab\,sin(2bt)\,\vec{u}_x + 2\,ab\,cos(2bt)\,\vec{u}_y \end{cases}$$

$$\vec{a}.\vec{v} = 8\,a^2\,b^3\,cos(2bt)\,sin(2bt) - 8\,a^2\,b^3\,cos(2bt)\,sin(2bt) = 0$$

$$\vec{a}.\vec{v} = 0 \rightarrow\ le\ mouvement\ est\ circuaire\ uniforme$$

5/ les composantes intrinsèques (a_T) et (a_N) de l'accélération

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(2\,ab) = 0 \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{4\,a^2b^2}{a} = 4\,a\,b^2 \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

$$\vec{a} = 0\,\vec{u}_T + (4\,a\,b^2)\,\vec{u}_N$$

Exercice 19

La trajectoire d’un point M en coordonnées polaires est définie par :

$$r(t) = r_0\cos\theta$$

Où : r_0 est une constante et θ l’angle entre le vecteur $\vec{r}(t)$ et l’axe **Ox**

1/ quelles sont les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$.

2/ donner l'équation de trajectoire décrit par le point **M**

3/ donner l’expression des vecteurs vitesse $(\vec{v})$ et accélération $(\vec{a})$ en coordonnées polaires dans le **cas** $\theta = \omega\,t$.

Exercice 19 Solution

1/ les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{OM}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\ \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = r_0\cos\theta\cos\theta \\ y = r_0\cos\theta\sin\ \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = r_0\cos^2\theta \\ y = r_0\cos\theta\sin\ \theta \end{cases}$$

2/ l'équation de trajectoire décrit par le point **M**

$$\begin{cases} x = r_0 \cos^2\theta \\ y = r_0 \cos\theta \sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = {r_0}^2 \cos^2\theta \cos^2\theta \\ y^2 = {r_0}^2 \cos^2\theta \sin^2\theta \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2$$

$$= {r_0}^2 \cos^2\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$x^2 + y^2 = {r_0}^2 \cos^2\theta$$

$$x^2 + y^2 = r_0(r_0 \cos^2\theta) \rightarrow x^2 + y^2 = r_0\, x$$

$$x^2 + y^2 = r_0\, x$$

$$\left(x - \frac{r_0}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \frac{{r_0}^2}{4}$$

Ce qui correspond à un cercle de centre $\left(\frac{r_0}{2}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{r_0}{2}$

3/ l'expression des vecteurs vitesse $(\vec{v})$ et accélération $(\vec{a})$ en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) \rightarrow \overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{OM} = r_0 \cos\omega t\, \vec{u}_r$$

$$\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d[r\,\vec{u}_r]}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d[r_0 \cos\omega t\, \vec{u}_r]}{dt} = r_0\left[\cos\omega t\,\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\,\frac{d\cos\omega t}{dt}\right]$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\omega t}{dt} = \vec{u}_\theta\omega$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta\omega$$

$$\vec{V} = \frac{d[r_0 \cos\omega t\, \vec{u}_r]}{dt} = r_0[\cos\omega t\,\vec{u}_\theta\omega - \vec{u}_r\omega\sin\omega t]$$

$$\vec{V} = r_0\,\omega\cos\omega t\,\vec{u}_\theta - r_0\,\omega\,\sin\omega t\,\vec{u}_r$$

$$\vec{V} = -r_0\,\omega\,\sin\omega t\,\vec{u}_r + r_0\,\omega\cos\omega t\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d[-r_0\,\omega\,\sin\omega t\,\vec{u}_r + r_0\,\omega\cos\omega t\,\vec{u}_\theta]}{dt}$$

$$\vec{a} = r_0\,\omega\left[\frac{d[-\sin\omega t\,\vec{u}_r + \cos\omega t\,\vec{u}_\theta]}{dt}\right]$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\omega t}{dt} = -\vec{u}_r\omega$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_r\omega$$

$$\vec{a} = r_0\,\omega\left[\frac{d[-\sin\omega t\,\vec{u}_r + \cos\omega t\,\vec{u}_\theta]}{dt}\right]$$

$$\vec{a} = r_0\,\omega\left[\vec{u}_r\frac{d[-\sin\omega t]}{dt} - \sin\omega t\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_\theta\frac{d\cos\omega\,t}{dt} + \cos\omega\,t\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right]$$

$$\vec{a} = r_0\,\omega[-\omega\cos\omega\,t\,\vec{u}_r - \sin\omega t\,\vec{u}_\theta\omega - \omega\sin\omega t\,\vec{u}_\theta - \cos\omega\,t\,\vec{u}_r\omega]$$

$$\vec{a} = -2r_0\omega^2\cos\omega\,t\,\vec{u}_r - 2r_0\,\omega^2\sin\omega t\,\vec{u}_\theta$$

Exercice 20

Les équations horaires du mouvement de M dans le repère cartésien $\Re(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = b\,e^{-\omega t}cos(\omega t) \\ y(t) = be^{-\omega t}sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Avec $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ vecteur position dans les coordonnées polaires

Déterminer :

1/ les coordonnées polaires r et θ de M en fonction de t

2/ l'équation polaire de la trajectoire $r(\theta)$

3/ les composantes polaires du vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction de t

4/ la nature du mouvement

5/ les composantes polaires de l'accélération a_r et a_θ

6/ les composantes tangentielle (a_T) et normale (a_N) de l'accélération.

7 / le rayon de courbure de la trajectoire au point M

Exercice 20 Solution

1/ Calculons les coordonnées polaires r et θ de M en fonction de t.

$$\begin{cases} x = rcos\,\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = r^2cos^2\,\theta \\ y^2 = r^2\sin^2\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = r^2cos^2\,\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(cos^2\,\theta + \sin^2\theta)$$

$$(cos^2\,\theta + \sin^2\theta) = 1$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(b\,e^{-\omega t}cos(\omega t))^2 + (be^{-\omega t}sin(\omega t))^2}$$

$$r = \sqrt{(b\,e^{-\omega t})^2cos^2(\omega t) + (be^{-\omega t})^2sin^2(\omega t)}$$

$$r = b\,e^{-\omega t}\sqrt{cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t)}$$

$$r = b\,e^{-\omega t}$$

$$x = r\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{b\,e^{-\omega t}\cos(\omega t)}{b\,e^{-\omega t}} = \cos(\omega t)$$

$$\cos\theta = \cos(\omega t) \rightarrow \theta = \omega t$$

$$\begin{cases} r = b\,e^{-\omega t} \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

2/ L'équation polaire de la trajectoire $\boldsymbol{r(\theta)}$ s'obtient en remplaçant $\boldsymbol{\omega t}$ dans l'expression de $\boldsymbol{r}$ par $\boldsymbol{\theta}$

$$r = b\,e^{-\theta}$$

3/ les composantes polaires de la vitesse

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{OM} = b\,e^{-\omega t}\,\vec{u}_r$$

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = b\,e^{-\omega t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\,\vec{u}_r)}{dt} \rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dfrac{d(\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y)}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y = \vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \dfrac{d(-\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y)}{d\theta} = -(\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y) = -\vec{u}_r \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} r = b\,e^{-\omega t} \rightarrow \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(b\,e^{-\omega t})}{dt} \rightarrow \dot{r} = -b\omega\,e^{-\omega t} \\ \dot{r} = -b\omega\,e^{-\omega t} \rightarrow \ddot{r} = \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \dfrac{d(-b\omega\,e^{-\omega t})}{dt} \rightarrow \ddot{r} = b\omega^2\,e^{-\omega t} \\ \theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d(\omega t)}{dt} \rightarrow \dot{\theta} = \omega \\ \ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d(\omega)}{dt} \rightarrow \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = -b\omega\,e^{-\omega t}\,\vec{u}_r + b\,e^{-\omega t}\,\omega\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = b\omega\,e^{-\omega t}\,(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$$

$$\begin{cases} v_r = -b\omega\,e^{-\omega t} \\ v_\theta = b\omega\,e^{-\omega t} \end{cases}$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(b\omega\,e^{-\omega t})^2\,((-1)^2 + (1)^2)}$$

$$\|\vec{v}\| = v = b\omega\,e^{-\omega t}\sqrt{2}$$

4/ la nature du mouvement

$$\vec{a} = -\,2b\omega^2\,e^{-\omega t}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = b\omega\,e^{-\omega t}\,(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a}.\vec{v} = -\,2b\omega^2\,e^{-\omega t}\vec{u}_\theta.\,b\omega\,e^{-\omega t}\,(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a}.\vec{v} = -\,2b^2\omega^3\,e^{-2\omega t}\omega\ < 0$$

Ou La nature du mouvement est déterminée par le signe de $\frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\left(b\omega\,e^{-\omega t}\sqrt{2}\right)}{dt} = -\sqrt{2}b\omega^2\,e^{-\omega t} < 0$$

Mouvement est retarde ou décéléré.

5/ les composantes polaires de l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right)}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\,\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\theta}\frac{d\,\vec{u}_\theta}{d\theta}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (b\omega^2\, e^{-\omega t} - b\, e^{-\omega t}\omega^2)\vec{u}_r + (-2b\omega\, e^{-\omega t}\omega + b\, e^{-\omega t}\, 0)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = 0\,\vec{u}_r - 2b\omega^2\, e^{-\omega t}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -\,2b\omega^2\, e^{-\omega t}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -\,2b\omega^2\, e^{-\omega t}\vec{u}_\theta$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{(-\,2b\omega^2\, e^{-\omega t})^2}$$

$$a = 2b\omega^2\, e^{-\omega t}$$

6/ les composantes tangentielle (a_T) et normale (a_N) de l'accélération.

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\left(b\omega\, e^{-\omega t}\sqrt{2}\right)}{dt} = -\sqrt{2}b\omega^2\, e^{-\omega t} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = a_T\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N \rightarrow a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2} \rightarrow a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \\ a = 2b\omega^2\, e^{-\omega t} \\ a_T = -\sqrt{2}b\omega^2\, e^{-\omega t} \end{cases}$$

$${a_N}^2 = a^2 - {a_T}^2$$

$${a_N}^2 = (2b\omega^2\, e^{-\omega t})^2 - \left(-\sqrt{2}b\omega^2\, e^{-\omega t}\right)^2$$

$${a_N}^2 = 4b^2\omega^4\, e^{-2\omega t} - 2b^2\omega^4\, e^{-2\omega t^2}$$

$${a_N}^2 = 2b^2\omega^4\, e^{-2\omega t^2}$$

$$a_N = \sqrt{2}b\omega^2\, e^{-\omega t}$$

$$\begin{cases} a_T = -\sqrt{2}b\omega^2\, e^{-\omega t} \\ a_N = \sqrt{2}b\omega^2\, e^{-\omega t} \end{cases}$$

7/ le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_N}$$

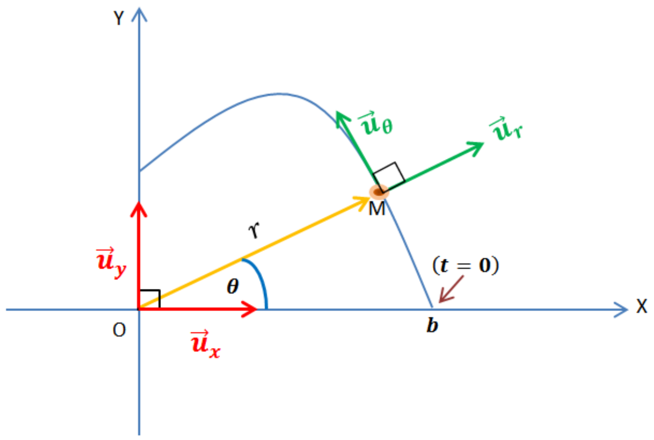
$$R = \frac{\left(b\omega\, e^{-\omega t}\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}b\omega^2\, e^{-\omega t}} = \frac{2}{\sqrt{2}}b\, e^{-\omega t}$$

$$R = \sqrt{2}b\, e^{-\omega t}$$

Exercice 21

Une particule se déplace sur une trajectoire dont les équations paramétriques en coordonnées polaires sont $r(t) = be^{-\frac{t}{\tau}}$ et $\theta(t) = \omega t$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ ou b et τ sont des constantes.

1. Ecrire en coordonnées polaires le vecteur position de la particule.
2. Calculer la vitesse et l'accélération de cette particule. En déduire leurs modules.
3. Déterminer l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse.



Exercice 21 Solution

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r = r(t) = be^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dot{r} = \dfrac{d}{dt}\left(be^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\dfrac{b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \to \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} = \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \to \dfrac{d\,\vec{u}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) = -\vec{u}_r \\ \theta(t) = \omega t \to \dfrac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta} = \dfrac{d(\omega t)}{dt} = \omega \end{cases}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \to -\frac{b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{u}_r + be^{-\frac{t}{\tau}}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = -\frac{b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{u}_r + b\,\omega\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = be^{-\frac{t}{\tau}}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{u}_r + \omega\,\vec{u}_\theta\right)$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{\left(be^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2\left(\left(-\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2\right)} = be^{-\frac{t}{\tau}}\sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2\right)}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{u}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\frac{d\dot{r}}{dt}\vec{u}_r+\dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)+\left(\frac{dr}{dt}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\;+r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta+r\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}\;\vec{u}_r+\dot{r}\;\dot{\theta}\;\vec{u}_\theta)+\left(\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\;+\;r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta+r\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)$$

$$\begin{cases}\ddot{r}=\dfrac{d\dot{r}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=\dfrac{b}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt}=\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=-\dot{\theta}\;\;\vec{u}_r\\ \dfrac{d\dot{\theta}}{dt}==\dfrac{d(\omega)}{dt}=0\end{cases}$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}\;\vec{u}_r+\dot{r}\;\dot{\theta}\;\vec{u}_\theta)+(\dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\;+\;r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta-r\,\dot{\theta}\;\dot{\theta}\;\;\vec{u}_r)$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^{\,2}\,)\;\vec{u}_r+(2\dot{r}\,\dot{\theta}\;\;+\;r\,\ddot{\theta}\,)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}=\left(\frac{b}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}\;-be^{-\frac{t}{\tau}}\;\omega^2\;\right)\;\vec{u}_r+\left(-2\,\omega\frac{b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\;+\;0\right)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}=\left(\frac{1}{\tau^2}-\;\omega^2\;\right)\;b\;e^{-\frac{t}{\tau}}\;\;\vec{u}_r-2\,\omega\frac{b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\;\;\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}=b\;e^{-\frac{t}{\tau}}\;\left[\left(\frac{1}{\tau^2}-\;\omega^2\;\right)\;\;\vec{u}_r-2\,\omega\frac{1}{\tau}\;\;\vec{u}_\theta\right]$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{\left(b\;e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2\left[\left(\frac{1}{\tau^2}-\;\omega^2\;\right)^2+\left(-2\,\omega\frac{1}{\tau}\right)^2\;\right]}$$

$$\|\vec{a}\|=a=b\;e^{-\frac{t}{\tau}}\;\sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2}-\;\omega^2\;\right)^2+4\;\frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

$$\overrightarrow{OM}.\vec{v}=\|\overrightarrow{OM}\|\;\;\|\vec{v}\|\cos(\overrightarrow{OM},\vec{v})\rightarrow\cos(\overrightarrow{OM},\vec{v})=\frac{\overrightarrow{OM}.\vec{v}}{\|\overrightarrow{OM}\|\;\|\vec{v}\|}$$

$$\cos(\overrightarrow{OM},\vec{v})=\frac{\left(be^{-\frac{t}{\tau}}\,\vec{u}_r\right).be^{-\frac{t}{\tau}}\;\left(-\frac{1}{\tau}\vec{u}_r+\;\omega\;\;\vec{u}_\theta\right)}{be^{-\frac{t}{\tau}}\;\;be^{-\frac{t}{\tau}}\sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2}+\;\omega^2\;\right)}}=-\frac{1}{\tau\sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2}+\;\omega^2\;\right)}}$$

$$\cos(\overrightarrow{OM},\vec{v})=-\frac{1}{\sqrt{\tau^2\left(\frac{1}{\tau^2}+\;\omega^2\;\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{1+\;\tau^2\omega^2}}$$

$$\begin{cases}\vec{u}_r\,.\vec{u}_r=1\\ \vec{u}_r.\;\vec{u}_\theta=0\end{cases}$$

Exercice 22

Le mouvement d'un point M est défini par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a.\cos \omega t \\ y = a.\sin \omega t \\ z = h\omega t \end{cases}$$

1. Déterminer la vitesse et l'accélération
2. Déterminer les accélérations normale et tangentielle γ_T , γ_N
3. Calculer le vecteur unitaire $\vec{e}_T$ de la tangente à la trajectoire, et montrer que le rayon de courbure R de la trajectoire est constant.
4. Calculer le vecteur unitaire $\vec{e}_N$ de la normale à la trajectoire.

Exercice 22 Solution

$$\begin{cases} x = a.\cos \omega t \rightarrow v_x = \dfrac{dx}{dt} = -\,a\,w \sin \omega t \\ y = a.\sin \omega t \rightarrow v_y = \dfrac{dy}{dt} = \;a\,w \cos \omega t \\ z = h\omega t \rightarrow v_z = \dfrac{dz}{dt} = h\omega \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\,\vec{e}_x + v_y\,\vec{e}_y + v_z\,\vec{e}_z \rightarrow \vec{v} = -\,a\,w \sin \omega t\;\vec{e}_x + a\,w \cos \omega t\;\vec{e}_y + h\omega\,\vec{e}_z$$

$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(-\,a\,w \sin \omega t)^2 + (a\,w \cos \omega t)^2 + (h\omega)^2}$$

$$v = \sqrt{(a\,w)^2 \sin^2 \omega t + (a\,w)^2 \cos^2 \omega t + (h\omega)^2}$$

$$v = w\sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\begin{cases} v_x = -\,a\,w \sin \omega t \rightarrow \gamma_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt} = -\,a\,w^2 \cos \omega t \\ v_y = \;a\,w \cos \omega t \rightarrow \gamma_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt} = -\,a\,w^2 \sin \omega t \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = h\omega \rightarrow \gamma_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_x\,\vec{e}_x + \gamma_y\,\vec{e}_y + \gamma_z\,\vec{e}_z \rightarrow \vec{v} = -\,a\,w^2 \cos \omega t\;\vec{e}_x -\;a\,w^2 \sin \omega t\;\vec{e}_y$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \sqrt{(-\,a\,w^2 \cos \omega t)^2 + (-\,a\,w^2 \sin \omega t)^2} = a\omega^2$$

$$\gamma = a\omega^2$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_T\,\vec{e}_T + \gamma_N\,\vec{e}_N$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \sqrt{{\gamma_T}^2 + {\gamma_N}^2} \rightarrow \gamma^2 = {\gamma_T}^2 + {\gamma_N}^2$$

$$\gamma^2 = 0 + {\gamma_N}^2$$

$$\gamma_N = \gamma = a\,\omega^2$$

$$\begin{cases} \gamma_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(w\sqrt{a^2+h^2}\right) = 0 \\ \gamma_N = \dfrac{v^2}{R} \rightarrow R = \dfrac{v^2}{\gamma_N} = \dfrac{\left(w\sqrt{a^2+h^2}\right)^2}{a\,\omega^2} = \dfrac{(a^2+h^2)}{a} \end{cases}$$

$$R = \frac{(a^2+h^2)}{a}$$

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{-\,a\,w\sin\omega t\ \vec{e}_x + a\,w\cos\omega t\ \vec{e}_y + h\omega\,\vec{e}_z}{w\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\vec{e}_T = \frac{-\,a\ \sin\omega t\ \vec{e}_x + a\ \cos\omega t\ \vec{e}_y + h\,\vec{e}_z}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_N\,\vec{e}_N \rightarrow \vec{e}_N = \frac{\vec{\gamma}}{\gamma_N} = \frac{-\,a\,w^2\cos\omega t\ \vec{e}_x -\ a\,w^2\sin\omega t\ \vec{e}_y}{a\,\omega^2}$$

$$\vec{e}_N = \frac{\vec{\gamma}}{\gamma_N} = -\ \cos\omega t\ \vec{e}_x -\ \sin\omega t\ \vec{e}_y$$

Exercice 23

Un ballon sonde a une vitesse d'ascension verticale vo indépendante de son altitude z. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x = \frac{z}{\tau}$ proportionnelle à son altitude. τ est une constante.

- ❖ 1 - Déterminer les lois du mouvement $x(t)$ et $z\,(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x\,(z)$.
- ❖ **2 - Calculer** le vecteur accélération, ses composantes tangentielle et normale.

