République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2019/2020

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saida
Discipline : MATHÉMATIQUES
Spécialité : A.S.S.P.A

Par

Ramdani **A**mine [1]

Sous la direction de

Pr. A. Kandouci

Soutenu le 16/09/2020 devant le jury composé de

S. Soltani	Université Dr Tahar Moulay - Saida	Président
A. Kandouci	Université Pr Tahar Moulay -Saida	Encadreur
N. Ait.ouali	Université Dr Tahar Moulay -Saida	Examinatrice
F. Mokhtari	Université Pr Tahar Moulay -Saida	Examinatrice

1. e-mail : ramdaniamine97@gmail.com

Remerciement

Je remercie vivement mon encadreur Mr. A.KANDOUCI, professeur à l'université de saida de m'avoir proposé le sujet de ce mémoire, pour sa patience et ses conseils qui m'ont été d'un grand apport, et encouragement pendant toute la durée de l'élaboration de ce travail. Je tiens également à remercier :

- Le président de jury, d'avoir eu l'aimabilité d'accepter la présidence du jury de soutenance.
- Les membres de jury pour leur participation et leur dévouement.

≺Merci à vous tous≻

Dédicace

$\prec$ A mes parents généreux qui m'ont toujours soutenu. A mes amis à mes proches à mes chers collègues à chers professeurs $\succ$

Table des matières

Introduction générale

Les EDSRs réfléchies ont été introduites par El Karoui et al. dans [1] dans le cas unidimensionnel. Il s'agit de chercher un triplet de processus progressivement mesurables (Y, Z, K), où le processus K est non décroissant et tel que

- $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + KT - Kt - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T$;
- $Y_t \geq S_t, 0 \leq t \leq T$
- $\int_t^T (Y_t - S_t)dK_t = 0$

Ici, S est un processus progressivement mesurable, qui jouera le rôle d'une barrière. Le rôle du processus K ici est de pousser le processus Y vers le haut pour le maintenir au-dessus de la barrière S. La dernière condition est connue sous le nom de condition de Skorohod et garantit que le processus K agit de manière minimale, c'est-à-dire seulement lorsque le processus Y atteint la barrière inférieure S. Dans[1] , les auteurs ont prouvé l'unicité et l'existence à la fois par un argument de point fixe et par une approximation par pénalisation. Sur la base de ces résultats, **Cvitanic Karatzas** ont ensuite introduit dans [2] des EDSRs refléchies avec deux barrières, ils cherchent alors une solution à une EDSRR dont la composante Y est forcée de rester entre deux processus progressivement mesurables L et $U(L \leq U)$. L'EDSRR multidimensionnelle réfléchie a été étudié par **Gegout-Petit** et **Pardoux** [3], dans un domaine convexe et une direction de réflexion normale et dans le cas de réflexion oblique par Ramasubramanian [4] puis Hu et Tang [5].

Le mémoire présenté est partagé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, j'ai présenté Quelques généralités sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades, ainsi que quelques résultats de recherche concernant l'existence et l'unicité, j'ai résumé quelques résultats concernant le calcul stochastique utils dans la suite du mémoire.

Dans le chapitre deux, j'ai présenté quelques résultats de recherche trouvés dans la littérature concernant Les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies (EDSRR), notamment les EDSRs avec réflexion oblique, EDSRR de type Volterra ainsi que les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec réflexion oblique et coefficient localement Lipschitzien et le cas de Voltérra a été traité aussi.

Le dernier chapitre de ce mémoire a été consacré aux application sur de ce type d'équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies (EDSRR) en finance ; le problème du rendement d'un jeu américain, ou recallable, option sous l'incertitude de Knightian, puis le prix de l'option américaine revisité. On termine ce chapitre par une application des EDSRR à horizon infini à un problème de CI. Une conclusion à la fin du mémoire aura pour objectifs de poser quelques questions perspectives sur cet axe de recherche.

Chapitre 1

Quelques généralités sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la notion des équations différentielles stochastiques rétrogrades. EDSR en abrégé ou en anglais BSDE (Backwards stochastics differentials equations) qui sont une nouvelle classe d'équations différentielles stochastiques.

1.2 Rappels de calcul stochastique

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

1.2.1 Généralités

Définition 1.2.1.1. *Soit* T *un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par* T *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille* $(X_t)_{t\in T}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathbb{F})$ $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ *; pour tout* $t \in T, X_t$*est une variable aléatoire*

Définition 1.2.1.2. *Un processus* X *est mesurable si l'application* $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathbb{F}$ *et* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

Définition 1.2.1.3. *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\mathbb{F}_t$ $t \geq 0$ *si, pour tout* $t \geq 0$ *l'application* $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ *de* $[0, t]$ $\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathbb{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si* X *est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Définition 1.2.1.4. *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathbb{F}_t$-mesurable. Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.*

1.2.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.2.1. *On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique W à valeurs réelles tel que :*

- $\mathbb{P} - p.s. t \rightarrow W_t(\omega)$ *est continue.*
- *pour* $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_t$ *est indépendant de la tribu* $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $t - s$.
- $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$

Remarque 1.2.2.1. *On dit que W est un $\{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}$-MB si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(\exp iu(W_t - W_s)|\mathbb{F}_s) = \exp\{\frac{-u^2(t-s)}{2}\}.$$

1.2.3 Martingales

Définition 1.2.3.1. *Un processus X à valeurs réelles est une surmartingale par rapport à la filtration $\{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}$ si :*

1. *pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathbb{F}_t$-mesurable ;*
2. *pour tout $t \geq 0$, X_t^- est intégrable ;*
3. *pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|\mathbb{F}_s) \leq X_s$.*

X est une sous-martingale lorsque $-X$ est une surmartingale ; X est une martingale si X est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

Définition 1.2.3.2. *Soit X un processus $\{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ telle que $\lim_{n\rightarrow\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P} - p.s$ et, pour tout n, X^{τ_n} est une martingale.*

Théorème 1.2.3.1. *[3] Soit X une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu $\langle X, X\rangle$, nul en 0, tel que X^2 $-\langle X, X\rangle$ soit une martingale locale.*

Théorème 1.2.3.2. *(Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy)[3] Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et Cp telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p] \leq Cp\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}]$$

Remarque 1.2.3.1. *En particulier, si $T > 0$,*

$$c_p\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p] \leq Cp\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}]$$

1.3 Les équations différentielles stochastiques rétrogrades

Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adapté par rapport à la filtration du mouvement brownien $(\mathbb{B}_t)_{0\leq t\leq T}$,$(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dY_t = \mathbf{f}(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t d\mathbb{B}_t, \quad avec, \quad 0 \leq t \leq T$$

avec la condition finale (c'est pour cela que l'on dit rétrograde) $Y_T = \xi$ ou ξ est une variable alétoire de carré intégrable. Comme les EDS, ces équation être compris au sens intégrale i.e.

$$Y_t = \xi + \int_t^T \mathbf{f}(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s d\mathbb{B}_s, 0 \leq t \leq T$$

les EDSR ont été intoduites en 1973 par J.-M. Bismut [6] dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il a fallu attendre le début des années 90 le travaile de E.Pardoux et S. Peng [7] pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f n'est pas linéaire.

1.3.1 Présentation du problème

1.3.1.1 Structuration de problème

Soient $(\Omega, \mathbb{F}, \{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et variable alétoire ξ mesurable par rapport $\mathbb{F}_T$ ($\xi \in \mathbb{F}_T$). On voudrait résoudre l'équation différenteille suivante :

$$-\frac{dY_t}{dt} = \mathbf{f}(Y_t), t \in [0, T], \quad avec, \quad Y_T = \xi$$

en imposant que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}$.

1.3.1.2 Quelques notations

soient $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $\mathbb{B}$ un MB $d-dimensionnel$ sur cet espace. On notera $\{\mathbb{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB $\mathbb{B}$. On travaillera avec deux espaces de processus :

1. $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$: est l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 := \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2] < \infty$$

   et $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.

2. $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: est l'espace vectoriel formé par les processus Z, progressivement mesurables à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E}[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt] < \infty$$

   où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$,$\|z\|^2 = trace(zz^*)$.$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$

Les espaces $\mathcal{S}^2$,$\mathcal{S}_c^2$ et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)\times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Dans tout ce chapiter, nous donnons une application aléatoire $\mathbf{f}$ est définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{\mathbf{f}(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progessivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à $\mathbb{F}_T$ ($\mathbb{F}_T - mesurable$) et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différenteille stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante :

$$-dY_t = \mathbf{f}(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t d\mathbb{B}_t, \quad 0\leq t\leq T, \quad Y_T = \xi$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T \mathbf{f}(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r d\mathbb{B}_r, 0\leq t\leq T \tag{1.1}$$

La fonction $\mathbf{f}$ s'appelle générateur de l' EDSR et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l' EDSR (3.1).

Définition 1.3.1.1. *Une solution de l' EDSR (3.1) est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;*

2. *$\mathbb{P}-p.s.$ $\int_t^T\{|\mathbf{f}(r,Y_r,Z_r)|+\|Z_r\|^2\}dr<\infty$;*
3. *$\mathbb{P}-p.s$; on a :*

$$Y_t=\xi+\int_t^T\mathbf{f}(r,Y_r,Z_r)dr-\int_t^T Z_r d\mathbb{B}_r, 0\leq t\leq T.$$

1.3.2 Le cas lipschitz

1.3.2.1 Le résultat de Pardoux-Peng

C'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire.

Voici les hypothèses lesquelles nous allons travailler.

Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s.$,

– condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}[|\xi|^2+\int_0^T|\mathbf{f}(r,0,0)|^2dr]<\infty$$

commençons par le cas simple où $\mathbf{f}$ ne dépend ni de y ni de z i.e. On se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathbb{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l' EDSR

$$Y_t=\xi+\int_t^T\mathbb{F}_r dr-\int_t^T Z_r d\mathbb{B}_r, 0\leq t\leq T$$

– condition de Lipschitz en (Y,z) : pour tout t,y,y',z,z'

$$|\mathbf{f}(t,y,z)-\mathbf{f}(t,y',z')|\leq\lambda(|y-y'|+\|z-z'\|)$$

1.3.2.2 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r d\mathbb{B}_r$ est le rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 1.3.1. *[7] Soit(Y,Z) la solution de l'EDSR (3.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, que ξ est $\mathbb{F}_T-$mesurable et que $\mathbf{f}(t,y,z)=0$ dès que $t\geq T$ Alors $Y_t=Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t=0$ si $t\geq\tau$*

Preuve 1.3.2.2.1. *Soit $t\in[0,T]$. On a $\mathbb{P}-p.s.$,*

$$Y_t=\xi+\int_t^T\mathbf{f}(r,Y_r,Z_r)dr-\int_t^T Z_r d\mathbb{B}_r$$

Si $t \leq \xi$ alors $t \wedge \tau$ et donc $Y_{t\wedge\tau} = Y_t$. Soit à présent $t \geq \tau$ alors

$$Y_{t\tau} = Y_\tau$$

$$= \xi + \int_\tau^T \mathbf{f}(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r d\mathbb{B}_r$$

$$= \xi - \int_\tau^T Z_r d\mathbb{B}_r$$

On a alors

$$Y_\tau = \mathbb{E}(\xi|\mathbf{f}_\tau) = \xi$$

et par suite

$$\int_\tau^T Z_r d\mathbb{B}_r = 0$$

Ce qui donne

$$\mathbb{E}[(\int_\tau^T Z_r d\mathbb{B}_r)^2] = \mathbb{E}[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 dr] = 0$$

et finalement

$$Z_r \mathbf{1}_{t\geq\tau} = 0$$

si $t \geq \tau$,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^T \mathbf{f}(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r d\mathbb{B}_r = Y_t.$$

ce qui termine la preuve. Notons que dans le cas où ξ et $\mathbf{f}$ sont déterministes alors Z et nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY_t}{dt} = \mathbf{f}(t, Y_t, 0), \quad Y_T = \xi$$

Chapitre 2

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies (EDSR)

2.1 EDSRR avec réflexion oblique

Soit $W = \{W(t) = (W_1(t), ..., W_d(t)) : t \geq 0\}$ le mouvement Brownien standard de dimension d défini sur l'espace probabilisé filtré complet $(\Omega, \mathbb{F}, P, \{\mathbb{F}_t\})$ où $\{\mathbb{F}_t\}$ désigne la filtration naturelle engendrée par W, $\mathbb{F}_0$ contenant tous les sous ensembles de mesure $\mathbb{P}$-nulle.
Soit $\mathbf{G} = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i > 0, 1 \leq i \leq d\}$ l'orthant positif de $\mathbb{R}^d$de l'EDSRR

Remarque 2.1.1. *Un orthant ou hypéroctant est l'analogue dans l'espace euclidien à n dimensions d'un quadrant dans le plan ou d'un octant en trois dimensions.*

$$Y_i(t) = \xi_i + \int_t^T b_i(s, Y(s))ds - \sum_{j=1}^{d} \int_t^T Z_{ij}(s)dW_j + K_i(T) - K_i(t) + \sum_{j \neq i} \int_t^T r_{ij}(s, Y(s))dK_j(s) \tag{2.1}$$

avec les hypothèses liées à ses données $(\xi, b, \mathbb{R})$. La valeur terminale ξ est une variable aléatoire bornée et à valeurs dans $\overline{G}$, $\mathbb{F}_T - mesurable$.

