REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE Dr MOULAY TAHAR
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
SAIDA

POLYCOPIE DE COURS

Présenté par Mme MEKKAOUI Fatiha
&
Mme SEMARI Fatiha
&
Mr. Berber Mohamed

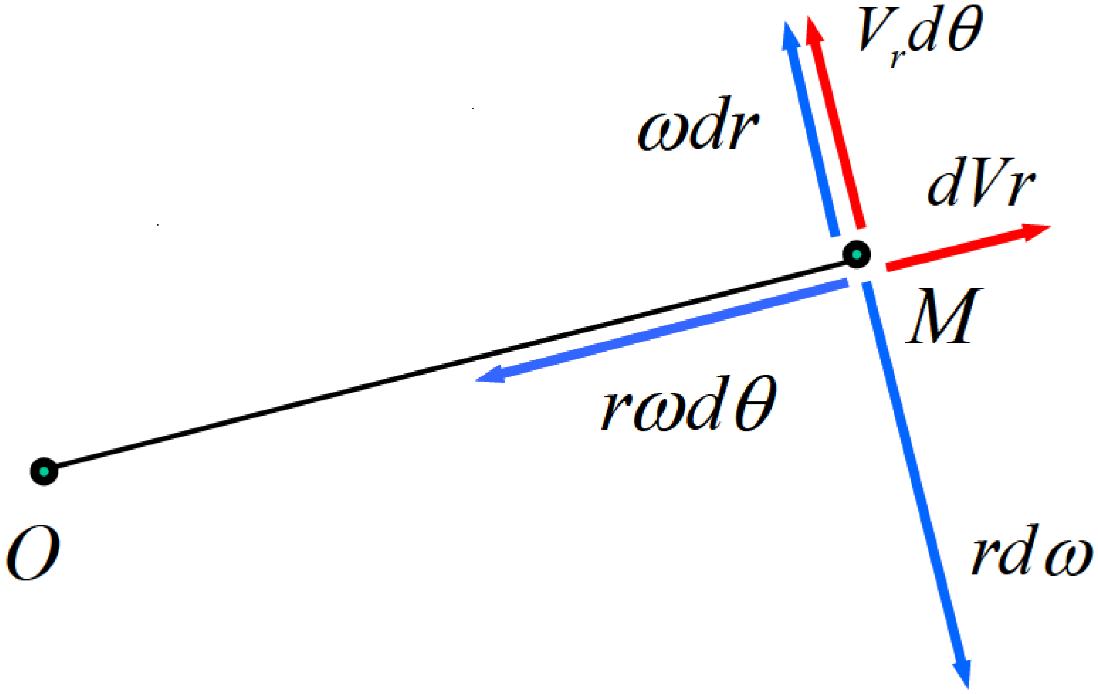
Spécialité : *Physique*

Intitulé:

COURS DE PHYSIQUE1 : MECANIQUE DU POINT MATERIEL

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr MOULAY Tahar, faculté des sciences

COURS DE PHYSIQUE1 : MECANIQUE DU POINT MATERIEL



Introduction

Ce polycopie regroupe une série de cours sur la mécanique du point matériel, il est destiné aux étudiants de première année de l'université dans le domaine des Sciences de la Matière SM et sciences et technologie ST du système LMD. Il est conçu de façon à aplanir au mieux les difficultés inhérentes au discours scientifique tout en conservant la rigueur nécessaire. Le cours qui présente les principales notions à comprendre et à connaître est accompagné d'illustrations et d'applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées. il peut servir comme support à un cours dispensé aux étudiants. C'est les cours qu'on assurait pendant une dizaine d'années à l'université de Saida (faculté des sciences).

Ce présent travail est structuré en deux grandes parties. La première partie sera consacrée à la cinématique, précédée par la définition des outils mathématiques qui permettent de comprendre cette partie ainsi que le reste. La deuxième partie fera l'objet de l'étude de la dynamique suivi d'un chapitre sur travail et énergie, qui consiste à faire la lumière sur les relations entre les mouvements et leurs causes.

Par ce présent travail, on vise à donner aux étudiants un support, afin qu'ils puissent comprendre la mécanique du point. Cette contribution peut paraitre maigre, mais on compte sur les lecteurs afin qu'ils nous aident à l'améliorer, avec leurs critiques, s'il y en a.

On souhaite à tous nos étudiants un très bon cursus universitaire et un parcourt plein de réussite.

Au nom des auteurs

Docteur Mekkaoui Fatiha

Docteur Semari fatiha

Sommaire

Chapitre I: Rappels mathématiques

I.1 Analyse dimensionnelle

I.1.1. Unités de base du Système international

- La physique a pour but de décrire des phénomènes et étudier leurs propriétés : leurs études nécessitent la définition des grandeurs physiques, chaque grandeur correspond à une unité et l'ensemble des unités est regroupé dans un système universel (système international).
- Le système international comporte sept unités de base correspondant à une grandeur physique et à une dimension.

Grandeur fondamentale	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Température	kelvin	K
Intensité du courant	ampère	A
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

Tableau I.1 : Unités du système International (S.I)

- Deux grandeurs supplémentaires sont parfois ajoutées pour compléter le système.

Grandeur fondamentale	**Unité**	**Symbole**
angle plan	**radian**	**rad**
angle solide	**stéradian**	**sr**

Tableau I.2 : Unités supplémentaires

Remarque : Il existe aussi d'autres systèmes d'unités en physique, comme par exemple :

- Le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde) ;
- Le système MTS (Mètre, Tonne, Seconde).

I.1.2.Équations aux dimensions

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T. Les équations aux dimensions obéissent aux règles suivantes :

- on n'additionne que les termes ayant la même dimension
- la dimension d'un produit de grandeurs est égale au produit des grandeurs
- la dimension de G^n est la dimension de G à la puissance n
- les termes e^x, $log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ et $\cot x$ sont sans dimension

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules :

Prenons un exemple : la formule $E_c = E_p$ est-elle homogène ? Avec $E_C = {}^1/_2\, mv^2$ (énergie cinétique) et $E_p = mgh$ (énergie potentielle).

Donc : Dimension de $E_C = [E_c] = M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}$ et Dimension de $E_p = [E_p] = M(LT^{-2})L = ML^2T^{-2}$; la formule est donc homogène.

I.1.3.Ecriture d'une équation aux dimensions

Soit G une grandeur physique, sa dimension est notée [G]:

- ✓ Toute grandeur dérivée G est relié aux grandeurs fondamentales par une équation aux dimensions sous la forme :

$[G] = M^{\beta}L^{\alpha}T^{\gamma}I^{\delta}\theta^{\varepsilon}N^{\lambda}J^{\mu}$

- ✓ Toutes les grandeurs mécaniques ont une équation aux dimensions sous la forme:

$$[G] = M^{\beta} L^{\alpha} T^{\gamma}$$

A partir des unités de base auparavant définies, on peut définir facilement des unités qui en découlent (elles dérivent des unités fondamentales).

Grandeur	dimensions	Unités de base	Noms	formules
Force	MLT^{-2}	$kg.\ m.\ s^{-2}$	newton : N	$F = ma$
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.\ m^{-1}.\ s^{-2}$	pascal : Pa	$P = \frac{F}{S}$
Travail	$ML^{2}\ T^{-2}$	$kg.\ m^{2}.\ s^{-2}$	joule : J	$W = Fl\cos\alpha$
Puissance	$ML^{2}T^{-3}$	$kg.\ m^{2}.\ s^{-3}$	watt : W	$P = \frac{W}{t}$
Charge	IT	A. s	coulomb : C	$Q = it$
Potentiel	$ML^{2}T^{-3}\ I^{-1}$	$kg.\ m^{2}.\ s^{-3}A^{-1}$	volt : V	$U = ri = \frac{P}{i}$
Capacité	$M^{-1}L^{-2}T^{4}\ I^{2}$	$kg^{-1}.\ m^{-2}.\ s^{4}.A^{2}$	farad : F	$c = \frac{Q}{U}$
Résistance	$ML^{2}T^{-3}I^{-2}$	$kg.\ M^{2}.\ s^{-3}.\ A^{-2}$	ohm : Ω	$r = \frac{U}{i}$

Tableau I-3 : Unité dérivés du système International (S.I)

Exemples:

Exemple 1: Déterminer l'équation aux dimensions de la vitesse v et de l'accélération a.

Réponse:

La vitesse: $v = \frac{x}{t} \rightarrow [v] = \frac{L}{T} \rightarrow [v] = LT^{-1}$ l'unité: ms^{-1}

L'accélération: $a = \frac{v}{t} \rightarrow [a] = \frac{LT^{-1}}{T} \rightarrow [a] = LT^{-2}$ l'unité: ms^{-2}

Exemples2: Déterminer l'équation aux dimensions de la force et du travail.

Réponse:

La force: $F = m.a \rightarrow [F] = [m][a] \rightarrow [F] = MLT^{-2}$ l'unité: $N = Kgms^{-2}$

Le travail: $W = F.l \rightarrow [W] = [F][l] \rightarrow [F] = ML^2T^{-2}$ l'unité: $Kgm^2s^{-2} = N.m = J$

Exemples3: Le module de la tension d'un ressort s'exprime par $T = k.x$. Trouver la dimension de la constante de raideur *k*.

Réponse:

La dimension de la constante de raideur :

$$T = k.x \rightarrow k = \frac{T}{x} \;;\; [k] = \frac{[T]}{[x]} \rightarrow [k] = \frac{MLT^{-2}}{L} \textbf{ d'où } [k] = MT^{-2}$$

I.2.Calcul d'erreurs

I.2.1.Définitions

Pour toute grandeur mesurable G, il est possible de définir :

- Sa valeur mesurée G_m
- Sa valeur exacte G_e qu'on ne peut pas atteindre

Erreur absolue $\boldsymbol{\delta G}$: L'erreur absolue commise sur une grandeur physique G est la différence entre la valeur mesurée G_m et la valeur exacte G_e : $\delta G = |G_m - G_e|$

Dans la pratique, lorsque la valeur exacte G_e est inaccessible, nous effectuons la moyenne d'une série G_i : $G_e = G_{moy} = \frac{\sum_i^n G_i}{n}$

Incertitude absolue: l'erreur absolue δG n'étant pas connue, on se contente de donner une limite supérieure ΔG appelée incertitude absolue telle que :

$\delta G \leq \Delta G \rightarrow \Delta G > 0$ (L'incertitude absolue est toujours >0)

Cela veut dire que l'incertitude absolue est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue.

Incertitude relative : est définie par le rapport $\frac{\Delta G}{G}$

Calcul d'erreurs

On parle d'erreurs composées quand il s'agit d'une grandeur G dépendant d'autres grandeurs x, y, z c'est-à-dire $G = f(x, y, z)$. L'erreur commis sur cette grandeur, ΔG, peut être exprimé en fonction des erreurs absolue $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ en appliquant une des méthodes suivantes :

I.2.2.Méthode de la différentiel total

Afin de calculer l'erreur ΔG :

- Nous prenons la différentiel total de G

$$dG = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| dx + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| dy + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| dz$$

- Nous remplaçons les différentiels dx, dy, dz , par les erreurs absolues Δx, Δy, Δz et nous prenons les valeurs absolues des drivées partielles

$$\Delta G = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z$$

Exemple 1: Calculer l'incertitude relative de la masse volumique de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse "m" et de son arête "a".

Réponse:

Si m et a désignent les valeurs approchées de la masse et de l'arête du cube, on peut écrire :

$$\rho = \frac{masse}{volume} = \frac{m}{a^3} \Rightarrow \rho = ma^{-3}$$

Selon l'expression de la différentiel total, nous pouvons écrire :

$$d\rho = \left|\frac{\partial \rho}{\partial m}\right| dm + \left|\frac{\partial \rho}{\partial a}\right| da$$

Dérivant la masse volumique par rapport à la masse et à l'arête. Ce qui donne :

$$d\rho = a^{-3}dm - 3ma^{-4}da$$

En approximant les petites variations "d" par des grandes variations "Δ", et en changeant le signe (-) par le signe (+), on obtient:

$$\Delta\rho = a^{-3}\Delta m + 3ma^{-4}\Delta a \Rightarrow \Delta\rho = \frac{1}{a^3}\Delta m + 3\frac{m}{a^4}\Delta a$$

L'expression de l'incertitude relative devient :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\frac{1}{a^3}\Delta m}{ma^{-3}} + \frac{3\frac{m}{a^4}\Delta a}{ma^{-3}} \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}$$

Exemple2:

Soit la relation : $E = \frac{1}{2}mv^2$.Calculer l'incertitude relative sur E en fonctions des incertitudes absolues Δm et Δv.

Réponse:

Selon l'expression de la différentiel total, nous pouvons écrire :

$$dE = \left|\frac{\partial E}{\partial m}\right| dm + \left|\frac{\partial E}{\partial v}\right| dv$$

Dérivant l'expression de l'énergie par rapport à la masse et au volume. On obtient :

$$dE = \frac{1}{2}v^2 dm + mvdv$$

En approximant les petites variations "d" par des grandes variations "Δ", d'ou:

$$\Delta E = \frac{1}{2}v^2\Delta m + mv\Delta v$$

L'expression de l'incertitude relative devient :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}v^2\Delta m}{\frac{1}{2}mv^2} + \frac{mv\Delta v}{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta v}{v}$$

I.2.3.Méthode logarithmique

Dans certains cas : de la multiplication ou de la division, nous pouvons appliquer la méthode logarithmique qui consiste à:

- prendre le logarithme de la grandeur G, puis sa différentiel,
- ensuite, en prend la valeur absolue des expressions obtenues,
- puis, en remplaçant les différentiels par les erreurs absolues.