Exercice 23 Solution

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0 \rightarrow v_z = constante = v_0$$

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \rightarrow dz = v_0\,dt \rightarrow \int dz = v_0\int_0^t dt \rightarrow z = v_0 t + z_0$$

$$\text{à } t = 0, z = 0 \rightarrow z_0 = 0$$

$$z = v_0 t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{z}{\tau} \rightarrow dx = \frac{v_0 t}{\tau}dt \rightarrow \int dx = \frac{v_0}{\tau}\int_0^t t\,dt$$

$$x = \frac{v_0}{\tau}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t + x_0 \rightarrow x = \frac{v_0}{2\tau}t^2 + x_0$$

$$\text{à } t = 0, x = 0 \rightarrow x_0 = 0$$

$$x = \frac{v_0}{2\tau} t^2$$

$$\begin{cases} z = v_0 t \rightarrow t = \dfrac{z}{v_0} \\ x = \dfrac{v_0}{2\tau} t^2 \end{cases} \rightarrow x = \frac{v_0}{2\tau}\left(\frac{z}{v_0}\right)^2 = \frac{z^2}{2\tau v_0}$$

L'équation de la trajectoire est $x = \frac{z^2}{2\tau v_0}$ et correspond à une portion de parabole.

$$\vec{a} = a_x\ \vec{e}_x + a_z\ \vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\ \vec{e}_x + \frac{dv_z}{dt}\vec{e}_z \rightarrow \vec{a} = \frac{d\left(\frac{v_0 t}{\tau}\right)}{dt}\ \vec{e}_x + \frac{dv_0}{dt}\vec{e}_z = \frac{v_0}{\tau}\ \vec{e}_x$$

$$\vec{a} = \frac{v_0}{\tau}\ \vec{e}_x$$

Le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire

$$\vec{v} = \frac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z$$

On en déduit l'expression du vecteur unitaire tangent :

$$\vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \dfrac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\dfrac{z}{\tau}\right)^2 + {v_0}^2} \end{cases} \rightarrow \vec{e}_T = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\frac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z}{\left(\left(\frac{z}{\tau}\right)^2 + {v_0}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{e}_T = \frac{\frac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z}{\left(\frac{z^2}{\tau^2} + {v_0}^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z}{\left(\frac{z^2 + \tau^2{v_0}^2}{\tau^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z}{\frac{1}{\tau}\left(z^2 + \tau^2{v_0}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{e}_T = \tau\left(z^2 + \tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{e}_T.\vec{e}_N = 0 \rightarrow \vec{e}_N = \tau\left(z^2 + \tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(v_0\,\vec{e}_x - \frac{z}{\tau}\ \vec{e}_z\right)$$

$$\begin{cases} a_T = \vec{a}\ .\vec{e}_T = \left(\dfrac{v_0}{\tau}\ \vec{e}_x\right).\tau\left(z^2 + \tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{z}{\tau}\ \vec{e}_x + v_0\,\vec{e}_z\right) = \dfrac{z\,v_0}{\tau}\left(z^2 + \tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ a_N = \vec{a}\ .\vec{e}_N = \left(\dfrac{v_0}{\tau}\ \vec{e}_x\right).\tau\left(z^2 + \tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(v_0\,\vec{e}_x - \dfrac{z}{\tau}\ \vec{e}_z\right) = {v_0}^2\left(z^2 + \tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_T = \vec{a}\,.\vec{e}_T = \dfrac{z\,v_0}{\tau}\left(z^2+\tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ a_N = \vec{a}\,.\vec{e}_N = {v_0}^2\left(z^2+\tau^2{v_0}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Exercice 24

On considère une courbe sur laquelle de déplace un point matériel M d'abscisse curviligne s(t). La vitesse du point **M** dans $\mathfrak{R}\ (oxyz)$ est $\vec{v}$ de module $\|\vec{V}\| = V = \frac{ds(t)}{dt}$. On définit la base de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{u}_B)$

1. Que désigne les vecteurs $\vec{u}_T, \vec{u}_N\ \ et\ \vec{u}_B$
2. Monter que l'accélération du point M est donnée par :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{r}\vec{u}_N$$

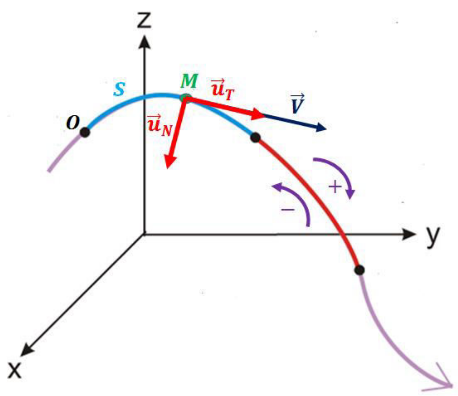
3. Exprimer **R** en fonction de $\vec{V}$ et $\vec{a}$

Exercice 24 Solution

Les composantes de Frenet sont relatives au trièdre défini en un point de la trajectoire (c) par les trois vecteurs unitaires suivants

- $\vec{u}_T$ tangent à la trajectoire
- $\vec{u}_N$ normal à la trajectoire
- $\vec{u}_B = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N$ vecteur unitaire bi-normale

Si la trajectoire d'un mobile **M** est connue, on peut l'orienter et choisir un point origine **O**. La valeur algébrique de l'arc $s(t) = \widehat{OM}$ est l'abscisse curviligne s du point **M**.



- ♣ **s > 0** si en allant de **O** à **M** on se déplace dans le sens de l'orientation.
- ♣ **s < 0** si en allant de **O** à **M** on se déplace dans le sens inverse de l'orientation.

Le bon sens impose qu'on oriente la trajectoire dans le sens du mouvement.

La fonction $s = s(t)$ est appelée équation horaire du mouvement

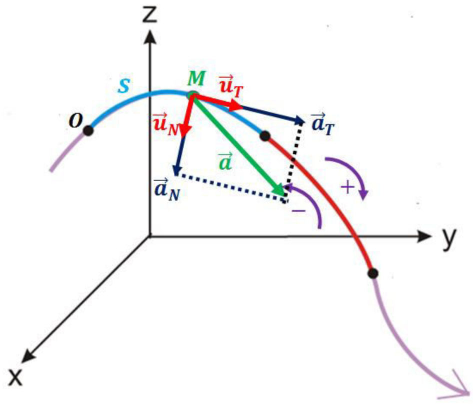
$\vec{u}_T$: Porté par la tangente à la trajectoire en M est orienté dans le sens positif

$\vec{u}_N$: Porté par la perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers l'intérieur

- Vitesse

$$\vec{V} = \frac{ds(t)}{dt}\vec{u}_T = V\,\vec{u}_T$$

- Accélération

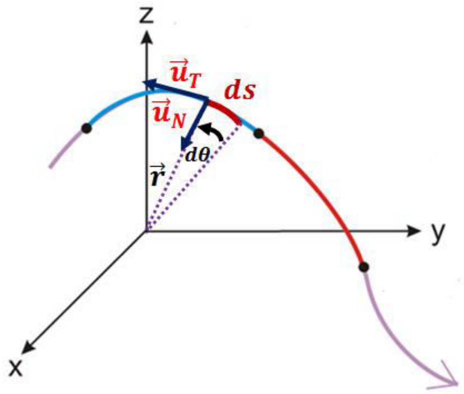


$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V\,\vec{u}_T)}{dt} = V\frac{d\,\vec{u}_T}{dt} + \vec{u}_T\frac{dV}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\vec{u}_T}{dt} = \dfrac{d\,\vec{u}_T}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{d\,\vec{u}_T}{d\theta} = \vec{u}_N \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + V\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N = a_T\,\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N$$

avec $\begin{cases} a_T = \dfrac{dV}{dt} \\ a_N = V\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \rightarrow a = \sqrt{{a_T}^2 + {a_N}^2}$



$$ds = r d\theta \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{r d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r}\frac{ds}{dt}=\frac{V}{r}$$

$$\begin{cases} a_T=\dfrac{dV}{dt} \\ a_N=\dfrac{V^2}{r} \end{cases}$$

$$\vec{a}=\frac{dV}{dt}\,\vec{u}_T+V\frac{V}{r}\,\vec{u}_N=\frac{dV}{dt}\,\vec{u}_T+\frac{V^2}{r}\,\vec{u}_N=a_T\,\vec{u}_T+a_N\,\vec{u}_N$$

$$\begin{cases} \vec{V}=V\,\vec{u}_T \\ \vec{a}=\dfrac{dV}{dt}\,\vec{u}_T+\dfrac{V^2}{r}\,\vec{u}_N \end{cases}\rightarrow \vec{V}\bigwedge\vec{a}=(V\,\vec{u}_T)\wedge\left(\frac{dV}{dt}\,\vec{u}_T+\frac{V^2}{r}\,\vec{u}_N\right)=\frac{V^3}{r}\,\vec{u}_B$$

$$\left\|\vec{V}\bigwedge\vec{a}\right\|=\frac{V^2}{r}\|\,\vec{u}_B\|$$

$$\|\,\vec{u}_T\|=\|\,\vec{u}_N\|=\|\,\vec{u}_B\|=1$$

$$r=\frac{V^3}{\|\vec{V}\wedge\vec{a}\|}$$

Exercice 25

Les coordonnées d'une particule mobile dans un repère fixe $\mathfrak{R}$ sont données en fonction du temps par

$$\begin{cases} x=t^2-4t+1 \\ y=-2t^4 \\ z=3t^2 \end{cases}$$

Dans un deuxième repère mobile $\mathfrak{R}'$, dont les axes sont parallèles deux à deux à ceux de $\mathfrak{R}$. Elles ont pour expressions

$$\begin{cases} x'=t^2+t+2 \\ y'=-2t^4+5 \\ z'=3t^2-7 \end{cases}$$

1. Calculer les accélérations $\vec{\gamma}$ et $\vec{\gamma'}$
2. Quel est le mouvement de $\mathfrak{R}'$ par rapport de $\mathfrak{R}$?

Exercice 25 Solution

Les coordonnées, les cordonnées de la vitesse et accélération de la particule dans le repère fixe (absolue)

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = t^2 - 4t + 1 \\ y = -2t^4 \\ z = 3t^2 \end{cases} \rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{v_a} = \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x = 2t - 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y = -8t^3 \\ \dfrac{dz}{dt} = v_z = 6t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_a} = (2t - 4)\,\vec{\imath} - 8t^3\,\vec{\jmath} + 6t\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \gamma_x = 2 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \gamma = -24t^2 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = \gamma_z = 6 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = 2\,\vec{\imath} - 24t^2\,\vec{\jmath} + 6\,\vec{k}$$

Les coordonnées, les cordonnées de la vitesse et accélération de la particule dans le repère fixe (relative)

$$\overrightarrow{OM'} = \begin{cases} x' = t^2 + t + 2 \\ y' = -2t^4 + 5 \\ z' = 3t^2 - 7 \end{cases} \rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt} = \overrightarrow{v_r} = \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = v_x{}' = 2t + 1 \\ \dfrac{dy'}{dt} = v_y{}' = -8t^3 \\ \dfrac{dz'}{dt} = v_z{}' = 6t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_r} = (2t + 1)\,\vec{\imath'} - 8t^3\,\vec{\jmath'} + 6t\vec{k'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt}\begin{cases} \dfrac{dv_x{}'}{dt} = \gamma_x = 2 \\ \dfrac{dv_y{}'}{dt} = \gamma = -24t^2 \\ \dfrac{dv_z{}'}{dt} = \gamma_z = 6 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = 2\,\vec{\imath'} - 24t^2\,\vec{\jmath'} + 6\,\vec{k'}$$

Les axes de $\mathfrak{R}'$, sont parallèles deux à deux à ceux de $\mathfrak{R}$ $\vec{\imath} = \vec{\imath'}$,$\vec{\jmath} = \vec{\jmath'}$ *et* $\vec{k} = \vec{k'}$

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \rightarrow \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_r}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \begin{cases} 2t - 4 - (2t + 1) = -5 \\ -8t^3 - (-8t^3) = 0 \\ 6t - (6t) = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vitesse d'entraînement $\|\overrightarrow{v_e}\| = 5 = constante$ donc le mouvement uniforme.

$\vec{v_e} = -5\,\vec{\imath}$: Le repère $\mathfrak{R}'$ est en translation rectiligne parallèlement à **OX** dans le sens des **x** négatifs.

Exercice 26

Un train animé d'une vitesse $\vec{v}$ traverser une gare. A l'instant $t = 0$, une ampoule P se détacher du plafond d'un de ses compartiments. Le mouvement de **P** est alors observé par un voyageur du train et par le chef de gare immobile sur le quai.

Décrire le mouvement de **P** pour chacun des observateurs.

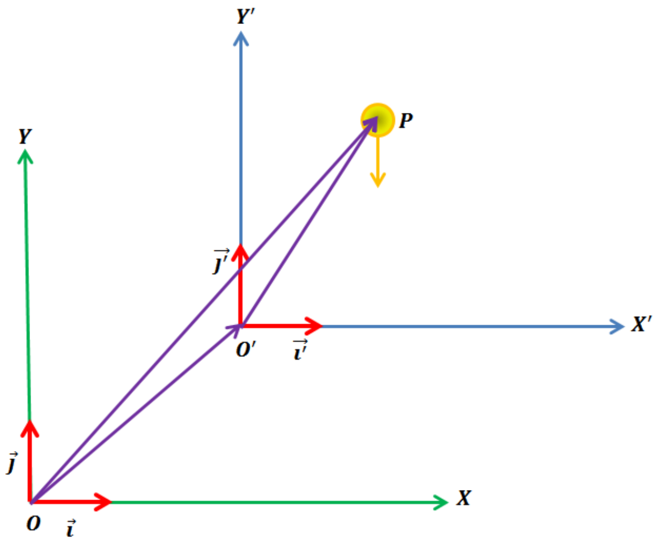
Exercice 26 solution

Repère mobile $(o', \vec{\imath'}, \vec{\jmath'})$lié au train (voyageur) : relative

Repère fixe $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ lié à la gare (chef de gare) : absolue

$$\vec{\imath} = \vec{\imath'}$$

$$\vec{\jmath} = \vec{\jmath'}$$



- **Vitesse relative**

$$\vec{a}_r = (\vec{a}_r)_x + (\vec{a}_r)_y$$

$$\vec{a}_r = (a_r)_x\,\vec{\imath'} + (a_r)_y\,\vec{\jmath'}$$

$$(a_r)_x = 0 \rightarrow \vec{a}_r = (\vec{a}_r)_y$$

$$\vec{a}_r = -g\,\vec{\jmath'} \rightarrow a_a = -g = \frac{dv_r}{dt} \rightarrow dv_r = -g\,dt$$

$$\int dv_r = \int_0^t -g\,dt \rightarrow v_r = -gt + C$$

A $t = 0, \; v_0 = 0$

$$v_r = -gt \rightarrow \vec{v}_r = -gt\,\vec{j'}$$

$$\vec{v}_r = -gt\,\vec{j'}$$

$$\vec{v}_r = \frac{d\left(\overrightarrow{O'P}\right)_y}{dt} = -gt\,\vec{j'} \rightarrow \frac{d(O'P)_y}{dt} = -gt$$

$$d(O'P)_y = -gt\,dt \rightarrow \int d(O'P)_y = \int_0^t -gt\,dt$$

$$(O'P)_y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1$$

$$t = 0, \qquad y_0 = 0$$

$$(O'P)_y = y_P = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$\vec{y}_P = -\frac{1}{2}gt^2\vec{j'}$$

Le mouvement de **P**, par rapport à un voyageur, est donc une chute libre.

- **Vitesse absolue** $\vec{V}_a = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}$
- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$
- $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

Avec $\vec{V}_e$ vitesse d'entraînement

$$\vec{V}_e = \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \frac{d(OO')}{dt}\vec{\imath} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}$$

$$\frac{dx}{dt} = v \rightarrow dx = v\,dt \rightarrow \int dx = \int_0^t v\,dt \rightarrow x = vt + C_2$$

A $t = 0, \; x_0 = 0$

$$x = v\,t \rightarrow \vec{x} = v\,t\,\vec{\imath}$$

Le mouvement de **P**, par rapport au chef de gare est :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

$$\vec{V}_a = V_e\vec{\imath} + V_r\vec{\jmath}$$

$$\vec{V}_a = v\,\vec{\imath} + -gt\;\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} y_P = -\dfrac{1}{2} g t^2 \\ x = v\,t \rightarrow t = \dfrac{x}{v} \end{cases} \rightarrow y_P = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v}\right)^2$$

$$y_P = -\frac{1}{2}\frac{g}{v^2}\ x^2$$

Le mouvement de **P** est aprabolique par rapport au chef de gare

CHAPITRE : III Dynamique du point

La dynamique en physique est la science qui étudie la relation entre le corps en mouvement et les causes qui provoquent ce mouvement. Elle prédit aussi le mouvement du corps situé dans un milieu déterminé.

La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

III.1.Première loi de Newton Principe d'inertie

Les systèmes soumis à des forces extérieures dont la somme vectorielle est nulle sont appelés systèmes pseudo-isolés (ou isolés s'ils ne subissent aucune force – cas idéal).

Le centre d'inertie d'un système isolé est en mouvement rectiligne et uniforme ou au repos dans un référentiel galiléen.

De manière équivalente :

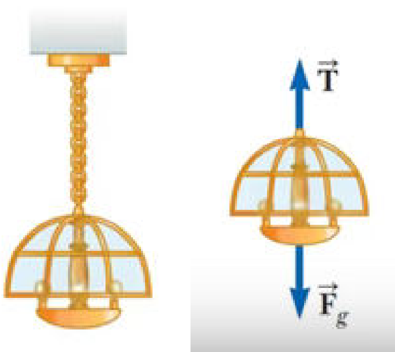
$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{v} = cte)$$

On appelle référentiel galiléen un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Un référentiel n'est donc pas galiléen s'il tourne, accélère ou freine par rapport à un référentiel galiléen.

Exemple

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{T} + \vec{F}_g = \vec{0} \rightarrow \vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$T - Mg = 0 \rightarrow T = Mg$$



III.2. Deuxième loi de Newton Principe fondamental de la dynamique (PFD)

III.2.1. Définition d'une force

On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de produire un mouvement ou encore de créer une déformation.

La force est représentée par un vecteur caractérisé par :

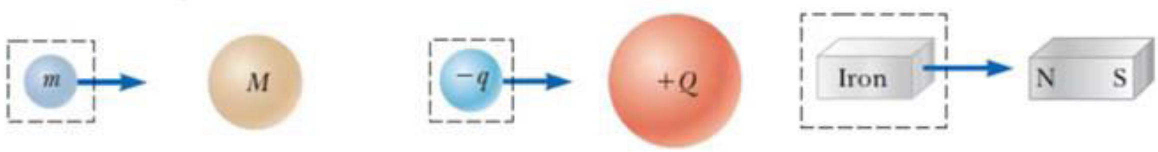
- son point d'application (le point matériel)
- sa direction
- son sens
- son intensité

L'intensité d'une force se mesure à l'aide d'un dynamomètre et s'exprime en Newton (N) dans le système international d'unités.

Un point matériel est dit isolé s'il n'est soumis à aucune interaction mécanique avec l'extérieur. C'est le cas d'un corps seul dans l'espace loin de toute autre masse.

III.2.2. Forces à distance

Il arrive souvent que deux corps interagissent, bien qu'ils soient séparés par un espace.



Dans un référentiel Galiléen la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel :

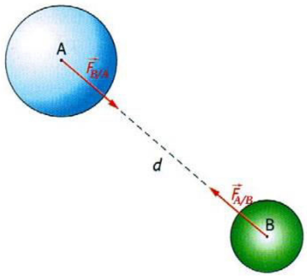
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

a) Interaction de gravitation et poids

Deux corps **A** et **B**, assimilables à des points, s'attirent mutuellement. L'attraction qu'ils exercent l'un sur l'autre est : Proportionnelle à leur masse m_A et m_B. Inversement proportionnelle au carré de la distance d entre les deux points.

Les forces qui modélisent cette interaction mutuelle a les caractéristiques suivantes :

- Leur point d'application est tel que la force exercée par **A** sur **B** s'applique en **B** et la force exercée par **B** sur **A** s'applique en **A**.
- Direction : droite **AB**
- Sens : vers le centre attracteur



- Valeur : $F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{m_A.m_B}{d^2}$ et G est la constante universelle de la gravitation

  ($G = 6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2.\ kg^{-2}$)

$$\vec{F} = G\frac{m_A.m_B}{d^2}\vec{u}$$

La force de gravitation intervient pour expliquer la formation des planètes, des étoiles et des galaxies ainsi que leur mouvement.

b) Interaction coulombienne, force électrostatique

Considérons deux charges électriques et ponctuelles q_1 et q_2 , placé dans le vide. La charge q_1 exerce sur q_2 une force $\vec{F}$ qui peut être attractive ou répulsive suivant le signe du produit $q_1 q_2$.

- **Valeur :** $F_{A/B} = F_{B/A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A.q_B}{d^2} = k\frac{q_A.q_B}{d^2}$ **avec** $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 SI$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A.q_B}{d^2}\vec{u}$$

ε_0 est appelée permittivité du vide

c) Force magnétique

Une charge q qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur $\vec{B}$ subit une force magnétique appelée force de Lorentz $\vec{f}_m$ donnée par :

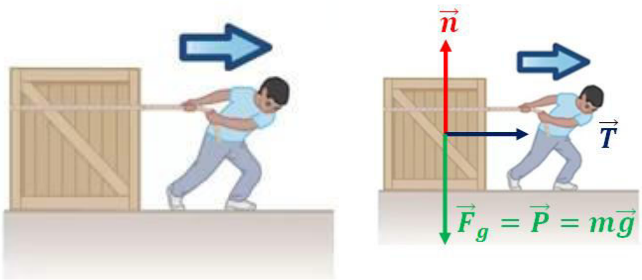
$$\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

III.2.3. Forces de contact

Elles apparaissent chaque fois que deux corps sont en contact.