2.2 EDSRR de type Volterra

Considérons l'espace probabilisé filtré complet précédent, $\mathcal{D}$ =$\{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2; 0 \leq t \leq s \leq T\}$ et $\mathcal{P}$ la σ-algèbre des $\mathbb{F}_{t\vee s} - progressivement$ mesurables sous ensembles de $\Omega \times \mathcal{D}$. On désigne par $M^2(t, T; \mathbb{R}^k)$ $(resp. M^2(\mathcal{D}; \mathbb{R}^{k\times d}))$, l'ensemble des processus valeurs dans $\mathbb{R}^k$ $(resp.dans\mathbb{R}^{k\times d})$ $\mathbb{F}_{t\vee s} - progressiveness$ mesurables et de carré intégrables par rapport $\mathbb{P}\otimes\lambda_1\otimes\lambda_2$, λ étant la mesure de Lebesgue sur $[O,T]$. $|X|$ représente la norme Eucludienne de $X\xi\mathbb{R}^k$ et $|Y| = \sqrt[2]{Tr(YY^*)}$ celle de $Y\in\mathbb{R}^{k\times d}$ consideré comme une $k\times d$ matrice. Pour terminer énonçons les hypothèses liées aux données (ξ,f,g) de l'équation

$$\xi = Y(t) + \int_t^T f(t,s,Y(s),Z(t,s))ds + \int_t^T [g(t,s,Y(s)) + Z(t,s)]dW(s) \tag{2.2}$$

$(\mathbf{B}_1)$ $f:\Omega\times\mathcal{D}\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ et $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

- $f(.,.,0,0)\in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^k)$
- il existe une constante K telle que $|f(t,s,y,z)-f(t,s,y',z')|\leq K(|y-y'|+|z-z'|), \forall y\in\mathbb{R}^k, y'\in\mathbb{R}^k,\ z\in\mathbb{R}^k, z'\in\mathbb{R}^{k\times d}$.

$(\mathbf{B}_2)$ $g:\Omega\times\mathcal{D}\times\mathbb{R}^k\times\longrightarrow\mathbb{R}^{k\times d}$ et $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

- $g(.,.,0,0)\in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$
- $|g(t,s,y)-g(t,s,y')|\leq K(|y-y'|), \forall y\in\mathbb{R}^k, y'\in\mathbb{R}^k$,

$(\mathbf{B}_3)$ ξ est un vecteur aléatoire K-dimensionelle de carrée intégrable $\mathbb{F}_T$-mesurable.

Remarque 2.2.1. *Les hypothèses* $(\mathbf{B}_1)$ - $(\mathbf{B}_2)$ *impliquent que si* $Y\in M^2(t,T;\mathbb{R}^k) etZ \in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$ *alors* $f(.,.,Y(.),Z(.,.))\in\in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^k)$ *et* $g(.,.,Y(.))\in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$.

Définition 2.2.1. *La paire* $\{(Y(s),Z(t,s))\,;\,(t,s)\in\mathcal{D}\}$ *de processus* $\mathbb{F}_{t\vee s}$*-adapté valeur dans* $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ *est solution de l'EDSRR (3.2) associée* (ξ,f,g) *s'il existe un vecteur aléatoire* ξ, $\mathbb{F}_T - mesurable$ *et de carré intégrable tel que (3.2) soit satisfait.*

Lemme 2.2.1. *Les hypothèses* $(\mathbf{B}_1)-(\mathbf{B}_3)$ *étant vérifiées et* $(Y(s),Z(t,s))$ *solution de l'EDSRR (3.2) associée à* (ξ,f,g);

$$\mathbb{E}|Y(t)|^2 + \int_t^T |Z(t,s)|^2 ds$$

$$= \mathbb{E}|\xi| - 2\mathbb{E}\int_t^T \langle f(t,s,Y(s),Z(t,s)),Y(s)\rangle ds$$

$$-2\mathbb{E}\int_t^T f(t,s,Y(s),Z(t,s)),A(t,s)ds$$

$$-2\mathbb{E}\int_t^T \langle g(t,s,Y(s),Z(t,s))\rangle ds - \mathbb{E}\int_t^T |g(t,s,y(s))|^2 ds$$

Où

$$A(t,s) = \int_s^T (f(s,u,Y(u),Z(s,u)) - f(t,u,Y(u),Z(t,u)))du.$$

Théorème 2.2.1. *[8] Supposons que hypothèses* $(\mathbf{B}_1)-(\mathbf{B}_3)$ *sont satisfaites alors il existe une unique paire* $(Y(s), Z(t,s)) \in M^2(t,T;\mathbb{R}^k)\times M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$ *solution de l'EDSRR (3.2) associée à* (ξ, f, g).

2.3 Équations différentielles stochastiques rétrogrades avec réflexion oblique et coefficient localement Lipschitzien

2.3.1 Hypothèses et formulation du problème

On considère l'équation

$$Y_i(t) = \xi_i + \int_t^T b_i(s, Y(s))ds - \sum_{j=1}^{d}\int_t^T Z_{ij}(s)dW_j + K_i(T) - K_i(t) + \sum_{j\neq i}\int_t^T r_{ij}(s, Y(s))dK_j(s) \tag{2.3}$$

associée aux données $(\xi, b, \mathbf{R})$ sous les hypothèses $(\mathbf{A}_1)$ La valeur terminale ξ est une variable aléatoire bornée et à valeurs dans $\overline{G}$ $\mathbb{F}_T$-mesurable. $(\mathbf{A}_2)$ $b : [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction bornée mesurable telle que

1. pour tout $y \in \mathbb{R}^d, b(.,.,y) = (b_1(.,.,y), ..., b_d(.,.,y))$ est un processus $\mathbb{F}_T$-prévisible ;
2. pour tout $1 \leq i \leq d$, $y \mapsto b_i(t,\omega,y)$ est localement Lipschitzienne uniformément en (t,ω) et il existe une constante β_i telle que $|b_i(t,\omega,y)| \leq \beta_i$.

$(\mathbf{A}_3)$ $\mathbf{R} : [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ est une fonction bornée mesurable telle que

- pour tout $y \in \mathbb{R}^d, \mathbf{R}(.,.,y)= (r_{ij}(.,.,y))_{1\leq i,j\leq d}$ est un processus $\mathbb{F}_T$-prévisible avec $r_{ii}(.,.,y) \equiv 1$
- pour tout $1 \leq i,j \leq d$,$y \mapsto r_{ij}(t,\omega,y)$ est uniformément lipschitzienne en (t,ω)et pour $i \neq j$ $|r_{ij}(t,\omega,y)| \leq \nu_{ij}$, où $V = (\nu_{ij})$ est une matrice telle que $\nu_{ij} = 0, \sigma(V) < 1$ et $(I-V)^{-1} = I + V + V^2 + ... + ...$; $\sigma(V)$ désignant le rayon le rayon spectral de V.

Soient (Y, K) ,$(\widehat{Y}, \widehat{K})$ éléments de $\widetilde{\mathcal{H}}$, alors

$$\varphi_t(K_i - \widehat{K}_i) = \int_t^T |D_i(s) - \widehat{D}_i(s)|$$

et une intégration par partie permettant d'avoir

$$d((Y,K),(\widehat{Y},\widehat{K})) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T \exp(\theta t)a_i|Y_i(t) - \widehat{Y}_i(t)|dt)$$

$$+\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T \frac{\exp(\theta t)-1}{\theta} a_i|D_i(t)-\widehat{D}_i(t)|dt)$$

$$= \mathbb{E}(\int_0^T \exp(\theta t)\|Y(t)-\widehat{Y}(t)\|dt)$$

$$+\mathbb{E}(\int_0^T \frac{\exp(\theta t)-1}{\theta}\|D(t)-\widehat{D}(t)\|dt),$$

où pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| = \sum_i^d a_i|y_i|$. D'autre part pour tout $z \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$|||z||| = (\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} a_i|z_{ij}|^2)^{1/2}$$

et on considère $\mathbb{H}$ l'espace de tous les processus $Z = (Z_{ij})_{1\le i,j\le d}$ $\mathbb{F}_t$-progressivement mesurables tels que

$$\mathbb{E}(\int_0^T |||Z(t)|||^2 dt) < +\infty$$

muni de la norme

$$|Z| = [\mathbb{E}(\int_0^T |||Z(t)|||^2 dt)]^{1/2}$$

Il est claire que $\mathbb{H}$ est un espace de Banach. On a le résultat principal suivant

Théorème 2.3.1.1. *[8] Les hypothèses* $(\mathbf{A}_1)-(\mathbf{A}_3)$ *étant vérifiées, l'EDSR à réflexion oblique associée à* $(\xi, b, \mathbf{R})$ *admet une solution unique* $((Y,K),Z) \in \widetilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{H}$.

Preuve 2.3.1. *Les lemmes suivants sont nécessaires à la preuve du Théorème* 2.3.1.1

Lemme 2.3.1.1. *b étant un processus vérifiant l'hypothèses* $(\mathbf{A}_2)$*, il existe une suite de processus b^n Lipschitziens satisfaisant $|b_j^n(t,\omega,y)| \le \beta_i, \forall 1 \le i \le d$ et $(t,\omega,y) \in [0,T]\times\omega\times\mathbb{R}^d$ telle que pour tout p,$\rho_p(b^n-b) \to 0$ p.s lorsque $n \to +\infty$, où*

$$\rho_p(f) = \mathbb{E}(\int_0^T \exp(\theta s)\sup_{|x|\le p}\|f(s,x)\|ds)$$

Démonstration *: Soit $\psi_n$une suite de fonctions régulières à support dans la boule* $\mathbf{B}(0,n+1)$ *telle que* $\sup\psi_n = 1$. *On montre aisément que la suite* $(b^n)_{n\ge1}$ *de fonctions tronquées définies par $b^n = b\psi_n$, vérifie toutes les propriétés citées précédamment. D'après le théorème* 2.2.4, *l'EDSR à réflexion oblique associée à* $(\xi, b^n, \mathbf{R})$ *admet une solution unique* $\{((Y^n(t),K^n(t)),Z^n(t)) : 0 \le t \le T\} \in \widetilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{H}$.

Lemme 2.3.1.2. *Les hypothèses* $(\mathbf{A}_1)-(\mathbf{A}_3)$ *étant satisfaites, il existe une constante* C *telle que pour tout* $n \geq 1$

$$\mathbb{E}(\int_0^T \exp(\theta t)\|Y^n(t)\|dt) + \mathbb{E}(\int_0^T \frac{\exp(\theta t)-1}{\theta}\|D^n(t)\|dt) < C. \tag{2.4}$$

Démonstration : Le triplet (Y^n, K^n, Z^n) étant l'unique solution de l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi, b^n, \mathbf{R})$, il vérifie l'équation

$$Y^n(t) = \xi + \int_t^T b_i^n(s, Y^n(s))ds - \int_t^T \sum_{j=1}^d Z_{ij}^n(s)dB_j + K_i^n(T) - +K_i^n(t) + \sum_{j\neq i}\int_t^T r_{ij}(s, Y^n(s))dK_j(s)$$

$$, \forall 1 \leq i \leq d et 0 \leq t \leq T$$

La proposition et une intégration par partie, entrainent

$$\mathbb{E}(\int_0^T \theta\exp(\theta t)|Y_i^n(t)|dt) + \mathbb{E}(\int_0^T \theta\exp(\theta t)\varphi_t(K_i^n)dt)$$

$$= \mathbb{E}(\int_0^T \theta\exp(\theta t)|Y_i^n(t)|dt) + \mathbb{E}(\int_0^T (\exp(\theta t)-1)|D_i^n(t)|dt)$$

$$\leq \mathbb{E}((\exp(\theta T)-1)|\xi_i|) + \mathbb{E}(\int_0^T (\exp(\theta t)-1)|b_i^n(t, Y^n(t)))|dt$$

$$+\mathbb{E}(\int_0^T (\exp(\theta t)-1)\sum_{j\neq i}|r_{ij}(t, Y^n(t))||D_j^n(t)|dt)$$

Or $|r_{ij}(t,\omega,y)| \leq \upsilon_{ij}$, $|b_j(t,\omega,y)| \leq \beta_{ij}$, $|D_j(t,\omega,y)| \leq ((I-V)^{-1}\upsilon)_j$; par conséquent

$$\mathbb{E}(\int_0^T \theta\exp(\theta t)|Y_i^n(t)|dt) + \mathbb{E}(\int_0^T \theta\exp(\theta t)\varphi_t(K_i^n)dt)$$

$$\leq \mathbb{E}((\exp(\theta T)-1)|\xi_i|) + \mathbb{E}(\int_0^T (\exp(\theta t)-1)\beta_i dt)$$

$$+ \mathbb{E}(\int_0^T (\exp(\theta t)-1)\sum_{j\neq i}\upsilon_{ij}((I-V)^{-1}\beta)_j dt) \tag{2.5}$$

comme

$$d((Y^n, K^n), (0,0)) = \mathbb{E}(\int_0^T \exp(\theta t)\|Y^n(t)\|dt) + \mathbb{E}(\int_0^T \frac{\exp(\theta t)-1}{\theta}\|D^n(t)\|dt)$$

en multipliant les deux membres de (3.7) par a_i et en sommant on a

$$\theta d((Y^n,K^n),(0,0)) \leq \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{d}(\exp(\theta T)-1)a_i|\xi_i|)+\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T(\exp(\theta t)-1)a_i\beta_i dt)$$

$$+\mathbb{E}(\int_0^T(\exp(\theta t)-1)\sum_{i=1}^{d}\sum_{j\neq i}a_i v_{ij}((I-V)^{-1}\beta)_j dt)$$