Remarque: Ln : est la fonction népérienne.

Exemple1: En utilisant la méthode logarithmique, calculer l'incertitude relative de la masse volumique de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse "m" et de son arête "a".

Réponse:

Soit : $\rho = \frac{m}{a^3} \Rightarrow \rho = ma^{-3}$

En introduisant la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons:

$$\ln \rho = ln(ma^{-3}) \Rightarrow \ln \rho = \ln m + \ln a^{-3}$$

La différentielle logarithmique de l'expression précédente est :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - 3\frac{da}{a}$$

En remplaçant les petites variations "d" par des grandes variations "Δ", l'incertitude relatives demandée est :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}$$

Exemple2:

Soit la relation : $E = \frac{1}{2}mv^2$.Calculer l'incertitude relative sur E en fonctions des incertitudes absolues Δm et Δv en utilisant la méthode logarithmique.

Réponse:

Soit : $E = \frac{1}{2}mv^2$

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation :

$$\ln E = ln\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \Rightarrow \ln E = ln\frac{1}{2} + \ln m + \ln v^2$$

d'ou :

$$ln\ E = ln\tfrac{1}{2} + ln\ m + 2ln\ v$$

Passons à la différentielle logarithmique :

$$\frac{dE}{E} = \frac{d\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{dm}{m} + 2\frac{dv}{v}$$

Passons à présent aux incertitudes relatives, en remplaçant les petites variations "d" par des grandes variations "Δ", Il vient :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta v}{v}$$

I.3. vecteurs

I.3.1. Grandeur scalaire- Grandeur vectorielles

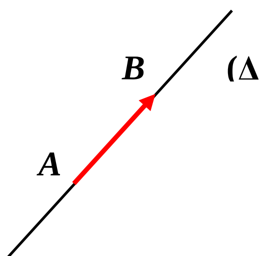
Il est important de noter qu'une grandeur physique peut se présenter sous les deux natures différentes que sont les scalaires et les vecteurs.

Une grandeur physique scalaire est entièrement définie par un nombre et une unité appropriée. On peut citer comme exemples : la masse *m* d'un corps, la longueur *l* d'un objet, l'énergie *E* d'un système, la charge électrique *q*… Une grandeur physique vectorielle est une quantité spécifiée par un nombre et une unité appropriée plus une direction et un sens. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur ayant la même direction, le même sens et un module mesuré en choisissant une unité graphique correspondante, c'est-à-dire l'échelle.

On peut citer comme grandeurs vectorielles la vitesse $\vec{v}$ d'un mobile, le poids $\vec{P}$ d'un corps, les champs électrique $\vec{E}$,……..

I.3.2. Représentation graphique d'un vecteur

Un vecteur est segment de droite *AB (*Figure I.1), ayant une origine *A* et une extrémité *B*. Il est complètement défini si l'on se donne :



- son origine ou point d'application.
- sa direction qui est celle de la droite (Δ).
- son sens qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de *A* vers *B*.
- son module $\vec{V} = |\overrightarrow{AB}|$.

Vecteur unitaire : Un vecteur unitaire est un vecteur dont le module est égal à 1.

I.3.3.Propriétés

- Un vecteur est dit "vecteur libre" s'il est défini par sa direction son sens et sa longueur sans fixer son point d'application.
- Un vecteur est nommé "vecteur glissant" si l'on impose sa droite support sans fixer son point d'application.
- Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé "vecteur lié" si l'on fixe son origine A.
- Deux vecteurs liés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origines différentes sont:
    - ✓ égaux s'ils ont même direction, même sens et même module
    - ✓ opposés s'ils ont même direction, même module mais des sens opposés ; ont dits qu'ils sont "directement opposés" s'ils ont même support
- Le vecteur qui a une longueur de 0 est appelé vecteur nul et est noté $\vec{0}$ (Le vecteur nul n'a évidemment pas de direction, donc pas de sens.).

I.3.4. Opérations élémentaires sur les vecteurs

a. Addition vectorielle

Géométriquement (voir Figure I.2), l'addition de deux vecteurs $\vec{v} + \vec{w}$ est effectuée en confondant l'origine du deuxième sur l'extrémité du premier. Le vecteur ayant pour origine l'origine du premier vecteur et comme extrémité, l'extrémité du deuxième défini la somme des deux vecteurs. Le vecteur $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ relie le point initial de $\vec{v}$ au point terminal de $\vec{w}$.

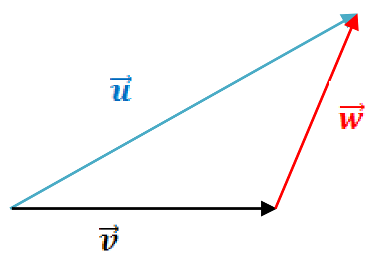


Figure I.2 : Addition vectorielle

- L'addition de deux vecteurs est commutative. Cela signifie que, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, donc $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.
- L'addition des vecteurs est aussi associative. Cela veut dire que, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs, alors $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- L'addition a un élément neutre est le vecteur nul. En effet : $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- D'autre part, la somme de deux vecteurs opposés est nulle. Cela veut dire que, si $\vec{v}$ est un vecteur, alors $-\vec{v}$ est le vecteur ayant la même direction et la même intensité que $\vec{v}$, mais de sens opposé. Donc $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

b. Soustraction vectorielle

Etant donné deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (voir Figure I.3), la différence $\vec{v} - \vec{w}$ de deux vecteurs est définie comme $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$

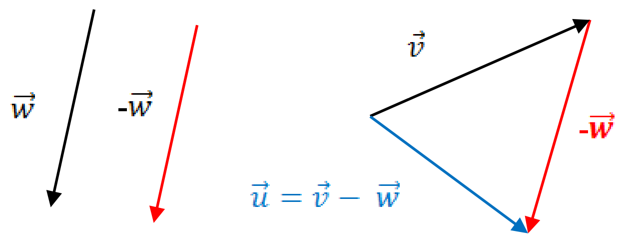


Figure I.3 : Soustraction vectorielle

c. Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire α est un vecteur, noté $\alpha\vec{V}$ (Figure I.4), tel que:

Figure I.4 : Produit d'un vecteur par un scalaire

- sa direction est celle de $\vec{V}$;
- son sens : celui de $\vec{V}$ si $\alpha > 0$, celui de $-\vec{V}$ si $\alpha < 0$;

- son module est égal au produit de celui de $\vec{V}$ par la valeur absolue de α : $|\alpha\vec{V}| = |\alpha|.|\vec{v}|$.

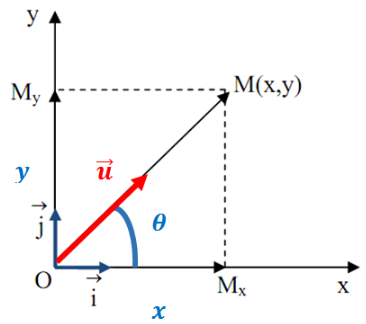
I.3.5.Composantes d'un vecteur

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel vecteur, il faut choisir au préalable un repère qui est un couple de vecteurs non colinéaires appelé base. On peut alors décomposer tous les autres vecteurs du plan en fonction de ces deux vecteurs et cette décomposition est unique. Comme on a défini qu'un vecteur est formé par deux points, cela veut dire que sa représentation nécessite de repérer ces points.

Pour repérer une position il faut choisir un repère. Les repères sont des trièdres orientés.

- Dans le plan "coordonnées rectangulaires"

Ce système est utilisé pour repérer un point dans un plan. Soient M_x et M_y les projections de M sur les axes Ox et Oy, respectivement.On décompose le vecteur $\overrightarrow{OM}$ suivant l'axe des Ox et Oy, comme indiqué sur la FigureI.5.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$$

$$OM_x = OM\cos\theta$$

$$OM_y = OM\sin\theta$$

Figure I.5 : Composantes d'un vecteur

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, respectivement dans les directions des deux axes Ox et Oy, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{OM_x} = OM_x.\vec{i} \quad , \quad \overrightarrow{OM_y} = OM_y.\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = OM_x.\vec{\imath} + OM_y.\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = OM\cos\theta\ \vec{\imath} + OM\sin\theta\ \vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = OM\left(\cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}\right)$$

Or $\overrightarrow{OM} = OM\,\vec{\boldsymbol{u}}$, d'où $\vec{\boldsymbol{u}} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$

Donc la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$, elle vaut : $OM = \sqrt{{OM_x}^2 + {OM_y}^2}$

En utilisant les coordonnées *x* et *y* nous pouvons aussi écrire : $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarque :

- Les grandeurs algébriques x et y sont les coordonnées cartésiennes du point M dans le système $(O\,, x\,, y)$;
- Les vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ forment une base orthonormée (leur module est égal à 1 et ils sont perpendiculaires entre eux) ;
- En n dimensions, les vecteurs ont n composantes.

I.3.6.produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire défini par:

$$\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|\ \|\vec{B}\|\cos\theta\ \text{, avec}\quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

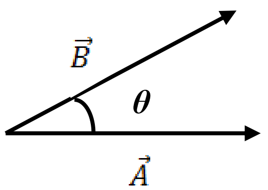


Figure I.6 : produit scalaire

Le produit scalaire satisfait les lois suivantes :

- $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$
- $\vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

- $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$
- Si $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$ et $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + B_3\vec{k}$, alors :

$$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul : $\vec{A}.\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$
- le produit scalaire permet de définir le module d'u vecteur $\vec{A}$:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}} = \sqrt{\vec{A}^2} = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

I.3.7.Produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, leur produit vectoriel est un vecteur orienté tel que :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{V}$$

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

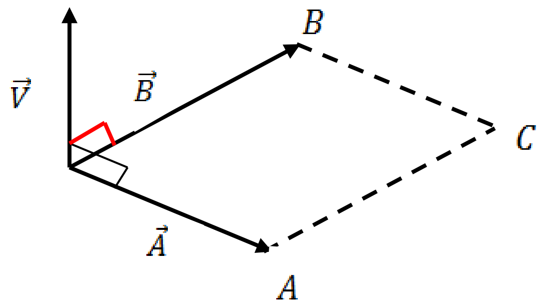
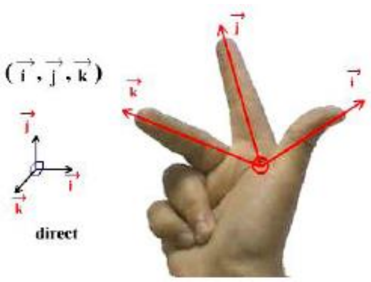


Figure I.7 : produit vectoriel

- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite



- sa norme vaut

$$\|\vec{V}\| = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\sin(\vec{A},\vec{B})$$

Le produit vectoriel satisfait les lois suivantes :

- Si $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$ et $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + B_3\vec{k}$, alors :

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = +\vec{i}\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\vec{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\vec{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\vec{k}$$

- Le produit vectoriel est anticommutatif (antisymétrique): $\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$
- $\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\vec{C}$
- $\vec{\imath}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}\wedge\vec{k} = 0$
- $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}$; $\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath}$; $\vec{k}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}$
- $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|$ est la surface d'un parallélogramme de cotés $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- Si $\vec{A}\wedge\vec{B} = 0$ et si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont pas des vecteurs nuls, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles.

I.3.8.Produit mixte

Un produit mixte est défini par:

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Ou : $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$, $\vec{B} = B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + B_3\vec{k}$ et $\vec{C} = C_1\vec{\imath} + C_2\vec{\jmath} + C_3\vec{k}$

Ce produit mixte représente le volume d'un parallélépipède de cotés $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ (FigureI.8)

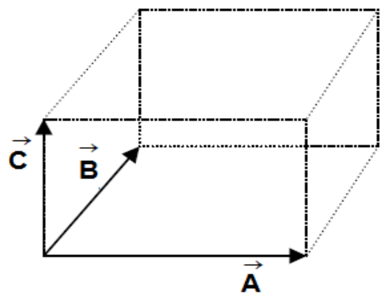


Figure I.8 : parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$

Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs, est nul.

On montre facilement que, dans une base orthonormée directe, le produit mixte est un variant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif :

$\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})$

I.3.9.Dérivée d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$, la dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base fixe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est définie par $\vec{V}(t)$:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dV_z(t)}{dt}\vec{k}$$

Et la dérivée seconde est donnée par :

$$\frac{d^2\vec{V}(t)}{dt^2} = \frac{d^2V_x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2V_y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2V_z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérés fixe ; c.à.d.

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} + \frac{d\vec{\jmath}}{dt} + \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

Les règles habituelles de dérivation peuvent se généraliser aux vecteurs, Mais l'ordre des facteurs dans le produit est très important. Ainsi, si $f(t)$ est une fonction scalaire et si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des fonctions vectorielles, on a alors :

- $\frac{d}{dt}(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) = \alpha\frac{d\vec{A}_1}{dt} + \beta\frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \frac{d\vec{B}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(f\vec{A}) = \frac{df}{dt}\vec{A} + f\frac{d\vec{A}}{dt}$

I.3.10.Fonction à plusieurs variables

En Physique, nous avons souvent à étudier les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Nous nous limiterons à trois notées $x, y \; et \; z$ mais les résultats sont facilement généralisables.

On appelle alors $\vec{V}(x, y, z)$ champ vectoriel. De même, on appelle la fonction (scalaire) $f(x, y, z)$ champ scalaire. Pour cela :

- La différentielle du champ scalaire $f(x, y, z)$est définie par :

$$df = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz$$

- différentielle d'un champ vectoriel $\vec{V}(x, y, z)$ est défini par :

$$d\vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial \vec{V}(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}(x,y,z)}{\partial z} dz$$

Soit l'opérateur vectoriel différentiel $\vec{\nabla}$, appelé nabla, défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Où $\frac{\partial}{\partial x}$ signifie que l'on dérive par rapport à la variable x en considérant les variables y, z comme constantes.