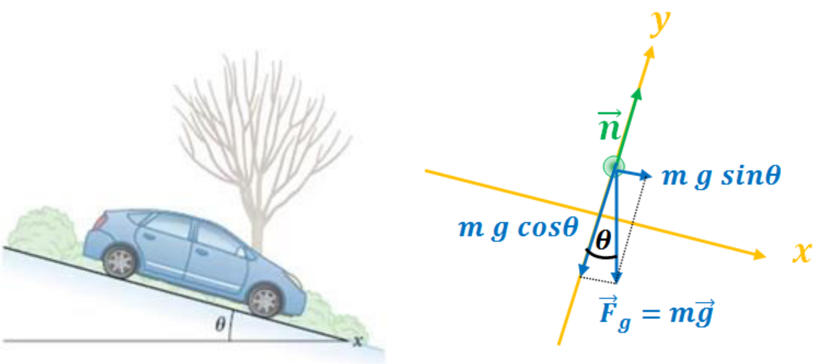
Exemples

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{T} + \vec{n} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

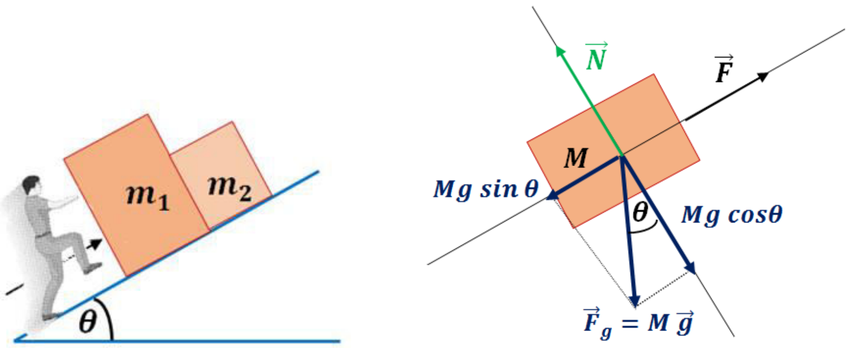


$$\sum F_x = ma_x \rightarrow T = ma_x \rightarrow a_x = \frac{T}{m}$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow n - F_g = 0 \rightarrow n = F_g$$



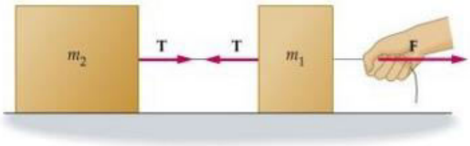
$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = m\,a_x \rightarrow mg\sin\theta = m\,a_x \\ \sum F_y = m\,a_y = 0 \rightarrow n - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

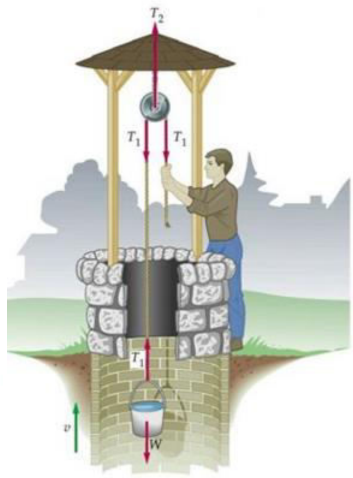


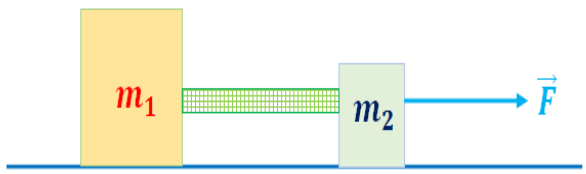
$$M = m_1 + m_2$$

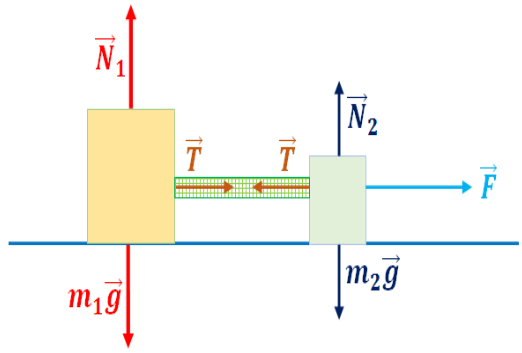
$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = M\,a_x \rightarrow F - Mg\sin\theta = M\,a_x \\ \sum F_y = M\,a_y = 0 \rightarrow N - Mg\cos\theta = 0 \rightarrow N = Mg\cos\theta \end{cases}$$

III.2.4.Force de Tension









$$\begin{cases} \sum F_x\,(m_1) = m_1 a_x \rightarrow T = m_1 a_x \\ \sum F_y\,(m_1) = 0 \rightarrow N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$$

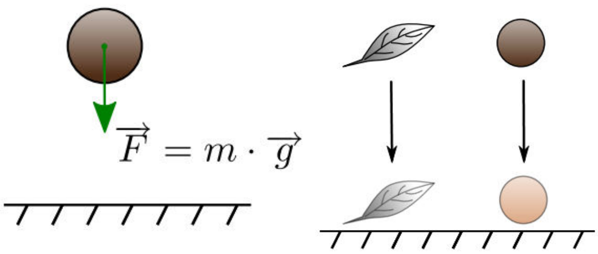
$$\sum F_x\,(m_2) = m_1 a_x \rightarrow F - T = m_2 a_x$$

$$\sum F_y\,(m_2) = 0 \rightarrow N_2 - m_2 g = 0$$

Frottement dans l'air

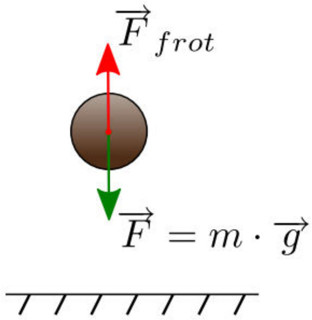
Dans le vide

- Seule la force d'attraction terrestre agit sur l'objet.
- Tous les objets tombent avec la même accélération



Dans l'air

En présence d'air, une force de frottement apparait, dirigée dans le sens opposé au mouvement.



Cette force de frottement dépend d'un grand nombre de paramètres :

- la densité du fluide
- la viscosité du fluide
- la surface effective de l'objet
- la forme de l'objet
- la vitesse de l'objet

III.2.5. Forces de frottement dans un fluide (visqueux)

Frottements linéaires

Dans le cas d'une vitesse faible, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -k\vec{v}$, avec k est une constante qui dépend de la nature du fluide et des caractéristiques de l'objet.

Frottements quadratiques

Dans le cas d'une vitesse importante, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse :$\vec{f} = -k'v\vec{v}$ avec k' est aussi une constante qui dépend du fluide et des caractéristiques de l'objet mais elle prend une autre forme que **k** : $k' = \frac{1}{2}\eta C_x S$,avec η la viscosité du fluide, S la surface frontale de l'objet et C_x le coefficient de trainée qui dépend de la géométrie du corps.

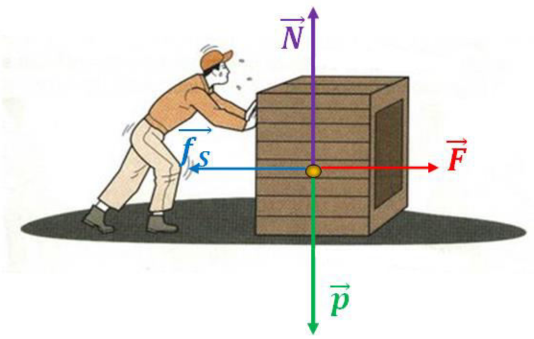
III.2.6. Forces de frottement (friction) statique et cinétique

Lorsqu'il y a deux objets en contact, il y a du frottement de surface. Par contre, on peut définir deux types de frottement : statique et cinétique.

- Statique : Force de frottement agissant sur un objet immobile par rapport à la surface de contact.
- Cinétique : Force de frottement agissant sur un objet en mouvement par rapport à la surface de contact.

Force de frottement statique

On pose sur une table horizontale un objet de masse m. Si l'objet est au repos, il est soumis à deux forces, son poids $\vec{P}$ et la réaction de la table $\vec{N}$. Ensuite, on tente de le déplacer en appliquant la force horizontale $\vec{F}$: une force de frottement statique $\vec{f}$ tend à s'y opposer.



Le rôle du frottement statique est d'annuler l'action des autres forces voulant provoquer un mouvement parallèle à la surface de contact jusqu'à une valeur limite $f_{s_{max}}$:

$$\vec{f}_{s_{max}} = \mu_s \vec{N}$$

- $\vec{f}_{s_{max}}$: Force de frottement statique maximale **(N)**
- μ_s: coefficient de frottement statique
- $\vec{N}$: Force normale **(N).**
- Le corps est au repos :$\sum \vec{F} = \vec{0}$

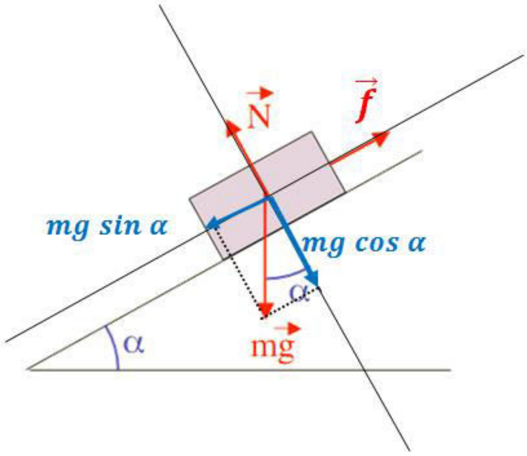
Le frottement cinétique

Plus la force normale sera grande, plus le frottement cinétique sera grand. Ce frottement s'applique seulement si l'objet subissant le frottement est en mouvement par rapport à sa surface de contact :

$$\vec{f}_c = \mu_c \vec{N}$$

$$\begin{cases} f_c = \mu_c N \\ N = mg \end{cases} \rightarrow f_c = \mu_c mg$$

- $\vec{f}_c$: Force de friction cinétique **(N).**
- μ_c : Coefficient de frottement cinétique (pas d'unité).
- $\vec{N}$: Force normale **(N).**



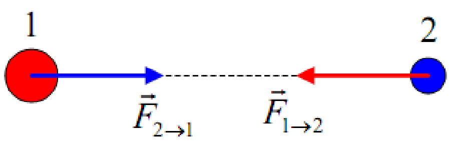
$$\begin{cases} f_c = \mu_c N \\ N = mg \cos \alpha \end{cases} \rightarrow f_c = \mu_c mg \cos \alpha$$

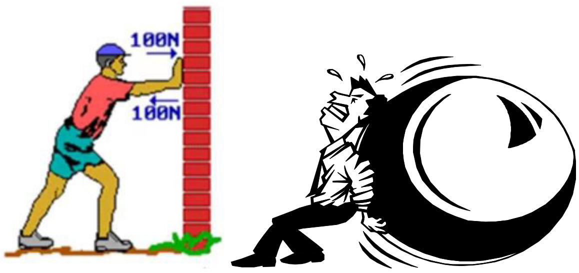
III.3. Troisième loi de Newton Principe de l'action et de la réaction

Contrairement aux deux premières lois de Newton, cette troisième loi ne relie pas le mouvement aux forces : elle concerne deux systèmes en interaction.

Si un objet **(1)** exerce une force $\vec{F}_{1\to 2}$ sur un autre objet **(2)**, ce dernier exerce en retour une force $-\vec{F}_{2\to 1}$ d'intensité égale mais de sens opposée:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

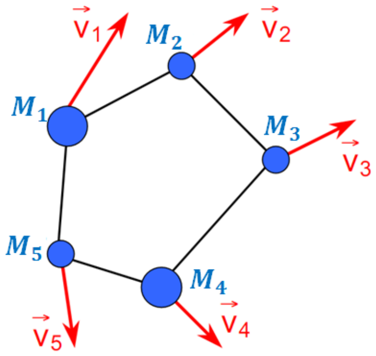




III.4. Notion de quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est : $\vec{p} = m\vec{v}$

Pour un système de **N** points matériels de masse $\boldsymbol{m_i}$ et de vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}_i$



La quantité de, mouvement totale est :

$$\vec{p} = \sum_i^N \vec{p}_i = \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

Cette grandeur prend en compte la vitesse mais aussi l'inertie du corps (sa masse).

Le point **O** étant choisi comme origine fixe, on peut écrire :

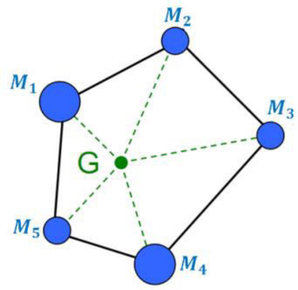
$$\vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}$$

d'où

$$\vec{p} = \sum_i^N m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \sum_i^N \frac{d\left(m_i \overrightarrow{OM_i}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i^N m_i \overrightarrow{OM_i}\right)$$

On introduit la notion de barycentre / centre de gravité : le point **G** est défini par ;

$$\sum_i^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$



$$\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}$$

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i^N m_i\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i^N m_i \overrightarrow{OG} + \underbrace{\sum_i^N m_i \overrightarrow{GM_i}}_{\vec{0}}\right)$$

$$\vec{p} = \sum_{i}^{N} m_i \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_{i}^{N} m_i \overrightarrow{v_G}$$

$\overrightarrow{v_G}$: est la vitesse du barycentre / centre de gravité

La première loi de Newton peut s'énoncer en termes de quantité de mouvement :

Dans un référentiel d'inertie, un système isolé (qui n'est soumis à aucune force extérieure et n'est soumis qu'aux forces intérieures entre points matériels du système), ***la quantité de mouvement totale $\vec{p}$ est constante (conservé),*** soit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

« La dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme vectorielle des forces qui lui sont appliquées. »

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Cette équation s'appelle « équation du mouvement »

- Cas de la masse constante :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

- Cas de la masse variable **:**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Si la masse du système est constante, sa vitesse l'est aussi : le mouvement du système est alors rectiligne et uniforme.

Si le système est composé de deux objets de masse m_1 et m_2 , de vitesses respectives $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, alors la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

III.4.1.Domaine de validité de la conservation de la quantité de mouvement

En principe, la quantité de mouvement n'est conservée qui si la somme des forces extérieures est nulle ; dans la pratique, c'est rarement le cas. On peut quand même considérer que la quantité de mouvement est conservée dans le cas où la somme des forces extérieures est non nulle si on considère un évènement dont la durée est très courte. En effet, si la durée Δt de l'événement (collision, choc, explosion, désintégration, etc.) est très courte, alors on a :

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$

Si $\Delta t \cong 0$, alors : $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \cong 0$ même si $\vec{F} \neq \vec{0}$

III.4.2.Chocs élastiques – chocs inélastique

Quand deux solides ou deux particules entrent en collision, deux principaux cas de figures surviennent :

- choc élastique avec conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système (Cette condition (la conservation de l'énergie cinétique) est remplie si le travail des forces non conservatives (tel le frottement) peut être négligé ; il ne doit pas y avoir de déformation permanente des objets mis en cause dans la collision.
- choc inélastique avec conservation de la quantité de mouvement et non-conservation de l'énergie cinétique du système.

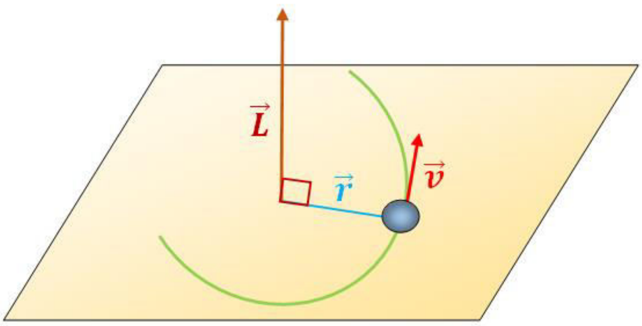
III.5.Moment cinétique

Soit une particule de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$ en rotation par rapport à un point **O**.

Le moment cinétique de m par rapport à **O** est :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v} \end{cases} \rightarrow \vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$



III.5.1.Théorème du moment cinétique

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

La dérivée du moment cinétique d'une particule, par rapport au temps est égale au moment de la force qui lui est appliquée au même point.

III.6.Exercices corrigés

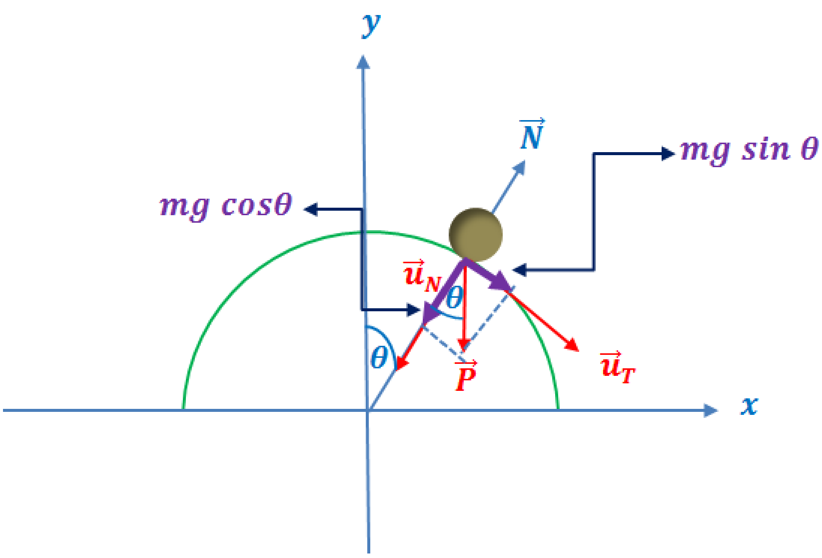
Exercice 1

On lâche sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$ une masse ponctuelle m en un point M de la face convexe d'une sphère de centre O et de rayon sur laquelle elle glisse sans frottement.

- En utilisant le principe fondamental de la dynamique, trouver : les équations différentielles du mouvement.
- Trouver l'expression de la force de réaction de la sphère sur la masse
- Déterminer l'angle pour lequel la masse quitte la surface de la sphère. Déduire dans cette position la vitesse du point matériel.

Exercice 1 Solution

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m(a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N)$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\left(\frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{r}\vec{u}_N\right)$$

$$(mg\sin\theta\,\vec{u}_T + mg\cos\theta\,\vec{u}_N) - N\,\vec{u}_N = m\left(\frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{r}\vec{u}_N\right)$$

$$mg\sin\theta\,\vec{u}_T + (mg\cos\theta - N)\vec{u}_N = m\left(\frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{r}\vec{u}_N\right)$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta = m\dfrac{dV}{dt} \rightarrow dV = g\sin\theta\ dt \\ mg\cos\theta - N = m\dfrac{V^2}{r} \rightarrow N = mg\cos\theta - m\dfrac{V^2}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dV\,\dot{\theta} = g\sin\theta\,\dot{\theta}dt \ \rightarrow dV\dfrac{V}{r} = -g\dfrac{d(cos\theta)}{dt}dt \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \dfrac{V}{r} \end{cases}$$

$$dV\frac{V}{r} = -g\ d(cos\theta) \rightarrow V\ dV = -grd(cos\theta)$$

à $t = 0$, $\theta = 0$, $V = 0$

$$\left[\frac{V^2}{2}\right]_0^V = -gr[\cos\theta]_0^\theta$$

$$\frac{V^2}{2} = gr(1 - \cos\theta)$$

$$\boldsymbol{V^2 = 2gr(1 - \cos\theta)}$$

$$N = mg\cos\theta - m\frac{V^2}{r} \rightarrow N = mg\cos\theta - m\frac{\boldsymbol{2gr(1 - \cos\theta)}}{\mathrm{r}}$$

$$N = m[g\cos\theta - 2g(1 - \cos\theta)]$$

$$N = m[g\cos\theta - 2g + 2g\cos\theta]$$

$$\boldsymbol{N = mg[3\cos\theta - 2]}$$

Lorsque la masse quitte le surface $N = 0$

$$N = 0 \rightarrow 3\cos\theta - 2 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = arccos\left(\frac{2}{3}\right) \sim 48°$$

La vitesse dans cette position est :

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{V^2 = 2gr(1 - \cos\theta)}$$

$$\boldsymbol{V^2 = 2gr\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}gr}$$

$$\boldsymbol{V = \sqrt{\frac{2}{3}gr}}$$

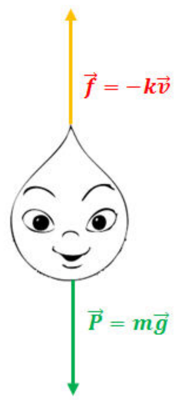
Exercice 2

Une goutte de pluie de masse m, supposée constante, tombant dans l'air est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$

- Ecrire l'équation différentielle que satisfait la vitesse v de la goutte de pluie.
- Déduire la vitesse limite (sans résoudre l'équation différentielle).

Exercice 2 Solution

En projetant dans le sens du mouvement (l'axe Oz vertical ascendant) :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{p} + \vec{f} \ = m\vec{a}$$

Le PFD donne : $m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a}$

$$-mg - kv \ = ma \rightarrow m\frac{dv}{dt} + kv = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = -g$$

La vitesse limite est obtenue lorsque l'accélération a la goutte de pluie est nulle

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

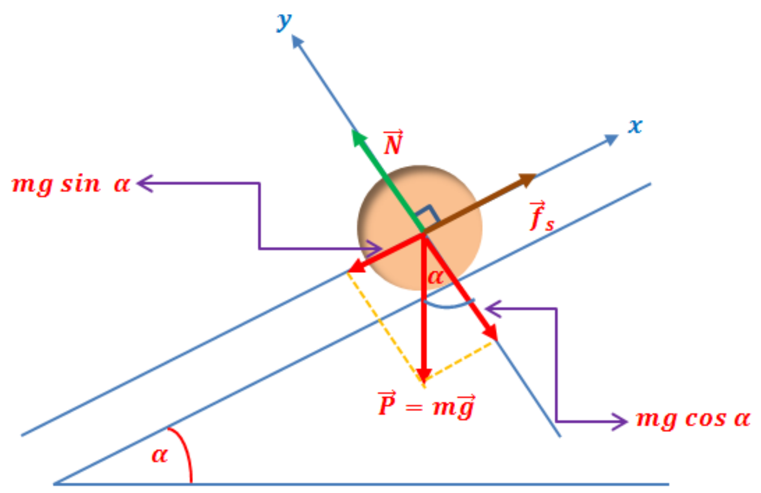
$$\frac{k}{m}v_l = -g \rightarrow v_l = -\frac{mg}{k}$$

$$v_l = -\frac{mg}{k}$$

Exercice 3

Soit une pièce de monnaie de masse m immobile sur un livre incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Lorsque l'angle α augmente jusqu'à 15° la pièce monnaie est glissée le long du livre. Déterminer le coefficient de frottement statique.