En vertue de la remarque 1.1.1 on a

$$\theta d((Y^n,K^n),(0,0)) \leq \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{d}(\exp(\theta T)-1)a_i|\xi_i|)+\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T(\exp(\theta t)-1)a_i\beta_i dt)$$

$$+\alpha\mathbb{E}(\int_0^T(\exp(\theta t)-1)\sum_{j=1}^{d}a_j((I-V)^{-1}\beta)_j dt)$$

$$\leq (\exp(\theta T)-1)\mathbb{E}\|\xi\|$$

$$+(\|\beta\|+\alpha\|((I-V)^{-1}\beta)\|)\int_0^T(\exp(\theta t)-1)dt$$

$$\leq C.$$

2.4 Équations différentielles stochastiques rétrogrades de type voltérra avec drift localement lipschitzien

2.4.1 Formulation du problème et Hypothèses

Considérons l'équation

$$\xi = Y(t)+\int_t^T f(t,s,Y(s),Z(t,s))ds+\int_t^T[g(t,s,Y(s))+Z(t,s)]dW(s) \tag{2.6}$$

associées aux données (ξ,f,g) sous les hypothèses $(\mathbf{B}_1)'$ $f:\Omega\times\mathcal{D}\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\to\mathbb{R}^k$ est $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}_k/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

(i) $f(.,.,0,0)\in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^k)$

(ii) il existe deux constantes $K>0$(suffisament grand) et $0\leq\alpha\leq 11$ telles que $|f(t,s,y,z)|\leq K(1+|y|+|z|)^\alpha$, $\mathbb{P}$-presque tout $(t,s)\in\mathcal{D}$,

(iii) pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $L_N > 0$ telle que, $|f(t,s,y,z) - f(t,s,y',z')| \leq L_N|y-y'| + K|z-z'|$, $\forall |y| \leq N$, $|y'| \leq N$ $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $z' \in \mathbb{R}^{k\times d}$, avec K la constante du (ii).

$(\mathbf{B}_2)$ $g : \Omega \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times d}$ est $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_k/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

(i) $g(.,.,0,0) \in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$

(ii) $|g(t,s,y) - g(t,s,y')| \leq K|y-y'|$, $\forall y, y' \in \mathbb{R}^k$,

$(\mathbf{B}_3)$ ξ est un vecteur aléatoire K-dirnensionelle de carrée intégrable $\mathbb{F}_T$-mesurable.

2.4.2 Existence et unicité de la solution

Lemme 2.4.2.1. *f étant un processus vérifiant $(\mathbf{B}_1)'$, il existe une suite de processus$(f_n)_n$ telle que pour tout n, f_n est $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_k \otimes \mathcal{B}_{k\times d}/\mathcal{B}_k$ mesurable, lipschitzien et satisfait $(\mathbf{B}_1 i)' - (\mathbf{B}_1 ii)'$ et $\rho_N(f_n - f) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ pour tout $N > 1$ fixé,où*

$$\rho_N(f) = \mathbb{E}(\int_{\mathcal{D}} \sup_{|y|\leq N, |z|\leq N} |f(t,s,y,z)|^2 d\lambda(t,s))^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration :Considérons $\psi_n$une suite de fonctions assez régulière à support dans la boule $B(0,n+1)$ telle que $\psi_n = 1$ sur la boule $B(0,n)$ etsup $\psi_n = 1$. On montre aisément que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions tronquées définies par $f_n = f\psi_n$, satisfait toutes les propriétés précédentes. $(f_n)_{n\geq 1}$ étant la suite associée à f par le Lemme 3.2.1, le théorème 1.2.1 montre que l'EDSRR de type Voltérra associée à (ξ, f_n, g) admet une solution unique $(Y_n(s), Z_n(t,s) : (t,s) \in \mathcal{D})$ élément de $M^2(t,T;\mathbb{R}^k)$ $\times M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$.

Lemme 2.4.2.2. *Supposons les hypothèses $(\mathbf{B}_1)' - (\mathbf{B}_3)$ satisfaites, alors il existe une constante $C > 0$, dépendant de K, T et ξ telle que pour tout $n \geq 1$*

$$\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)|^2 ds + \mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du \leq C.\forall t \in [T-\eta, T], o\eta < \frac{1}{24K^2} \quad (2.7)$$

Théorème 2.4.2.1. *[8] Si les hypothèses $(\mathbf{B}_1)' - (\mathbf{B}_3)$ sont vérifiées et*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(2L_N + 2L_N^2)N^{2(1-\alpha)}} \exp[(2L_N + 2L_N^2)T] = 0 \quad (2.8)$$

alors l'EDSR de type Voltérra associée à (ξ, f, g) admet une solution unique $\{(Y(s), Z(t,s)) : (t,s) \in \mathcal{D}\}$ élément de $M^2(t,T;\mathbb{R}^k) \times M^2(D;\mathbb{R}^{k\times d})$.

Remarque 2.4.2.1. *La condition (2.8) reste valable s'il existe une constante $L \geq 0$, telle que*

$$(2L_N + 2L_N^2)T \leq L + (1-\alpha)\log N.$$

Preuve

– **Unicité**

Supposons $\{(Y(s), Z(t,s)) : (t,s) \in \mathcal{D}\}$ et $\{(Y'(s), Z'(t,s)) : (t,s) \in \mathcal{D}\}$ deux solutions de l'EDSRR de type Voltérra associée à (ξ, f, g) et $\Delta Y(s) = Y(s) - Y'(s)$, $\Delta Z(s,u) = Z(s,u) - Z'(s,u)$, $\Delta f(s,u) = f(s,u,Y(u),Z(s,u)) - f(s,u,Y'(u),Z'(s,u))$, $\Delta g(s,u) = g(s,u,Y(u)) - g(s,u,Y'(u))$. Dans la suite C est une constante positive dépendant uniquement de K, T, et ξ, qui pourra varier de ligne en ligne. Comme $(\Delta Y(s), \Delta Z(s,u)$ vérifie l'équation

$$\Delta Y(s) + \int_s^T \Delta f(s,u)du + \int_s^T [\Delta g(s,u) + \Delta Z(s,u)]dW_u = 0,$$

le Lemme 1.2.1 montre que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\Delta Y(s)|^2 + \int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 \\
&= -2\mathbb{E}\int_s^T \langle \Delta f(s,u), \Delta Y(u)\rangle du - 2\mathbb{E}\int_s^T \langle \Delta f(s,u), A(s,u)\rangle du \\
&\quad -2\mathbb{E}\int_s^T \langle \Delta g(s,u), \Delta Z(s,u)\rangle du - -2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)|^2 du \\
&\leq 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)||\Delta Y(u)|(\mathbf{1}_{A^N}(s,u) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u))du \\
&\quad +2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)||A(s,u)|(\mathbf{1}_{A^N}(s,u) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u))du \\
&\quad +2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)|, |\Delta Z(s,u)|du \\
&= \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_5
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où

$$A(s,u) = \int_u^T (\Delta f(u,v) - \Delta f(s,v))dv$$

$$A^N = \{(\omega, s, u) \in \Omega \times \mathcal{D}_\eta, |Y(s)| + |Z(s,u)| + |Y'(u)| + |Z'(s,u)| \geq N\}$$

et

$$\overline{A}^N = \Omega \times \mathcal{D}_\eta \backslash A^N$$

Les hypothèses $(\mathbf{B}_1)' - (\mathbf{B}_3)$, l'inégalité de **Hôlder** et celle de **Young** donnent

$$\mathbf{J}_1 = 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)||\Delta Y(u)|\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du$$

$$\leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + \mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|^2\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du$$

$$\leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du$$

$$+4K\mathbb{E}\int_s^T (1+|Y(s)|+|Z(s,u)|+|Y'(u)|+|Z'(s,u)|)^{2\alpha}\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du$$

$$\mathbf{J}_2 = 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)||\Delta Y(u)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)du$$

$$\leq 2\mathbb{E}\int_s^T (L_N|\Delta Y(u)|^2 + K|\Delta Z(s,u)|)|\Delta Y(u)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)du$$

$$\leq (2L_N+\beta_1)\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + \frac{K}{\beta_1}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{J}_3 = 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)||\Delta A(s,u)|\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du$$

$$\leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|^2\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du + \mathbb{E}\int_s^T |\Delta A(s,u)|^2 du$$

$$= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{J}_4 = 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)||\Delta A(s,u)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)du$$

$$\leq 2\mathbb{E}\int_s^T (L_N|\Delta Y(u)| + K|\Delta Z(s,u)|)|\Delta Y(u)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)du$$

$$\leq L_N^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + (\beta_2+1)\mathbb{E}\int_s^T |\Delta A(s,u)|^2 du + \frac{K}{\beta_1}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(u)|^2 du$$

et

$$\mathbf{J}_5 = 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)||\Delta Z(s,u)|$$

$$\leq \beta_3\mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)|^2 du + \frac{1}{\beta_3}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du$$

$$\leq \beta_3\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + \frac{K^2}{\beta_3}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du \tag{2.11}$$

Ensuite l'inégalité de, **Hôlder** celle de **Chebychev** et le Lemme 2.4.2.2 entrainent

$$\mathbf{J}_1 \leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}} \tag{2.12}$$

D'autre part l'inégalité de **Chebychev**, les hypotheses $(\mathbf{B}_1)' - (\mathbf{B}_3)$ prouvent que

$$\mathbf{I}_1 \leq 4K^2\mathbb{E}\int_s^T (1+|Y(u)|+|Z(s,u)|+|Y'(u)|+|Z'(s,u)|)^{2\alpha}\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du$$

$$\leq \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}$$

et

$$\mathbf{I}_2 \leq \eta^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|^2(\mathbf{1}_{A^N}(s,u)+\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u))du$$

$$+2\mathbb{E}\int_s^T (T-u)du\int_u^T |\Delta f(u,v)|^2(\mathbf{1}_{A^N}(u,v)+\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(u,v))dv$$

$$\leq 4\eta^2K^2\mathbf{I}_1 \leq 4K^2\mathbb{E}\int_s^T (1+|Y(u)|+|Z(s,u)|+|Y'(u)|+|Z'(s,u)|)^{2\alpha}\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du$$

$$4\eta^2L_N^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2du + 4\eta^2K^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2du$$

$$+8K^2\mathbb{E}\int_s^T (T-u)du\int_u^T (1+|Y(v)|+|Z(u,v)|+|Y'(v)|+|Z'(u,v)|)^{2\alpha}\mathbf{1}_{A^N}(u,v)dv$$

$$+4K^2T\mathbb{E}\int_s^T du\int_u^T |\Delta Z(u,v)|^2dv;$$

alors

$$\mathbf{J}_3 \leq 4L_N^2\eta^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2du + 2\eta^2K^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2du$$

$$+\frac{(1+\eta^2)C}{N^{2(1-\alpha)}} + 4K^2T\mathbb{E}\int_s^T du\int_u^T |\Delta Z(u,v)|^2dv \tag{2.13}$$

et

$$\mathbf{J}_4 \leq [4(\beta_2+1)\eta^2+1]L_N^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2du$$

$$+[4(\beta_2+1)\eta^2+\frac{1}{\beta_2}]K^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2du$$

$$+4(\beta_2+1)K^2T\mathbb{E}\int_s^T (\int_u^T |\Delta Z(u,v)|^2dv) + (\beta_2+1)\eta^2\frac{C}{N^{2(1-\alpha)}} \tag{2.14}$$

Les inégalités (3.11)(3.15) étant mises dans (3.10), on obetient en intégrant de t à T

$$\mathbb{E}\int_t^T |\Delta Y(s)|^2 ds + \int_t^T ds\mathbb{E}\int_t^T |\Delta Z(s,u)|^2 du$$

$$(1+2L_N+\beta_1[4(\beta_2+2)\eta^2+1]L_N^3+\beta_3)\mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T |\Delta Y(s)|^2 du$$

$$+(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}+4+(\beta_2+2)\eta^2)K^2\mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du$$

$$+\frac{(1+\eta^2)C}{N^{2(1-\alpha)}}+(4+(\beta_2+2)K^2T\mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T du\int_u^T |\Delta Z(s,u)|^2)dv$$

Etant donné $\beta_1=\beta_2=\beta_3=8K^2$, il existe K_1 et C deux constantes telles que

$$-\frac{d}{dt}(\exp(K_1t)U(t))+\frac{1}{2}\exp(K_1t)V(t)\leq K_2\int_t^T \exp(K_1s)V(s)ds+\frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}\exp(K_1t) \tag{2.15}$$

$$U(t)=\mathbb{E}\int_t^T\int_s^T |\Delta Y(s)|^2 duds et V(t)=\mathbb{E}\int_t^T\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 duds$$