A l'aide de cet opérateur $\vec{\nabla}$, on définit les grandeurs suivantes :

✓ **Gradient :**

Si $f(x, y, z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

✓ **Divergence :**

Si $\vec{V}(x, y, z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- **Rotationnel**:

Si $\vec{V}(x,y,z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$
$$= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} - \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Notons qu'il existe deux égalités importantes :

$$div\,\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}.f\right) = 0$$

Exemple1 : Calculer La différentielle de la fonction scalaire $f(x,y,z) = x^2 - yz$

Réponse: La différentielle du champ scalaire $f(x,y,z)$ est :

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

$$df(x,y,z) = \frac{\partial(x^2 - yz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(x^2 - yz)}{\partial y}dy + + \frac{\partial(x^2 - yz)}{\partial z}dz$$

$$df(x,y,z) = 2xdx - zdy - ydz$$

Exemple2 : Calculer le gradient de la fonction scalaire

$$f(x,y,z) = 3xy - 2xz + 5yz$$

Réponse: le gradient de la fonction $f(x,y,z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}\, f \;=\frac{\partial(3xy-2xz+5yz)}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial(3xy-2xz+5yz)}{\partial y}\vec{\jmath}$$
$$+\frac{\partial(3xy-2xz+5yz)}{\partial z}\vec{k}$$

D'où :

$$\overrightarrow{grad}\, f(x,y,z)$$
$$=(3y-2z)\vec{\imath}+(3x+5z)\vec{\jmath}$$
$$+(-2x+5y)\vec{k}$$

Exemple3 :

Calculer la divergence de la fonction vectorielle :

$\vec{V}(x,y,z) \;=2xy\,\vec{\imath}-3yz^2\vec{\jmath}+9xy^3\vec{k}$

Réponse: La divergence de la fonction vectorielle est

$$div\,\vec{V} \;=\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Donc :

$div\,\vec{V}=2y-3z^2+0=2y-3z^2$

Exemple4 : Calculer le rotationnel du vecteur: $\vec{V}(x,y,z) \;=2xy\,\vec{\imath}-3yz^2\vec{\jmath}+9xy^3\vec{k}$

Réponse: le rotationnel du vecteur $\vec{V}(x,y,z)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v})=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath}-\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath}-\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

D'où :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v})=(27xy^2-6yz)\vec{\imath}-(9y^3-0)\vec{\jmath}-(0-2x)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v})=(27xy^2-6yz)\vec{\imath}-9y^3\vec{\jmath}+2x\vec{k}$$

Chapitre II: Cinématique du point

II.1. Définition

L'étude de la mécanique se subdivise en cinématique et dynamique. La cinématique consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement. La dynamique (qui sera l'objet du chapitre suivant), s'intéresse à ces causes : les forces " Elle relie les forces au mouvement".

L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce corps par rapport à un repère pris comme référence (en général, un trièdre de référence ou référentiel). La notion de temps est aussi prise en considération.

II.2 Cinématique du point

Nous commencerons notre étude de la mécanique par l'étude du mouvement des points matériels.

II.2.1 Point matériel

Par définition un point matériel est un objet sans dimensions spatiales. Bien que les objets réels occupent généralement un certain espace, ce concept est utile dans bon nombre de situations où on ne s'intéresse pas aux rotations de l'objet sur lui-même ou lorsque les dimensions de l'objet peuvent être négligées.

II.2.2 Référentiel

Le mouvement d'un point est un concept relatif. En d'autres termes, on ne peut pas dire qu'un corps est "en mouvement" (ou "au repos") sans préciser par rapport à quoi. D'où la nécessité de définir un repère doté d'un chronomètre, pour connaitre la position du point par rapport à ce repère et l'instant correspondant à cette position (mesure du temps). Il s'agit d'un repère d'inertie qu'on nomme référentiel.

Selon la nature du mouvement du point, sa position sera localisée par l'un des systèmes à savoir : cartésien, polaire, cylindrique ou sphérique.

II.2.2 vecteur position

La position du point matériel peut être définie au cours du temps en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k}$

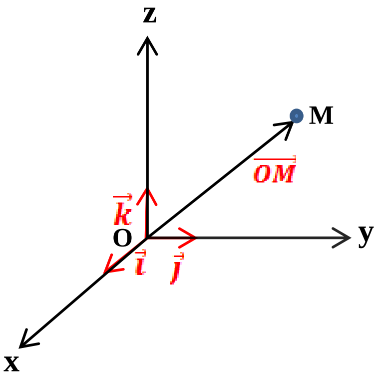


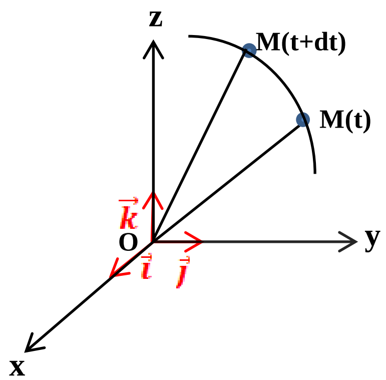
Figure II.1 : Représentation du vecteur

x est la projection de *M* sur l'axe (ox), y sur l'axe (oy) et z sur l'axe (oz), on les nomme les coordonnées de *M*, comme le point *M* est en mouvement donc sa position varie dans le temps ces coordonnées sont fonction du temps.

$$x = f(t) \;, y = g(t) \;\; et \; z = \mathrm{h}(t)$$

Qu'on appelle les équations horaires.

II.2.3 Vecteur déplacement



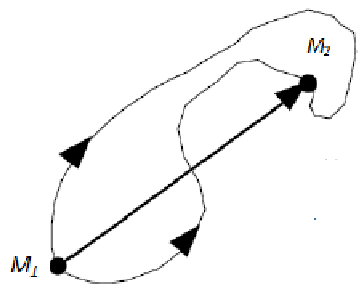


Figure II.2 : Représentation du vecteur

Soient deux points M_1 à l'instant t et un autre M_2 à l'instant (t+dt), on peut définir trois chemin différents entre ces deux points, qui correspondent au même vecteur. C'est le vecteur déplacement formé par l'origine M_1 et l'extrémité M_2, qui définit un mouvement qui se fait du point M_1au point M_2.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \vec{\boldsymbol{u}}$$

avec $\vec{\boldsymbol{u}}$ vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

II.2.4 Trajectoire

C'est le lieu géométrique des positions successives occupées par le point matériel au cours du temps et par rapport au système de référence choisi. Celle–ci peut être rectiligne ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.

Exemple

un mobile est repéré par les coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} x\,(t) & = a\cos wt \\ y\,(t) & = a\sin wt \end{cases}$$

En supprimant le temps, on obtient : $x^2 + y^2 = a^2$

La trajectoire est donc un cercle de centre O et de rayon *a*

L'équation de la trajectoire est une relation qui lie les coordonnées du point entre elles.

II.2.5 Vecteur vitesse

La vitesse est une grandeur qui caractérise un mouvement, c'est la variation de la position par rapport au temps. Par ailleurs, cette grandeur est vectorielle car le mouvement d'un point se caractérise par une direction et un sens.

On distingue deux vitesses, une vitesse moyenne et une vitesse instantanée.

a. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne $\overrightarrow{v_m}$ est la vitesse d'un point Mobile qui irait de M_1 à M_2 pendant le temps "Δt " d'un mouvement rectiligne et uniforme, cette vitesse s'écrit :

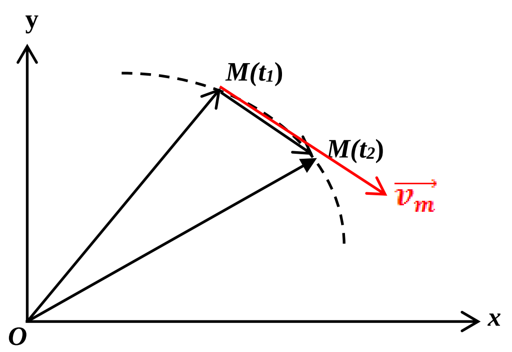


Figure II.3 : Représentation d'une vitesse

Remarque: Le vecteur vitesse moyenne est parallèle au vecteur déplacement

b. Vitesse instantanée ou vitesse à l'instant « t »

En réalité ce mouvement ne se fait pas à une vitesse constante, à chaque instant on aura une situation de la vitesse, on parlera de vitesse instantanée. C'est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence du temps est très petite cela veut dire qu'elle tend vers zéro.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$$

Remarque:

Le vecteur vitesse est donc toujours orienté dans le sens du mouvement : sur une trajectoire orientée, si le mobile se déplace dans le sens positif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens positif. Si le mobile se déplace dans le sens négatif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens négatif.

II.2.6 Vecteur accélération

Soit $\overrightarrow{v_1}$ la vitesse d'un mobile à l'instant " t_1 ", et $\overrightarrow{v_2}$ sa vitesse à l'instant " t_2". On distingue deux accélérations, une accélération moyenne et une accélération instantanée.

a. Accélération moyenne

L'accélération moyenne entre les instants "t_1"et " t_2" est par définition :

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t}$$

b. Accélération instantanée

C'est la limite du rapport précédent lorsque $t_2 \rightarrow t_1$, c'est-à-dire lorsque $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

II.3 Exemple de mouvement

Un mouvement peut se faire suivant des trajectoires rectilignes ou curvilignes ou suivant la combinaison des deux.

II.3.1 Mouvement rectiligne

Dans le référentiel d'étude, la trajectoire est une portion de droite. Il est évident alors de repérer le point *M* sur cette droite confondue, par exemple, avec l'axe *Ox* des coordonnées cartésiennes. Il n'y a alors qu'une équation horaire *x*(*t*) et une seule composante pour les vecteurs vitesses

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\ \vec{\imath}$$

Ou :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$$

Ou le module de la vitesse s'exprime :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

C'est une équation différentielle qui permet de donner l'information sur le mouvement et sa nature.

Si la vitesse est constante donc

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$\Rightarrow\; x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

$$\Rightarrow x = \int_{t_0}^{t} v\,dt + x_0$$

Il s'agit d'une équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme.

- Dans le cas où la vitesse varie en fonction du temps, elle s'exprime de la façon suivante :

si l'accélération *a* est constante alors :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt = a\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow v(t) = a(t - t_0) + v_0(t)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} \big(a(t - t_0) + v_0(t)\big)dt$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

C'est le mouvement uniformément varié. Ce mouvement peut être accéléré ou retardé. Dans le premier cas le produit de la vitesse et l'accélération doit être positif ($\vec{v}.\vec{a} > 0$), dans le deuxième cas le même produit doit être négatif ($\vec{v}.\vec{a} < 0$).

II.3.2 Mouvement curviligne

II.3.2.1 Position d'un mobile

La position d'un point dans l'espace est indiquée de deux manières (Figure II.4):

a. En repérant le point par rapport à un repère orthonormé

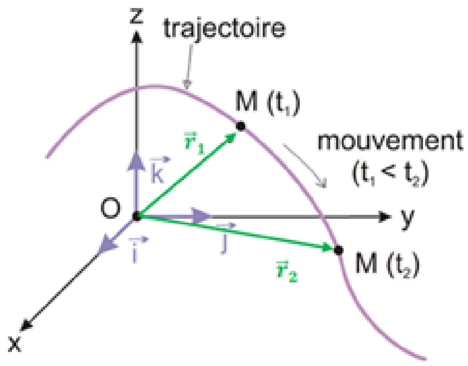


Figure II.4 : Représentation du mouvement curviligne

Le vecteur position s'écrit donc: $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)$

b. En considérant un point sur la trajectoire pris comme origine

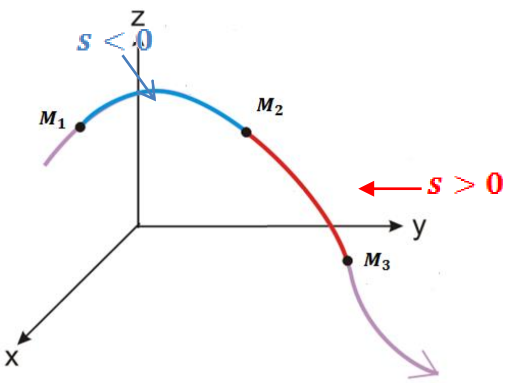


Figure II.5 : Représentation de l'abscisse curviligne *s*

La valeur algébrique de l'arc $\widetilde{M_1M_2}$ est l'abscisse curviligne s du point M, dans ce cas l'équation horaire s'écrit : $s = \widetilde{M_1M_2}$

II.3.2.2 Vecteurs déplacement, vitesse et accélération

a. Le vecteur déplacement : est la distance pour aller du point M_1 au point M_2, ce qui veut dire :

$\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM}(t) = \Delta\vec{r}(t)$

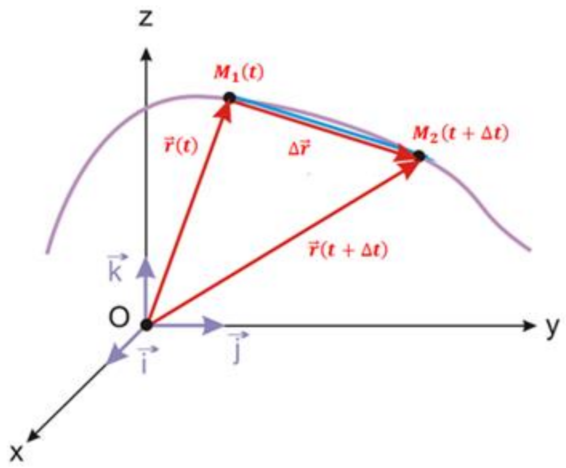


Figure II.6 : Représentation du vecteur déplacement

b. La variation de la position d'un mobile au cours du temps représente le vecteur vitesse, on distingue deux vitesses :

- **<u>Vecteur vitesse moyenne</u> :**

Soit deux positions du mobile M_1 et M_2 à deux instants t et $t+\Delta t$.