Exercice 3 Solution



$$\vec{f}_{s_{max}} = \mu_S \vec{N} \rightarrow f_{s_{max}} = \mu_S\, N$$

$$\mu_S \rightarrow \frac{f_{s_{max}}}{N}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow f_{s_{max}} - mg\sin\alpha = 0 \rightarrow f_{s_{max}} = mg\sin\alpha \\ \sum F_y = 0 \rightarrow N - mg\cos\alpha = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha \end{cases} \rightarrow \frac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \mu_S$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mu_S = tang\alpha$$

$$\mu_S = tang15° = 0.27$$

Exercice 4

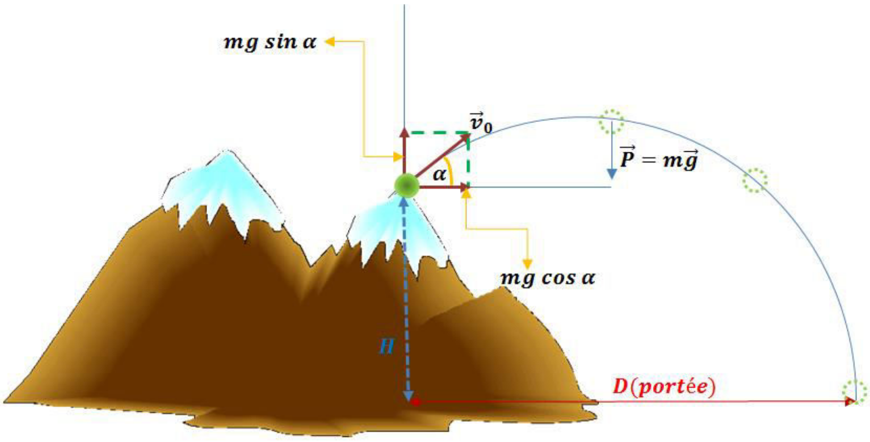
On tire depuis le sommet d'une colline de hauteur H un projectile avec une vitesse $\vec{v}_0$, faisant un angle α avec l'horizontale.

- Déterminer les équations horaires du mouvement du projectile

- Calculer la distance horizontale D du canon ou le projectile touche le sol
- calculer la hauteur maximale H du projectile au-dessus du sol .

  AN : $H = 245\,m\,,\; g = 9.8\,m\,s^{-2}\,, \alpha = 30°, v_0 = 196\,m\,s^{-1}$

Exercice 4 Solution



Coordonnées du vecteur vitesse initiale sont

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\,\alpha \end{cases}$$

Le projectile, en chute libre, ne subit que son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$; cette force est verticale, vers le bas et de valeur constante $\vec{a} = \vec{g}$

Vecteur vitesse instantanée

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{intégrer} \begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g\,.\,t + C_2 \end{cases}$$

oùC_1 et C_2 sont des constantes d'intégration, que l'on déterminer par exemple à l'aide des conditions initiales,

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin\,\alpha = -g\,.0 + C_2 = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -g\,.t + v_0 \sin\,\alpha \end{cases}$$

Vecteur position

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'obtiennent par intégration sur le temps,

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ y_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \xrightarrow{intégrer} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\,.t\; + C_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\,.\;t^2 + v_0 \sin\,\alpha\,.t + C_4 \end{cases}$$

C_3etC_4sont des constantes d'intégration que l'on peut déterminer à l'aide des conditions initiales : si M est initialement à l'origine O, alors $C_3 = C_4 = 0$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \, . \, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \, . \, t^2 + v_0 \sin \alpha \, . \, t \end{cases}$$

Lorsque le projectile touche le sol en $P(x_P, y_P)$ avec $y_P = -H = -245m$

$$-245 = -\frac{1}{2} 9{,}8 \, . \, t^2 + v_0 \sin \alpha \, . \, t$$

$$-245 = -4{,}9 \, . \, t^2 + 98. t$$

$$t^2 - 20\, t - 50 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4(-50) = 600$$

$$t = \frac{20 + \sqrt{600}}{2} \rightarrow t = 22.25\, s$$

$$x_p(t) = v_0 \cos \alpha \, . \, t = D$$

$$x_p = 196 \, \cos 30 \, . \, 22.25 = 3776.74m$$

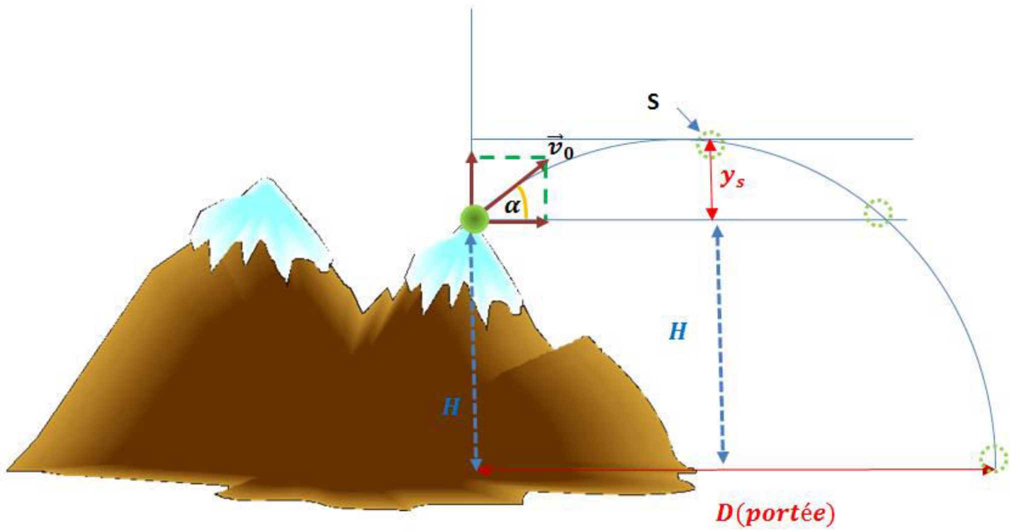
$$x_p \sim 3777 \, m$$

Au sommet de la trajectoire, la composante verticale de la vitesse s'annule : $v_y(t_s) = 0$

D'après l'équation horaire de cette grandeur, le sommet est atteint à la date

$$v_y(t_s) = 0 \rightarrow -g \, . \, t_s + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{196 \sin 30}{9{,}8} = 10\, s$$



$$y(t) = -\frac{1}{2} g \, . \, t^2 + v_0 \sin \alpha \, . \, t$$

$$y_s = -\frac{1}{2}9.8\,.\,(10)^2 + 196\ \sin\ 30\,.\,(10)$$

$$y_s = -490 + 980 = 490m$$

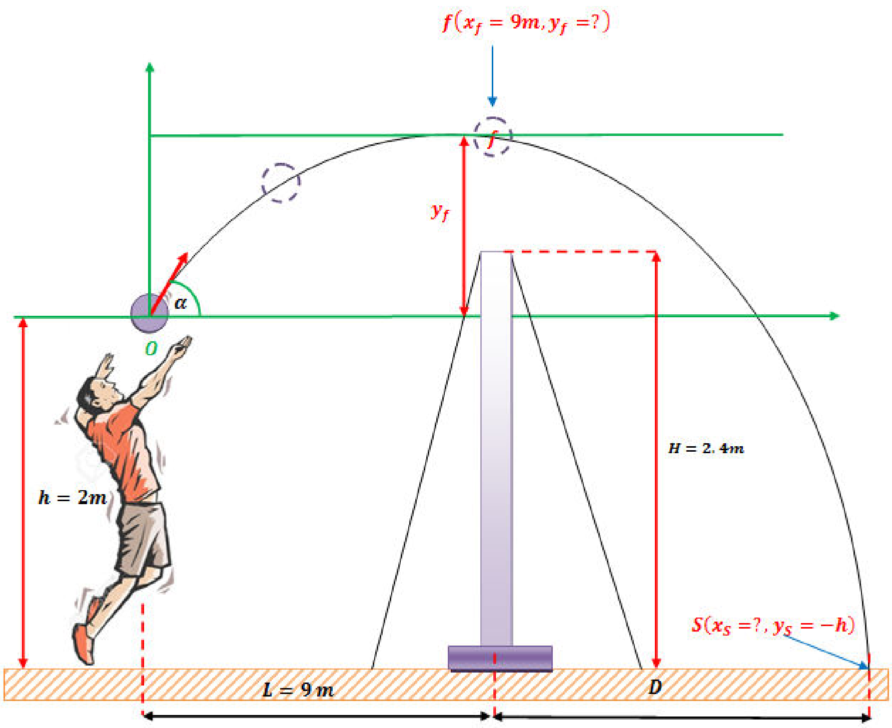
La hauteur maximale est :

$$H_{max} = H + y_s$$

$$H_{max} = 240 + 490 = 730\ m$$

Exercice 5

Au volley-ball, le joueur frappe le ballon à la hauteur $\boldsymbol{h = 2m}$ du sol et à la distance $\boldsymbol{L = 9\ m}$ du filet. La hauteur du filet est $\boldsymbol{H = 2.4\,m}$. La vitesse initiale $\boldsymbol{v_0}$ a une valeur $\boldsymbol{v_0 = 14\,m\,s^{-1}}$ et fait un angle $\boldsymbol{\alpha = 30\,°}$ avec l'horizontale. On négligera toutes actions de l'air.



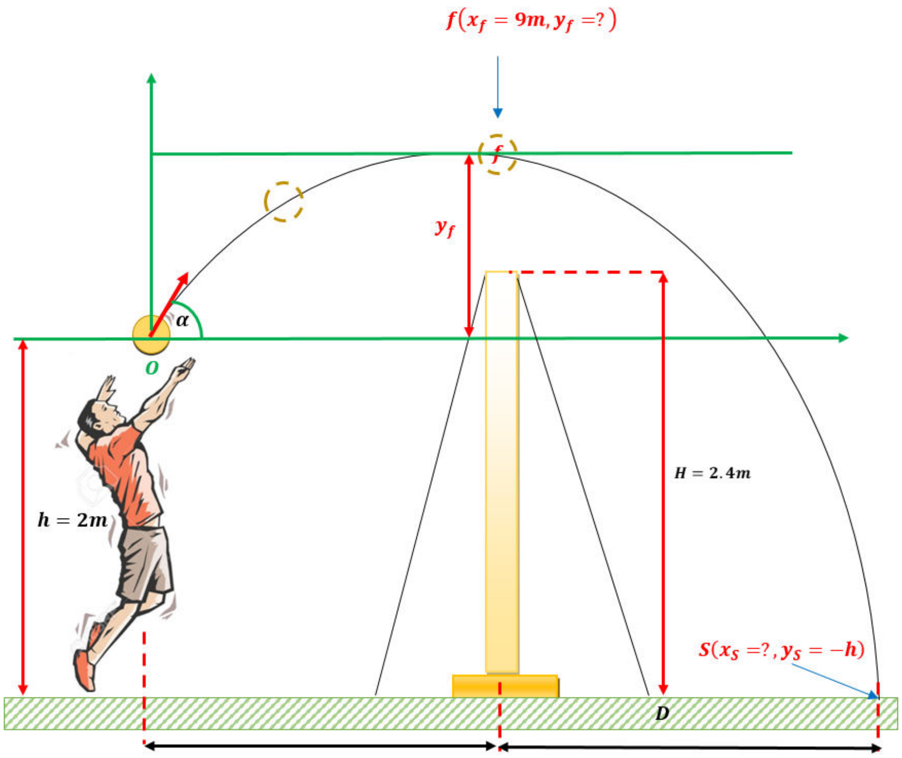
1/ Déterminer les équations horaires du mouvement du ballon

2/ déduire l'équation de la trajectoire du ballon

3/ La balle passera-t-elle au-dessus du Filet ? Justifier.

A quelle distance du filet la balle atterrira ?

Exercice 5 Solution



1/

Coordonnées du vecteur vitesse initiale sont

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\ \alpha \end{cases}$$

Le projectile, en chute libre, ne subit que son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$; cette force est verticale, vers le bas et de valeur constante $\vec{a} = \vec{g}$

Vecteur vitesse instantanée

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{intégrer} \begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g\ .\ t + C_2 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration, que l'on déterminer par exemple à l'aide des conditions initiales,

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin\ \alpha = -g\,.0 + C_2 = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -g\,.t + v_0 \sin\ \alpha \end{cases}$$

Vecteur position

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'obtiennent par intégration sur le temps,

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ y_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \xrightarrow{intégrer} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\,.t\ + C_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\,.\ t^2 + v_0 \sin\ \alpha\,.t + C_4 \end{cases}$$

C_3 et C_4 sont des constantes d'intégration que l'on peut déterminer à l'aide des conditions initiales : si M est initialement à l'origine O, alors $C_3\ = C_4\ = 0$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\,.t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\,.\ t^2 + v_0 \sin\ \alpha\,.t \end{cases}$$

2/

Equation cartésienne de la trajectoire

L'équation horaire $x(t) = v_0 \cos\alpha\,.t$ permet d'exprimer le temps $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$y = -\frac{1}{2}g\,.\frac{x^2}{{v_0}^2\ cos^2\,\alpha} + v_0 \sin\ \alpha\,.\frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}g\,.\frac{x^2}{{v_0}^2\ cos^2\,\alpha} + x \tan\ \alpha$$

$$y = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\ cos^2\,\alpha}x^2 + x \tan\ \alpha$$

3/

$$y_f = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\ cos^2\,\alpha}{x_f}^2 + x_f \tan\ \alpha \rightarrow y_f = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\ cos^2\,\alpha}L^2 + L \tan\ \alpha$$

$$y_f = -\frac{9{,}8}{2\ (14)^2\ cos^2\,30}9^2 + 9\ \tan\ 30 == -\frac{793.8}{294} + 9\ \ 0.58$$

$$y_f = -2.7 + 5.20 \rightarrow y_f = 2.5\ m$$

4/

$y_f > H$; La balle passera au dessus du filet

Lorsque la balle touche le sol $S\ (x_S, y_S = -h = -2m\ )$

$$-h = -\frac{g}{2\, {v_0}^2\ cos^2\, \alpha}{x_S}^2 + x_S \tan\, \alpha$$

$$-2 = -\frac{9{,}8}{2\,(14)^2\ cos^2\, 30}{x_S}^2 + x_S \tan\, 30$$

$$-2 = -\frac{9{,}8}{2\,(14)^2\ cos^2\, 30}{x_S}^2 + x_S \tan\, 30$$

$$0 = -\frac{9{,}8}{294}{x_S}^2 + x_S \tan\, 30 + 2 \rightarrow 0 = -{x_S}^2 + \frac{294}{9{,}8} x_S \tan\, 30 + \frac{294}{9{,}8} 2$$

$$0 = -{x_S}^2 + 17.87\, x_S + 60$$

$$0 = {x_S}^2 - 17.87\, x_S - 60 = 0$$

$$\Delta = (-17.87)^2 - 4(-60) = 559$$

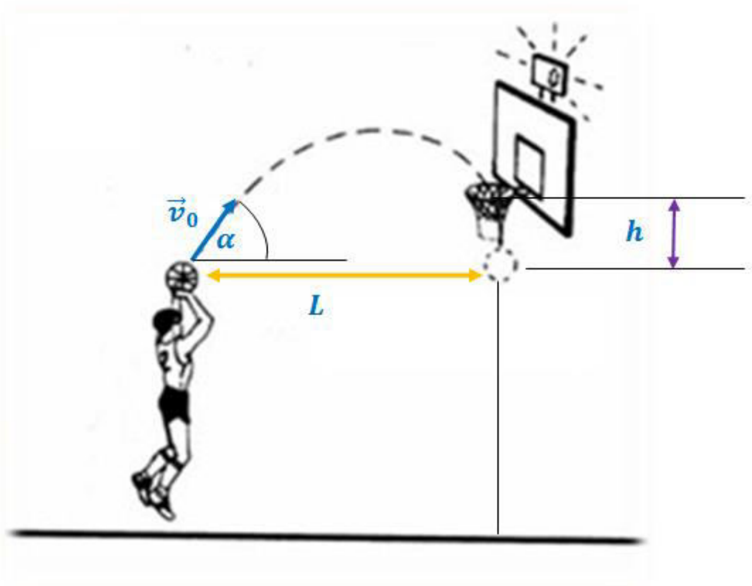
$$x_S = \frac{17.87 + \sqrt{559}}{2} \rightarrow x_S = 20.76\, m$$

la distance de filet est :

$$D = x_S - L \rightarrow D = 20.76 - 9 = 11.76\, m$$

Exercice 6

Un joueur de basket lance le balan vers un panier avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ contenue dans le plan vertical et formant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale. Le panier est situé à une distance horizontale $L = 3.1\, m$ et à une hauteur $h = 1\, m$ au dessus du point d'envoi. On négligera les forces de frottement



- 1/ Déterminer les équations horaires du mouvement du ballon
- 2/ déduire l'équation de la trajectoire du ballon

- Montrer que le module de la vitesse initiale nécessaire pour réussir un panier est donnée par

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\,L}{2\cos^2\alpha\left(\tan\alpha - \frac{h}{L}\right)}}$$

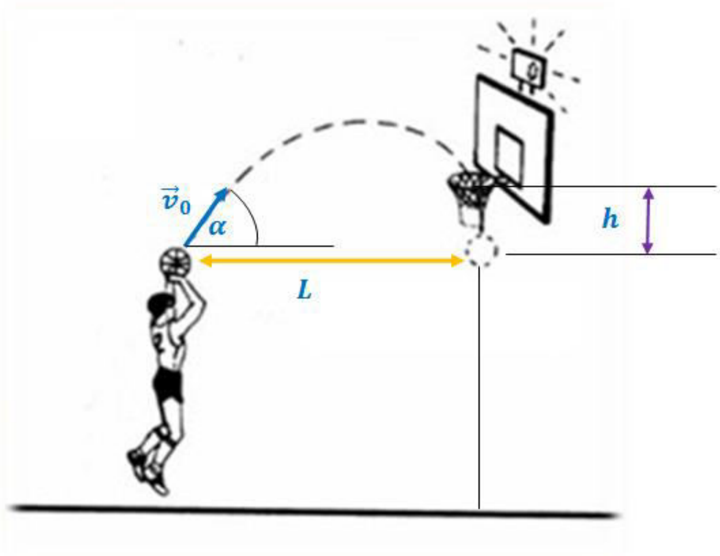
On donne $g = 9.8\ ms^{-2}$

Exercice 6 Solution

Coordonnées du vecteur vitesse initiale sont

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\ \alpha \end{cases}$$

Le projectile, en chute libre, ne subit que son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$; cette force est verticale, vers le bas et de valeur constante $\vec{a} = \vec{g}$



Vecteur vitesse instantanée

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{intégrer} \begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g\ .\ t + C_2 \end{cases}$$

oùC_1 et C_2 sont des constantes d'intégration, que l'on déterminer par exemple à l'aide des conditions initiales,

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin\ \alpha = -g\ .0 + C_2 = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -g\ .t + v_0 \sin\ \alpha \end{cases}$$

Vecteur position

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'obtiennent par intégration sur le temps,

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ y_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases} \xrightarrow{intégrer} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \,.\, t \; + C_3 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g \,.\, t^2 + v_0 \sin\,\alpha \,.\, t + C_4 \end{cases}$$

C_3etC_4sont des constantes d'intégration que l'on peut déterminer à l'aide des conditions initiales : si M est initialement à l'origine O, alors $C_3 \; = \; C_4 \; = 0$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \,.\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \,.\, t^2 + v_0 \sin\,\alpha \,.\, t \end{cases}$$

2/

Equation cartésienne de la trajectoire

L'équation horaire $x(t) = v_0 \cos\alpha \,.\, t$ permet d'exprimer le temps $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

$$y = -\frac{1}{2} g \,.\, \frac{x^2}{{v_0}^2\, cos^2\,\alpha} + v_0 \sin\,\alpha \,.\, \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2} g \,.\, \frac{x^2}{{v_0}^2\; cos^2\,\alpha} + x \tan\,\alpha$$

$$y = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\; cos^2\,\alpha} x^2 + x \tan\,\alpha$$

le basketteur réussira son panier si le point P (L, h) satisfait à l'équation précédente soit

$$h = -\frac{g}{2\,{v_0}^2\; cos^2\,\alpha} L^2 + L \tan\,\alpha$$

$$\frac{gL}{2\,{v_0}^2\; cos^2\,\alpha} = L \tan\,\alpha - h$$

$$2\,{v_0}^2\; cos^2\,\alpha = \frac{gL}{\left(\tan\,\alpha - \frac{h}{L}\right)}$$

$${v_0}^2 = \frac{gL}{2\, cos^2\,\alpha \left(\tan\,\alpha - \frac{h}{L}\right)}$$

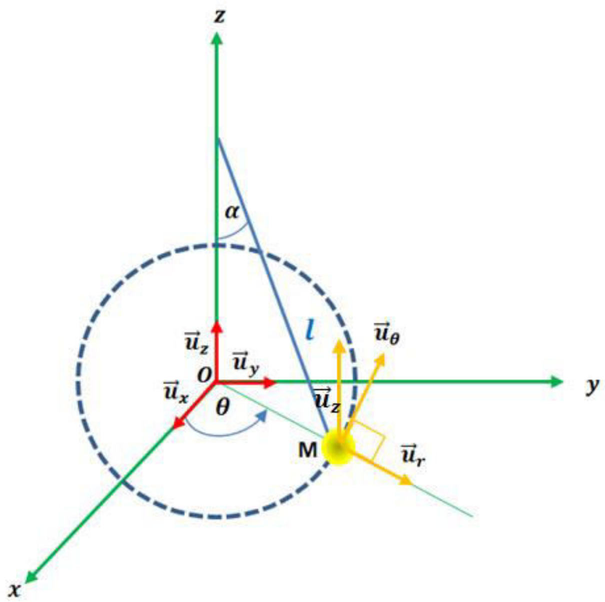
$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\, cos^2\,\alpha \left(\tan\,\alpha - \frac{h}{L}\right)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{(9{,}8)\,.\,(3{,}1)}{2\, cos^2\, 45° \left(\tan\; 45° - \frac{1}{3{,}1}\right)}} = 6{,}69\; ms^{-1}$$

Exercice 7

Un point matériel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. On constitue un pendule canonique en mettant le point matériel M en rotation uniforme dans le plan xOy autour de l'axe Oz , on repère la position de M par l'angle θ .l'angle α entre l'axe et le fil reste constante.