L'intégration dans $[t,T]$ de chaque membre de (3.16) et l'inégalité de **Gronwall** impliquent

$$\int_t^T \exp(K_1s)V(s)ds\leq\frac{C}{(2L_N+2L_N^2)N^{2(1-\alpha)}}\exp[(2L_N+2L_N^2)T]$$

Le passage à la limite en N implique que $Y(s)=Y'(s)$ et $Z(t,s)=Z'(t,s)$ pour presque tout $(t,s)\in[T-\eta,T]\times[t,T]$. Lorsque $t\in[T-2\eta,T-\eta]$, on répète la même démarche avec l'équation

$$\Delta Y(s)+\int_s^{T-\eta}\Delta f(s,u)du+\int_s^{T-\eta}[\Delta g(s,u)+\Delta Z(s,u)]dW_u=0$$

Ainsi de proche en proche on a l'unicité de l'EDSRR de type Voltérra associée aux données (ξ,f,g)

– **Existence**

Pour tout $n,m\in N^*$ et $(t,s)\in\mathcal{D}_\eta$, on a

$$\mathbb{E}|Y_n(t)-Y_m(t)|^2+\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s),Z_m(t,s)|^2 ds$$

$$=2\mathbb{E}\int_t^T \langle f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))-f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s)),Y_n(s)-Y_m(s)\rangle ds$$

$$-2\mathbb{E}\int_t^T \langle f_n(t,s,Y_n(u),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s)), \mathbf{B}_{n,m}(t,s)\rangle ds$$

$$-2\mathbb{E}\int_t^T \langle g_n(t,s,Y_n(s)) - g_m(t,s,Y_m(s)), Z_n(t,s) - Z_m(t,s)\rangle ds$$

$$-\mathbb{E}\int_t^T |g_n(t,s,Y_n(s)) - g_m(t,s,Y_m(s))|^2 ds$$

$$\leq 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||Y_n(s) - Y_m(s)|$$

$$\times(\mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s))ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|$$

$$\times(\mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s))ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T |g_n(t,s,Y_n(s)) - g_m(t,s,Y_m(s))||Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|ds$$

$$= \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_4 + \mathbf{J}_5 \tag{2.16}$$

où

$$\mathbf{B}_{m,n}(t,s) = \int_s^T (f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f_m(t,s,Y_m(u),Z_m(s,u)))du$$

$$-\int_s^T (f_n(t,u,Y_n(u),Z_n(t,u)) - f_m(t,u,Y_m(u),Z_m(t,u)))du$$

$$A^N_{m,n} = \{(\omega,t,s) \in \Omega\times\mathcal{D}_\eta, |Y_n(s)| + |Z_n(t,s)| + |Y_m(s)| + |Z_m(t,s)| \geq N\}$$

$$\overline{A}^N_{m,n} = \Omega\times\mathcal{D}_\eta \backslash A^N_{m,n}$$

De la même manière que dans la preuve de l'unicité on a

$$\mathbf{J}_1 = 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||Y_n(s) - Y_m(s)| \times \mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s)ds$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds + \frac{C}{N_{2(1-\alpha)}} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{J}_2 = 2\mathbb{E}\int_t^T |f_{n,m}(t,s)||Y_n(s) - Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds$$

$$\leq 2\mathbb{E}\int_t^T |(f_n - f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))||Y_n(s) - Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T |f(t,s)||Y_n(s)-Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||Y_n(s)-Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$= \mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3$$

où

$$f_{n,m}(t,s) = f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))$$

$$f(t,s) = f(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))$$

$$\mathbf{J}_3 = 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|\mathbf{1}_{A_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2\mathbf{1}_{A_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+\mathbb{E}\int_t^T |\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|^2 ds$$

$$= \mathbf{I}_4+\mathbf{I}_5$$

$$\mathbf{J}_4 = 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|$$

$$\times\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$\leq 2\mathbb{E}\int_t^T |(f_n-f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))||\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|$$

$$\times\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|$$

$$\times\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|$$

$$\times\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^T |(f_n-f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+L_N^2\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2ds + (\beta_2+3)\int_s^T |\mathbf{B}_{n,m}(t,s)|ds$$

$$+\frac{K^2}{\beta_2}\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s)Z_m(t,s)|^2ds$$

et

$$\mathbf{J}_5 \leq \beta_3\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2ds + \frac{K^2}{\beta_3}\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s)Z_m(t,s)|^2ds \tag{2.18}$$

Sachant que

$$\mathbf{I}_1 \leq \mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2ds$$

$$\mathbb{E}\int_t^T |(f_n-f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$\mathbf{I}_2 \leq (2L_N+\beta_1)\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2ds + \frac{K^2}{\beta_1}\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(s)Z_m(s)|^2ds$$

et

$$\mathbf{I}_3 \leq \mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2ds$$

$$+\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

on a

$$\mathbf{I}_2(2L_N+\beta_1+1)\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2ds$$

$$+\mathbb{E}\int_t^T |(f_n-f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+\frac{K^2}{\beta_1}\mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)Z_m(s,u)|^2du \tag{2.19}$$

D'autre part l'inégalité de, **RaIder** celle de **Chebychev**, le Lemme 2.4.2.1 entrainent

$$\mathbf{I}_4 \leq \frac{C}{N_{2(1-\alpha)}}$$

et

$$\mathbf{I}_5 \leq \eta^2 \frac{C}{N_{2(1-\alpha)}} + 3\eta^2 \mathbb{E}\int_t^T |(f_n - f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)du$$

$$+3\eta^2 \mathbb{E}\int_t^T |(f_m - f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)du$$

$$+6\mathbb{E}\int_t^T (T-s)ds\mathbb{E}\int_s^T |(f_n - f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(s,u)du$$

$$+6\mathbb{E}\int_t^T (T-s)ds\mathbb{E}\int_s^T |(f_m - f)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(s,u)du$$

$$+12\eta^2 L_N^2 \mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2 ds + 6\eta^2 K^2 \mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s)Z_m(t,s)|^2 ds$$

$$+12K^2 T\mathbb{E}\int_t^T ds + \mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)Z_m(s,u)|^2 du;$$

ce qui permet d'avoir

$$\mathbf{J}_4 \leq \eta^2 \frac{C}{N_{2(1-\alpha)}} + [3(\beta_2+3)\eta^2+1]\mathbb{E}\int_t^T |(f_n - f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$+[3(\beta_2+3)\eta^2+1]\mathbb{E}\int_t^T |(f_n - f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds$$

$$6(\beta_2+3)\mathbb{E}\int_t^T (T-s)ds\mathbb{E}\int_s^T |(f_n - f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(s,u)du$$

$$6(\beta_2+3)\mathbb{E}\int_t^T (T-s)ds\mathbb{E}\int_s^T |(f_m - f)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du$$

$$[12(\beta_2+3)\eta^2+1]L_N^2\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2 ds$$

$$[6(\beta_2+3)\eta^2+\frac{1}{\beta_2}]K^2\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s)Z_m(t,s)|^2 ds$$

$$12(\beta_2+3)K^2T\mathbb{E}\int_t^T ds+\mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)Z_m(s,u)|^2 du \tag{2.20}$$

Les inégalités (3.18)-(3.21) mises dans (3.18) donnent

$$\mathbb{E}|Y_n(t)-Y_m(t)|^2+\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s)Z_m(t,s)|^2 ds$$

$$\leq (3+\beta_1+\beta_3+2L_N+[1+12(\beta_2+4)\eta^2]L_N^2)\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2 ds$$

$$(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}+6(\beta_2+4)\eta^2)K^2\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s)Z_m(t,s)|^2 ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T |(f_n-f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T (T-s)ds\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds$$

$$+6(\beta_2+4)\mathbb{E}\int_t^T (T-s)du\mathbb{E}\int_s^T |(f_n-f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du$$

$$+6(\beta_2+4)\mathbb{E}\int_t^T (T-s)du\mathbb{E}\int_s^T |(f_m-f)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du$$

$$12(\beta_2+4)K^2T\mathbb{E}\int_t^T ds+\mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)Z_m(s,u)|^2 du$$

$$+\frac{C}{N_{2(1-\alpha)}}(1+\eta^2)$$

Si on choisit $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 8K^2$ alors il existe deux constantes K_1 et C dépendant uniquement de K, T, et ξ, telles que

$$\frac{-d}{dt}(\exp(K_1 t)U_{m,n}(t)) + \frac{1}{2}\exp(K_1 s)V_{m,n}(s)$$

$$\leq 2\mathbb{E}\exp(K_1 s)\int_s^T |(f_n - f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du$$

$$+2\mathbb{E}\exp(K_1 s)\int_s^T |(f_m - f)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du$$

$$6(8K^2+4)\mathbb{E}\int_t^T (T-s)du\mathbb{E}\int_s^T |(f_n - f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du$$

$$6(8K^2+4)\mathbb{E}\int_t^T (T-s)du\mathbb{E}\int_s^T |(f_m - f)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du$$

$$12(8K^2+4)K^2 T\int_t^T \exp(K_1 s)V_{m,n}(s)ds + \frac{C}{N_{2(1-\alpha)}}\exp(K_1 s) \tag{2.21}$$

où

$$U_{m,n}(t) = \mathbb{E}\int_s^T |Y_n(s)Y_m(s)|^2 ds et V_{m,n}(t) = \mathbb{E}\int_s^T |Z_n(t,s)Z_m(t,s)|^2 ds$$

L'intégration de chaque membre de (3.22) dans $[t, T_1]$ implique

$$\exp(K_1 t)U_{m,n}(t) + \frac{1}{2}\int_t^T \exp(K_1 s)V_{m,n}(s)ds$$

$$\leq (2 + 3(8K^2+4)\eta^2)[\rho_N^2(f_n - f) + \rho_N^2(f^m - f)]\exp(K_1 T)$$

$$+12(8K^2+4)K^2 T\int_t^T ds\int_s^T \exp(K_1 s)V_{m,n}(u)du$$

$$\frac{C}{K_1 N^{2(1-\alpha)}}\exp(K_1 T)$$

et l'inégalité de **Gronwall** donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_t^T \exp(K_1 s) V_{m,n}(s) ds \leq (K[\rho_N^2(f_n - f) + \rho_N^2(f^m - f)] \exp(K_1 T) \\ + \frac{C}{K_1 N^{2(1-\alpha)}} \exp(K_1 T)) \exp(K_3 T), \end{array} \right. \tag{2.22}$$

K_2 et K_3 étant des constantes dépendant uniquement de K, T, ξ. Le passage à la limite sucessivement en n, m et N entraine grâce à la condition (3.22)

$$\int_t^T \exp(K_1 s) V_{m,n}(s) ds \to 0 et U_{m,n}(t) \to 0. \tag{2.23}$$

Par conséquent la suite $(Y_n, Z_n)_{n\in N}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $M^2([t,T];\mathbb{R}^k) \times M^2([T-\eta,T]\times[t,T];\mathbb{R}^{k\times d})$ et admet une limite $(Y(t), Z(t,s))$ $\in M^2([t,T];\mathbb{R}^k) \times M^2([T-\eta,T]\times[t,T];\mathbb{R}^{k\times d})$. D'autre part

$$\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f(s,u,Y(s),Z(s,u))|^2 du$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f(s,u,Y(s),Z(s,u))|^2 du$$

$$\times \mathbf{1}_{A_n^N}$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |(f_n - f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A_n^N}} du$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f(s,u,Y(u),Z(s,u))|^2$$

$$\times \mathbf{1}_{\overline{A_n^N}} du$$

$$\leq \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}} + 2\rho_N^2(f - f_n) + 4L_N^2 \mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s) - Y(s)|^2 ds$$

$$+4K^2 \mathbb{E}\int_s^T ds \int_u^T |Z_n(s,u) - Z(s,u)|^2 du$$

où

$$A_n^N = \{(\omega,t,s) \in \Omega \times \mathcal{D}_\eta, 1 + |Y(u)| + |Z(s,u)| + |Y_n(u)| + |Z_n(s,u)| > N\}$$

$$\overline{A_n^N} = \Omega \times \mathcal{D}_\eta \backslash A_n^N$$

Les résultats précédents prouvent que

$$\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f(s,u,Y(u),Z(s,u))|^2 du \to 0$$

$$n, N \to +\infty$$

(Y, Z) est solution de l'EDSRR de type Voltérra. Ensuite $Y(T-\eta)$ étant une variable aléatoire unique, l'équation

$$Y_n(t)+\int_t^{T-\eta} f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))ds+\int_t^{T-\eta}[g(t,s,Y_n(s))+Z_n(t,s)]dW(s) = Y(T-\eta). \tag{2.24}$$

admet une solution unique $(Y_n, Z_n) \in M^2([T-2\eta, T-\eta]; \mathbb{R}^k)\times M^2([T-2\eta, T-\eta]\times[t, T-\eta]; \mathbb{R}^{k\times d})$. On montre que (Y_n, Z_n) est de **cauchy** et sa limite (Y, Z) est l'unique solution de l'EDSRR de type Voltérra

$$Y(t)+\int_t^{T-\eta} f(t,s,Y(s),Z(t,s))ds+\int_t^{T-\eta}[g(t,s,Y(s))+Z(t,s)]dW(s) = Y(T-\eta).$$

En continuant cette procédure on prouve l'existence pour tout $(t,s) \in \mathcal{D}$.