$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

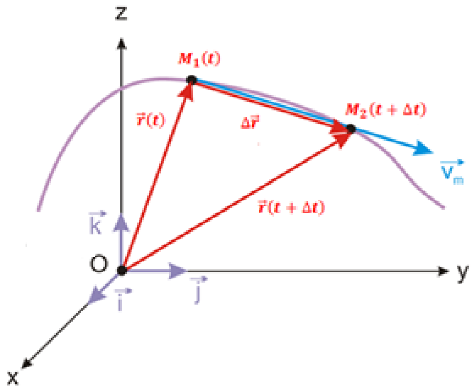


Figure II.6 : Représentation du vecteur vitesse moyenne

Remarque: Le vecteur vitesse moyenne est parallèle au vecteur déplacement

- **<u>Vecteur vitesse instantanée</u> :**

C'est la limite du rapport $\frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$ lorsque $\Delta t \to 0$, on peut écrire :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

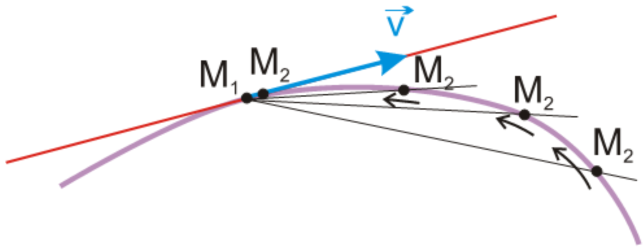


Figure II.7 : Représentation du vecteur vitesse

En remarque que la vitesse instantanée à l'instant *t* est assimilée à la vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2, tel que *t* est milieu de $[t_1 , t_2]$ et Δt petit.

c. La variation du vecteur vitesse au cours du temps représente le vecteur accélération, dont on distingue deux accélérations :

- **<u>Accélération moyenne</u> :**

Le vecteur accélération moyenne entres les instants "t_2" et "t_1" s'écrira alors :

$$\vec{a}_m(t) = \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- **Accélération instantanée :**

  Le vecteur accélération instantanée est :

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

II.3.3 Mouvement dans le plan

Si la trajectoire appartient à un plan, il est possible de repérer la position d'un mobile soit par les coordonnées rectangulaires soit par les coordonnées polaires.

II.3.3.1 Etude du mouvement en coordonnées polaires

Soit M un point matériel dont la trajectoire est une courbe plane quelconque (C). la position du mobile M est indiquée par ses deux coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$:

$$\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} r(t) \\ \theta(t) \end{array} \right.$$

Le vecteur position en coordonnées polaires s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r \text{........................}\mathbf{(1)}$$

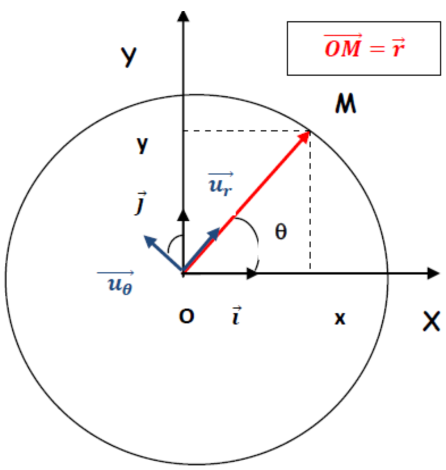


Figure II.8 : Mouvement en coordonnées

En coordonnés polaires, nous pouvons écrire les expressions des deux vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath} \end{cases}$$

Leurs dérivées consécutives sont:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} \\ \text{et} \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath}) = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta \vec{\jmath} = \vec{u}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ \text{et} \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \dfrac{d}{d\theta}(-\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath}) = -(\cos\theta \vec{\imath} + \sin\theta \vec{\jmath}) = -\vec{u}_r \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

A l'aide des relations (1), (2) et (3), exprimons la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{u}_r) \Rightarrow \vec{v} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\,\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = r\,\vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} + \vec{u}_r\,\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{(4)}$$

avec: $\left(\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta};\ \ \frac{dr}{dt} = \dot{r}\right)$

Remarquons que cette vitesse a deux composantes, transversale $\vec{v}_\theta$ et radiale $\vec{v}_r$ ce qui veut dire que :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

par identification avec l'expression (4), nous obtenons : $\begin{cases} \vec{v}_r = \dot{r}\vec{u}_r \\ \vec{v}_\theta = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{cases}$

D'un autre côté, nous avons :

$$\begin{cases} \vec{v} = v_r \, \vec{u}_r + v_\theta \, \vec{u}_\theta \\ \vec{v} = \dot{r} \, \vec{u}_r + r \, \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta \end{cases}$$

D'où le module de la vitesse

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r \, \dot{\theta}\right)^2}$$

Nous dérivons la relation de la vitesse (4) par rapport au temps et en utilisant les expressions (2) et (3), nous obtenons la formule de l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right) \Rightarrow \vec{a}$$

$$= \dot{r}\,\frac{d\,\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\,\frac{d\dot{r}}{dt} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\,\vec{u}_\theta}{dt} + r\,\vec{u}_\theta\,\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\,\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \ddot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\left(-\,\vec{u}_r\,\dot{\theta}\right) + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\dot{r}\,\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \ddot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\left(-\,\vec{u}_r\,\dot{\theta}\right) + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\dot{r}\,\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\textbf{(5)}$$

avec : $\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}\,; \quad \frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r}\right)$

Remarquons que l'accélération a deux composantes, radiale $\vec{a}_r$ et transversale $\vec{a}_\theta$:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta = a_r\vec{u}_r + a_\theta\,\vec{u}_\theta$$

Par identification avec l'expression (5), on obtient :

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

Le module de l'accélération: $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)^2}$

II.3.3.2 Mouvement circulaire

Puisque $r = R = C^{te}$ le vecteur vitesse est donc :

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

Et l'expression du vecteur accélération est :

$$\vec{a} = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta = a_r\vec{u}_r + a_\theta\,\vec{u}_\theta$$

Remarquons que cette accélération a deux composantes:

a. Accélération normale notée par $\vec{a}_N$ portée par la normale, dirigée vers le centre, et de sens contraire à $\vec{a}_r$ elle indique la variation de la direction de la vitesse.

$$\vec{a}_N = -\vec{a}_r = R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r \Rightarrow a_N = R\,\dot{\theta}^2$$

b. Accélération tangentielle notée par $\vec{a}_T$, portée par la tangente à la trajectoire au point M, elle indique la variation du module de la vitesse.

$$\vec{a}_T = \vec{a}_\theta = R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta \Rightarrow a_T = R\ddot{\theta}$$

II.3.3.3 Mouvement circulaire uniforme

Pour ce mouvement la vitesse est constante en module. Et puisque $r = R = Cte$, Dans ce cas:

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\omega\,\vec{u}_\theta$$

où $\omega(\mathrm{rad/s})$ est la vitesse angulaire (constante).

ω : la vitesse angulaire qui représente l'angle balayé par unité de temps et dont l'unité est le radian par seconde (rad.s^{-1}).

$$a = a_r = a_N = R\,\dot{\theta}^2 = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_N} = -R\,\omega^2\,\vec{u}_r$$

Dans le cas d'une trajectoire quelconque il suffit de remplacer R par le rayon de courbure de la trajectoire, ρ, ou ce dernier est en fonction du temps : $\rho = \rho(t)$

Donc **:**

$$a_N = \frac{V^2}{\rho}(m/s^2)$$

II.3.3.4 Les composantes normale et tangentielle de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet:

On considère maintenant un mouvement dont la trajectoire est une courbe plane quelconque (C). Nous dessinons un repère composé de l'axe MT, tangent à la trajectoire au point M et porte le vecteur vitesse, et de l'axe MN perpendiculaire à l'axe MT .

Soient $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$ les deux vecteurs unitaires suivant MT et MN respectivement.

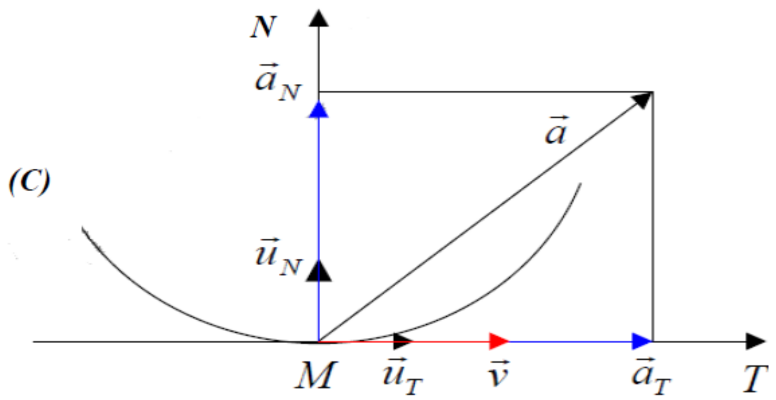


Figure II.9 : Repère de Frenet

On remarque sur la Figure II.9 que la vitesse s'écrit alors:

$$\vec{v} = v\,\vec{u}_T \text{ ....(1)}$$

L'accélération s'écrit:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N}$$

Donc :

$$\vec{a} = a_T\,\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N \text{..........................(2)}$$

Ou :

$$\begin{cases} a_T = \dfrac{dV}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{R} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dV}{dt}\ \vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_N \Rightarrow a = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

On appelle les expressions (1) et (2), respectivement les composantes de la vitesse et de l'accélération dans le repère de Frenet, ou les composantes propres, ou encore les composantes locales.

II.4 Mouvement dans l'espace

II.4.1 Etude du mouvement en Coordonnées cartésiennes

a) Repère cartésien

Le repère cartésien est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires "fixes" dans le référentiel choisi. Les vecteurs unitaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ déterminent les trois directions usuelles de l'espace $(ox), (oy)$ et (oz) . Cela signifie que ni la norme, ni la direction, ni le sens de ces vecteurs unitaires ne changent au cours du temps.

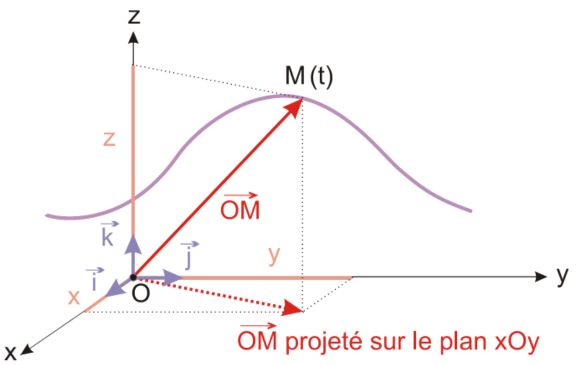


Figure II.9 : Mouvement en coordonnées cartésiennes

b) Expression du vecteur position

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit simplement:

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k}$$

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les équations paramétriques du mouvementLorsque les coordonnées x, y ou z de M subissent une variation élémentaire dx, dy ou dz, le point M se déplace respectivement de dx suivant (ox) , dy suivant (oy) ou dz suivant (oz). Ainsi, le volume élémentaire dv est petit parallélépipède rectangle d'arêtes dx, dy et dz donnée par :

$$dv = dx.dy.dz$$

c) Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Le vecteur déplacement $\overrightarrow{\Delta l}$ est obtenu logiquement en soustrayant la position du point M_1 au temps t_1 à celle du point M au temps t (avec $t_1 > t$). On a: $\overrightarrow{\Delta l} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}$. La définition du vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{\Delta l}$ est similaire à celle du vecteur déplacement, mais cette fois-ci les temps t et t_1 sont très proches de sorte que $t_1 - t \rightarrow 0$. On a alors :

$$\overrightarrow{\Delta l} = \lim_{(t-t_1)\rightarrow 0}[\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}]$$

Mathématiquement, cela revient à différencier, l'expression de $\overrightarrow{OM}$ Il vient:

$$\overrightarrow{dl} = d\overrightarrow{OM} = (dx.\vec{\imath} + x.d\vec{\imath}) + (dy.\vec{\jmath} + y.d\vec{\jmath}) + \left(dz.\vec{k} + z.d\vec{k}\right)$$

Dans le repère cartésien, les vecteurs de base sont fixes par rapport au référentiel choisi, cela revient à dire qu'ils n'évoluent pas au cours du temps; ou bien qu'ils n'ont aucun déplacement élémentaire soit: $d\vec{\imath} = 0\,, d\vec{\jmath} = 0\,, d\vec{k} = 0$. Finalement, on obtient:

$$\overrightarrow{dl} = dx.\vec{\imath} + dy.\vec{\jmath} + dz.\vec{k}$$

d) Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est défini par les coordonnées du vecteur dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

Où :

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} + v_z(t)\vec{k}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\vec{k})$ des coordonnées cartésiennes étant fixes, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\,\vec{k}}{dt} = \vec{0}\ \ et\ \ \frac{d^2\vec{\imath}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{\jmath}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{k}}{dt^2} = \vec{0}$$

Son module sera donné par :

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

e) Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

Ou :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} == \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k}$$

Son module sera donné par :

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

<u>Note:</u> la dérivée première par rapport au temps $\frac{d}{dt}$ d'une grandeur x se note aussi $\dot{x}$. La dérivée seconde par rapport au temps $\frac{d^2}{dt^2}$ d'une grandeur se note aussi $\ddot{x}$.