- Déterminer le vecteur vitesse et accélération du point matériel M
- Montrer que la tension du fil reste constante au cours de la rotation du pendule



Exercice 7 Solution

$$\overrightarrow{OM} = l\sin\alpha\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(l\sin\alpha\,\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dl}{dt}\sin\alpha\,\vec{u}_r + l\frac{d\sin\alpha}{dt}\vec{u}_r + l\sin\alpha\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = l\sin\alpha\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$\vec{v} = l\sin\alpha\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right] = l\sin\alpha\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = l\sin\alpha\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(l\sin\alpha\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dl}{dt}\sin\alpha\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta + l\frac{d\sin\alpha}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + l\sin\alpha\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + l\sin\alpha\,\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

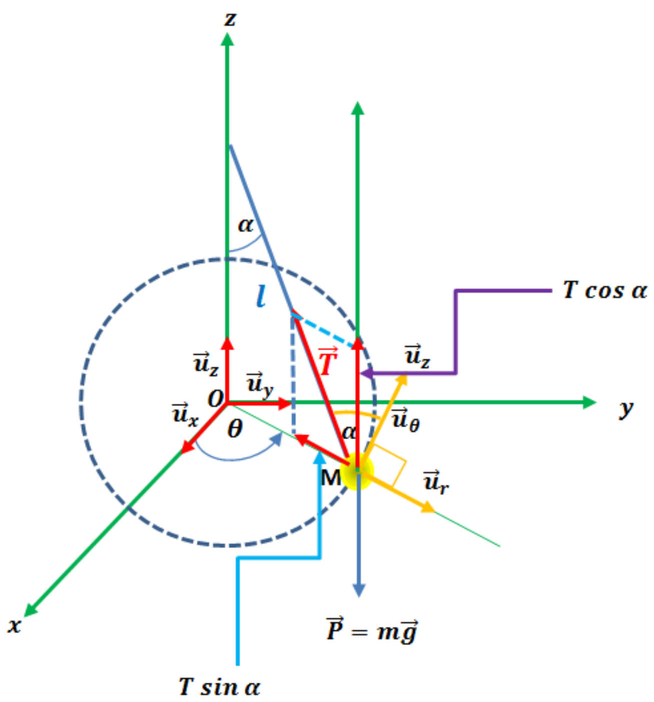
$$\vec{a} = l\sin\alpha\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + l\sin\alpha\,\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$\vec{a} = l\sin\alpha\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\sin\alpha\,\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = l\sin\alpha\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\sin\alpha\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\begin{cases} \vec{v} = l\sin\alpha\,\dot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow \vec{v} = l\sin\alpha\,\omega\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -l\sin\alpha\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\sin\alpha\,\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow \vec{a} = -l\sin\alpha\,\omega^2\vec{u}_r \\ \theta = \omega\,t \rightarrow \dot{\theta} = \omega \rightarrow \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = l\sin\alpha\,\omega\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -l\sin\alpha\,\omega^2\vec{u}_r \end{cases}$$



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Par ailleurs, les forces exprimées dans la base cylindrique ($\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta, \vec{u}_z$,) s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{T} = -T\ \sin\alpha\,\vec{u}_r + T\cos\alpha\,\vec{u}_z \end{cases}$$

$$-mg\vec{u}_z - T\ \sin\alpha\,\vec{u}_r + T\cos\alpha\,\vec{u}_z = -m\,l\sin\alpha\,\omega^2\vec{u}_r$$

$$-T\ \sin\alpha\,\vec{u}_r = -m\,l\sin\alpha\,\omega^2\vec{u}_r$$

$$T\ \sin\alpha\ = m\,l\sin\alpha\,\omega^2$$

$$T = \frac{m\,l\sin\alpha\,\omega^2}{\sin\alpha} = m\,l\omega^2$$

$$T = m\, l\omega^2 = cte$$

$$-mg\vec{u}_z + T\cos\alpha\,\vec{u}_z = 0$$

$$-mg + T\cos\alpha \;= 0 \rightarrow mg = T\cos\alpha$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = cte$$

Exercice 8

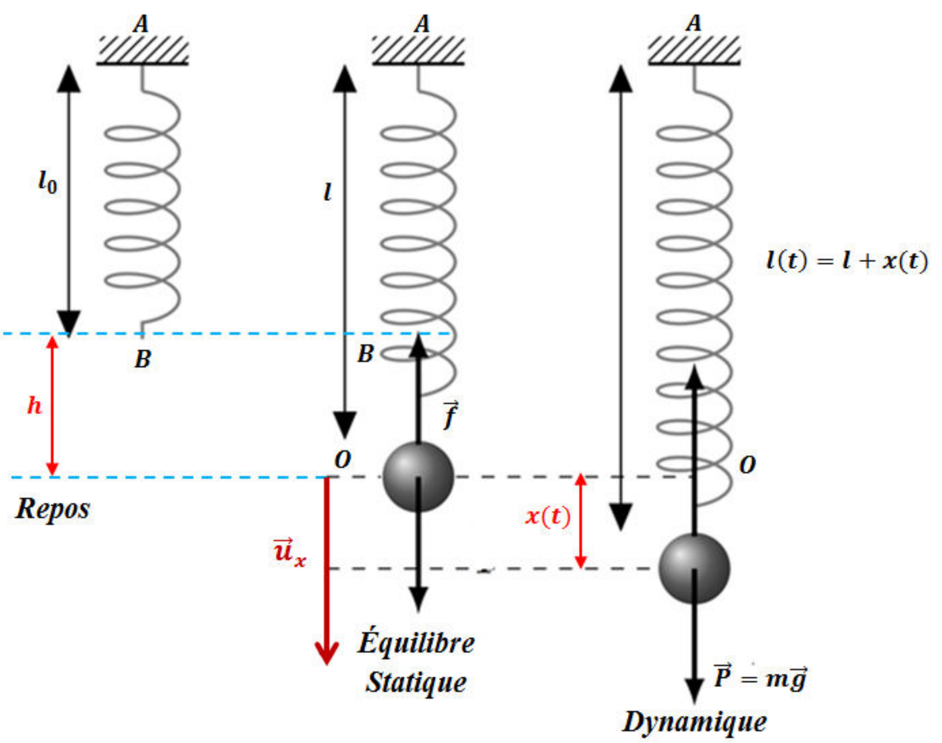
Un ressort de constante de raideur $k > 0$, de longueur à vide l_0 et de masse m_0 négligeable est suspendu verticalement par son extrémité A. A l'autre extrémité B du ressort, on attache une ponctuelle m. Le ressort s'allonge alors de la quantité h, pour parvenir à une longueur totale dans la nouvelle position d'équilibre l.

1/ Exprimer le champ de pesanteur terrestre g en fonction des données du problème.

2/ A partir de la position d'équilibre O précédente, on écarte la masse m d'une quantité x_0 et on la lâche sans vitesse initiale au temps $t = 0$.

- Ecrire l'équation du mouvement de la masse m. Montrer que l'on obtient des oscillations, de pulsation ω que l'on déterminera en fonctions des paramètres du problème.
- Exprimer g en fonction de h et ω_0 .

Exercice 8 Solution



$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u}_x$$

le ressort est allongé $(l > l_0)$Il exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement $(l - l_0)$. La constante de proportionnalitée est k :

$$\vec{F} = k\,(l - l_0)(-\vec{u}_x) \rightarrow \vec{F} = -k\,(l + x(t) - l_0)\vec{u}_x = -k\,h\vec{u}_x$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{p} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$P + f = ma = 0$$

$$mg - k\,h = 0 \rightarrow g = \frac{kh}{m}$$

$$\boldsymbol{g = \frac{kh}{m}}$$

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u}_x \\ \vec{F} = -k\,(l(t) - l_0)\vec{u}_x = -k\,(l + x(t) - l_0)\vec{u}_x \end{cases}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{p} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$mg - k\,(l + x(t) - l_0) = ma$$

$$mg - kl - kx(t) + kl_0 = m\frac{dv}{dt}$$

$$mg - kl - kx(t) + kl_0 = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$mg - kl - kx(t) + kl_0 = m\ddot{x}$$

$$mg - k(l - l_0) - kx(t) = m\ddot{x}$$

$$mg - kh - kx(t) = m\ddot{x}$$

$$mg - kh = m\ddot{x} + kx(t)$$

L'équation de mouvement :

$$\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x(t) = 0}$$

On vérifier que $x(t) = A\,cos\,(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x(t) = A\,cos\,(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -A\,\omega_0\,sin\,(\omega_0 t + \varphi) \\ \ddot{x}(t) = -A\,{\omega_0}^2\,cos\,(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

On remplace dans l'équation de mouvement $\ddot{x} + \frac{k}{m}x(t) = 0$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x(t) = 0 \rightarrow -A\,{\omega_0}^2\,cos\,(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m}A\,cos\,(\omega_0 t + \varphi) = 0 \rightarrow\ {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boldsymbol{{\omega_0}^2 = \frac{k}{m}}$$

où A et φ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A\cos\varphi \\ \dot{x}(t=0) = 0 = -A\,\omega_0\,sin\,\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sin\,\varphi = 0 \rightarrow \ \varphi = 0 \\ A = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0\,cos\,(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} {\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m} \\ g = \dfrac{kh}{m} \end{cases} \rightarrow g = h\,{\omega_0}^2$$

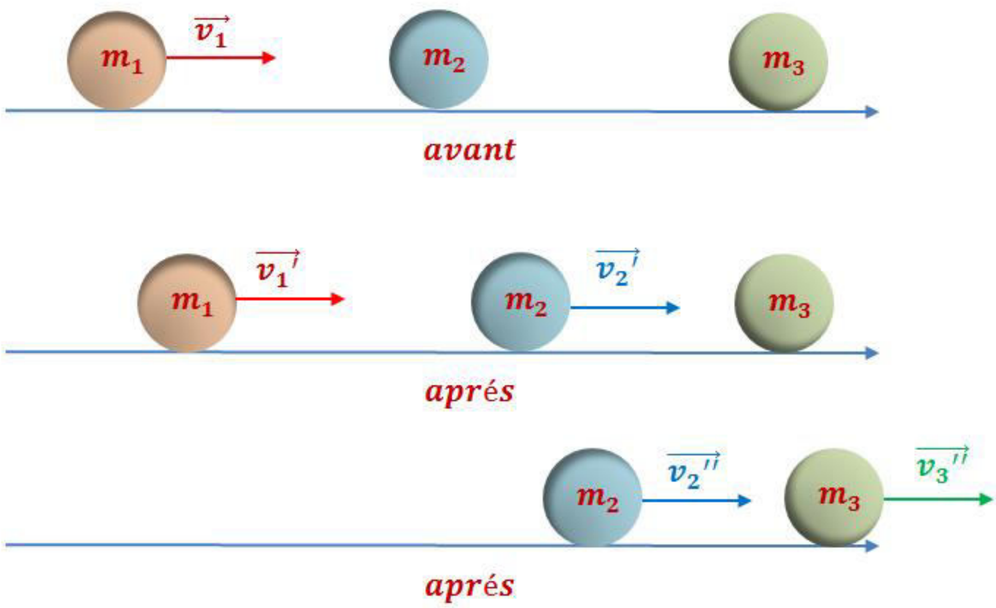
$$\boldsymbol{g = h\,{\omega_0}^2}$$

Exercice 9

Trois boules de masse m_1 , m_2 et m_3 sont mobiles sans frottement sur un plan lisse. La boule de masse $m_1$et lancer avec vitesse $\vec{v}_1$ en direction de la boule de masse m_2 qui a son tour roule en direction de la boule de masse m_3 quelle heurte. On suppose que les deux chocs sont élastiques.

Quelle est la valeur que doit prendre la masse m_2 pour que la vitesse de la masse m_3 soit maximale

Exercice 9 Solution



Au cours du premier choc entre les boules $m_1$et m_2

La conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 = \vec{p}' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

En projetant sur l'axe des x :

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

La Conservation de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = E_c' = \frac{1}{2}m_1{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$$

$$m_1v_1^2 = m_1{v_1'}^2 + m_2{v_2'}^2$$

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' \rightarrow m_1v_1' = m_1v_1 - m_2v_2'$$

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1}v_2' \rightarrow {v_1'}^2 = \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1}v_2'\right)^2$$

$$\boldsymbol{{v_1'}^2 = {v_1}^2 - 2v_1\frac{m_2}{m_1}v_2' + \frac{{m_2}^2}{{m_1}^2}{v_2'}^2}$$

$$m_1v_1^2 = m_1\left({v_1}^2 - 2v_1\frac{m_2}{m_1}v_2' + \frac{{m_2}^2}{{m_1}^2}{v_2'}^2\right) + m_2{v_2'}^2$$

$$m_1v_1^2 = m_1{v_1}^2 - 2v_1\frac{m_2}{m_1}m_1v_2' + \frac{{m_2}^2}{{m_1}^2}m_1{v_2'}^2 + m_2{v_2'}^2$$

$$m_1v_1^2 = m_1{v_1}^2 - 2v_1m_2v_2' + \frac{{m_2}^2}{m_1}{v_2'}^2 + m_2{v_2'}^2$$

$$m_1v_1^2 - m_1{v_1}^2 = -2v_1m_2v_2' + \left(\frac{{m_2}^2}{m_1}{v_2'}^2 + m_2{v_2'}^2\right)$$

$$0 = -2v_1m_2v_2' + \left(\frac{{m_2}^2}{m_1}{v_2'}^2 + m_2{v_2'}^2\right)$$

$$v_2' = \left(\frac{\frac{{m_2}^2}{m_1}{v_2'}^2}{2v_1m_2} + \frac{m_2{v_2'}^2}{2v_1m_2}\right)$$

$$v_2' = \left(\frac{m_2}{2m_1}\frac{1}{v_1}{v_2'}^2 + \frac{{v_2'}^2}{2v_1}\right)$$

$$1 = \left(\frac{m_2}{2m_1}\frac{v_2'}{v_1} + \frac{v_2'}{2v_1}\right) \rightarrow 1 = \left(\frac{m_2}{2m_1}\frac{v_2'}{v_1} + \frac{m_1v_2'}{2m_1v_1}\right)$$

$$1 = \left(\frac{m_2}{2m_1}\frac{v_2'}{v_1} + \frac{m_1v_2'}{2m_1v_1}\right) \rightarrow 1 = \left(\frac{(m_2+m_1)}{2m_1}\frac{v_2'}{v_1}\right)$$

$$1 = \frac{(m_2+m_1)}{2m_1}\frac{v_2'}{v_1} \rightarrow 2m_1v_1 = (m_2+m_1)v_2'$$

$$\frac{2m_1}{(m_2+m_1)}v_1 = v_2'$$

$$\boldsymbol{v'_2 = \frac{2m_1}{(m_2+m_1)}v_1}$$

Au cours du deuxième choc entre les boules $m_2$et m_3

La conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = m_2\vec{v}'_2 = \vec{p}' = m_2\vec{v}''_2 + m_3\vec{v}''_3$$

En projetant sur l'axe des x :

$$m_1v'_2 = m_2v''_2 + m_3v''_3$$

La Conservation de l'énergie cinétique : $E'_c = \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2 = E''_c = \frac{1}{2}m_2{v''_2}^2 + \frac{1}{2}m_3{v''_3}^2$

$$\frac{1}{2}m_2{v'_2}^2 = \frac{1}{2}m_2{v''_2}^2 + \frac{1}{2}m_3{v''_3}^2$$

$$m_2{v'_2}^2 = m_2{v''_2}^2 + m_3{v''_3}^2$$

Avec les mêmes étapes en trouve

$$\boldsymbol{v''_3 = \frac{2m_2}{(m_3+m_2)}v'_2}$$

$$\begin{cases} v''_3 = \dfrac{2m_2}{(m_3+m_2)}v'_2 \\ v'_2 = \dfrac{2m_1}{(m_2+m_1)}v_1 \end{cases} \rightarrow v''_3 = \frac{2m_2}{(m_3+m_2)}\frac{2m_1}{(m_2+m_1)}v_1$$

$$v''_3 = \frac{4m_2m_1}{(m_3+m_2)(m_2+m_1)}v_1$$

$$\boldsymbol{v''_3 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_1}$$

La vitesse de la masse $m_3$est maximale, si

$$\frac{dv''_3}{dm_2} = 0$$

$$\frac{dv''_3}{dm_2} = \frac{d}{dm_2}\left(\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}v_1\right) = 0$$

$$v_1\left(\frac{4m_1(m_1+m_2)(m_2+m_3) - 4m_1m_2[(m_2+m_3)(m_1+m_2)]}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2}\right) = 0$$

$$m_2 = \sqrt{m_1m_3}$$

Exercice 10

Dans un repère cartésien (O, x, y, z), muni de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$un point M *de masse* m en mouvement a pour équations horaires

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = \dfrac{B}{\sqrt{2}}\sin\omega t \\ z = -\dfrac{B}{\sqrt{2}}\, sin\ \omega t \end{cases}$$

$$A > B > 0, \omega\ constante > 0$$

- Montrer que la force responsable du mouvement de P s'écrit $F = -m\ \omega^2 \vec{r}$
- Calculer le moment cinétique de M par rapport à O. conclure

Exercice 10 solution

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{e}_x + \ y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \ A\cos\omega t\,\vec{e}_x + \frac{B}{\sqrt{2}}\sin\omega t\,\vec{e}_y - \frac{B}{\sqrt{2}}\ sin\ \omega t\,\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = \begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = \dfrac{B}{\sqrt{2}}\sin\omega t \\ z = -\dfrac{B}{\sqrt{2}}\ sin\ \omega t \end{cases} \rightarrow \vec{v} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos\omega t \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos\omega t \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + \ v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = -A\omega\sin\omega t\,\vec{e}_x + \ \frac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos\omega t\,\vec{e}_y - \frac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos\omega t\,\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{B}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{B}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + \ a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = -A\omega^2\cos\omega t\,\vec{e}_x \ - \frac{B}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t\,\vec{e}_y + \frac{B}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t\,\vec{e}_z$$

$$\vec{F} = -m\left[A\omega^2\cos\omega t\,\vec{e}_x + \frac{B}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t\,\vec{e}_y - \frac{B}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t\,\vec{e}_z\right]$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\left[A\cos\omega t\,\vec{e}_x + \frac{B}{\sqrt{2}}\sin\omega t\,\vec{e}_y - \frac{B}{\sqrt{2}}\sin\omega t\,\vec{e}_z\right]$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$$

Moment cinétique de M par rapport à O : $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \bigwedge \vec{P}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{v}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \bigwedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & -\vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A\cos\omega t & \frac{B}{\sqrt{2}}\sin\omega t & -\frac{B}{\sqrt{2}}\,sin\,\omega t \\ -mA\omega\sin\omega t & m\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos\omega t & -m\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos\omega t \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \bigwedge \vec{P} = \vec{e}_x\left[-m\frac{B}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\sin\omega t\cos\omega t + m\frac{B}{\sqrt{2}}\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos\omega t\sin\omega t\right]$$

$$-\vec{e}_y\left[-m\,A\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos^2\omega t - m\,A\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\sin^2\omega t\right]$$

$$+\vec{e}_z\left[m\,A\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\cos^2\omega t + mA\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\sin^2\omega t\right]$$

$$\vec{L} = \vec{r} \bigwedge \vec{P} = m\,A\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\;\vec{e}_y + m\,A\frac{B}{\sqrt{2}}\omega\,\vec{e}_z$$

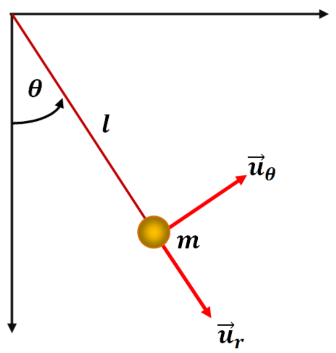
$$\vec{L} = \vec{r} \bigwedge \vec{P} = m\,A\frac{B}{\sqrt{2}}\omega(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

$$\vec{L} = m\omega\,\frac{1}{\sqrt{2}}AB(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

Le module du moment cinétique est constant.

Exercice 11

On écarte de sa position d’équilibre une masse ponctuelle **m** suspendue à un fil inextensible de longueur **l**. On repère la position de la masse **m** par l’angle **θ** entre la verticale et la direction du fil.



1/ Etablir l'équation différentielle du mouvement. (Utiliser le système des coordonnées polaires).

2/ Etablir l'expression de la tension du fil.

Exercice 11 Solution

1/ Equation différentielle du mouvement

$$\vec{P} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OM} = l\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(l\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dl}{dt}\vec{u}_r + l\frac{d\vec{u}_r}{dt} = l\frac{d\vec{u}_r}{dt} = l\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(l\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right)}{dt} = \frac{dl}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + l\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + l\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

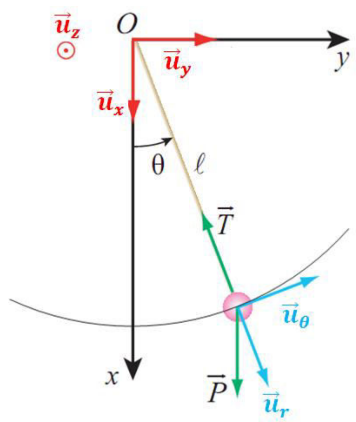
$$\vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + l\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right] = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}\left[\vec{u}_r.\dot{\theta}\right]$$

$$\vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = a_\theta\vec{u}_\theta + a_r\vec{u}_r$$

Par ailleurs, les forces exprimées dans la base polaire ($\vec{u}_r$; $\vec{u}_\theta$) s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta \\ \vec{T} = -T\vec{u}_r \end{cases}$$



$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \sum F_r = mg\cos\theta - T = ma_r = -ml\dot{\theta}^2 \\ \sum F_\theta = -mg\sin\theta = ma_\theta = ml\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_r = mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \rightarrow T = mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2 \\ \sum F_\theta = -mgsin\theta = ml\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

2/ Expression de la tension T du fil

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\dot{\theta}sin\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} - \frac{g}{l}\frac{d(cos\theta)}{dt} = \frac{d(cte)}{dt}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l}cos\theta = cte$$

Si à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, on obtient

$$0 - \frac{g}{l}cos\theta_0 = cte$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l}cos\theta = -\frac{g}{l}cos\theta_0 \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(cos\theta - cos\theta_0)$$

$$T = mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2 \rightarrow T = mgcos\theta + ml\frac{2g}{l}(cos\theta - cos\theta_0)$$

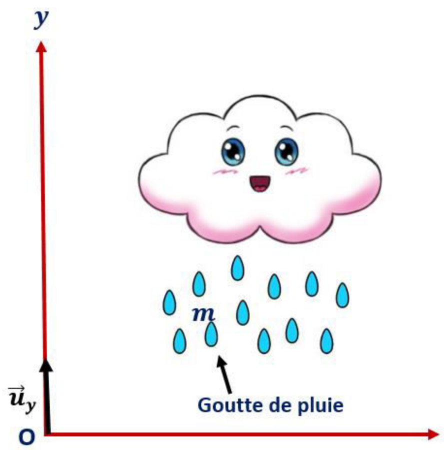
$$T = mgcos\theta + 2mgcos\theta - 2mgcos\theta_0$$

$$T = 3\,mgcos\theta - 2mgcos\theta_0$$

$$T = mg(3cos\theta - 2\,cos\theta_0)$$

Exercice 12

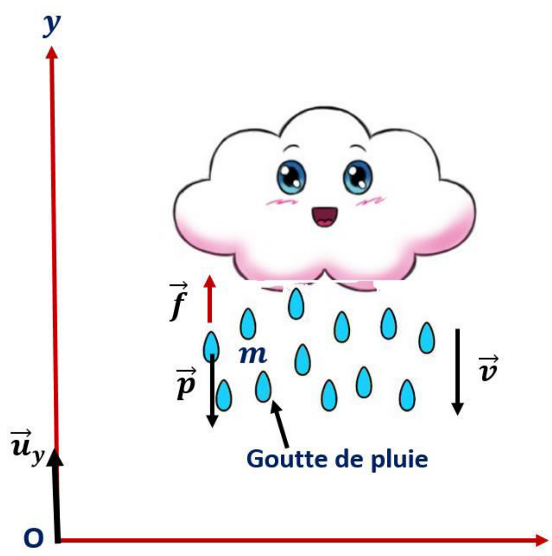
Une goutte de pluie de masse **m** supposée constante, tombant dans l'air est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k\,\vec{v}$.