2.4.3 Propriété de stabilité

Cette section prouve la stabilité des solutions des EDSRR de type Voltérra sous la condition de drift localement lipschitzien. Pour cela, on considère $(\xi_n, f_n, g_n)_{n\in N}$ une suite de processus respectant les hypothèses précédentes, $(\mathbf{B}_4)$

(i) $\rho_N(f_n - f_0) \to 0$

(ii) $\pi(g_n - g_0) \to 0$

(iii) $\mathbb{E}|\xi_n - \xi_0|^2 \to 0$

où$\pi(g_n - g_0) = \mathbb{E}(\int_{\mathcal{D}} \sup_Y |g_n(t,s,y) - g_0(t,s,y)|^2 dsdt)^{\frac{1}{2}}$ et $(Y_n(t), Z_n(t,s))$ l'unique solution de l'EDSRR de type Voltérra qui lui est associée.

Théorème 2.4.3.1. *Supposons les hypothèses* $(\mathbf{B}_1)-(\mathbf{B}_4)$ *et (2.8) satisfaites ; quand* $n \to +\infty$

$$(Y_n(s), Z_n(t,s)) \to (Y_0(s), Z_0(t,s))$$

dans $M(t,T,\mathbb{R}^k)\times M(\mathcal{D},\mathbb{R}^{k\times d})$

Démonstration

$$\mathbb{E}|Y_n(t)-Y_0(t)|^2ds+\mathbb{E}\int_t^T|Z_n(t,s),Z_0(t,s)|^2ds$$

$$=\mathbb{E}|\xi_n-\xi_0|^2$$

$$+2\mathbb{E}\int_t^T\langle f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))-f_0(t,s,Y_0(s),Z_0(t,s)),Y_n(s)-Y_0(s)\rangle ds$$

$$-2\mathbb{E}\int_t^T\langle f_n(t,s,Y_n(u),Z_n(t,s))-f_0(t,s,Y_0(s),Z_0(t,s)),\mathbf{I}_{n,0}(t,s)\rangle ds$$

$$-2\mathbb{E}\int_t^T\langle g_n(t,s,Y_n(s))-g_0(t,s,Y_0(s)),Z_n(t,s)-Z_0(t,s)\rangle ds$$

$$\mathbb{E}\int_t^T|g_n(t,s,Y_n(s))-g_0(t,s,Y_0(s))|^2du$$

où

$$\mathbf{I}_{n,0}(t,s)=\int_s^T(f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))-f_0(s,u,Y_0(u),Z_0(s,u)))du$$

$$-\int_s^T(f_n(t,u,Y_n(u),Z_n(t,u))-f_0(t,u,Y_0(u),Z_0(t,u)))du$$

Une procédure presqu'identique à la preuve d'existence du Théorème 2.4.2.3, et le choix de $\beta_1=\beta_2=8K^2$ et $\beta_3=8$ entrainent

$$\mathbb{E}|Y_n(t)-Y_0(t)|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T|Z_n(t,s),Z_0(t,s)|^2ds$$

$$\leq K_1\mathbb{E}\int_t^T|Y_n(s)-Y_0(s)|^2ds$$

$$+K_2\rho_N^2(f_n-f_0)+16\pi^2(g_n-g_0)$$

$$+K_3\mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T|Z_n(t,s),Z_0(t,s)|^2du+\frac{C}{N_{2(1-\alpha)}}$$

K_1,K_2,K_3 et C étant des constantes dépendant uniquement de $K,T,$ et ξ. Le reste de la preuve est identique à celle d'existence du Théorème 2.4.2.3

2.5 EDSRs réfléchies à une barrière

2.5.1 Existence et unicité

On introduit la notion d'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie à une barrière continue. La solution d'une telle équation associée à un générateur f, une valeur terminale ξ, une barrière continue $(L_t)_{t\in[0,T]}$ est un triplet $(Y_t, Z_t, K_t)_{t\in[0,T]}$ de processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+d+1}$, qui vérifient $\mathbf{P}-p.s$,

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T + f(s,Y_s,Z_s)ds + K_T - K_t - \int_t^T Z_s dB_s, \forall t \leq T & ; \\ \forall t \leq T, Y_t \geq L_t et \int_0^T (Y_s - L_s)dK_s = 0, & . \end{cases} \quad (2.25)$$

Plus précisément, $(K_t)_{t\leq T}$ est un processus croissant, continu et $K_0 = 0$, qui a pour rôle de maintenir le processus Y au dessus de L avec une énergie minimale. Les auteurs ont proposé deux méthodes de résolution. La première est une itération de Picard, en considérant à chaque étape, la solution d'un problème d'arrêt optimal. La seconde propose de construire la solution comme limite de solutions (Y^n, Z^n) aux équations pénalisées. Grâce au théorème de comparaison et au fait que la barrière est continue, ils ont obtenu la convergence de cette suite vers la solution de (3.1). Leur résultat principal sur l'existence et l'unicité de solutions est le suivant :
Désignons par $\mathcal{S}_i^2$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}^2$ des processus $K = (K_t)_{t\leq T}$ croissants et satisfaisant $K_0 = 0$. En particulier, on a $\mathbb{E}[K_T^2] < \infty$.

Théorème 2.5.1.1. *[8]*

Supposons que f est uniformément lipschitzienne par rapport à (y,z) et de plus :

$$\mathbb{E}[||\xi|^2 + \int_0^T |f(t,0,0)|^2 dt + \sup_{0\leq t\leq T} |L_t|^2] < \infty$$

Alors, l'EDSR réfléchie admet (3.1) une unique solution $(Y,Z,K) \in \mathcal{S}^2 \times M^2(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}_i^2$. De plus, la solution Y peut être caractérisée comme la valeur d'un problème d'arrêt optimal, i.e.

$$\forall t \leq T, Y_t = \sup_{\tau\geq t} \mathbb{E}[\int_t^\tau f(s,Y_s,Z_s)ds + L_\tau \mathbf{1}_{[\tau<T]} + \xi \mathbf{1}_{[\tau=T]} | \mathcal{F}_t]$$

Théorème 2.5.1.2. *[8]*

Soient (Y,Z,K) et (Y',Z',K') deux solutions des EDSR réfléchies associées à (ξ,f,L) et (ξ',f',L') respectivement. Supposons que f est lipschitzienne. Si : $\xi \leq \xi'$, $f(t,Y_t',Z_t') \leq f'(t,Y_t',Z_t')$ et $L_t \leq L_t'$,$dt \otimes d\mathbf{P} - p.s$,on a alors,$\mathbf{P} - p.s$,pour tout $t \in [0,T], Y_t \leq Y_t'$.

2.5.2 Quelques extensions

Les EDSRs réfléchies à une barrières, ils se sont principalement focalisés sur des généralisations des cadres de ces équations, ils avaient pour objectif d'affaiblir l'hypothèse concernant la régularité du générateur par rapport à (y, z) ainsi que l'accroissement général. Les autre améliorations possible d'EDSRs réfléchies concerne la solution dans L^p et l'étude de ces equations à l'horizon infini.

(i)Solution dans L^p Ont montré l'existence et l'unicité de l'EDSR réfléchie (3.1) dans L^p. Désignons par $\mathcal{S}_i^p$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}^p$ des processus $K = (K_t)_{t \leq T}$, croissants et satisfaisant $K_0 = 0$. En particulier, on a $\mathbb{E}[K_T^p] < \infty$.

Théorème 2.5.2.1. *[8]*

L'EDSR réfléchies (2.25) admet une unique solution $(Y, Z, K) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k\times d})$ *sous les hypothèses suivantes sur f et ξ :*

-le générateur f est uniformément lipschitzien en y et z, c'est-à-dire qu'il existe une constante C, telle que (t, y, z, y', z')

$$[\boldsymbol{H1}] : |f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq C(|y - y'| + \|z - z'\|) \tag{2.26}$$

-f et ξ satisfont la condition d'intégrabilité suivante :

$$\mathbb{E}[|\xi|^p + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^p dt + \sup_{t\leq T} |L_t|^p] < \infty$$

(ii)Horizon infini

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^{+\infty} + f(s, Y_s, Z_s)ds + K_{+\infty} - K_t - \int_t^{+\infty} Z_s dB_s, \forall t \leq T & ; \\ \forall t \geq 0, Y_t \geq L_t et \int_0^{+\infty} (Y_s - L_s)dK_s = 0, & . \end{cases} \tag{2.27}$$

Désignons par $\mathcal{S}_{1,i}^2$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_1^2$ des processus $K = (K_t)_{t\geq 0}$, croissants et satisfaisant $K_0 = 0$. En particulier, on a $\mathbb{E}[K_{+\infty}^2] < \infty$.

Théorème 2.5.2.2. *[8]*

L'EDSRR (3.3) admet une unique solution $(Y, Z, K) \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^k) \times M_1^2(\mathbb{R}^{k\times d}) \times \mathcal{S}_{1,i}(\mathbb{R}^{k\times d})$ *sous les hypothèses suivantes sur f etξ et L :*

$$[\boldsymbol{H1}] : |f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq u_1(t)|y - y'| + u_2(t)\|z - z'\| \tag{2.28}$$

et

$$\int_0^{+\infty} u_1(s)ds < +\infty, \int_0^{+\infty} u_2^2(s)ds < +\infty$$

-f, ξ et L satisfont la condition d'intégrabilité suivante

$$\mathbb{E}[|\xi|^2 + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 dt + \sup_{t\geq 0} |L_t^+|^2] < \infty$$

2.6 EDSRs réfléchies à deux barrières

On introduit la notion d'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie à deux barrières continues. Dans ce cas, un quadruplet $(Y_t, Z_t, K_t^{\pm})_{t\in[0,T]}$ est une solution de cette équation associée à un générateur f, une valeur terminale ξ, une barrière inférieure $(L_t)_{t\leq T}$ et une barrière supérieure $(U_t)_{t\leq T}$, tels que $L_t \leq U_t$ et $L_T \leq \xi \leq U_T$,$\mathbf{P} - p.s$

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int_t^T +f(s, Y_s, Z_s)ds + K_T^+ - K_t^+ - (K_T^- - K_t^-) \int_t^T Z_s dB_s, \forall t \leq T & ; \\ \forall t \leq T, L_t \leq Y_t \geq L_t et \int_0^T (Y_s - L_s)dK_s^+ = \int_0^T (Y_s - L_s)dK_s^- = 0, & . \end{cases} \tag{2.29}$$

où les processus $(K_t^{\pm})_{t\leq T}$ sont continus et croissants $(K_0^{\pm} = 0)$. Ils ont pour rôle de maintenir le processus Y entre L et U avec des énergies minimales. La preuve est basée sur une itération de Picard, en lien avec la valeur d'un jeu de Dynkin à chaque étape. Dans la suite une méthode de pénalisation est aussi proposée sous une condition plus forte de régularité des barrières. Plus précisément, pour montrer l'existence et l'unicité, ils ont introduit deux hypothèses sur les barrières :
(i) soit il existe une différence de deux surmartingales non négatives entre L et U ;
(ii) ou alors les deux barrières sont "presque" des semi-martingales.
Leur résultat principal sur l'existence et l'unicité de la solution est le suivant :

Théorème 2.6.1. *[8]*
Sous l'une des deux hypothèses précédentes et si

$$\mathbb{E}[|\xi|^2 + \int_0^T |f(t,0,0)|^2 dt + \sup_{0\leq t\leq T} (|L_t|^2 + |U_t|^2)] < \infty$$

Alors, l'EDSR réfléchie admet une unique solution $(Y, Z, K^{\pm}) \in \mathcal{S}^2 \times M^2(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2$*. De plus, le processus* Y *peut être interprété comme la fonction valeur d'un jeu de Dynkin, i.e. pour tout* $t \leq T$,

$$Y_t = ess \inf_{\tau\geq t} ess \sup_{\sigma t} \mathbb{E}[\int_t^{\tau\wedge\sigma} f(s, Y_s, Z_s)ds + U_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\sigma]} + L_\sigma \mathbf{1}_{[\sigma\leq\tau<T]} + \xi \mathbf{1}_{\tau=\sigma=T} | \mathcal{F}_t]$$

$$= ess \sup_{\sigma t} ess \inf_{\tau\geq t} \mathbb{E}[\int_t^{\tau\wedge\sigma} f(s, Y_s, Z_s)ds + U_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\sigma]} + L_\sigma \mathbf{1}_{[\sigma\leq\tau<T]} + \xi \mathbf{1}_{\tau=\sigma=T} | \mathcal{F}_t]$$

2.6.1 Quelques extensions

Suite à ce travail, de nombreux auteurs ont considéré les EDSRRs à deux barrières. Ils se sont principalement focaliés sur des générateurs plus généraux et on considérons les barrières sans l'hypothèse de Mokobodski. S. Hamadène et al. Dans [8], J.-P. Lepeltier et J. San Martin dans [9] ont montré l'existence d'une solution lorsque f est simplement continu et à croissance linéaire en (y, z) sous des hypothèses différentes. Plus tard, K. Bahlali et al. Dans [10] ont étudié le cas où le générateur f est continu et à croissance linéaire en (y, z) ou à croissance quadratique en z sous l'hypothèse de Mokobodski, i.e. entre L et U, on peut trouver une différence de deux surmartingales qui sont non-négatives et uniformément de carré intégrables. En 2005, dans le cas où les barrière sont continues, S. Hamadène et M. Hassani [11] ont retiré la condition de Mokobodski et montré que les EDSRs refléchies à deux barrières admettent une unique solution si les barrières sont strictement séparées, i :e :, $L_t < U_t$ pour tout $t \leq T$.