II.4.2 Etude du mouvement en Coordonnées cylindrique

a) Repère cylindrique

Le repère cylindrique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ dont un $\vec{u}_z$ est "fixe" dans le référentiel choisi tandis que les deux autres $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ sont variables.

b) Expression du vecteur position

En coordonnées cylindriques le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit:

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r + z.\vec{u}_z$$

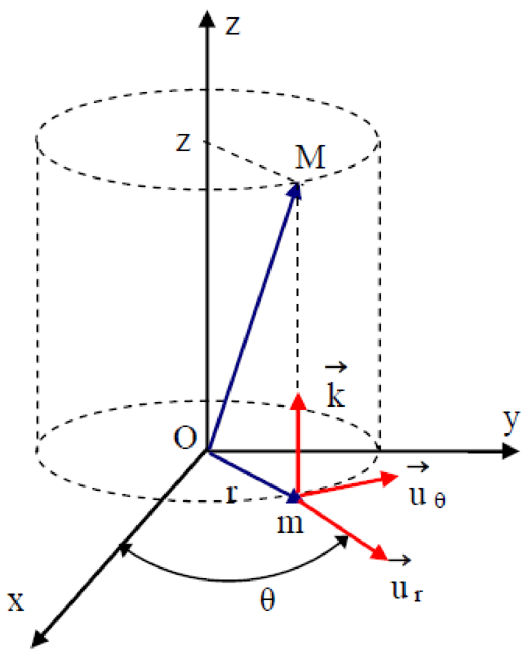


Figure II.10 : Mouvement en coordonnées cylindrique

Si on attache au référentiel un repère cartésien (en plus du repère cylindrique) avec la même origine, il est possible d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ du repère cartésien (ou inversement):

$$\begin{cases} \vec{u}_r = cos\theta\, \vec{\imath} + sin\theta\, \vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\imath} = cos\theta\, \vec{u}_r + sin\theta\, \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta\, \vec{\imath} + cos\theta\, \vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\jmath} = sin\theta\, \vec{u}_r + cos\theta\, \vec{u}_\theta \end{cases}$$

c) Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Nous procédons de la même manière que précédemment en différentiant le vecteur position:

$$\overrightarrow{dl} = (dr.\vec{u}_r + r.d\vec{u}_r) + (dz.\vec{u}_z + z.d\vec{u}_z)$$

On sait que $d\vec{u}_z = 0$ mais par contre $d\vec{u}_r$ car le vecteur $\vec{u}_r$ est susceptible de varier pour le repère cylindrique. Pour connaitre l'expression de $\vec{u}_r$. Revenons dans le repère cartésien, nous avons:

$$d\vec{u}_r = d(cos\theta\, \vec{\imath} + sin\theta\, \vec{\jmath}) \Rightarrow d\vec{u}_r$$
$$= [d(cos\theta).\vec{\imath} + cos\theta.d\vec{\imath}] + [d(sin\theta).\vec{\jmath} + sin\theta.d\vec{\jmath}]$$

$$\Rightarrow d\vec{u}_r = [d(cos\theta).\vec{\imath}] + [d(sin\theta).\vec{\jmath}]$$

$$\Rightarrow d\vec{u}_r = [d(cos\theta).\vec{\imath}] + [d(sin\theta).\vec{\imath}]$$

$$\Rightarrow d\vec{u}_r = -d\theta.sin\theta.\vec{\imath} + d\theta.cos\theta.\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow d\vec{u}_r = d\theta.(-sin\theta.\vec{\imath} + cos\theta.\vec{\jmath})$$

$$\Rightarrow d\vec{u}_r = d\theta.\vec{u}_\theta$$

Ainsi, le vecteur "déplacement élémentaire", en coordonnées cylindriques s'écrit:

$$\overrightarrow{dl} = dr.\vec{u}_r + r.d\theta.\vec{u}_\theta + dz.\vec{u}_z$$

d) Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est défini par les coordonnées du vecteur dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z) \Rightarrow \vec{v} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} + z\frac{d\vec{u}_z}{dt} + \vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} + \vec{u}_z\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

où :

$$\vec{v}\begin{cases} v_r = \frac{d}{dt} = \dot{r} & \rightarrow composante\ radiale \\ v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} & \rightarrow composante\ transversale \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} & \rightarrow composante\ axiale \end{cases}$$

Son module sera donné par :

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2}$$

e) Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse: $\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt}$. il vient :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z\right]$$

D'où :

$$\vec{a} = \dot{r}\,\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + r\vec{u}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\frac{dr}{dt} + \dot{z}\,\frac{d\vec{u}_z}{dt} + \vec{u}_z\frac{d\,\dot{z}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \ddot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\vec{u}_r\right) + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\,\dot{r}\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \ddot{r}\,\vec{u}_r - r\,\dot{\theta}^{\,2}\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^{\,2}\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\,\dot{\theta}\,\dot{r}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^{\,2}\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\,\dot{r}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

où :

$$\vec{a}\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^{\,2} \rightarrow composante\ radiale \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\,\dot{r} \rightarrow composante\ transversale \\ a_z = \ddot{z} \rightarrow composante\ axiale \end{cases}$$

Son module sera donné par :

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^{\,2}\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\,\dot{r}\right)^2 + (\ddot{z})^2}$$

II.4.3 Etude du mouvement en coordonnées sphériques

a) Repère sphérique

Le repère sphérique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ (Figure II.11) tous sont variables dans le référentiel choisi.

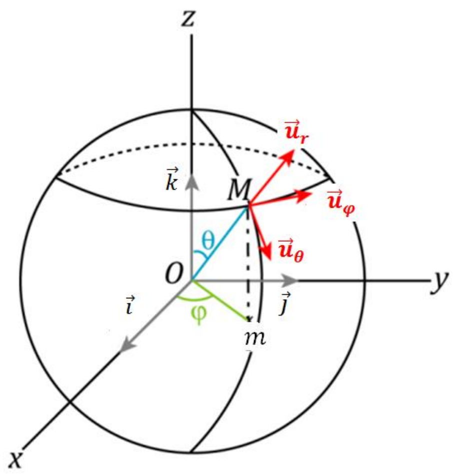


Figure II.11 : Mouvement en coordonnées

b) Expression du vecteur position

En coordonnées sphériques, le vecteur position s'écrit:

$$\overrightarrow{OM} = r\,.\vec{u}_r$$

En plus de repère sphérique, nous "attachons" Au référentiel utilisé un repère cartésien avec La même origine. Il est possible d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs vecteurs $\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ du repère cartésien:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\ \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\ \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

c) Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Nous recherchons $\overrightarrow{dl}$ sous la forme $\overrightarrow{dl} = dA\,\vec{u}_r + dB\,\vec{u}_\theta + dC\,\vec{u}_\varphi$ ou dA, dB et dC sont des éléments différentiels (scalaires) respectivement égaux à $\overrightarrow{dl}$ lorsque :

- ✓ $dA = dl$ lorsque θ et φ sont fixes, seul la coordonnée r peut changer. On a donc $dA = dr$
- ✓ $dB = dl$ lorsque r et φ sont fixes, seul la coordonnée θ peut changer. On a donc $dB = r\ d\theta$
- ✓ $dC = dl$ lorsque r et θ sont fixes, seul la coordonnée φ peut changer. On a donc $dC = r\ sin\theta\ d\varphi$

Il vient :

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\ sin\theta\ \ d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

d) Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est défini par les coordonnées du vecteur dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}[r\,\vec{u}_r\,] = r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\,\frac{dr}{dt}$$

En coordonnées sphériques le vecteur position dépend du vecteur $\vec{u}_r$, ou ce dernier dépend des angles θ et φ donc la dérivée de $\vec{u}_r$ par rapport au temps s'ecrit:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}[\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\ \vec{k}] \\ &= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\ \vec{k} \\ &= \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}[\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\ \vec{k}] = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$= \sin\theta\,(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}) = \sin\theta\ \vec{u}_\varphi$$

Il vient :

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \quad et \\ \dfrac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = \sin\theta\ \vec{u}_\varphi\end{cases}$$

Donc le vecteur vitesse s'ecrit :

$$\vec{v} = r\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right] + \vec{u}_r\frac{dr}{dt} \Rightarrow \vec{v} = r\,[\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi] + \dot{r}\,\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{u}_\varphi$$

Son module sera donné par :

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + (r\,\dot{\varphi}\sin\theta)^2}$$

e) Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse: $\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt}$. il vient :

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi\right]\text{..........}\mathbf{(6)}$$

$$(6) \Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\,\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \vec{u}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + r\vec{u}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\frac{dr}{dt} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\frac{d\,\vec{u}_\varphi}{dt} + r\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi\frac{d}{dt}(\sin\theta) + r\sin\theta\;\vec{u}_\varphi\frac{d\dot{\varphi}}{dt} + \dot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\left[\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_r}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right] + \vec{u}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + r\,\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right] + r\vec{u}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\frac{dr}{dt} + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\left[\frac{d\,\vec{u}_\varphi}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\,\vec{u}_\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right] + r\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi\frac{d}{dt}(\sin\theta) + r\sin\theta\;\vec{u}_\varphi\frac{d\dot{\varphi}}{dt} + \dot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\left[\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\;\sin\theta\;\vec{u}_\varphi\,\right] + \vec{u}_r\ddot{r} + r\,\dot{\theta}\left[-\dot{\theta}\,\vec{u}_r + \cos\theta\;\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi\right] + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\;\;\dot{r}\;\;\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\left[-(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)\;\dot{\varphi}\right] + r\,\dot{\varphi}\;\dot{\theta}\cos\theta\;\;\vec{u}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi + \;\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi + \ddot{r}\,\vec{u}_r - r\,\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\,\dot{\varphi}\;\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\,\ddot{\theta}\;\vec{u}_\theta + \dot{r}\;\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta - r\,\dot{\varphi}^2\;sin^2\theta\vec{u}_r - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\dot{\varphi}\;\dot{\theta}\cos\theta\;\;\vec{u}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\;\sin\theta\;\;\vec{u}_\varphi + \dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta\;\vec{u}_\varphi$$

En regroupant les termes puis en les simplifiant, il vient finalement:

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\;sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta\; + 2\;r\;\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\;\ddot{\varphi}\sin\theta\,\right)\vec{u}_\varphi$$

Démonstration :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\;\vec{k}\,\right]$$

$$= -\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \cos\theta\;\vec{k}$$

$$= -\left(\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} + \cos\theta\;\vec{k}\right)$$

$$= -\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left[\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \sin\theta\;\vec{k}\right]$$

$$= -\cos\theta\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$= \cos\theta\,(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath})$$

$$= \cos\theta\,\vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\,\vec{u}_\varphi}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}[-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}] = 0$$

$$\frac{d\,\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}[-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}] = -\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$= -(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath})$$

$$= -(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta)$$

D’un autre coté, on a :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\;\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\;\vec{k} \end{cases}$$

multiplions $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ respectivement par $\sin\theta$ et $\cos\theta$, on obtient :

$$\begin{cases} \sin\theta\,\vec{u}_r = sin^2\theta\cos\varphi\,\vec{i} + sin^2\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \sin\theta\cos\theta\;\vec{k} \ldots\ldots\ldots(1) \\ \cos\theta\,\vec{u}_\theta = cos^2\theta\cos\varphi\,\vec{i} + cos^2\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \cos\theta\sin\theta\;\vec{k} \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

On additionne les deux équations (1) et (2) :

$$\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta = sin^2\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\theta^2\sin\varphi\,\vec{\jmath} + cos^2\theta\cos\varphi\,\vec{\imath} + cos^2\theta\sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

$$= \cos\varphi\,(sin^2\theta + cos^2\theta)\vec{i} + \sin\varphi(sin^2\theta + cos^2\theta)\,\vec{j}$$

$$= \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

D’où

$$\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\varphi} = \cos\theta\,\vec{u}_\varphi \\ \dfrac{d\,\vec{u}_\varphi}{d\theta} = 0 \\ \dfrac{d\,\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = -(\sin\theta\,\vec{u}_r + \cos\theta\,\vec{u}_\theta) \end{cases}$$

II.5. Mouvements relatifs

II.5.1 Introduction

Le mouvement d'un point matériel peut être réparti en deux mouvements distincts

- Un mouvement par rapport à un repère fixe $\Re(O, x, y, z)$ qu'on nommera repère Absolu
- Un mouvement par rapport à un repère mobile $\Re'(O', x', y', z')$ qu'on nommera repère relatif.

Toutes les grandeurs (position, vitesses et accélération) seront identifiées par rapport au repère approprié.

II.5.2 Grandeurs absolues et relatives

Soit un point matériel M en mouvement par rapport à un repère $\Re'(O', x', y', z')$ mobile, lui-même en mouvement par à un repère fixe $\Re(O, x, y, z)$ (Figure II.12).