1/ En appliquant le **PFD** (principe fondamental de la dynamique), écrire l'équation différentielle que satisfait la vitesse v de la goutte de pluie.

2/ En déduire, sans résoudre l'équation différentielle, la vitesse limite $\boldsymbol{v_l}$ atteinte par la goutte de pluie (la vitesse limite est obtenue lorsque l'accélération de la goutte de pluie est nul).

Exercice 12 Solution



$$\begin{cases}\vec{P} = -m\vec{g} \\ \vec{f} = -k\vec{v}\end{cases}$$

$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

$$-m\vec{g} - k\vec{v} = m\,\vec{a}$$

$$-m\vec{g} - k\vec{v} = m\frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

$$-m(-\,g\vec{u}_y) - k(-v\,\vec{u}_y) = m\frac{d\,(-v\,\vec{u}_y)}{dt}$$

$$mg + kv = -m\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g$$

2/ la vitesse limite est obtenue lorsque l'accélération de la goutte de pluie est nul

$$a = \ m\frac{dv}{dt} = 0$$

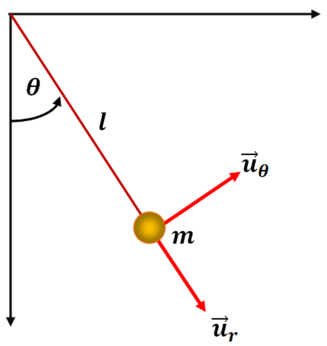
$$\frac{k}{m}v_l = -g$$

$$v_l = -\frac{mg}{k}$$

Exercice13

A. Partie cinématique

Un pendule simple est composé d'une masse ponctuelle m liée par un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. On écart la masse ponctuelle d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ par rapport à la position d'équilibre, avant de la libérer sans vitesse initiale.



1. Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
2. Les composantes polaires du vecteur vitesse $(\vec{v})$ et son module v
3. Les composantes polaires du vecteur accélération $(\vec{a})$ et son module a
4. Les composantes intrinsèques (a_T) et (a_N) de l'accélération.

B. Partie dynamique

On utilise le même système des coordonnées polaires $(\vec{u}_r\ ,\ \vec{u}_\theta)$, on écarte le pendule d'un angle θ par rapport à la verticale et on l'abandonne avec une vitesse initiale v_0 .

1) Appliquer le principe fondamentale de la dynamique à la masse ponctuelle m et :

a) Montrer que l'équation du mouvement de m est donnée par :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} sin\theta = 0 \ (1)$$

b) Déterminer l'expression de la tension du fil *T*.

c) En déduire la vitesse de la masse ponctuelle **m** et la tension du fil *T*.

2) Retrouver l'équation (1) en utilisant le théorème du moment cinétique.

3) Déduire l'expression horaire $\theta(t)$ du mouvement et calculer la période pour des petites oscillations

C. Partie énergétique

Montrer que l'on peut retrouver l'équation 1 du pendule, en écrivant que l'énergie mécanique totale du système est une constante.

Exercice 13 Solution

A. Partie cinématique

1/ Vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$
$$r = l = Cte$$
$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$$

2/ Les composantes polaires du vecteur vitesse $(\vec{v})$ et son module v

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$$
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(l\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dl}{dt}\vec{u}_r + l\frac{d\vec{u}_r}{dt} = l\frac{d\vec{u}_r}{dt} = l\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right]$$
$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$
$$\|\vec{v}\| = v = \sqrt{(l\dot{\theta})^2} = l\dot{\theta}$$

3/ Les composantes polaires du vecteur accélération $(\vec{a})$ et son module a

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(l\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \frac{dl}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + l\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + l\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + l\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}\right] = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}[\vec{u}_r.\dot{\theta}]$$
$$\vec{a} = l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$
$$\vec{a} = a_\theta\vec{u}_\theta + a_r\vec{u}_r$$

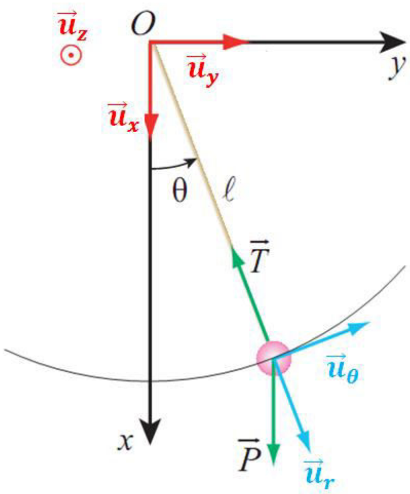
4/ Les composantes intrinsèques (a_T) et (a_N) de l'accélération.

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dv}{dt} \rightarrow a_T = \dfrac{d(l\dot{\theta})}{dt} = l\ddot{\theta} \\ a_N = \dfrac{v^2}{r} \rightarrow a_N = \dfrac{(l\dot{\theta})^2}{l} = l\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

B. Partie dynamique

Par ailleurs, les forces exprimées dans la base polaire $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{P} = mgcos\theta\,\vec{u}_r - mgsin\theta\,\vec{u}_\theta \\ \vec{T} = -T\vec{u}_r \end{cases}$$



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \sum F_r = mgcos\theta - T = ma_r = -ml\dot{\theta}^2 \\ \sum F_\theta = -mgsin\theta = ma_\theta = ml\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_r = mgcos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \rightarrow T = mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2 \\ \sum F_\theta = -mgsin\theta = ml\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

L'équation du mouvement de m est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

L'expression de la tension du fil *T est :*

$$T = mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{l}sin\theta$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{g}{l}sin\theta \\ \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \\ \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow \|\vec{v}\| = v = \sqrt{(l\dot{\theta})} = l\dot{\theta} \end{cases}$$

$$v = l\dot{\theta} \rightarrow v = l\frac{d\theta}{dt} \rightarrow dt = \frac{ld\theta}{v}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(l\dot{\theta}) \rightarrow \frac{dv}{dt} = l\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) \rightarrow \frac{dv}{dt} = l\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}sin\theta$$

$$l\,\ddot{\theta} = -g\,sin\theta$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\,sin\theta$$

$$dv = -g\,sin\theta\,dt$$
$$dv = -g\,sin\theta\,\frac{l d\theta}{v}$$
$$v\,dv = -l\,g\,sin\theta\,d\theta$$
$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{0}^{\theta} -l\,g\,sin\theta\,d\theta$$
$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -l\,g\int_{0}^{\theta} sin\theta\,d\theta$$
$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = -l\,g\,\left[-cos\,\theta\right]_0^{\theta}$$
$$v^{\,2} - v_0^2 = +2l\,g\,\left[cos\,\theta\right]_0^{\theta}$$
$$v^{\,2} - v_0^2 = +2l\,g\,\left(cos\,\theta - 1\right)$$

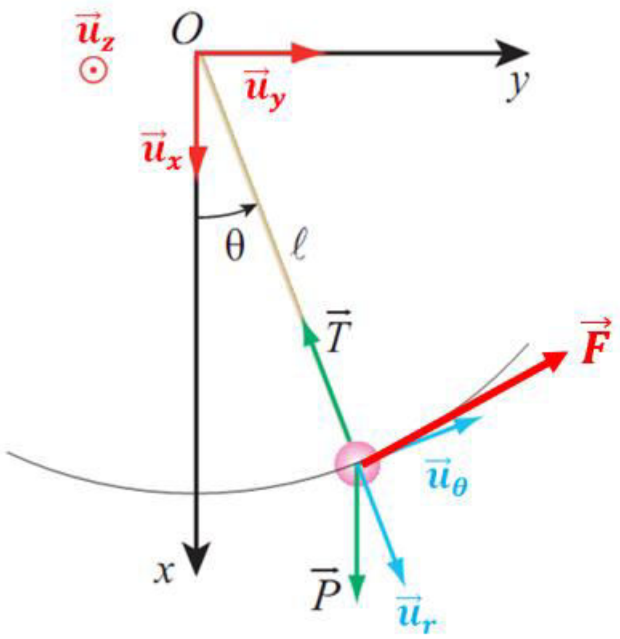
La vitesse de la masse ponctuelle **m est :**

$$v^{\,2} = v_0^2 + 2l\,g\,\left(cos\,\theta - 1\right)$$
$$T = mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2$$
$$v = l\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{l}$$
$$\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{l^2}$$
$$T = mgcos\theta + ml\frac{v^2}{l^2}$$
$$v^{\,2} = v_0^2 + 2l\,g\,\left(cos\,\theta - 1\right)$$
$$T = mgcos\theta + m\frac{\left(v_0^2 + 2l\,g\,\left(cos\,\theta - 1\right)\right)}{l}$$
$$T = mgcos\theta + \frac{mv_0^2}{l} + 2mg(cos\,\theta - 1)$$
$$T = 3mgcos\theta - 2mg\ + \frac{mv_0^2}{l}$$
$$T = (3cos\theta - 2)\ + \frac{mv_0^2}{l}$$

La tension du fil *T est :*

$$T = (3cos\theta - 2)\ + \frac{mv_0^2}{l}$$

2/



$$\begin{cases} \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{r} = \vec{l} \\ \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} \\ \vec{l} \,/\!/\, \vec{T} \\ \vec{P} = m\vec{g} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{F} = \vec{l} \wedge (\vec{P} + \vec{T}) = \vec{l} \wedge \vec{P} + \vec{l} \wedge \vec{T}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \|\vec{l}\|\|\vec{T}\| \sin 0 + \vec{l} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = l\,\vec{u}_r \wedge (mgcos\theta\vec{u}_r - mgsin\theta\vec{u}_\theta)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = l\,mgcos\theta(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r) - l\,mgsin\theta(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) = -l\,mgsin\theta\,\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -l\,mgsin\theta\,\vec{u}_z$$

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v} \\ \vec{l} = l\vec{u}_r \\ \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{cases} = m\,l\,\vec{u}_r \wedge l\dot{\theta}\vec{u}_\theta = m\,l^2\dot{\theta}(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$$

$$\begin{cases} \vec{L} = m\, l^2\dot{\theta}(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \\ \vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta \end{cases} \rightarrow \vec{L} = m\, l^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\vec{L} = m\, l^2\dot{\theta}\vec{u}_z \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(m\, l^2\dot{\theta}\vec{u}_z\right)}{dt} = m\, l^2\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_z = m\, l^2\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\, l^2\ddot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}}{dt} = -l\, mgsin\theta\, \vec{u}_z \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = m\, l^2\ddot{\theta}\vec{u}_z \end{cases} \rightarrow -l\, mgsin\theta\, \vec{u}_z = m\, l^2\ddot{\theta}\vec{u}_z \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

3/ pour les faibles oscillations, on peut écrire : $sin\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Equation différentielle de deuxième degré, dont la solution est :

$$\theta(t) = \theta_0\, sin\,(\omega t + \varphi)$$

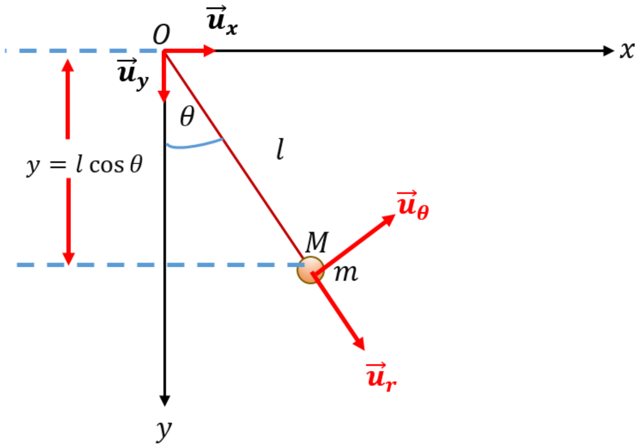
$$\dot{\theta}(t) = \theta_0\omega\, cos\,(\omega t + \varphi)$$

Si $t = 0\,, \theta(0) = \theta_0 \rightarrow \theta_0 = \theta_0\, sin\,\varphi \rightarrow sin\,\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Si $t = 0\,, \dot{\theta}(0) = 0 \rightarrow 0 = \theta_0\, \omega\, cos\,\varphi \rightarrow cos\,\varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\theta(t) = \theta_0\, sin\,\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

C. Partie énergétique



$$E_T = \boldsymbol{Ec + Ep}$$

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow v = l\dot{\theta} \rightarrow v^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

Il n'y a que l'énergie potentielle de pesanteur. En prenant comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur la position $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$Ep = -mgy$$

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 + Ep \rightarrow E_T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgy \rightarrow E_T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

$$E_T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique ($\boldsymbol{E_m = E_T = Ec + Ep = Cte}$) :

$$\frac{dE_T}{dt} = 0$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{d}{dt}(mgl\cos\theta) = 0$$

$$\frac{1}{2}ml^2\frac{d}{dt}\dot{\theta}^2 - mgl\frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0$$

$$\frac{1}{2}ml^2\frac{d}{dt}\dot{\theta}^2 - m\,g\,l\frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0$$

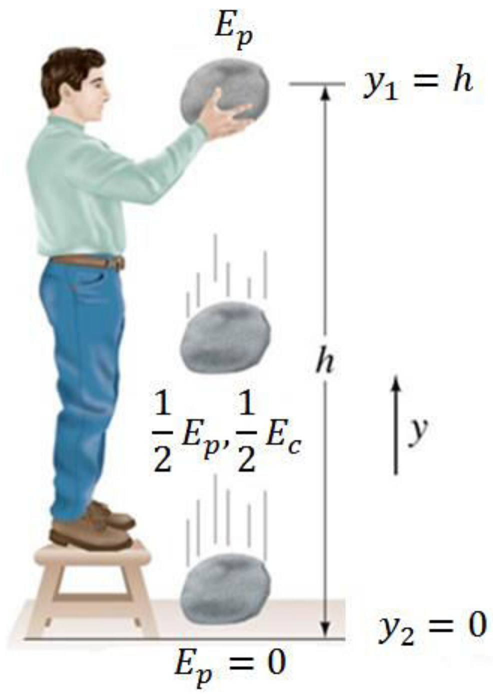
$$\frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) - m\,g\,l(-\dot{\theta}\sin\theta) = 0$$

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\,\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$l\dot{\theta}\ddot{\theta} + g\,\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

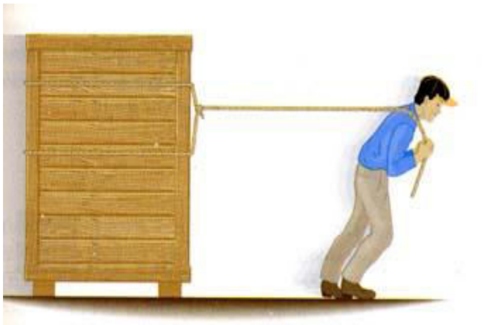
CHAPITRE : IV Travail et énergie

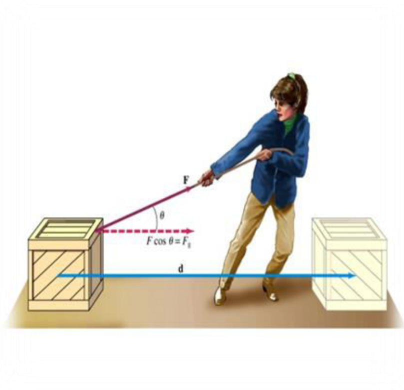


IV.1. Travail effectué par une force constante

Une force est vectoriellement constante si ses trois caractéristiques (direction, sens et valeur) sont constantes.

Considérons le déplacement du point d'application d'une force d'un point A à un point B (un déplacement rectiligne).

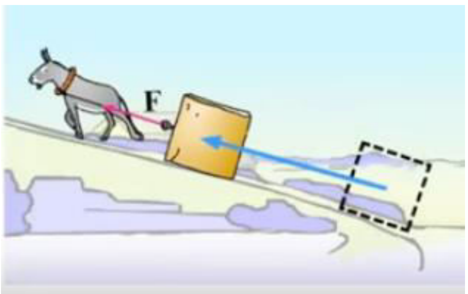




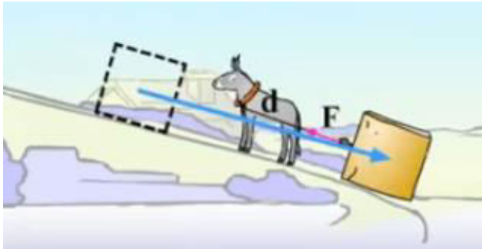
Le travail d'une force constante $\vec{F}$ est égal à : $w_{A\to B} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

$$w_{A\to B} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\|\cos\theta$$

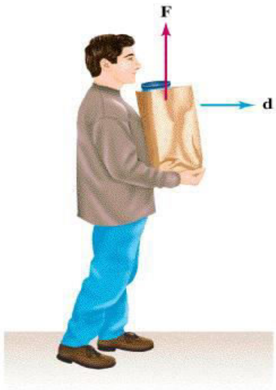
- $w_{A\to B}$ s'exprime en joules **(J)**
- F en newtons **(N)**
- **AB** en mètres **(m)**
- θ est l'angle entre le vecteur force $\vec{F}$ et la direction du déplacement du point d'application de $\vec{F}$.
- Si $W(\vec{F}) > 0$ on dit que le travail est moteur $w = +F\,AB$, $90° > \theta > 0°$



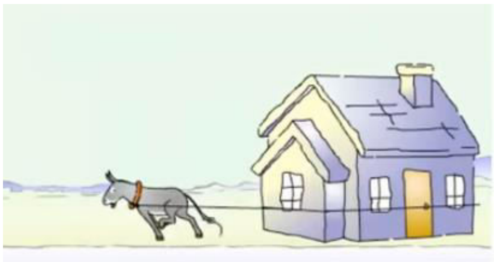
- Si $W(\vec{F}) < 0$ on dit que le travail est résistant $w = -F\,AB$, $180° > \theta > 90°$



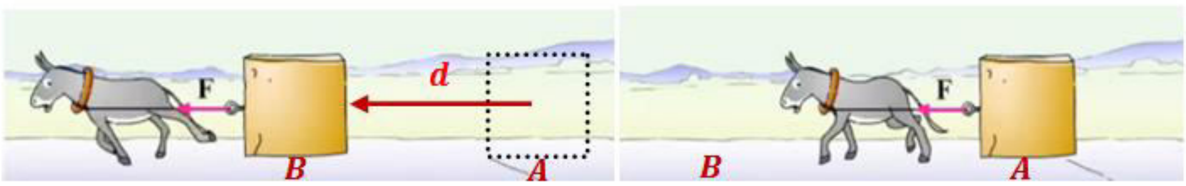
❖ $w = 0$ La force $\vec{F}$ reste orthogonale au déplacement de son point d'application $\theta = 90°$



$$w = 0 \rightarrow d = 0$$



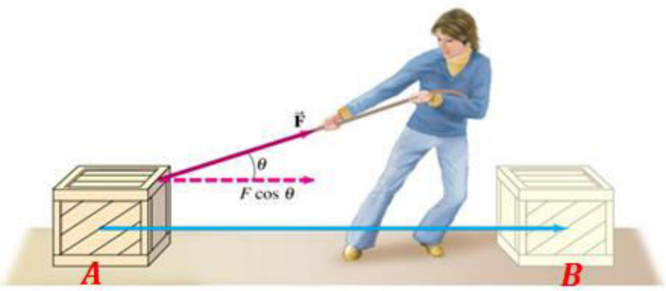
❖ Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi.



$$\begin{cases} w = F\,AB\cos\theta \\ \theta = 0 \end{cases} \rightarrow w = F\,AB$$

Si la force fait un angle avec le déplacement, il faut en tenir compte

❖ $w = F\,AB\cos\theta = \vec{F}\,.\overrightarrow{AB}$



Exemple 1

W_{f_c} =?