2.7 EDSR réfléchie à temps final fixe

Soit $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement Brownien standard défini sur un espace probabilisé$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit

$\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ la filtration naturelle de $\{W_t\}$ augmentée des ensembles $\mathbb{P}$ négligeables.

On considère trois donnéeés : la première est la valeur terminale ξ telle que :

– ξest $\mathcal{F}_T$ mesurable et $\mathbb{E}|\xi|^2 < +\infty$.

La deuxième est la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall (y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{f(t, y, z), 0 \leq t \leq T\}$ est un processus prévisible tel que $\mathbb{E} \int_0^T |f(., t, y, z)|^2 dt < \infty$
2. f est uniformément k-Lipschitzienne en y et z : $|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq k(|y - y'| + |z - z'|)$ $\forall t \leq T$, $\forall y, y', z, z' \in \mathbb{R}$.

La troisième est la barrière L qui est un processus continu, progressivement mesurable et tel que

– $\mathbb{E}(\sup\limits_{0 \leq t \leq T} |L_t|^2) < \infty - p.s.$

Nous faisons aussi l'hypothèse de compatibilité suivante : $L_T \leq \xi$ p.s

El-Karoui et **al**. Ont introduit les EDSRs réfléchies [1], où le processus Y de la solution (Y, Z, R) est maintenu au

dessus d'une barrière grâce à un processus de réflexion R.

La solution de l'EDSR réfléchie à temps final fixe T est un triplet $\{(Y_t, Z_t, R_t), 0 \leq t \leq T\}$

de processus $\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ et satisfaisant :

1. $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus prévisible tel que $\mathbb{E}\int_0^T |Z_t|^2dt < \infty$;
2. $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus prévisible tel que $\mathbb{E}(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2) < \infty$,$R_T$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable et vérifie $\mathbb{E}(|R_T|^2) < \infty$;
3. $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s + \int_t^T dR_s; \forall t \in [0, T]$
4. $Y_t \geq L_t, \forall 0 \leq t \leq T$;
5. R est un processus continu croissant tel que $\int_0^T (Y_s - L_s)dR_s = 0$.

Sous ces hypothèses,**El-Karoui** et **al**. [1] Ont montré le

Théorème 2.7.1. *[8]*

Sous les hypothèses précédents il existe une unique solution à l'EDSR réfléchie $1, 2, 3, 4, 5$.

Proposition 2.7.1. *[8]*

Soient (ξ, f, L) *et* (ξ', f', L') *deux triplets vérifiant les hypothèses précédents. On suppose que* (Y, Z, R) *est solution de l'EDSR réfléchie* (ξ, f, L) *et* (Y', Z', R') *solution de l'EDSR réfléchie* (ξ', f', L')*. On pose*

$$\Delta\xi = \xi - \xi', \qquad \Delta f = f - f', \qquad \Delta L = L - L'$$

$$\Delta Y = Y - Y', \qquad \Delta Z = Z - Z', \qquad \Delta R = R - R'$$

Alors il existe une constante C *telle que*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |\Delta Y_s|^2 + \int_0^T (\Delta Z_t)^2dt + |\Delta R_T|^2)$$

$$\leq C\mathbb{E}(|\Delta\xi|^2 + \int_0^T |\Delta f(t, Y_t, Z_t)|^2dt) + C[\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |\Delta L_t|^2)]^{\frac{1}{2}}\Psi_T^{\frac{1}{2}},$$

$$\Psi_T = \mathbb{E}[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2ds + \sup_{0\leq t\leq T} |L_t|^2 + |\xi'|^2 + \int_0^T |f'(s, 0, 0)|^2ds + \sup_{0\leq t\leq T} |L'_t|^2]$$

.

Chapitre 3

Quelques application sur EDSR réfléchies

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner des exemples sur les EDSs rétrogrades réfléchies comme applications .

3.2 Applications en finance

Nous traitons le problème du rendement d'un jeu américain, ou recallable, option sous l'incertitude de Knightian. On décrit d'abord brièvement ce genre d'option. Sur un marché financier Supposons que nous disposons des capitaux risqués dont la dynamique est donnée par

$$dS_t = S_t(\mu dt + \nu dB_t), t \leq T. \tag{3.1}$$

Pour la simplicité nous assumons le $\mu, \nu > 0$ sommes de vraies constantes et le $(B_t)_{t \leq T}$ est un mouvement brownien à une dimension sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. L'option américaine habituelle est un contrat entre un commerçant et un courtier qui sont, respectivement, l'acheteur et le vendeur de l'option. Le commerçant paye une prime et obtient la droite de demander un $t \leq T$ de richesse (L_t) quand il décide au cours d'une période $[0, T]$. le processus L est appelé le paiement de l'option $(par exemple, L_t = (S_t - K)^+$ là où S est le dynamique des capitaux qui soutiennent l'option et le K la grève) et T sa maturité. Ainsi les problèmes principaux sont la valeur de l'option, le moment optimal où le commerçant devrait exercer son option, l'existence d'une stratégie de haies pour le courtier, et ainsi de suite. Dans le cadre de ces options, le courtier n'a aucun droit autre que de fournir la richesse pour le commerçant quand ce dernier décide d'exercer son option. Une option de jeu américaine est une option américaine standard où le courtier est autorisé d'annuler le contrat qui le lie au commerçant. D'une certaine manière, il rappelle l'option.Mais dans ce cas, il paie ce que le commerçant de l'option aurait gagné s'il avait exercé son option en même temps plus une pénalité financière.

Les motivations de ces options est que les compagnies d'assurance, ce qui sont habituellement les vendeurs des options.

Le problème d'évaluer une option recallable sur un marché financier complet a été considéré et résolu dans, Dans ce travail nous concentrons juste sur le rendement d'une telle option sous l'incertitude de knightienne.

Supposer ainsi que nous avons un commerçant c_1 qui achète l'option recallable et un courtier C_2 qui le vend.D'une part, supposer que l'option est sur les capitaux risqués dont dynamique est donné par $(S_t)_{t\leq T}$. Comme dit précédemment, si

1. le commerçant décide d'abord d'exercer l'option à un σ de temps d'arrêt, il réalise un bénéfice qui est égal à $\exp^{L_\sigma}$ $(parexemple, L_t = (S_t - K)^+ oKestlagrve)$;
2. le courtier décide d'abord d'annuler l'option à τ, il paie un montant au commerçant égal à $\exp^{U_\tau}$;
3. tous les deux décident de monter à la maturité T de l'option, c_1 gagne $\exp^\xi$ payé par c_2 Les processus L, U et le ξ de variable aléatoire sont les mêmes que dans la section précédente. Par contre la différence $U - L$ est la pénalité pécuniaire que c_2 paie pour sa décision d'annuler l'option. Par conséquent, le rendement de l'option lorsque $c_1(resp., C_2)$ des exercices (resp., annule) à $\sigma(resp., \tau)$ est donné par

$$\jmath(\tau, \sigma) = \mathbb{E}[\exp\{L_\sigma \mathbf{1}_{[\sigma\leq\tau<T]} + U_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\sigma]} + \xi \mathbf{1}_{[\sigma=\tau=T]}\}]. \tag{3.2}$$

Cependant, le rendement de l'option est donnée par

$$V = ess \inf_{\tau\geq 0} ess \sup_{\sigma\geq 0} \jmath(\tau, \sigma) = ess \inf_{\tau\geq 0} ess \sup_{\sigma\geq 0} \jmath(\tau, \sigma) \tag{3.3}$$

L'incertitude Knightian suppose que nous ne sommes pas sûrs que la probabilité le marché évoluera est P. Ce pourrait être P mais cela pourrait aussi être une autre probabilité non loin de P. Ce pourrait être P mais cela pourrait aussi être une autre probabilité non loin de P. Soit P^θ une telle probabilité. Le paramètre $\theta(\theta_s)_{s\leq T} =$ est un $\mathfrak{P} - mesurable$ processus stochastique évalué dans un ensemble compact $[-\kappa, \kappa]$; κ est appelé le degré d'incertitude Knightian et l'ensemble de ces $\theta_s^{'}$ est noté Θ. La proximité de P^θ à P nous amène à supposer que $P\theta$ est absolument continue par rapport à P et sa fonction de densité est donnée par

$$\frac{dP^\theta}{dP} = \exp\{-\int_0^T \nu^{-1}\theta_s dB_s - \frac{1}{2}|\nu^{-1}\theta_s|ds\}. \tag{3.4}$$

Par conséquent, le processus $(S_t)_{t\leq T}$ de (3.1) vérifie ce qui suit : pour tout $t \leq T$,

$$dS_t = (\mu - \theta_t)S_t dt + \nu S_t dB_t^\theta \tag{3.5}$$

Où $(B_t^\theta = B_t + \int_0^t \nu^{-1}\theta_s)_{t\leq T}$ est un mouvement brownien sous P^θ. D'une certaine manière, cela signifie que le rendement de l'actif risqué dans un court intervalle de temps dt étant donné $\mathfrak{F}_t$ est égal à $(\mu - \theta_t)S_t dt$ .Maintenant, encore une fois, le comportement du trader ainsi que celui du courtier sont rationnels, donc les rendements minimum et maximum de l'option sont donnés respectivement par

$$\begin{cases} Y^{\min} = \inf\limits_{\theta\in\Theta} ess \inf\limits_{\tau\geq 0} ess \sup\limits_{\sigma\geq 0} \mathbb{E}^\theta[\exp\{L_\sigma \mathbf{1}_{[\sigma\leq\tau<T]} + U_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\sigma]} + \xi \mathbf{1}_{[\sigma=\tau=T]}\}] \\ Y^{\max} = \sup\limits_{\theta\in\Theta} ess \inf\limits_{\tau\geq 0} ess \sup\limits_{\sigma\geq 0} \mathbb{E}^\theta[\exp\{L_\sigma \mathbf{1}_{[\sigma\leq\tau<T]} + U_\tau \mathbf{1}_{[\tau<\sigma]} + \xi \mathbf{1}_{[\sigma=\tau=T]}\}], \end{cases} \tag{3.6}$$

E^θ est l'attente sous P^θ.

Maintenant, nous allons caractériser $Y^{\min}$ et $Y^{\max}$ via EDSR . En fait, laissez $\theta \in [-\kappa, \kappa]$,$z \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{H}(t,\theta,z) = -(\theta/\nu)z$. pour $z \in \mathbb{R}$, laisser $\theta^1(z) = \kappa \mathbf{1}_{[z\leq 0]} - \kappa \mathbf{1}_{[z>0]}$ et $\theta^2(z) = -\theta^1(z)$. Par conséquent, θ^1 et θ^2 vérifient

$$\begin{cases} \mathbf{H}(t,\theta^1(z),z) = \sup\limits_{\theta\in[\kappa,-\kappa]} \mathbf{H}(t,\theta,z) \\ \mathbf{H}(t,\theta^2(z),z) = \inf\limits_{\theta\in[\kappa,-\kappa]} \mathbf{H}(t,\theta,z), \end{cases} \tag{3.7}$$

De toute évidence, les fonctions qui avec z associent respectivement $\mathbf{H}(t,\theta^1(z),z)$ et $\mathbf{H}(t,\theta^2(z),z)$, sont continus avec une croissance linéaire .

3.2.1 Prix de l'option américaine revisité

Contrairement aux travaux de **Cvitanic** et **Ma**, [12] le processus de diffusion de l'actif financier noté X_t^x est réfléchi. Par conséquent on impose qu'il influence le procesus richesse de l'investisseur noté Y_t^x sans que l'inverse soit possible. L'objectif de l'investisseur étant de maximiser son gain qui est donné par la quantité

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}(t,\theta)|\mathfrak{F}_t) = \mathbb{E}\{\int_t^\theta f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})dr$$

$$+ \int_t^\theta g(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} + h(\theta, X_\theta^{t,x})\mathbf{1}_{\{\theta<T\}} + L(X_T^{t,x})\mathbf{1}_{\{\theta=T\}}|\mathfrak{F}_t\}$$

Pour tout temps d'arrêt θ à valeurs dans $[t,T]$.

Le théorème suivant est l'analogue de celui dans **Cvitanic** et **Ma** [12]

Théorème 3.2.1.1. *$(Y^{t,x}_{.}, Z^{t,x}_{.}, K^{t,x}_{.})$ étant la solution de l'EDSR à réflexion normale associée à $(L(X^{x,t}_T), f, g, h(., X^{x,t}_{.}))$*

alors pourtout $t \in [0,T]$, il existe un temps d'arrêt optimal donné par

$$\widehat{\theta}_t = \inf\{t \leq u \leq T, Y^{t,x}_u = h(u, X^{t,x}_u)\} \wedge T$$

tel que

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}(t,\widehat{\theta}_t)|\mathfrak{F}_t) = Y^{t,x}_t = ess \sup_{\theta\in\mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}(\mathbf{R}(t,\theta)|\mathfrak{F}_t),$$

où$\mathcal{M}(t,T)$ est l'ensemble de tous les temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$.