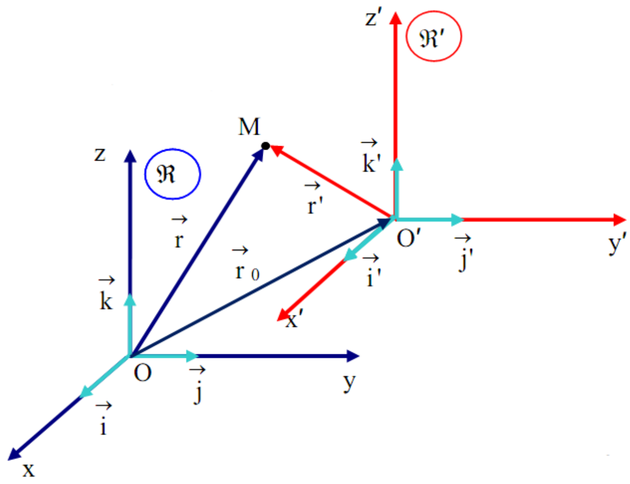


Figure II.12 : Représentation des grandeurs absolues et relatives

a- La position

La position de M dans $\Re$ est la position absolue et sa position dans $\Re'$ c'est sa position relative

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O'M}(t) = x'(t)\,\vec{\imath'} + y'(t)\,\vec{\jmath'} + z'(t)\,\vec{k'}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

b- Vitesse

La vitesse absolue est la vitesse de M par rapport à $\Re$

$$\vec{v}_a = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\,\vec{\imath} + \dot{y}(t)\,\vec{\jmath} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$$

La vitesse relative est la vitesse de M par rapport à $\Re'$

$$\vec{v}_r = \frac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$
$$= \dot{x}'(t)\,\vec{\imath'} + \dot{y}'(t)\,\vec{\jmath'} + \dot{z}'(t)\,\vec{k'}$$

c- Accélération

L'accélération absolue c'est l'accélération du point M dans le repère $\Re$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\dot{x}(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\dot{y}(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\dot{z}(t)}{dt}\vec{k} = \ddot{x}(t)\,\vec{\imath} + \ddot{y}(t)\,\vec{\jmath} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}$$

L'accélération relative est l'accélération du point M par rapport à $\Re'$

$$\vec{a}_r = \frac{d\,\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\dot{x}'(t)}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d\dot{y}'(t)}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d\dot{z}'(t)}{dt}\overrightarrow{k'} = \ddot{x}'(t)\,\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}'(t)\,\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}'(t)\,\overrightarrow{k'}$$

Note :

Les dérivations sont effectuées dans $\Re$ et $\Re'$ dans lequel la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $(\overrightarrow{\imath'},\overrightarrow{\jmath'},\overrightarrow{k'})$, respectivement est invariable.

II.5.3 Composition des vecteurs vitesses

Le vecteur vitesse absolue peut être calculée d'une autre façon (Figure II.12) :

Ona :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

D'où :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

Donc :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'(t)\,\overrightarrow{\imath'} + y'(t)\,\overrightarrow{\jmath'} + z'(t)\,\overrightarrow{k'}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{dx'(t)}{dt}\overrightarrow{\imath'} + x'(t)\frac{d\,\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{dy'(t)}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + y'(t)\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'(t)}{dt}\overrightarrow{k'} + z'(t)\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

On pose :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(t)\frac{d\,\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'(t)\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'(t)\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}$$

$$\vec{v}_r = \frac{dx'(t)}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy'(t)}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'(t)}{dt}\overrightarrow{k'}$$

D'où **:**

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$\vec{v}_r$: c'est la vitesse relative c'est-à-dire la vitesse du mobile M par rapport à $\mathfrak{R}'$

$\vec{v}_e$: représente la vitesse d'entrainement c'est-à-dire la vitesse du repère $\mathfrak{R}'$ par rapport au repère $\mathfrak{R}$.

Deux cas de mouvement de $\mathfrak{R}'$ peuvent être, en translation et en rotation, la vitesse absolue et relative garde la même expression par contre la vitesse d'entrainement se met différemment.

- Cas de Translation

$\mathfrak{R}'$ en translation par rapport à $\mathfrak{R}$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

Les vecteurs unitaires du repère $\mathfrak{R}'$ ne changent pas ils gardent le même sens et même direction de ce fait leurs dérivés par rapport aux temps sont nulles. Il y a que l'origine O' qui varie dans le temps.

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{\imath'}\ , \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{\jmath'}\ , \qquad \vec{k} = \overrightarrow{k'}$$

- Cas de rotation

On sait que n'importe quel vecteur en rotation par rapport à l'axe perpendiculaire sa dérivé dans le temps est :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

donc:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\vec{\imath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath'} \\ \dfrac{d\,\vec{\jmath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'} \\ \dfrac{d\,\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'} \end{cases}$$

Alors :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(t)\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\imath'}\right) + y'(t)\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\jmath'}\right) + z'(t)\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\vec{\omega} \wedge x'(t)\vec{\imath'}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge y'(t)\vec{\jmath'}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge z'(t)\vec{k'}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \left(x'(t)\vec{\imath'} + y'(t)\vec{\jmath'} + z'(t)\vec{k'}\right)$$

On a :

$$\overrightarrow{O'M}(t) = \vec{r'} = x'(t)\,\vec{\imath'} + y'(t)\,\vec{\jmath'} + z'(t)\,\vec{k'}$$

D'où :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)$$

II.5.4 Composition des vecteurs vitesses

L'accélération absolue c'est l'accélération du point M dans le repère $\Re$:

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_a = &\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'(t)\frac{d^2\vec{\imath'}}{dt^2} + y'(t)\frac{d^2\vec{\jmath'}}{dt^2} + z'(t)\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2} \\ &+ \left(\frac{d^2\,x'(t)}{dt^2}\vec{\imath'} + \frac{d^2\,y'(t)}{dt^2}\vec{\jmath'} + \frac{d^2z'(t)}{dt^2}\vec{k'}\right) \\ &+ 2\left(\frac{dx'(t)}{dt}\frac{d\,\vec{\imath'}}{dt} + \frac{dy'(t)}{dt}\frac{d\vec{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'(t)}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

L'accélération absolue est la somme de trois accélérations :

- L'accélération relative

$$\vec{a}_r = \frac{d^2\, x'(t)}{dt^2}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d^2\, y'(t)}{dt^2}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d^2 z'(t)}{dt^2}\overrightarrow{k'}$$

- L'accélération d'entrainement

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'(t)\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} + y'(t)\frac{d^2\overrightarrow{\jmath'}}{dt^2} + z'(t)\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$$

- et l'accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'(t)}{dt}\frac{d\,\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \frac{d\,y'(t)}{dt}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \frac{dz'(t)}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

✓ **Cas de translation**

On a :

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{\imath'} = cte\,, \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{\jmath'} = cte\,, \qquad \vec{k} = \overrightarrow{k'} = cte$$

D'où :

$$\begin{cases} \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \\ \quad et \\ \vec{a}_e = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \end{cases}$$

✓ **Cas de rotation**

On a :

$$\frac{d\,\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\imath'}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{\imath'}}{dt^2} = \left(\frac{\overrightarrow{dw}}{dt} \wedge \overrightarrow{\imath'}\right) + \vec{w} \wedge \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt}$$

D'où :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[x'(t)\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{\imath'} + y'(t)\frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{\jmath'} + z'(t)\frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{k'}\right] + \left[x'(t)\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + y'(t)\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + z'(t)\vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge x'(t)\overrightarrow{\imath'} + \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge y'(t)\overrightarrow{\jmath'} + \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge z'(t)\overrightarrow{k'}\right] + \left[x'(t)\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\imath'}\right) + y'(t)\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\jmath'}\right) + z'(t)\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{k'}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \left(x'(t)\overrightarrow{\imath'} + y'(t)\overrightarrow{\jmath'} + z'(t)\overrightarrow{k'}\right)\right] + \left[\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge x'(t)\overrightarrow{\imath'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge y'(t)\overrightarrow{\jmath'}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge z'(t)\overrightarrow{k'}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \left(x'(t)\overrightarrow{\imath'} + y'(t)\overrightarrow{\jmath'} + z'(t)\overrightarrow{k'}\right)\right] + \left[\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \left(x'(t)\overrightarrow{\imath'} + y'(t)\overrightarrow{\jmath'} + z'(t)\overrightarrow{k'}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)\right] + \left[\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}(t)\right)\right]$$

De même :

$$\vec{a}_c = 2\left(\frac{dx'(t)}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\imath'}\right) + \frac{d\,y'(t)}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\jmath'}\right) + \frac{dz'(t)}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{k'}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_c = 2\left(\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'(t)}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{d\,y'(t)}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz'(t)}{dt}\overrightarrow{k'}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r)$$

<u>Exercices</u>

<u>Exercice 1</u> :

Un point matériel se déplace dans le plan (xoy) suivant les équations horaires suivantes :

$$x(t) = t \quad et \quad y(t) = t^2$$

1. donner l'équation de mouvement du mobile
2. calculer la vitesse ainsi que l'accélération du pt M.

Solution

1. l'équation de mouvement du mobile est :

$$y(t) = x^2$$

2. la vitesse est $\vec{v} = \vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}$, sans accélération et $\vec{a} = 2\,\vec{\jmath}$

Exercice 2:

L'accélération d'un point matériel M est donnée par la relation suivante :

$$\vec{a} = e^t\vec{\imath} + coswt\,\vec{\jmath} + t^2\vec{k}$$

A $t = 0s$ la position et la vitesse du mobile sont (1 ; (-1/w²) ;0) et (1 ;0 ;-1) respectivement.

Donner les expressions des vecteurs vitesses et position du mobile à l'instant *t*.

Solution

Pour trouver la vitesse il suffit d'intégrer l'accélération même chose pour la position c'est

d'intégrer la vitesse :

$$\frac{dv_x}{dt} = e^t \Rightarrow v_x = \int e^t\,dt = e^t + C_x$$

A $t = 0,\ v_x = 1$ donc $C_x = 0$ d'ou $v_x = e^t$

$$\frac{dv_y}{dt} = coswt \Rightarrow v_y = \int coswt\,dt = \frac{1}{w}sinwt + C_y$$

A $t = 0,\ v_y = 0$ donc $C_y = 0$ d'ou $v_y = \frac{1}{w}sinwt$

$$\frac{dv_z}{dt} = t^2 \Rightarrow v_z = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + C_z$$

A $t=0,\ v_y=-1$ donc $C_z=-1$ d'ou $v_z=\frac{1}{3}t^3-1$ donc

La vitesse s'écrit : $\vec{v}=e^t\vec{\imath}+\frac{1}{w}sinwt\,\vec{\jmath}+\left(\frac{1}{3}t^3-1\right)\vec{k}$

Pour trouver le vecteur position il suffit d'intégrer la vitesse :

$$\frac{dx}{dt}=e^t \Rightarrow x=\int e^t\,dt=e^t+\grave{C}_x$$

A $t=0,\ x=1$ donc $\grave{C}_x=0$ d'ou $x=e^t$

$$\frac{dy}{dt}=coswt \Rightarrow y=\int\frac{1}{w}sinwtdt=-\frac{1}{w^2}coswt+\grave{C}_y$$

A $t=0,\ y=-\frac{1}{w^2}$ donc $\grave{C}_y=0$ d'où $y=-\frac{1}{w^2}coswt$

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{1}{3}t^3-1\right)\Rightarrow z=\int\left(\frac{1}{3}t^3-1\right)dt=\left(\frac{1}{12}t^4-t\right)+\grave{C}_z$$

A $t=0,\ z=0$ donc $\grave{C}_y=0$ d'ou $z=\frac{1}{12}t^4-t$ donc

$$\overrightarrow{OM}=e^t\vec{\imath}-\frac{1}{w^2}coswt\,\vec{\jmath}+\left(\frac{1}{12}t^4-t\right)\vec{k}$$

<u>Exercice 3</u>:

Un point matériel se déplace sur une ligne droite suivant l'équation horaire suivante :

$$x(t)=-6t^2+16t \quad \text{(t en seconde)}$$

1. Quelle est la position de ce corps à $t=1s$
2. A quelle instant t, il passe par la position O(origine)
3. Quelle est la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre 0s et 2 s
4. Quelle est l'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris $t_0<t<\Delta t+t_0$
5. Donner l'expression de la vitesse instantanée, déduire sa valeur à t=0s
6. Quelle est l'expression de l'accélération moyenne durant le temps 0s et 2 s
7. Donner l'expression de l'accélération instantanée.

<u>Solution</u>

1. a $t=1s \Rightarrow \mathrm{x}(1)=10$

2. $x = 0 \Rightarrow -6t^2 + 16t = 0$, il passe par l'origine à $t = 0s$ et $t = \frac{8}{3} = 2.7s$

3. $v_{moy} = \frac{x(t=2)-x(t=0)}{2-0} = 4ms^{-1}$

4. $v_{moy} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = 16 - 12t_0 - 6\Delta t$

5. la vitesse instantanée est :

   $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = 16 - 12t$, donc à $t = 0s \Rightarrow v(0) = 16ms^{-1}$

6. l'expression de l'accélération moyenne durant le temps 0s et 2 s est

   $$a_{moy} = \frac{v(t=2) - v(t=0)}{2-0} = -12ms^{-2}$$

7. $a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{moy} = -12$

<u>Exercice 4</u>:

Un point matériel M décrit la courbe d'équation polaire

$r cos^2(\theta/2) = a$, ou a est une constante

1. Montrer que la trajectoire de , est une parabole.
2. On suppose de plus que le module du vecteur vitesse est toujours proportionnel à r:

$v = kr$, ou k est une constante positive.

3. Calculer, en fonction de θ, les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse

de M

4. Déterminer la loi du mouvement $\theta(t)$ en supposant que θ est nul à l'instant $t = 0$

Solution

1. Sachant que $cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + cos\theta)$

D'où l'équation polaire s'écrit : $r = 2a - rcos\theta$ avec $x = rcos\theta$ et $y = rsin\theta$

On aura l'équation $x = \frac{-y^2+4a^2}{4a}$ c'est l'équation d'une parabole

2. $\dot{r} = a\frac{sin\frac{\theta}{2}}{cos^3\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}$, $r\dot{\theta} = a\frac{1}{cos^2\frac{\theta}{2}}\dot{\theta}$ donc $v = \sqrt{\dot{r} + r\dot{\theta}} = \frac{a\dot{\theta}}{cos^3\frac{\theta}{2}}$

Exercice 5:

soit un repère mobile $\Re'(O', x', y', z')$ en mouvement par rapport à un autre fixe $\Re(O, x, y, z)$ avec une vitesse $\vec{v}_e(1{,}0{,}0)$. On suppose que x', y', z' sont les coordonnés d'un point matériel M dans le repère R' tel que :

$x' = 6t^2 + 3t;\ \ y' = -3t^2\ \ et\ \ z' = 3$

on suppose qu'à l'instant $t = 0$ ce point est a la position $O(0{,}0{,}0)$ dans le repère fixe $\Re$.