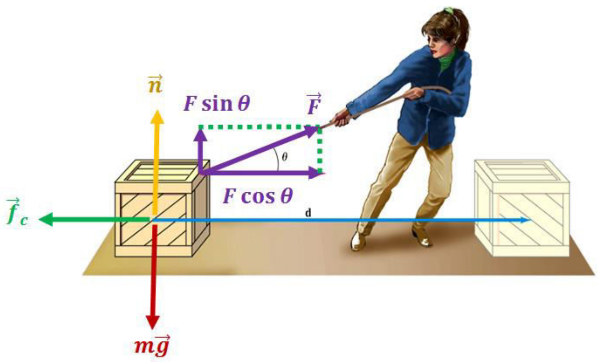
$$\sum F_y = 0 \rightarrow n + F\sin\theta - mg = 0$$

$$n = -F\sin\theta + mg = 0$$

$$W_{f_c} = f_c\, AB\cos\theta \rightarrow W_{f_c} = f_c\, AB\cos\pi$$

$$W_{f_c} = -f_c\, AB$$

$$\begin{cases} W_{f_c} = -f_c\, AB \\ f_c = \mu_c . n \end{cases} \rightarrow W_{f_c} = -\mu_c . n\ \ AB \rightarrow W_{f_c} = -\mu_c(mg - F\sin\theta)\ \ AB$$



$$W_{tot} = W_F + W_{f_c} + W_n + W_g \rightarrow W_{tot} = W_F + W_{f_c} + 0 + 0$$

$$W_n = W_g = 0\ (\cos\frac{\pi}{2} = 0)$$

$$W_{tot} = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

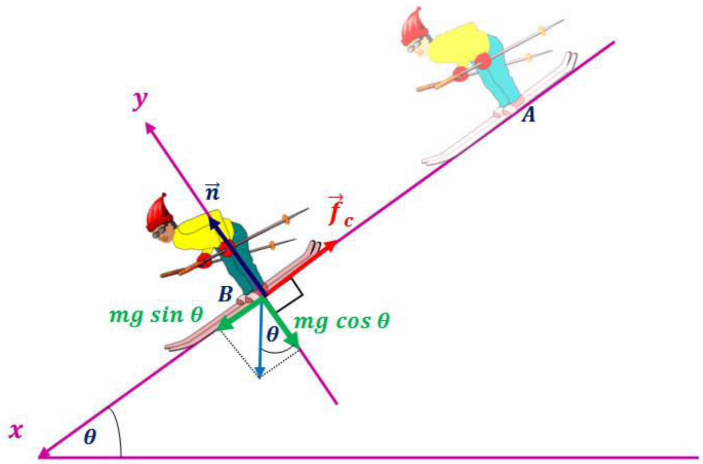
Exemple 2

$\vec{F}$ =?

$$\vec{R}_{air} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = mg\sin\theta - f_c$$

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F_x\,.\,AB\cos\alpha$$

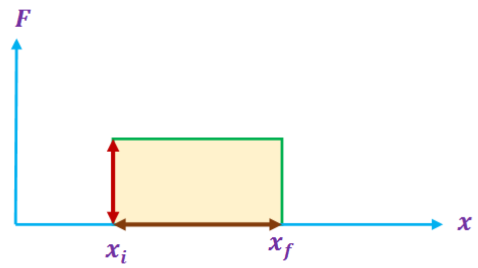


IV.2. Travail effectué par une force variable

Force constante

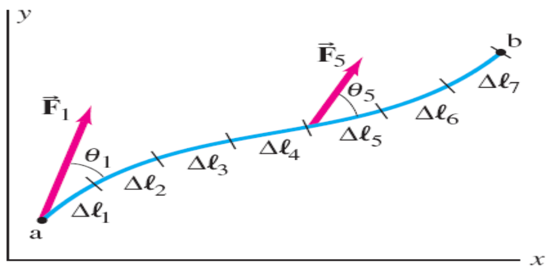
$$W = F\,\Delta x$$

$$S = F\,.\left(x_f - x_i\right)$$



Force variable

Si le déplacement n'est pas rectiligne et si la force n'est pas constante, on décompose le trajet du point d'application en sections infiniment petites sur lesquelles on peut considérer la force $\vec{F}$ constante et le vecteur déplacement $\vec{dl}$ rectiligne.

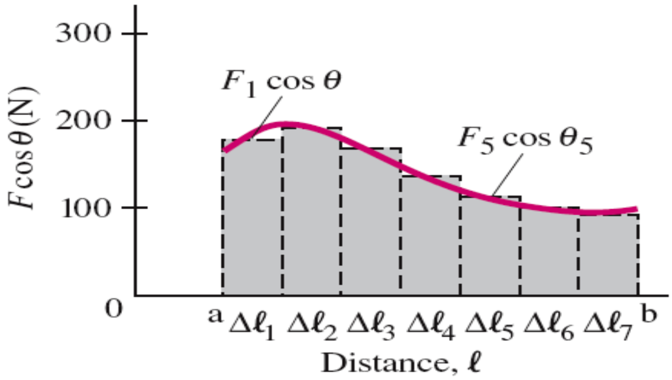


Lors d'un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ du point d'application d'une force $\vec{F}$, le travail élémentaire

$$\Delta W_i = F_i \cos\theta_i\,\Delta l_i$$

Travail total

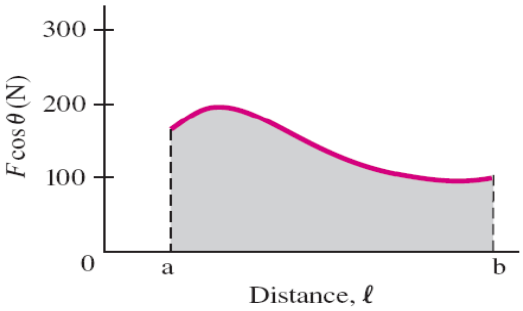
$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \rightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\theta_i \, \Delta l_i$$



$$W = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\theta_i \Delta l_i$$

$$W = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum F_i \cos\theta_i \Delta l_i = \int_a^b F\cos\theta \, dl$$

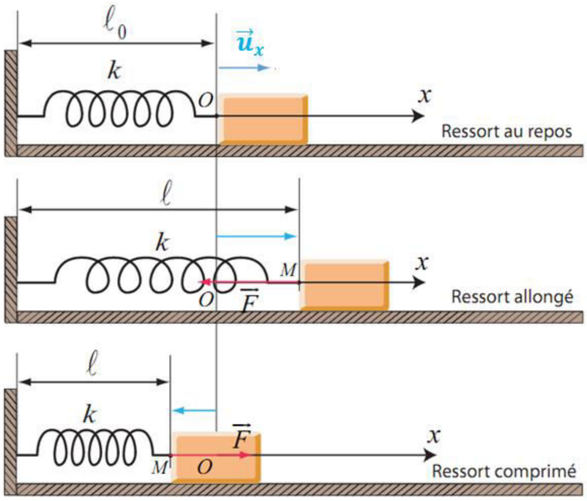
Pour trouver le travail total de a à b, on fait la somme de tous les travaux élémentaires. Comme il y a une infinité de déplacements élémentaires pour aller de a à b, la somme de ces travaux n'est pas une somme discrète ($\sum dW$) mais une somme continue : il s'agit d'une somme au sens intégrale ($\int dW$)



$$W = \int_a^b \vec{F} . d\vec{l}$$

IV.3.Travail d'une action sur un ressort

Considérons un ressort horizontal, de longueur à vide l_0 et de raideur k.



$$\vec{F} = \vec{0}$$

$$(l - l_0) = 0$$

- Si le ressort est allongé $(l > l_0)$ Il exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement $(l - l_0)$. La constante de proportionnalitée est k :

$$\vec{F} = k\,(l - l_0)(-\vec{u}_x) \rightarrow \vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}_x$$

- Si le ressort est comprimé $(l < l_0)$ Il exerce une force de rappel proportionnelle à son allongement $(l_0 - l)$. La constante de proportionnalitée est k :

$$\vec{F} = k\,(l_0 - l)\,\vec{u}_x \rightarrow \vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}_x$$

Ainsi, dans les deux cas, on a :

$$\vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\vec{u}_x$$

- $\vec{u}_x$: vecteur unitaire dirigée dans le sens de l'allongement
- $\vec{F}$: force de rappel ou tension du ressort **(N)**
- **k** : raideur du ressort $(N.m^{-1})$
- $\Delta l = l - l_0$ **:** déformation du ressort **(m).**
- Le signe (-) dans cette relation signifie que $\vec{F}$ est une force de rappel et qu'elle s'oppose à la déformation $\Delta\, l$.

On considère le mouvement d’un point matériel attaché à un ressort de raideur **k**. La force de rappel du ressort est donnée par

$$\vec{f}_r = -k\ \Delta l\,\vec{u}_x = -k\,x\,\vec{u}_x$$

- Si le ressort est allongé

$$\begin{cases} \vec{f}_r = -k\,x\,\vec{u}_x \\ d\vec{x} = dx\,\vec{u}_x \end{cases}$$

$$W_{\vec{f}_r} = \int_{x_i=0}^{x_f=x} \vec{f}.d\vec{x} = \int_0^x -k\,x\,\vec{u}_x.dx\,\vec{u}_x = \int_0^x -k\,x\,dx\,\vec{u}_x.\vec{u}_x = -k\int_0^x x\,dx\,\vec{u}_x.\vec{u}_x$$

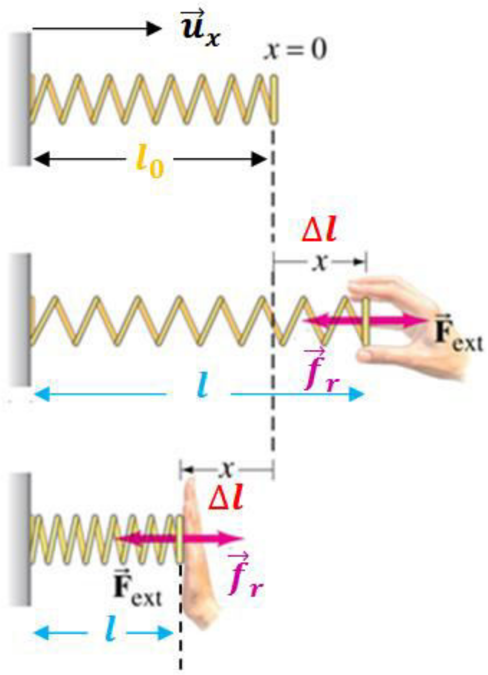
$$W_{\vec{f}_r} = -k\int_0^x x\,dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x = -\frac{1}{2}k\;x^2\mathrm{P}$$

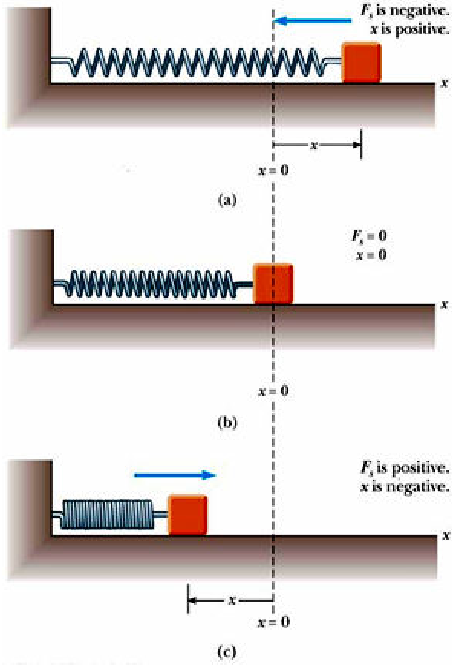
♣ Si le ressort est comprimé

$$\begin{cases}\vec{f}_r = -k\,x\,\vec{u}_x\\ d\vec{x} = -dx\,\vec{u}_x\end{cases}$$

$$W_{\vec{f}_r} = \int_{x_i=0}^{x_f=-x} \vec{f}.d\vec{x} = \int_0^{-x} k\,x\,\vec{u}_x.dx\,\vec{u}_x = \int_0^{-x} k\,x\,dx\,\vec{u}_x.\vec{u}_x = k\int_0^{-x} x\,dx\,\vec{u}_x.\vec{u}_x$$

$$W_{\vec{f}_r} = -k\int_0^{-x} x\,dx = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{-x} = -\frac{1}{2}k\;x^2$$

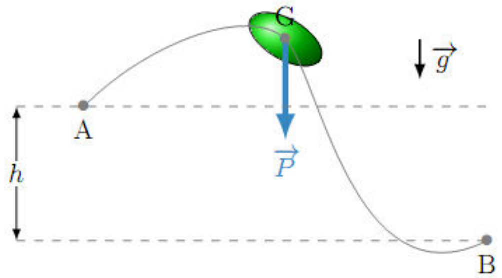




$$W = -\frac{1}{2}k\;x^2$$

IV.4.Travail de la pesanteur

Calculons le travail de la force de pesanteur lorsque le centre de gravité **G** d'un corps matériel



se déplace du point **A** au point **B**.

Le poids étant une force constante, on a

- G descend (travail moteur)

$$W = \vec{p}.\overrightarrow{AB} = p\, AB \cos\theta = mgh \cos 0 = +mgh$$

- G monte (travail résistant)

$$W = \vec{p}.\overrightarrow{AB} = p\, AB \cos\theta = mgh \cos\pi = -\, mgh$$

IV.5. Puissance d'une force

La puissance d'une force, que nous noterons $\mathcal{P}$, est le quotient du travail fourni sur la durée lorsque cette durée tend vers **0**

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$w = \int_A^B dW = \int_0^t \mathcal{P}\, dt$$

Dans le cas particulier où la puissance est constante

$$w = \int_A^B dW = \mathcal{P} \int_0^t dt = \mathcal{P}\, t$$

Dans le S I d'unités, la puissance s'exprime en **Watt** (W)

IV.6. Energie

L'énergie est la capacité d'un corps à fournir du travail en raison de

- sa position (énergie potentielle, E_p),
- sa vitesse (énergie cinétique, E_c).

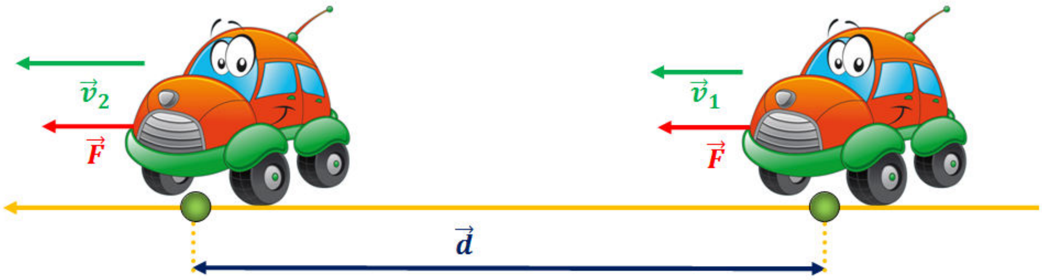
C'est aussi le travail fourni pour

- le ramener de la position qu'il occupe à une position de référence (E_p),
- l'amener du repos à la vitesse qu'il possède (E_c).

IV.6. 1.Théorème de l'énergie cinétique

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$V_2^2 = V_1^2 + 2\,a\,d \rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2\,a\,d \rightarrow a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2\,d}$$



$$\begin{cases} F = m\,a \\ a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d} \end{cases} \rightarrow F = m\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d}$$

$$W = F\,d = m\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d}\,d = m\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}m\,v_1^2$$

$$W = E_c(2) - E_c(1)$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\,v^2$$

$$W = \Delta E_c$$

Le PFD appliqué au point matériel dans le référentiel ($\mathfrak{R}$) supposé galiléen donne :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On multiplie scalairement cette équation par le vecteur vitesse :

$$\vec{F}.\vec{v} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right).\vec{v} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$dE_c = \vec{F}.\vec{v}\,dt$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

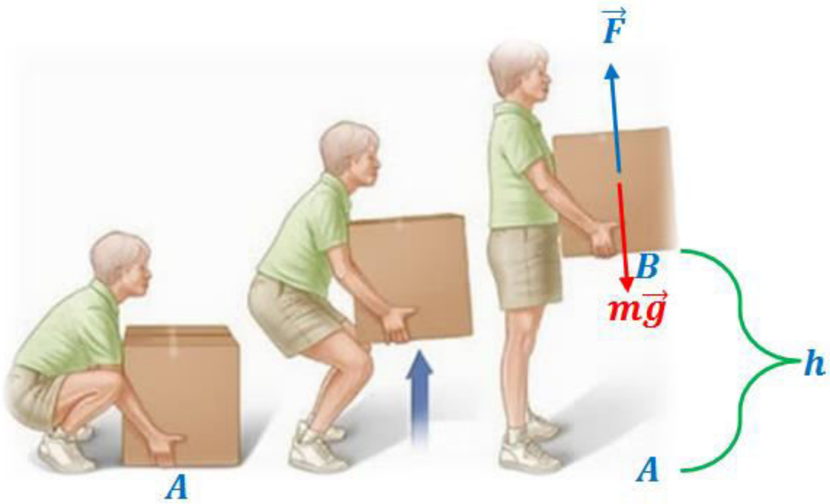
- ❖ Une analyse dimensionnelle donne $[E_c] = ML^2T^{-2}$ ce qui correspond à la dimension d'un travail.
- ❖ L'énergie cinétique est toujours **positive**

IV.6.2.Energie potentielle

$$\vec{v} = constante \rightarrow \vec{a} = \vec{0} \rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \Delta E_c = 0$$

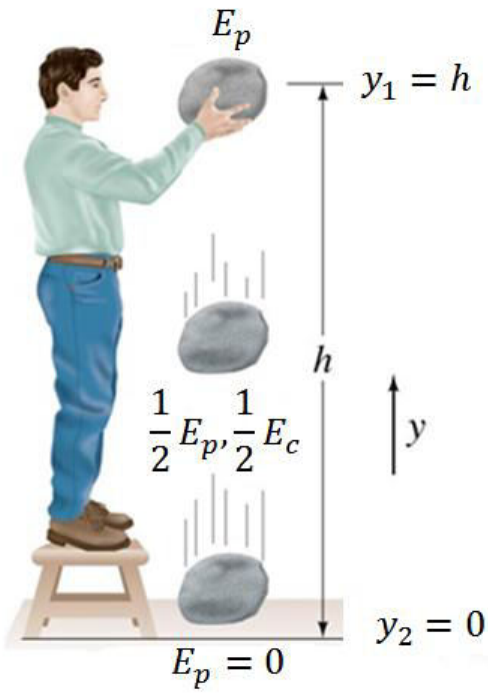
$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{F} + \vec{p} = \vec{0}$$

$$F - mg = 0 \rightarrow F = mg$$



$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F\,AB\,\cos 0 = F\,AB = F\,h$$

$$W = F\,h = E_p$$



$$E_p = 0 \ \ et\ E_c\ transforme \ \rightarrow \begin{cases} température \\ son \\ déformation\ (déformation \nearrow \ son \searrow) \end{cases}$$

IV.6.3. Forces conservatives

Energie potentielle

Une force est dite **conservative** si son travail entre deux point $\boldsymbol{M_1}$ et $\boldsymbol{M_2}$ dépend uniquement de la position de départ et de la position d'arrivée. Autrement dit, le travail est **indépendant du chemin suivi** pour aller de M_1 vers $\boldsymbol{M_2}$.

Si une force $\vec{F}$ est conservative, alors elle dérive d'une énergie potentielle $\boldsymbol{E_p}$. Donc cette force peut s'écrire :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative, il faut que : $\overrightarrow{rot}\, \vec{F} = \vec{0}$

IV.6.4. Travail d'une force conservative

On dit qu'une force $\vec{F}$ est conservative si son travail élémentaire peut s'écrire comme une différentielle, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\boldsymbol{E_p}$ telle que

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{OM}$$

$$dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

Cette force est conservative, elle peut donc s'écrire

$$\begin{cases} \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \\ \overrightarrow{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k} \\ \vec{F} = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

$$dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$dW = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\,dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = -dE_p$$

$$dW = -dE_p$$

Le travail d'une force conservative pour déplacer un point matériel est égal à la diminution de son énergie potentielle.

Travail élémentaire d'une force

$$dE_c = \vec{F}.\vec{v}\,dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \rightarrow d\overrightarrow{OM} = \vec{v}\,dt$$

$$dW = \vec{F}.\vec{v}\,dt = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

Travail total d'une force lors d'un déplacement de A à B

$$dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

Si la force est constante, alors :

$$W = \int dW = \int_A^B \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = dW = \vec{F}\int_A^B d\overrightarrow{OM} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

IV.7.Exercices corrigés

Exercice 1

Une particule est soumise à une force :

$$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{\imath} + 2xz\,\vec{\jmath} + 3xy\vec{k}$$

Calculer le travail de la force quand la particule se déplaces du point $O(0,0,0)$ jusqu'au point $M(1,1,1)$, suivant la courbe (C) définie par :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ z = t^3 \end{cases}$$

Exercice 1 Solution

$$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{\imath} + 2xz\,\vec{\jmath} + 3xy\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = t^2 \rightarrow dx = 2t\ \ dt \\ y = t \rightarrow dy = dt \\ z = t^3 \rightarrow dz = 3t^2dt \end{cases}$$

$$w = \int \vec{F}\,.d\vec{l}$$

$$w = \int \left((x^2 - y^2)\vec{\imath} + 2xz\,\vec{\jmath} + 3xy\vec{k}\right).\left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$w = \int (x^2 - y^2)dx\ + 2xz\,dy\ + 3xydz$$

$$w = \int (t^4 - t^2)\,2t\ \ dt\ + 2t^2t^3\,dt\ + 3t^2t\,3t^2dt$$

$$w = \int (2t^5 - 2t^3)\ \ dt\ + 2t^5\ dt\ + 9t^5 dt$$

$$w = \int (-2t^3\ \ + 13t^5\ )\ dt$$

$O(0,0,0)\ \rightarrow\ M(1,1,1)$, suivant la courbe (C) définie par :

$$w = \int_0^1 (-2t^3\ \ + 13t^5\ )\ dt$$

$$w = \left[\frac{-2t^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{13t^6}{6}\right]_0^1$$

$$w = \frac{-2}{4} + \frac{13}{6} = 1.66\,J$$

Exercice 2

1/ Calculer le travail fourni par la force $\vec{F} = \frac{k}{r^3}\vec{u}_r$.