Démonstration : $\forall\theta \in \mathcal{M}(t,T)$

$$Y^{t,x}_t = Y^{t,x}_\theta + \int_t^\theta f(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r, Z^{t,x}_r)dr + \int_t^\theta g(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r)dG^{t,x}_r - \int_t^\theta Z^{t,x}_r dW_r + K^{t,x}_\theta - K^{t,x}_t. \tag{3.8}$$

Sachant $Y^{t,x}_t$ déterministe, l'espérance prise dans chaque membre de l'équation précédente donne

$$Y^{t,x}_t = \mathbb{E}\{Y^{t,x}_\theta + \int_t^\theta f(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r, Z^{t,x}_r)dr$$

$$+ \int_t^\theta g(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r)dG^{t,x}_r + K^{t,x}_\theta - K^{t,x}_t|\mathfrak{F}_t\}.$$

Or $K^{t,x}$ est croissant et

$$Y^{t,x}_\theta = Y^{t,x}_\theta \mathbf{1}_{\{\theta<T\}} + Y^{t,x}_\theta \mathbf{1}_{\{\theta=T\}} \geq h(\theta, X^{t,x}_\theta)\mathbf{1}_{\{\theta<T\}} + L(X^{t,x}_T)\mathbf{1}_{\{\theta=T\}} \tag{3.9}$$

Donc

$$\begin{cases} Y^{t,x}_t \geq \mathbb{E}\{+\int_t^\theta f(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r, Z^{t,x}_r)dr + \int_t^\theta g(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r)dG^{t,x}_r h(\theta, X^{t,x}_\theta)\mathbf{1}_{\{\theta<T\}} \\ +L(X^{t,x}_T)\mathbf{1}_{\{\theta=T\}}|\mathfrak{F}_t\}, \end{cases} \tag{3.10}$$

D'autre part,

$$Y^{t,x}_t = \mathbb{E}\{Y^{t,x}_{\widehat{\theta}_t} + \int_t^{\widehat{\theta}_t} f(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r, Z^{t,x}_r)dr$$

$$+ \int_t^{\widehat{\theta}_t} g(r, X^{t,x}_r, Y^{t,x}_r)dG^{t,x}_r + K^{t,x}_{\widehat{\theta}_t} - K^{t,x}_t\}.$$

Or

$$Y^{t,x}_{\widehat{\theta}_t} = h(\widehat{\theta}_t, X^{t,x}_{\widehat{\theta}_t})\mathbf{1}_{\{\widehat{\theta}_t<T\}}$$

$$+L(X_T^{t,x})\mathbf{1}_{\{\widehat{\theta}_t=T\}}$$

et

$$K_{\widehat{\theta}_t}^{t,x} = K_t^{t,x}$$

donc

$$\begin{cases} Y_t^{t,x} \geq \mathbb{E}\{+\int_t^{\widehat{\theta}_t} f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr + \int_t^{\widehat{\theta}_t} g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} h(\widehat{\theta}_t, X_{\widehat{\theta}_t}^{t,x})\mathbf{1}_{\{\widehat{\theta}_t<T\}} \\ +L(X_T^{t,x})\mathbf{1}_{\{\widehat{\theta}_t=T\}}\}, \end{cases} \tag{3.11}$$

Finalement (3.11) implique

$$Y_t^{t,x} = ess \sup_{\theta\in\mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}(\mathbf{R}(t,\theta)|\mathfrak{F}_t).$$

Proposition 3.2.1.1. $(Y_.^{t,x}, Z_.^{t,x}, K_.^{t,x})$ *la solution unique de l'EDSR à réflexion normale associée à* $(L(X_T^{x,t}), f, g, h(., X_.^{x,t}))$*, le prix maximum de l'option est* Y_0.

Démonstration : Pour tout $t \in [0,T]$, on a $(supprimantl'exposant"0,x")$

$$Y_t + \int_0^t f(r,X_r,Y_r,Z^r)dr + \int_0^t g(r,X_r,Y_r)dG_r$$

$$= Y_0 + \int_0^t Z_r dB_r - K_t$$

$K.$ étant croissant et sachant que $\mathbb{E}(1|\mathfrak{F}_t) = 1$, on a pour tout temps d'arrêt à valeur dans $\mathcal{M}(t,T)$

$$Y_t \geq \mathbb{E}\{Y_\theta + \int_t^\theta f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_t^\theta g(r,X_r,Y_r)dG_r|\mathfrak{F}_t\}$$

$$\geq \mathbb{E}\{Y_\theta + \int_t^\theta f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_t^\theta g(r,X_r,Y_r)dG_r$$

$$+h(\theta,X\theta)\mathbf{1}_{\{\theta<T\}} + L(X_T)\mathbf{1}_{\{\theta=T\}}|\mathfrak{F}_t\}.$$

Ce qui implique que $Y_t \geq V(t)$, $\forall t$, en particulier $Y_0 \geq V(0)$ où

$$V(t) = ess \sup_{\theta\in\mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}(\mathbf{R}(t,\theta)|\mathfrak{F}_t),$$

$$V(0) = ess \sup_{\theta\in\mathcal{M}(0,T)} \mathbb{E}(\mathbf{R}(0,\theta)).$$

Inversement, étant donnés $(\overline{Y}, \overline{Z}, \overline{K})$ une solution indistingable de notre EDRS et

$$\widehat{\theta}_0 = \inf\{0 \leq u \leq T, \overline{Y}_u = h(u,X_u)\} \wedge T$$

un temps d'arrêt optimal, les propriétés de $\widehat{\theta}_0$, impliquent $\overline{Y}_{\widehat{\theta}_0} \geq \overline{Y}_\theta$ pour tout $\theta \in \mathcal{M}(0,T)$. Enfin en vertue du Théorème 3.2.1.2 on a

$$Y_0 \geq V(0) \geq \overline{Y}_0$$

3.3 Application des EDSRR à horizon infini à un problème de CI

Remarque 3.3.1. *On étudie le problème de contrôle impulsiônnel pour fixer les idées considérons un exemple typique : supposons que l'état d'usure d'une machine soit représenté par une processus stochastique.*

3.3.1 Présentation du modèle

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilite muni d 'une filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ complète continue droite et soit un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\geq 0}$.

Supposons qu'une entreprise décide à des instants aléatoires de changer de technologie afin de maximiser son gain. Nous supposons que $\{0,1\}$ est l'ensemble des technologies permises telles que 0 est l'ancienne technologie et 1 est la nouvelle technologie. L'évolution de la firme dépendant de plusieurs facteurs externes (prix surle marché, crise mondiale, temps,...), le changement de technologie induit un coût défini par $c_{0,1}$ si on passe de la technologie 0 à la technologie 1 et $c_{1,0}$ si on passe de la technologie 1 à la technologie 0. Supposons que $0 < c_{1,0} < c_{0,1}$.

Nous définissons une stratégie de contrôle impulsiônnel comme une suite

$$\alpha = (\tau_n)_{n\geq -1},$$

où $(\tau_n)_{n\geq -1}$ est une suite strictement croissante vers l'infini de $\mathfrak{F}$-temps d 'arrêt avec $\tau_{-1} = 0$.

La suite (τ_n) modélise la suite des instants d'impulsion du système de la façon suivante :
pour tout $n \geq 0$, τ_{2n} est l'instant où la firme passe de la technologie 0 la technologie 1 et τ_{2n+1} est l'instant où la firme passe de 1 à 0.

Nous introduisons le processus càdlàg (ξ_t) à valeurs dans $\{0,1\}$ défini par $\xi_0 = 0$ et

$$\xi_t = \xi_0 \mathbf{1}_{[0,\tau_0[}(t) + \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{[\tau_{2n},\tau_{2n+1}[}(t). \tag{3.12}$$

La valeur de la firme est donnée par $S_t = \exp X_t$, $t \geq 0$, où (X_t) est le processus continu à droite défini par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s, \tag{3.13}$$

où b et σ sont deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition de Lipschitz et la condition de croissance sous-linéaire :

-Il existe une constante $K \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|. \tag{3.14}$$

-Il existe une constante $K \geq 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|b(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2). \tag{3.15}$$

En appelant $f > 0$ le bénéfice net de la firme et $c > 0$ le coût de changement de technologie, toute stratégie αoccasionne un gain :

$$\int_0^{+\infty} \exp^{\beta s} f(\xi_s, X_s)ds - \sum_{n\geq 0}\{\exp^{-\beta\tau_{2n}} c_{0,1} + \exp^{-\beta\tau_{2n+1}} c_{1,0}\},$$

où $\beta > 0$ est un coefficient d'actualisation. Le gain moyen de la firme est défini par :

$$k(\alpha, i, x) = \mathbb{E}_{i,x}[\int_0^{+\infty} \exp^{\beta s} f(\xi_s, X_s)ds - \sum_{n\geq 0}\{\exp^{-\beta\tau_{2n}} c_{0,1} + \exp^{-\beta\tau_{2n+1}} c_{1,0}\}] \tag{3.16}$$

Définition 3.3.1.1. *La strategie $\alpha = (\tau_n)_{n\geq -1}$ est dite admissible si et seulement si :*

$$\mathbb{E}\int_0^{+\infty} \exp^{\beta s} f(\xi_s, X_s)ds < \infty$$

$$\mathbb{E}\sum_{n\geq 0}\{\exp^{-\beta\tau_{2n}} c_{0,1} + \exp^{-\beta\tau_{2n+1}} c_{1,0}\} < \infty$$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des stratégies admissibles.

Le problème de contrôle impulsionnel posé consiste à prouver l'existence d'une stratégie admissible $\widehat{\alpha}$ qui maximise la fonction gain moyen :

$$k(\widehat{\alpha}, i, x) = ess \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{i,x}[\int_0^{+\infty} \exp^{\beta s} f(\xi_s, X_s)ds - \sum_{n\geq 0}\{\exp^{-\beta\tau_{2n}} c_{0,1} + \exp^{-\beta\tau_{2n+1}} c_{1,0}\}] \tag{3.17}$$

Enfin, introduisons les ensembles suivants :

- $\mathcal{T} = \{\theta : \mathcal{G}$-temps d'arrêt.$\}$

- $\mathcal{T}_t = \{\mathcal{T} : \theta \geq t\}$.
- $\mathcal{P}^2$={processus $\mathfrak{F}$.-progressivement mesurables}.
- $\mathcal{C}^2 = \{(X_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{P}^2 : telque \quad \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} |X_t|^2] < \infty\}$.
- $\mathbb{H}^1 = \{(X_t) \in \mathcal{P}^2 : telque \quad \mathbb{E}\sqrt{\int_0^\infty |X_t|^2 dt} < \infty\}$.
- $\mathbb{H}^2 = \{(X_t) \in \mathcal{P}^2 : telque \quad \mathbb{E}[\int_0^\infty |X_t|^2 dt]\}$.

3.3.2 Enveloppe de Snell

Remarque 3.3.2.1. *L'enveloppe de Snell utilisée en calcul stochastique et en mathématiques financières, est la plus petite sur-martingale majorant un processus stochastique .*

Commençons par rappeler quelques notions fondamentales de contrôle optimal de **El Karoui** [13] utilisées pour résoudre les problèmes de contrôle impulsionnel .

Définition 3.3.2.1. *Un processus U est de classe (D) si l'ensemble des variables aléatoires $\{U_\theta, \theta \in \mathcal{T}\}$ est uniformément intégrable.*

Théorème 3.3.2.1. *[14] Soit U un processus $\mathfrak{F}$-adapté, càdlàg de classe (D). Notons Z son enveloppe de Snell. C'est la plus petite sur-martingale de classe (D) qui majore U :*

$$Z_t = ess \sup_{\theta \in \mathcal{T}_t} \mathbb{E}[U_\theta | \mathfrak{F}_t]. \tag{3.18}$$

Remarque 3.3.2.2. *[14] Le processus Z admet la décomposition unique suivante :*

$$Z = M - A$$

où :

(i) M est une martingale.

(ii) A est un processus croissant, prévisible, intégrable et $A0 = 0$.

Définition 3.3.2.2. *Soit U un processus $\mathfrak{F}$-adapté et Z son enveloppe de Snell. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un temps d'arrêt $\widehat{\tau}$ soit optimal après γ est que :*

- $\widehat{\tau} \geq \gamma, \gamma \in \mathcal{T}$.
- $Z_\gamma = \mathbb{E}[Z_{\widehat{\tau}} | \mathfrak{F}_\gamma] = \mathbb{E}[U_{\widehat{\tau}} | \mathfrak{F}_\gamma]$.

En particulier $Z_0 = \sup_{\theta \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[U_\theta] = \mathbb{E}[U_{\widehat{\tau}}]$. Par exemple,

$\widehat{\tau} = \inf\{t \geq \gamma : Z_t \leq U_t\}$ est le premier temps optimal après γ.