1. Donner la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue.
2. En déduire les coordonnés du point M dans le repère fixe $\Re$.
3. Déterminer l'expression de l'accélération relative et absolue.

Solution

1. On a : $\vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\dot{R}}$, $\vec{v}_e = \vec{\imath}'$

D'un autre coté : $\Re // \Re' \Rightarrow \vec{\imath} = \vec{\imath}', \vec{\jmath} = \vec{\jmath}', \vec{k} = \vec{k}'$, alors : $\vec{v}_a = (12t + 4)\,\vec{\imath} - 6t\,\vec{\jmath}$

2. $v_a^x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int(12t + 4)dt = 6t^2 + 4t + C_1$

$$v_a^y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = \int -6tdt = -3t^2 + C_2$$

$$v_a^z = \frac{dz}{dt} \Rightarrow z = \int 0dt = C_3$$

A $t = 0; x = y = z = 0$ d'où $C_1 = C_2 = C_3$

3. l'accélération relative est donnée par : $\vec{a}_r = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\dot{R}} = 12\,\vec{\imath}' - 6\,\vec{\jmath}'$,

l'accélération absolu s'écrit : $\vec{a}_a = 12\,\vec{\imath} - 6\,\vec{\jmath}$

Chapitre III : Dynamique du point

III.1 Définition

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent. Ce chapitre sera consacré à la dynamique, les relations qui existent entre un mouvement et les forces qui en sont la cause

La dynamique, plus précisément, est l'analyse de la relation entre la force appliquée et les changements du mouvement du corps.

III.1.1 Quantité de mouvement

Un mouvement ne dépend pas que de la vitesse mais aussi de sa masse, deux masses différentes qui se déplacent à la même vitesse n'arrivent pas de la même façon. Pour cela on introduit une grandeur mathématique qui est la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement par rapport au référentiel $\Re$ d'un point matériel , de masse *m* et de vitesse $\vec{v}$ est donnée par :

$\vec{p} = m\vec{v}$

III.1.2 Notion de forces

Schématiquement, une force est une cause de nature à modifier la vitesse d'un objet. Modifier la vitesse peut signifier lui communiquer une vitesse si cette dernière était initialement nulle, ou bien en faire varier soit la valeur, soit la direction, soit les deux à la fois. Quelle que soit leur nature, et quelle que soit la façon dont elles se manifestent (à distance ou au contact de deux corps), les forces (par exemple le poids d'un corps) sont des grandeurs vectorielle. Il faut donc, à chaque fois que l'on considère une force, rechercher :

- la droite d'action (la direction),
- le sens,
- le point d'application,
- l'intensité.

- La droite d'action

Si une force s'exerce, par exemple, par l'intermédiaire d'un fil tendu, la droite d'action de la force est celle que matérialise le fil. De même, si une force est transmise par une tige rigide, cette tige matérialise la droite d'action de la force.

- Le sens

Le sens d'une force est celui du mouvement qu'elle tend à produire ; si force et mouvement

sont dans le même sens la force est dite *motrice* ; dans le cas contraire, la force est dite résistante.

Par exemple, les forces de frottement sont des forces résistantes.

III.2 Loi fondamentale de la dynamique

III.2.1 Première loi de Newton Principe d'inertie

Les systèmes soumis à des forces extérieures dont la somme vectorielle est nulle sont appelés systèmes pseudo-isolés (ou isolés s'ils ne subissent aucune force – cas idéal).

Le centre d'inertie d'un système isolé est en mouvement rectiligne et uniforme ou au repos dans un référentiel galiléen.

De manière équivalente :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{v} = cte)$$

On appelle référentiel galiléen un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Un référentiel n'est donc pas galiléen s'il tourne, accélère ou freine par rapport à un référentiel galiléen.

III.2.2 Deuxième loi de Newton Principe fondamental de la dynamique (PFD)

On appelle force la grandeur vectorielle décrivant une interaction capable de produire un mouvement ou encore de créer une déformation.

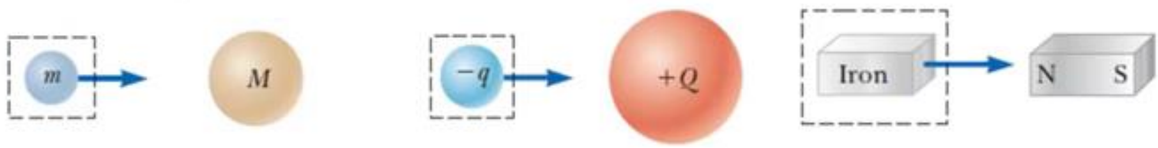
La force est représentée par un vecteur caractérisé par :

- son point d'application (le point matériel)
- sa direction
- son sens
- son intensité

Un point matériel est dit isolé s'il n'est soumis à aucune interaction mécanique avec l'extérieur. C'est le cas d'un corps seul dans l'espace loin de tout autre masse.

a- Forces à distance

Il arrive souvent que deux corps interagissent, bien qu'ils soient séparés par un espace.



Dans un référentiel Galiléen la somme vectorielle des forces extérieures qui s'exercent sur un point matériel est égale au produit du vecteur accélération et de la masse du point matériel :

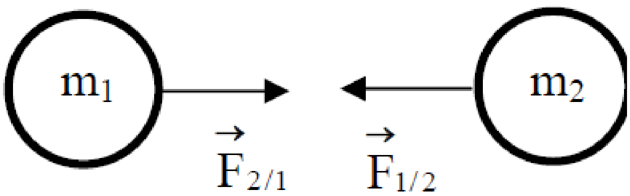
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

✓ Interaction de gravitation et poids

Deux corps 1 et 2, assimilables à des points, s'attirent mutuellement. L'attraction qu'ils exercent l'un sur l'autre est : Proportionnelle à leur masse m_1 et m_2. Inversement proportionnelle au carré de la distance d entre les deux points.

Les forces qui modélisent cette interaction mutuelle a les caractéristiques suivantes :

- Leur point d'application est tel que la force exercée par 1 sur 2 s'applique en 2 et la force exercée par 2 sur 2 s'applique en 1.
- Direction : droite 12
- Sens : vers le centre attracteur



- Valeur : $F_{1/2} = -F_{2/1} = G\ \frac{m_1.m_2}{d^2}$ et G est la constante universelle de la gravitation

  $(G = 6{,}67\ \times 10^{-11}\ N\ \cdot\ m^2.\ kg^{-2}\ )$

  $\vec{F} = G\ \frac{m_A.\, m_B}{d^2}\ \vec{u}$

✓ Interaction coulombienne, force électrostatique

Considérons deux charges électriques et ponctuelles q_1 et q_2, placé dans le vide. La charge q_1 exerce sur q_2 une force $\vec{F}$ qui peut être attractive ou répulsive suivant le signe du produit $q_1\ q_2$.

- Valeur : $F_{A/B} = F_{B/A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q_A \cdot q_B}{d^2} = k\ \frac{q_A \cdot q_B}{d^2}$ avec $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.\,10^9\ SI$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{q_A \cdot q_B}{d^2}\ \vec{u}$$

ε_0 est appelée permittivité du vide

✓ Force magnétique

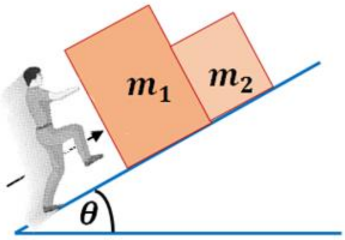
Une charge q qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur $\vec{B}$ subit une force magnétique appelée force de Lorentz $\vec{f_m}$ donnée par :

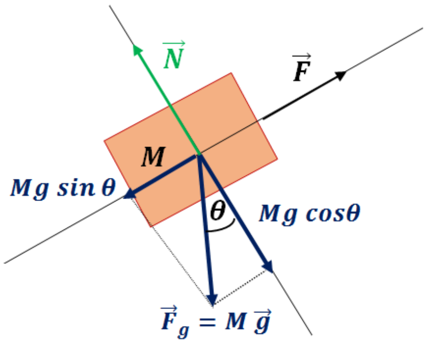
$\vec{f_m} = q\ \vec{v} \wedge\ \vec{B}$

b. Forces de contact

Elles apparaissent chaque fois que deux corps sont en contact.

Exemples





On a :

$M = m_1 + m_2$

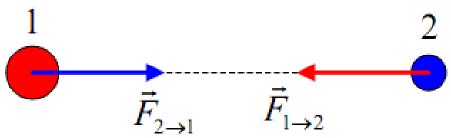
$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = M\,a_x \rightarrow F - Mg\sin\theta = M\,a_x \\ \sum F_y = M\,a_y = 0 \rightarrow N - Mg\cos\theta = 0 \rightarrow N = Mg\cos\theta \end{cases}$$

III.2.3 Troisième loi de Newton Principe de l'action et de la réaction

Contrairement aux deux premières lois de Newton, cette troisième loi ne relie pas le mouvement aux forces : elle concerne deux systèmes en interaction.

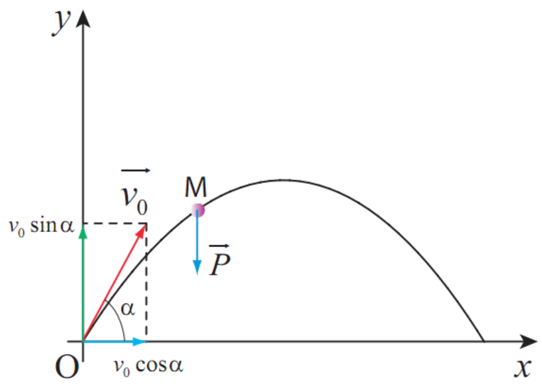
Si un objet (1) exerce une force, $\vec{F}_{1\rightarrow 2}$, sur un autre objet (2), ce dernier exerce en retour une force, $-\vec{F}_{2\rightarrow 1}$, d'intensité égale mais de sens opposée:

$$\vec{F}_{1\rightarrow 2} = -\vec{F}_{2\rightarrow 1}$$



III.2.4 Application de la relation fondamentale de la dynamique (RFD)

Prenant l'exemple d'un chute libre sans frottement, on tire un projectile M avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans le champ de pesanteur uniforme. M est en O à $t = 0$. le plan (xOy) est appelé plan de tir car il contient les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$.



Les coordonnées du vecteur vitesse initiale sont :

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\ \alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$$

Le projectile, en chute libre, ne subit que son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$; cette force est verticale, vers le bas et de valeur constante $\vec{a} = \vec{g}$

✓ **Vecteur vitesse instantanée**

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -g \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = 0 \end{cases} \quad \underline{intégrer} \begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = -g\ .\ t + C_2 \\ v_z(t) = C_3 \end{cases}$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes d'intégration, que l'on déterminer par exemple à l'aide des conditions initiales :

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = C_1 \\ v_y(0) = v_{0y} = v_0 \sin\ \alpha = -g\ .0 + C_2\ = C_2 \\ v_z(0) = v_{0z} = 0 = C_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -g\,.\,t + v_0 \sin\,\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

✓ **Vecteur position**

Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ s'obtiennent par intégration sur le temps :

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{cases} \xrightarrow{intégrer} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\,.\,t + C_4 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g\,.\,t^2 + v_0 \sin\,\alpha\,.\,t + C_5 \\ z(t) = C_6 \end{cases}$$

C_4, C_5 et C_6 sont des constantes d'intégration que l'on peut déterminer à l'aide des conditions initiales : si M est initialement à l'origine O, alors $C_4 = C_5 = C_6 = 0$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\,.\,t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g\,.\,t^2 + v_0 \sin\,\alpha\,.\,t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

✓ **Equation cartésienne de la trajectoire**

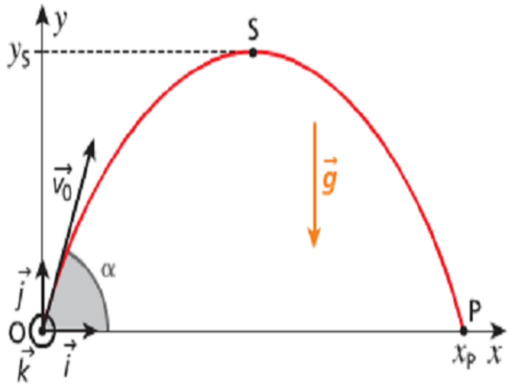
L'équation horaire $x(t) = v_0 \cos\alpha\,.\,t$ permet d'exprimer le temps $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$

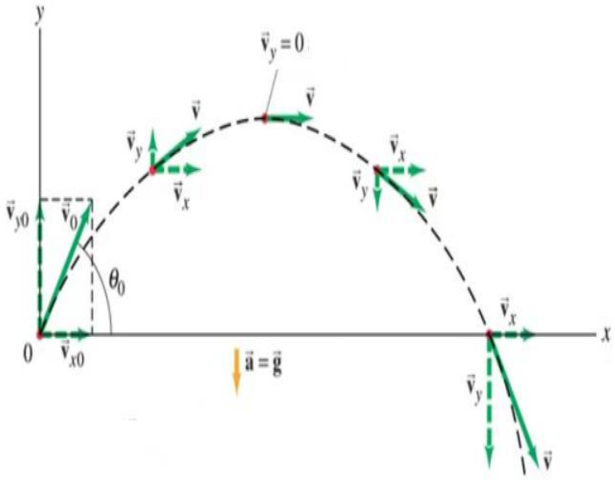
$$y = -\frac{1}{2} g\,.\,\frac{x^2}{{v_0}^2 \cos\alpha^2} + v_0 \sin\,\alpha\,.\,\frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2} g\,.\,\frac{x^2}{{v_0}^2 \cos\alpha^2} + x \tan\,\alpha$$

$$y = -\,\frac{g}{2\,{v_0}^2 \cos\alpha^2} x^2 + x \tan\,\alpha$$

On retrouve une équation de trajectoire parabolique, dans le plan de tir, incurvée (ouverte) vers le bas.