2/ quelle est l'énergie potentielle qui résulte de la force $\vec{F}$

Exercice 2 Solution

$$w = \int \vec{f}\,.\,\vec{dl}$$

$$\vec{F} = \frac{k}{r^3}\vec{u}_r$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \rightarrow dx = dr\cos\theta - r\,d\theta\sin\theta \\ y = r\sin\theta \rightarrow dy = dr\sin\theta + r\,d\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$$

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = d(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y) = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$$

$$d\vec{r} = (dr\cos\theta - r\,d\theta\sin\theta)\vec{u}_x + (dr\sin\theta + r\,d\theta\cos\theta)\vec{u}_y$$

$$d\vec{r} = dr(\ \cos\theta\,\vec{u}_x +\ \sin\theta\vec{u}_y) + r\,d\theta\,(-\sin\theta\vec{u}_y + \cos\theta\vec{u}_y)$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \end{cases}$$

$$d\vec{r} = dr\ \ \vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{dl} = d\vec{r} = dr\ \ \vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$w = \int \frac{k}{r^3}\vec{u}_r\ .(dr\ \ \vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta)$$

$$w = \int \frac{k}{r^3}dr\ \vec{u}_r\ .\vec{u}_r + \frac{k}{r^3}r dr d\theta\,\vec{u}_r.\ \vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r.\vec{u}_r = 1 \\ \vec{u}_r.\ \vec{u}_\theta = 0 \end{cases}$$

$$w = \int \frac{k}{r^3} dr = k \int r^{-3} dr = k \frac{r^{-3+1}}{-3+1} + cte = k \frac{r^{-2}}{-2} + cte$$

$$w = -k \frac{1}{2r^2}$$

2/ l'énergie potentielle qui résulte de la force $\vec{F}$

$$\begin{cases} \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, Ep \\ \overrightarrow{grad} = \dfrac{\partial}{\partial r} \vec{u}_r + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = \end{cases} \rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial Ep}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial Ep}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

$$\begin{cases} \vec{F} = -\dfrac{\partial Ep}{\partial r} \vec{u}_r - \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial Ep}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{F} = \dfrac{k}{r^3} \vec{u}_r \end{cases}$$

$$-\frac{\partial Ep}{\partial r} = \frac{k}{r^3}$$

$$-\frac{dEp}{dr} = \frac{k}{r^3}$$

$$dEp = -\frac{k}{r^3} dr$$

$$\int dEp = \int -\frac{k}{r^3} dr$$

$$\int dEp = -k \int \frac{1}{r^3} dr$$

$$\int dEp = -k \int r^{-3} dr$$

$$Ep = -k \left(\frac{r^{-3+1}}{-3+1} \right) + A$$

$$Ep = \frac{k}{2r^2} + A$$

$$Ep\,(r \rightarrow \infty) = 0$$

$$0 = \frac{k}{2\infty} + A \rightarrow A = 0$$

$$Ep = \frac{k}{2r^2}$$

Exercice 3

Soit la force $\vec{F}$ donnée par : $\vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$

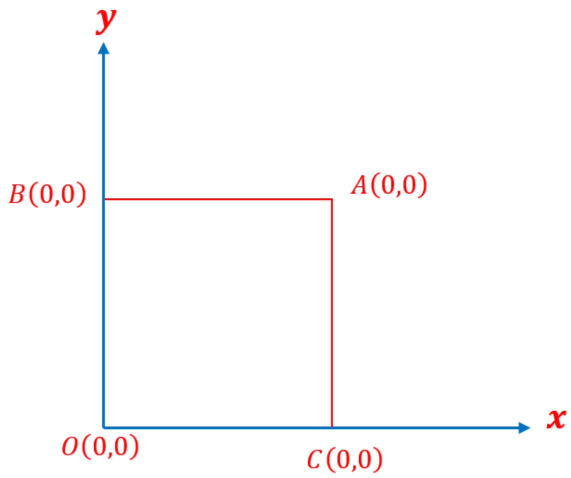
1) Calculer le travail de cette force suivant les chemins :

a) du point $O\,(0,0)$ au point $A\,(1,1)$ en passant par le point $B\,(0,1)$.

b) La droite $(x = y)$ du point $O\,(0,0)$ au point $A\,(1,1)$

c) La parabole ($y = x^2$) $O\ (0,0)$ au point $A\ (1,1)$

d) Chemin fermé $O(0,0) \rightarrow B\ (0,1) \rightarrow A(1,1) \rightarrow C\ (1,0) \rightarrow O(0,0)$



2) Calculer le rotationnel de la force, que peut-on en conclure ?.

3) Déterminer l'énergie potentielle $Ep(x, y)$ sachant que $Ep(0,0) = 0$

4) Déterminer le travail de $\vec{F}$ de $O(0,0) \rightarrow A(1,1)$ de façon directe.

Exercice 3 Solution

$$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

$$\vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$$

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$dw = \left((x^2 + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}\right).(dx\vec{i} + dy\vec{j})$$

$$dw = (x^2 + y)dx + (x - y)dy$$

Avec

$$\begin{cases} \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = 1 \\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0 \end{cases}$$

$$w = \int dw = \int (x^2 + y)dx + (x - y)dy$$

$$w = \int (x^2 + y)dx + \int (x - y)dy$$

a) Suivant le chemin : $O \rightarrow B \rightarrow A$

$$O \rightarrow B\ (x = 0 \rightarrow dx = 0)$$

$$w = \int_0^1 -y\,dy = -\int_0^1 y\,dy = -\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$B \to A\ (y = 1 \to dy = 0)$$

$$w = \int_0^1 (x^2 + 1)dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [x]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$w_{OBA} = w_{OB} + w_{BA}$$

$$w_{OBA} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{5}{6}$$

b) Suivant la droit $(x = y)$: la droite du point $O\ (0,0)$ au point $A\ (1,1)$

$$y = ax + b$$

$$y = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)x + b$$

$$y = \left(\frac{1-0}{1-0}\right)x + b$$

$$b = 0$$

$$x = y$$

$$w = \int dw = \int (x^2 + y)dx + (x - y)dy$$

$$x = y \to dx = dy$$

$$w = \int dw = \int (x^2 + x)dx + (x - x)dx$$

$$w = \int dw = \int (x^2 + x)dx$$

$$w = \int_0^1 (x^2 + x)dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

c) Suivant la parabole $(y = x^2)$ $O\ (0,0)$ au point $A\ (1,1)$

$$y = x^2 \to dy = 2xdx$$

$$w = \int dw = \int (x^2 + x^2)dx + (x - x^2)2xdx$$

$$w = \int 2x^2dx + (x - x^2)2xdx$$

$$w = \int 2x^2dx + 2x^2dx - 2x^3dx$$

$$w = \int 4x^2dx - 2x^3dx$$

$$w = \int_0^1 4x^2dx - \int_0^1 2x^3dx \to w = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \to w = \frac{4}{3} - \frac{2}{4}$$

$$w = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$$

$$w = \frac{5}{6}$$

d) Suivant le chemin fermé $O(0,0) \rightarrow B\,(0,1) \rightarrow A(1,1) \rightarrow C\,(1,0) \rightarrow O(0,0)$

Suivant le chemin : $O \rightarrow B \rightarrow A$

$$w_{OBA} = \frac{5}{6}$$

Suivant le chemin : $A \rightarrow C \rightarrow O$

$$A \rightarrow C\ (x = 1 \rightarrow dx = 0)$$

$$w_{AC} = \int_1^0 (1 - y)dy$$

$$w_{AC} = \int_1^0 (1 - y)dy = \int_1^0 dy - \int_1^0 ydy = [y]_1^0 - \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^0 = -1 + \frac{1}{2}$$

$$w_{AC} = -\frac{1}{2}$$

$$C \rightarrow O\ (y = 0 \rightarrow dy = 0)$$

$$w_{CO} = \int_1^0 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0$$

$$w = -\frac{1}{3}$$

$$w_{ACO} = w_{AC} + w_{CO}$$

$$w_{ACO} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$$

$$w_{OBACO} = w_{OBA} + w_{ACO} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$$

2) $\overrightarrow{rot}\ \vec{F}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \bigwedge \vec{F}(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla} \bigwedge \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{F} = (x^2 + y)\vec{\imath} + (x - y)\vec{\jmath}$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (x^2+y) & (x-y) & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)$$

$$=\vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}0-\frac{\partial}{\partial z}(x-y)\right)-\vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x}0-\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y)\right)$$

$$+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y)\right)$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)=\vec{\imath}\,0-\vec{\jmath}\,0+\vec{k}(1-1)$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F}=\vec{0}\rightarrow\ \vec{F}\text{ est conservative}$$

3) Déterminer l'énergie potentielle $Ep(x,y)$ sachant que $Ep(0,0)\ =0$

$$\vec{F}=(x^2+y)\vec{\imath}+(x-y)\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases}\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\,E_p\\ \overrightarrow{grad}=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\end{cases}\rightarrow\vec{F}=-\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath}-\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases}\vec{F}=F_x\,\vec{\imath}+F_y\,\vec{\jmath}\\ \vec{F}=-\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath}-\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}F_x=-\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\\ F_y=-\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\end{cases}$$

$$\int dE_p=\int -F_x\,dx\rightarrow\int dE_p=\int -(x^2+y)\,dx$$

$$E_p=-\int(x^2+y)\,dx\rightarrow E_p=-\frac{x^3}{3}-yx+f(y)$$

$$E_p=-\frac{x^3}{3}-yx+f(y)$$

$$F_y=-\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$(x-y)=-\frac{\partial\left(-\frac{x^3}{3}-yx+f(y)\right)}{\partial y}$$

$$(x-y) = -\frac{\partial\left(-\frac{x^3}{3}\right)}{\partial y} - \frac{\partial(-yx)}{\partial y} - \frac{\partial(f(y))}{\partial y}$$

$$x - y = -0 + x - \frac{\partial(f(y))}{\partial y}$$

$$y = \frac{\partial(f(y))}{\partial y}$$

$$y = \frac{d(f(y))}{dy}$$

$$d(f(y)) = ydy$$

$$\int d(f(y)) = \int ydy$$

$$f(y) = \frac{y^2}{2} + A$$

L'expression du l'énergie potentielle est

$$E_p = -\frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^2}{2} + A$$

-En utilisant la condition $Ep(0,0) = 0 \rightarrow A = 0$

$$E_p = -\frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^2}{2}$$

3) le travail de $\vec{F}$ de $O(0,0) \rightarrow\ A(1,1)$ de façon directe.

$$E_p = -\frac{x^3}{3} - yx + \frac{y^2}{2}$$

$$E_{p_O} \rightarrow (x=0, y=0) \rightarrow E_{p_O} = 0$$

$$E_{p_A} \rightarrow (x=1, y=1) \rightarrow E_{p_A} = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} \rightarrow E_{p_A} = -\frac{5}{6}$$

$$w_{OA} = E_{p_A} - E_{p_O} = 0 - \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$w_{OA} = \frac{5}{6}$$

Exercice 4

Soit une force $\vec{F}$ dérivée d'un champ de potentiel donné par la relation suivante :

$$U = -\frac{k}{r}e^{-ar}$$

Déterminer l'expression de $\vec{F}$

Exercice 4 Solution

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, Ep$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U$$

$$\begin{cases} \vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U \\ \overrightarrow{grad} = \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{F} = \dfrac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r = \dfrac{\partial U}{\partial r} \rightarrow F_r = \dfrac{\partial\left(-\frac{k}{r}e^{-ar}\right)}{\partial r} = \left(\dfrac{k}{r^2}e^{-ar} + \dfrac{ka}{r}e^{-ar}\right) \\ F_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \rightarrow F_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(-\frac{k}{r}e^{-ar}\right)}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_r = \dfrac{k}{r^2}e^{-ar}(1+ar) \\ F_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta$$

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2}e^{-ar}(1+ar)\vec{u}_r$$

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r \rightarrow \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2}e^{-ar}(1+ar)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = \frac{k}{r^3}e^{-ar}(1+ar)\,\vec{r}$$

Exercice 5

Une particule est soumise à une force $\vec{F}$:

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{x^2 - y^2 - 3z^2}{x^2 y} \\ F_y = \dfrac{y^2 - x^2 - 3z^2}{x y^2} \\ F_x = \dfrac{6z}{xy} \end{cases}$$

1/ démontrer que la force $\vec{F}$ dérivée d'un champ de potentiel

2/ déterminer l'expression de ce potentiel

Exercice 5 Solution

1er méthode

$$\frac{dF_x}{dy}=\frac{dF_y}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{x^2-y^2-3z^2}{x^2y}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{y^2-x^2-3z^2}{xy^2}\right)}{dx}$$

$$\frac{(-2y)(x^2y)-(x^2)(x^2-y^2-3z^2)}{(x^2y)^2}=\frac{(-2x)(xy^2)-(y^2)(y^2-x^2-3z^2)}{(xy^2)^2}$$

$$\frac{-2y^2-x^2+y^2+3z^2}{x^2y^2}=\frac{-2x^2-y^2+x^2+3z^2}{(xy^2)^2}$$

$$\frac{-x^2-y^2+3z^2}{x^2y^2}=\frac{-x^2-y^2+3z^2}{x^2y^2}$$

$$\frac{dF_x}{dz}=\frac{dF_z}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{x^2-y^2-3z^2}{x^2y}\right)}{dz}=\frac{d\left(\frac{6z}{xy}\right)}{dx}$$

$$\frac{(-6z)(x^2y)-(0)(x^2-y^2-3z^2)}{(x^2y)^2}=\frac{(0)(xy)-(y)(6z)}{(xy)^2}$$

$$\frac{-6z}{x^2y}=\frac{-6z}{x^2y}$$

$$\frac{dF_y}{dz}=\frac{dF_z}{dy}$$

$$\frac{d\left(\frac{y^2-x^2-3z^2}{xy^2}\right)}{dz}=\frac{d\left(\frac{6z}{xy}\right)}{dy}$$

$$\frac{(-6z)(xy^2)-(0)(y^2-x^2-3z^2)}{(xy^2)^2}=\frac{(0)(xy)-(x)(6z)}{(xy)^2}$$

$$\frac{-6z}{xy^2}=\frac{-6z}{xy^2}$$

$\frac{dF_x}{dy}=\frac{dF_y}{dx}$, $\frac{dF_x}{dz}=\frac{dF_z}{dx}$ et $\frac{dF_y}{dz}=\frac{dF_z}{dy}$ $\rightarrow$ La force $\vec{F}$ est dérivée d'un champ de potentiel

2ème Méthode

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F}\ =\vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F}(x,y,z)=\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dF_x}{dy}=\dfrac{-x^2-y^2+3z^2}{x^2y^2}\\ \dfrac{dF_y}{dx}=\dfrac{-x^2-y^2+3z^2}{x^2y^2}\\ \dfrac{dF_x}{dz}=\dfrac{-6z}{x^2y}\\ \dfrac{dF_z}{dx}=\dfrac{-6z}{x^2y}\\ \dfrac{dF_y}{dz}=\dfrac{-6z}{xy^2}\\ \dfrac{dF_z}{dy}=\dfrac{-6z}{xy^2}\end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)$$

$$=\vec{i}\left(\frac{-6z}{xy^2}-\left(\frac{-6z}{xy^2}\right)\right)-\vec{j}\left(\frac{-6z}{x^2y}-\left(\frac{-6z}{x^2y}\right)\right)$$

$$+\vec{k}\left(\frac{-x^2-y^2+3z^2}{x^2y^2}-\left(\frac{-x^2-y^2+3z^2}{x^2y^2}\right)\right)$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)$$

$$=\vec{i}\left(\frac{-6z}{xy^2}+\frac{6z}{xy^2}\right)-\vec{j}\left(\frac{-6z}{x^2y}+\frac{6z}{x^2y}\right)$$

$$+\vec{k}\left(\frac{-x^2-y^2+3z^2+x^2+y^2-3z^2}{x^2y^2}\right)$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}\,0-\vec{j}0+\vec{k}0$$

$$\vec{\nabla}\bigwedge\vec{F}(x,y,z)=\vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \\ \overrightarrow{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{k}$$

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{x^2 - y^2 - 3z^2}{x^2 y} \\ F_y = \dfrac{y^2 - x^2 - 3z^2}{xy^2} \\ F_x = \dfrac{6z}{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\vec{k} \\ \vec{F} = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\vec{k} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \end{cases}$$

$$\int dE_p = \int -F_x\, dx \rightarrow \int dE_p = \int -\left(\frac{x^2 - y^2 - 3z^2}{x^2 y}\right) dx$$

$$\int dE_p = \int \left(-\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} + \frac{3z^2}{x^2 y}\right) dx$$

$$EP = \int -\frac{1}{y}\, dx + \int \frac{y}{x^2} dx \int \frac{3z^2}{x^2 y}\, dx$$

$$EP = -\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{3z^2}{xy} + f(y,z)$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$\frac{y^2 - x^2 - 3z^2}{xy^2} = -\frac{\partial\left(-\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{3z^2}{xy} + f(y,z)\right)}{\partial y}$$

$$\frac{y^2 - x^2 - 3z^2}{xy^2} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} - \frac{3z^2}{xy^2} - \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$$

$$\frac{y^2 - x^2 - 3z^2}{xy^2} = -\frac{x^2}{xy^2} + \frac{y^2}{xy^2} - \frac{3z^2}{xy^2} - \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = -\frac{x^2}{xy^2} + \frac{y^2}{xy^2} - \frac{3z^2}{xy^2} - \frac{y^2 - x^2 - 3z^2}{xy^2}$$

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0$$

La fonction $f(y,z)$ est indépendante de la variable y, donc $f(y,z) = f(z)$

$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

$$\frac{6z}{xy} = -\frac{\partial\left(-\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{3z^2}{xy} + f(y,z)\right)}{\partial y}$$

$$\frac{6z}{xy} = \frac{6z}{xy} - \frac{\partial f(y,z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} = \frac{6z}{xy} - \frac{6z}{xy}$$

$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} = 0$$

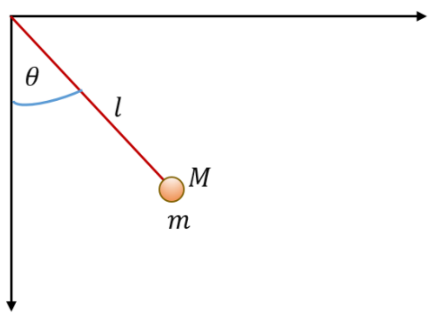
$$\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} = 0 \rightarrow f(y,z) = A = Cte$$

$$EP = -\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{3z^2}{xy} + A$$

$$EP = -\left(\frac{x^2 + y^2 + 3z^2}{xy}\right) + A$$

Exercice 6

Un pendule simple est composé d'une masse ponctuelle m liée par un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. On écart la masse ponctuelle d'un angle $\boldsymbol{\theta}$ par rapport à la position d'équilibre, avant de la libérer avec une vitesse initiale $\boldsymbol{v_0}$



1/ Trouver l'angle de déviation du pendule par rapport à la verticale.

2/ si en écart masse ponctuelle m avec un angle $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ et on lâche sans vitesse initiale, calculer sa vitesse lorsqu'il passe par sa position d'équilibre.

Exercice 6 Solution

1/ l'angle de déviation du pendule par rapport à la verticale

$E_{T_f} = E_{T_i}$(Conservation de l'énergie totale)

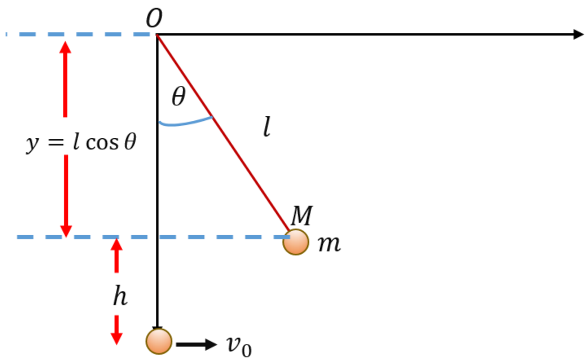
$$E_{c_f} + E_{P_f} = E_{c_i} + E_{P_i}$$

L'état initial (position d'équilibre) est l'origine de l'énergie potentielle $E_{P_i} = 0$

L'état final (vitesse nulle) $E_{c_f} = 0$

$$E_{P_f} = E_{c_i}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m\, v_0^2$$



$$\cos\theta = \frac{y}{l} \rightarrow y = l\cos\theta$$

$$l = y + h \rightarrow h = l - y$$

$$h = l - (l\cos\theta)$$

$$h = l(1 - \cos\theta)$$

$$mgh = \frac{1}{2} m\, v_0^2$$

$$mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} m\, v_0^2$$

$$1 - \cos\theta = \frac{v_0^2}{2gl}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}$$

2/ La vitesse lorsqu'il passe par sa position d'équilibre est :

$$E_{c_f} + E_{P_f} = E_{c_i} + E_{P_i}$$

$$E_{P_i} = mgh$$

$$E_{c_f} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{c_f} = E_{P_i}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v^2 = 2gh$$

$$h = l(1 - \cos\theta)$$

$$v^2 = 2gl(1 - \cos\theta)$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} \rightarrow v = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$v = \sqrt{2gl\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \rightarrow v = \sqrt{gl}$$

Références

Références

1- Cours De Physique Mécanique Du Point, Cours Et Exercices Corrigés, Licence 1re Et 2^{e} Années, Alain Gibaud, Michel Henry, 2^{e} Edition DUNOD ,2007
2- Physique, Exercices Et Problèmes, 1re Années, Jean-Marie Brébec, Tania Chaboud, Thierry Desmarais, Alain Favier, Marc Ménétrier, Régine Noël, Hachette supérieure ,2003
3- Mini Manuel de Mécanique du point, Michel Henry, Nicolas Delorme, DUNOD, 2008
4- Mécanique Générale, Cours et exercices corrigés, Sylvie Pommier, Yves Berthaud, DUNOD, 2010
5- Mecanique Du Point Materiel, Ahmed Fizazi, OPU, Alger 2012
6- Mécanique, Cinématique du point matériel, Cours et exercices, Ms Maalem, 1er Edition mms2005
7- Physique Générale, Cinématique du point matériel, Hadjri Mebarki Soria, OPU, Alger 2016
8- Mécanique I, Rappels de cours et exercices corrigés, Dr Boualem Bourahla, éditions El-Amel 2013
9- La Mécanique, Notions De Base Et Applications, A Bouda, OPU Alger 2013