Le but principal est de prouver l'existence d'une stratégie optimale $\widehat{\alpha}$ telle que

$$K(\widehat{\alpha}, i, x) = ess \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} K(\alpha, i, x).$$

Nous montrons par la suite que notre problème est réduit à prouver l'existence d'un couple de processus (Y^1, Y^2) à l'aide des outils de l'enveloppe de

Snell (l'origine de cette idée est tirée de **Hamadène** et **Jeanblanc** [14] , néanmoins nous détaillons la preuve puisque ici l'horizon est infini) en effet :

Proposition 3.3.2.1. *Supposons qu'il existe deux processus de* $\mathcal{C}^2 Y^1 = (Y_t^1)_{t\geq 0}$ *et* $Y^2 = (Y_t^2)_{t\geq 0}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tels que* $\forall t \geq 0$:

$$\begin{cases} Y_t^1 = ess \sup_{\theta\in\mathcal{T}_t} \mathbb{E}[\int_t^\theta \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds - \exp^{-\beta\theta} c_{0,1} + Y_\theta^2 | \mathfrak{F}_t], \\ Y_\infty^1 = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} Y_t^2 = ess \sup_{\theta\in\mathcal{T}_t} \mathbb{E}[\int_t^\theta \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds - \exp^{-\beta\theta} c_{1,0} + Y_\theta^1 | \mathfrak{F}_t], \\ Y_\infty^2 = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Alors $Y_0^1 = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} K(\alpha, 0, x)$. *De plus, la suite* $\widehat{\alpha} = (\widehat{\tau}_n)_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$\widehat{\tau}_{-1} = 0$$

$$\widehat{\tau}_{2n} = \inf\{t \geq \widehat{\tau}_{2n-1}, Y_t^1 \leq -c_{0,1} \exp^{-\beta t} + Y_t^2\}, \forall n \geq 0 \tag{3.21}$$

$$\widehat{\tau}_{2n+1} = \inf\{t \geq \widehat{\tau}_{2n}, Y_t^2 \leq -c_{1,0} \exp^{-\beta t} + Y_t^1\} \tag{3.22}$$

est optimale pour le problème de contrôle impulsionnel (3.17).

Preuve Pour tout $t \geq 0$, nous avons :

$$Y_t^1 + \int_0^t \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds = ess \sup_{\theta\in\mathcal{T}_t} \mathbb{E}[\int_t^\theta \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds - \exp^{-\beta\theta} c_{0,1} + Y_\theta^2 | \mathfrak{F}_t]. \tag{3.23}$$

Par définition, $Y_t^1 + \int_0^t \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds$ est l'enveloppe de Snell du processus

$$U_\theta = \int_0^\theta \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds - \exp^{-\beta\theta} c_{0,1} + Y_\theta^2. \tag{3.24}$$

Sous la deuxième définition, un temps $\widehat{\tau}_0$ optimal pour le problème (3.24) est défini par :

$$\widehat{\tau}_0 = \inf\{t \geq 0, Y_t^1 \leq -\exp^{-\beta t} c_{0,1} + Y_t^2\}.$$

Par suite, le temps $\widehat{\tau}_0$ est le premier temps défini en (3.21) et donc optimal pour le problème (3.20) posé.

De plus, la variable aléatoire Y_0^1 étant $\mathfrak{F}$-mesurable, alors $Y_0^1 = \mathbb{E}[Y_0^1]$.

Par conséquent, l'égalité (3.23) peut être écrite pour $t = 0$ et $\theta = \widehat{\tau}_0$ sous la forme suivante :

$$Y_0^1 = \mathbb{E}[\int_t^{\widehat{\tau}_0} \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_0} c_{0,1} + Y_{\widehat{\tau}_0}^2]. \tag{3.25}$$

En utilisant la définition de Y^2 appliquée à $t = \widehat{\tau}_0$, nous obtenons

$$Y_{\widehat{\tau}_0}^2 = ess \sup_{\theta\in\mathcal{T},\theta\geq\widehat{\tau}_0} \mathbb{E}[\int_{\widehat{\tau}_0}^{\theta} \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds - \exp^{-\beta\theta} c_{1,0} + Y_\theta^1|\mathfrak{F}_{\widehat{\tau}_0}].$$

De même que pour le problème (3.24),$Y_t^2 + \int_0^t \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds$ est l'enveloppe de Snell du processus

$$U_\theta = \int_0^{\theta} \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds - \exp^{-\beta\theta} c_{1,0} + Y_\theta^1, \theta \geq \widehat{\tau}_0. \tag{3.26}$$

Sous la deuxième définition, un temps $\widehat{\tau}_1$ optimal après $\widehat{\tau}_0$ pour le problème 3.26 est défini par :

$$\widehat{\tau}_1 = \inf\{t \geq \widehat{\tau}_0, Y_t^2 \leq -\exp^{-\beta t} c_{1,0} + Y_t^1\}.$$

Par suite, le temps $\widehat{\tau}_1$ est le deuxième temps défini en 3.21 et donc optimal pour le problème 3.20 posé. D'où,

$$Y_{\widehat{\tau}_0}^2 = \mathbb{E}[\int_{\widehat{\tau}_0}^{\widehat{\tau}_1} \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_1} c_{1,0} + Y_{\widehat{\tau}_1}^1|\mathfrak{F}_{\widehat{\tau}_0}], \tag{3.27}$$

et les égalités 3.25 et 3.27 impliquent :

$$Y_0^1 = \mathbb{E}[\int_0^{\widehat{\tau}_0} \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds + \int_{\widehat{\tau}_0}^{\widehat{\tau}_1} \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_0} c_{0,1} - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_1} c_{1,0} + Y_{\widehat{\tau}_1}^1]. \tag{3.28}$$

En utilisant

$$\int_0^{\widehat{\tau}_1} \exp^{-\beta s} f(\xi_s, X_s)ds = \int_0^{\widehat{\tau}_0} \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds + \int_{\widehat{\tau}_0}^{\widehat{\tau}_1} \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds$$

l'égalité 3.28 devient :

$$Y_0^1 = \mathbb{E}[\int_0^{\widehat{\tau}_1} \exp^{-\beta s} f(\xi_s, X_s)ds - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_0} c_{0,1} - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_1} c_{1,0} + Y^1_{\widehat{\tau}_1}]$$

En répétant ce raisonnement successivement, nous obtenons :

$$Y_0^1 = \mathbb{E}[\int_0^{\widehat{\tau}_{2n+1}} \exp^{-\beta s} f(\xi_s, X_s)ds - \sum_{k=0}^{n}(-\exp^{-\beta\widehat{\tau}_{2k}} c_{0,1} - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_{2k+1}} c_{1,0}) + Y^1_{\widehat{\tau}_{2n+1}}]. \tag{3.29}$$

Nous montrons tout d'abord que la suite $(\widehat{\tau}_n)$ est strictement croissante. Nous supposons qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\widehat{\tau}_{2n}(\omega) = \widehat{\tau}_{2n+1}(\omega) < \infty$. Par définition des temps $\widehat{\tau}_{2n}$ et $\widehat{\tau}_{2n+1}$, il vient

$$Y^1_{\widehat{\tau}_{2n}(\omega)} \leq -\exp^{-\beta\widehat{\tau}_{2n}(\omega)} c_{0,1} + Y^2_{\widehat{\tau}_{2n+1}(\omega)} \leq -\exp^{-\beta\widehat{\tau}_{2n}(\omega)}(c_{0,1} + c_{1,0}) + Y^1_{\widehat{\tau}_{2n}(\omega)},$$

ce qui implique que $\widehat{\tau}_{2n}(\omega) = +\infty$ qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale. Par conséquent, la suite $(\widehat{\tau}_n)$ est strictement croissante.

Ensuite, le processus Y^1 est càdlàg et on note $\widehat{\tau}$ la limite croissante de $\widehat{\tau}_n$.Alors, les processus $Y^i_{\widehat{\tau}_{2n+1}}, (i = 1, 2)$ tendent vers $Y^i_{\widehat{\tau}-}$ p.s. lorsque n tend vers l'infini. De plus, par définition des processus Y^1 et Y^2, nous avons en passant à la limite sur l'évènement $\{\widehat{\tau} < \infty\}$:

$$Y^i_{\widehat{\tau}-} \leq -\exp^{-\beta\widehat{\tau}} c_{0,1} + Y^{1-i}_{\widehat{\tau}-} \leq -\exp^{-\beta\widehat{\tau}}(c_{0,1} + c_{1,0}) + Y^1_{\widehat{\tau}_-}.$$

Il en résulte que $\widehat{\tau} = +\infty$ et puisque par hypothèse $Y^1_\infty = Y^2_\infty = 0$, en prenant la limite de l'égalité 3.29, nous obtenons $Y_0^1 = K(\widehat{\alpha}, 0, x)$.

Montrons maintenant que la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale, i.e.

$$Y_0^1 \geq K(\alpha, 0, x), \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Le temps $\widehat{\tau}_0$ étant optimal pour le problème 3.19, nous obtenons :

$$Y_0^1 \geq \mathbb{E}[\int_0^{\widehat{\tau}_0} \exp^{-\beta s} f(0, X_s)ds - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_0} c_{0,1} + Y^2_{\widehat{\tau}_0}], \forall \widehat{\tau}_0 > 0.$$

De plus, pour tout temps $\widehat{\tau}_1 > \widehat{\tau}_0$,

$$Y^2_{\widehat{\tau}_0} \geq \mathbb{E}[\int_{\widehat{\tau}_0}^{\widehat{\tau}_1} \exp^{-\beta s} f(1, X_s)ds - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_1} c_{1,0} + Y^1_{\widehat{\tau}_1} | \mathfrak{F}_{\widehat{\tau}_0}].$$

Ainsi, nous obtenons pour toute suite croissante vers l'infini $(\widehat{\tau}_n)$:

$$Y_0^1 \geq \mathbb{E}[\int_0^{\widehat{\tau}_0} \exp^{-\beta s} f(\xi_s, X_s)ds - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_0} c_{0,1} - \exp^{-\beta\widehat{\tau}_1} c_{1,0} + Y_{\widehat{\tau}_1}^1].$$

En répétant successivement le même raisonnement, nous obtenons :

$$Y_0^1 \geq \mathbb{E}[\int_0^{\tau_{2n+1}} \exp^{-\beta s} f(\xi_s, X_s)ds - \sum_{k=0}^{n}(-\exp^{-\beta\tau_{2k}} c_{0,1} - \exp^{-\beta\tau_{2k}} c_{1,0}) + Y_{\tau_{2n+1}}^1]. \tag{3.30}$$

La partie droite de l'inégalité 3.30 tend vers $K(\alpha, 0, x) + Y_\infty^1 = K(\alpha, 0, x)$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent,$Y_0^1 = K(\widehat{\alpha}, 0, x) \geq K(\alpha, 0, x)$,ce qui implique l'optimalité de $\widehat{\alpha}$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité de différents types d'EDSR réfléchies avec des applications. Ces résultats prolongent d'autres antérieurs. Cependant on pourrait se poser certaines questions. Par exemple le drift est localement lipschitzien en y mais globalement en z. Il serait intéressant de regarder le cas où il est aussi localement lipschitzien en z. Au chapitre deux, les solutions de l'EDSR sont obtenues dans l'espace L^2. Pourrait-on généraliser ces estimations et résultats à l'espace L^P?

Bibliographie

[1] N. El Karoui, S. Peng, M.C. Quenez : Backward stochastic differential equation in finance, Mathematicfinance, 1997.

[2] Cvitani´c, J. ; Karatzas, I. : Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games. Ann. Probab, 1996.

[3] Gégout-Petit, A. ; Pardoux, E. : Équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies dans un convexe. Stochastics Stochastics Rep. 57, no 1996.

[4] Ramasubramanian, S. : Reflected backward stochastic differential equations in an orthant. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci, 2002.

[5] Hu, Y. ; Tang, S. : Multi-dimensional BSDE with oblique reflection and optimal switching. Probab. Theory Related Fields 147, no 2010.

[6] J. M. Bismut. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. J. Math. Anal.Appl, 1973.

[7] E. Pardoux and S. Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems and Control Letters, 1990.

[8] S. Hamadène, J.-P. Lepeltier, and A. Matoussi. Double barrier reflected BSDEs with continuous coefficient. In N. El Karoui and L. Mazliak, editors, Backward Stochastic Differential Equations. Longman, Pitman Research Notes in Mathematics Series 364, 1997.

[9] J.-P. Lepeltier and J. San Martin. Backward SDEs with two barriers and continuous coefficient. an existence result. Journal of Applied Probability, 2004.

[10] K. Bahlali, S. Hamadène, and B. Mezerdi. BSDEs with two reflecting barriers and continuous with quadratic growth coefficient. Stochastic Processes and their Applications, 2005.

[11] S. Hamadène and M. Hassani. BSDEs with two reflecting barriers : the general result. Probability Theory and Related Fields, 2005.

[12] Cvitanic, J. and Ma, J. Reflected forward Backward SDEs and obstacle problems with boundary conditions, J.Appl. Stochastic anal, (2001).

[13] N. El Karoui : Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique. Lecture notes in mathematics 876, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[14] S. Hamadène and M. Jeanblanc. On the starting and stopping problem : application in reversible investments. Mathematics of Operation Research, February 2007.