✓ **Caractéristiques de la trajectoire**

Au sommet de la trajectoire, la composante verticale de la vitesse s'annule : $v_y(t_s) = 0$.

D'après l'équation horaire de cette grandeur, le sommet est atteint à la date

$$v_y(t_s) = 0 \Rightarrow -g \, . t_s + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g \,.\frac{{v_0}^2 \sin \alpha^2}{g^2} + v_0 \sin \alpha \,.\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} \,.\frac{{v_0}^2 \sin \alpha^2}{g} + \frac{{v_0}^2 \sin \alpha^2}{g}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \,.\frac{{v_0}^2 \sin \alpha^2}{g}$$

D'un autre coté, La portée est l'abscisse x_P du point P pour lequel l'altitude est nulle : c'est la distance totale au sol parcourue par l'objet.

$$y(x_P) = -\frac{1}{2} g \,.\frac{{x_P}^2}{{v_0}^2 \cos \alpha^2} + x_P \tan \alpha = 0$$

$$\Rightarrow y(x_P) = \left(-\frac{1}{2} g \,.\frac{x_P}{{v_0}^2 \cos \alpha^2} + \tan \alpha\right) x_P = 0$$

$x_P = 0$ (point de lancer)

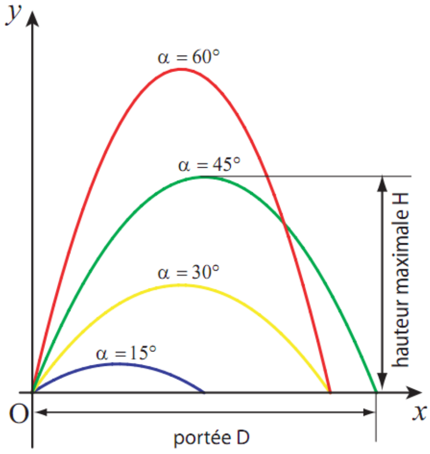
$$-\frac{1}{2} g \,.\frac{x_P}{{v_0}^2 \cos \alpha^2} + \tan \alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} g \,.\frac{x_P}{{v_0}^2 \cos \alpha^2} = \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{g\ x_P}{2\ {v_0}^2 \cos \alpha^2} = \tan \alpha$$

$$\Rightarrow x_P = \frac{2\ {v_0}^2 \cos \alpha^2 \tan \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow x_P \frac{2\ {v_0}^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$$

$$\Rightarrow x_P = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$$



La portée croît avec $v_0{}^2$; elle est maximale, pour vo donné, lorsque $\alpha = 45°$

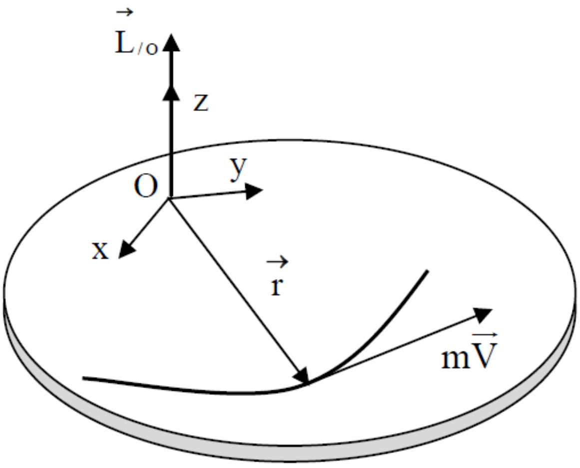
III.3 Moment cinétique

Soit une particule de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$ en rotation par rapport à un point O. Le moment cinétique de m par rapport à O est:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \vec{L} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$



III.3.1 Théorème du moment cinétique

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

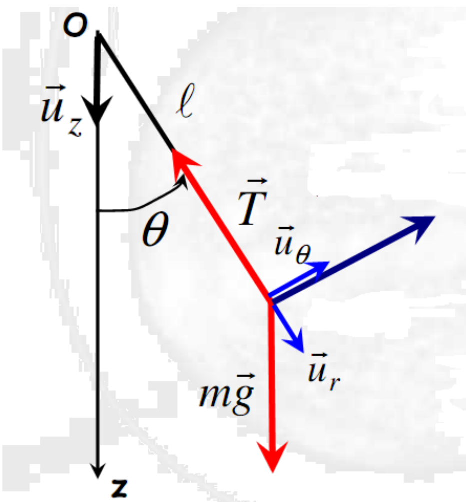
$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

La dérivée du moment cinétique d'une particule, par rapport au temps est égale au moment de la force qui lui est appliquée au même point.

III.3.2 Etude du pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une masse m assimilée à un point matériel M et d'un fil sans masse inextensible de longueur l.

En l'absence de frottements



On a : $\begin{cases} \vec{v} = l\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \\ \vec{r} = \vec{l} \\ \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} \\ \vec{l} \parallel \vec{T} \\ \vec{P} = m\overrightarrow{g} \end{cases}$

Le moment cinétique devient :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{F} = \vec{l} \wedge (\vec{P} + \vec{T}) \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{P} + \vec{l} \wedge \vec{T}$$

D'où :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \|\vec{l}\| \, \|\vec{T}\| \sin 0 + \vec{l} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = l \, \vec{u}_r \wedge (mg \cos \theta \, \vec{u}_r - mg \sin \theta \, \vec{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = l \, mg \cos\theta (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_r) - l \, mg \sin\theta (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -l \, mg \sin \theta \, \vec{u}_z$$

On a :

$$\begin{cases} \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \\ \vec{p} = m\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{L} = m \, \vec{r} \wedge \vec{v} \\ \vec{l} = l \, \vec{u}_r \\ \vec{v} = l \, \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m \, l \, \vec{u}_r \wedge l \, \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta = m \, l^2 \dot{\theta} \, (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$$

De plus :

$$\begin{cases} \vec{L} = m \, l^2 \dot{\theta} \, (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \\ \vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{L} = m \, l^2 \dot{\theta} \, \vec{u}_z$$

D'un autre coté :

$$\vec{L} = m \, l^2 \dot{\theta} \, \vec{u}_z \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(m \, l^2 \dot{\theta} \, \vec{u}_z)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m \, l^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m \, l^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z$$

D'autre part :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}}{dt} = -l\, mg \sin\theta\, \vec{u}_z \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = m\, l^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow -l\, mg \sin\theta\, \vec{u}_z = m\, l^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

En présence de frottements fluides

On a :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{frott}$$

Et :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \left(\vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{frott}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{P} + \vec{l} \wedge \vec{T} + \vec{l} \wedge \vec{f}_{frott}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \wedge \vec{P} + \vec{l} \wedge \vec{f}_{frott}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -l\, mg \sin\theta\, \vec{u}_z + \vec{l} \wedge \vec{f}_{frott}$$

D’un autre côté, nous avons :

$$\vec{f}_{frott} = -h\, m\, \vec{v} = -h\, m\, \vec{v}$$

Donc :

$$\vec{l} \wedge \vec{f}_{frott} = l\, \vec{u}_r \wedge \left(-h\, m\, l\, \dot{\theta}\, \vec{u}_\theta\right)$$

$$\Rightarrow \vec{l} \wedge \vec{f}_{frott} = -h\, m \dot{\theta}\, l^2\, (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{l} \wedge \vec{f}_{frott} = -h\, m \dot{\theta}\, l^2\, \vec{u}_z$$

D’où :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -l\, mg \sin\theta\, \vec{u}_z - h\, m \dot{\theta}\, l^2\, \vec{u}_z$$

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}}{dt} = -l\, mg\, sin\, \theta\, \vec{u}_z - h\, m\dot{\theta}\, l^2\, \vec{u}_z \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = m\, l^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow -\, l\, mg\, sin\, \theta\, \vec{u}_z - h\, m\dot{\theta}\, l^2\, \vec{u}_z = m\, l^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{l}\, sin\, \theta = 0$$

Chapitre IV: Travail et énergie

IV.1 Le travail d'une force

Définition

Le travail d'une force mesure l'effort a faire pour déplacer un objet le long d'un trajet qui peut-être horizontal ou pas, rectiligne ou pas. Un travail peut être positif auquel cas, on parlera de travail moteur, car un moteur peut très bien effectuer cet effort de déplacement. A l'opposé, un travail peut être négatif, on parle de travail résistant car il s'oppose au déplacement, c'est le cas des forces de frottements.

- Cas d'une force constante et d'un déplacement rectiligne. Un point matériel, soumis à une force $\vec{F}$ constante en module et en direction, se meut d'un point $\vec{r}_1$ à un point $\vec{r}_2$. Son déplacement est donc :

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Durant ce déplacement, la force $\vec{F}$ exerce un travail

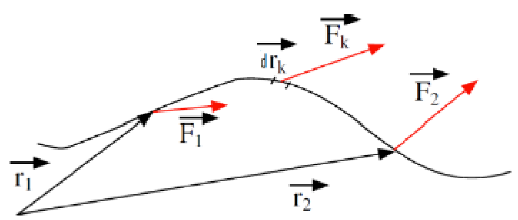
$$w_{12} = \vec{F}.\overrightarrow{\Delta r} = |\vec{F}||\overrightarrow{\Delta r}|cos\alpha$$

Ce travail peur être positif, négatif ou nul, ça dépend du signe de cos α :

- $\cos\alpha > 0$ c'est un travail moteur.
- $\cos\alpha < 0$ travail résistant
- $\cos\alpha = 0$ travail nul

IV.2 Travail élémentaire

Dans le cas ou la force $\vec{F}$ est variable et un déplacement quelconque. On calcul le travail de cette force pour un déplacement infinitésimale $\overrightarrow{dr}$ rectiligne, on parle du travail élémentaire dw défini par :



$$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

IV.2 Travail effectué par une force constante

Une force est vectoriellement constante si ses trois caractéristiques (direction, sens et valeur) sont constantes.

Considérons le déplacement du point d'application d'une force d'un point A à un point B (un déplacement rectiligne).

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ est égal à : $w_{A\to B} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

$w_{A\to B} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\| \cos\theta$

- $w_{A\to B}$ s'exprime en joules (J)
- F en newtons (N)
- AB en mètres (m)
- θ est l'angle entre le vecteur force $\vec{F}$ et la direction du déplacement du point d'application de $\vec{F}$.
- Si $W(\vec{F}) > 0$ on dit que le travail est moteur $w = +F\,AB$, $90° > \theta > 0°$
- Si $W(\vec{F}) < 0$ on dit que le travail est résistant $w = -F\,AB$, $180° > \theta > 90°$
- $w = 0$ La force $\vec{F}$ reste orthogonale au déplacement de son point d'application $\theta = 90°$;$w = 0 \Rightarrow d = 0$
- Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin suivi, alors :

$$\begin{cases} w = F\,AB\cos\theta \\ \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow w = F\,AB$$

- Si la force fait un angle avec le déplacement, il faut en tenir compte

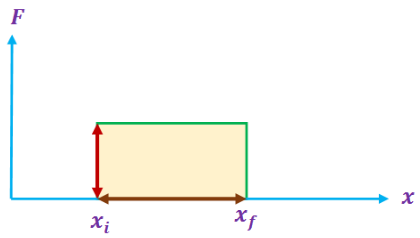
$$w = F\,AB\cos\theta = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

IV.3 Travail effectué par une force variable

- **Force constante**

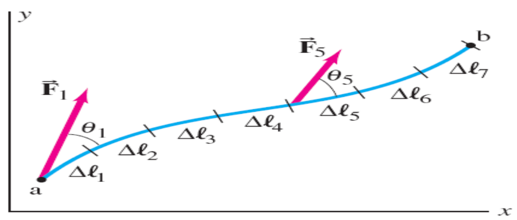
$$W = F\,\Delta x$$

$$S = F.(x_f - x_i)$$



Force variable

Si le déplacement n'est pas rectiligne et si la force n'est pas constante, on décompose le trajet du point d'application en sections infiniment petites sur lesquelles on peut considérer la force $\vec{F}$ constante et le vecteur déplacement $d\vec{l}$ rectiligne.

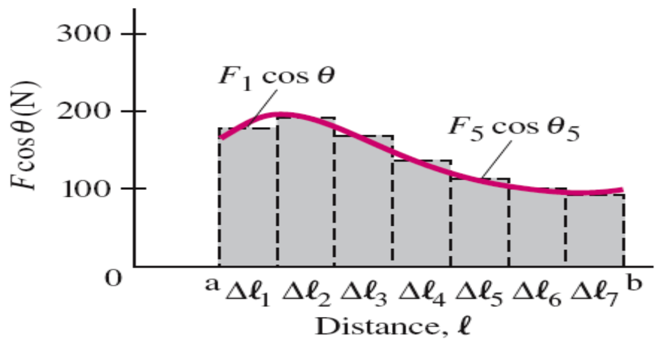


Lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ du point d'application d'une force $\vec{F}$, le travail élémentaire

$$\Delta W_i = F_i \cos\theta_i \, \Delta l_i$$

Travail total

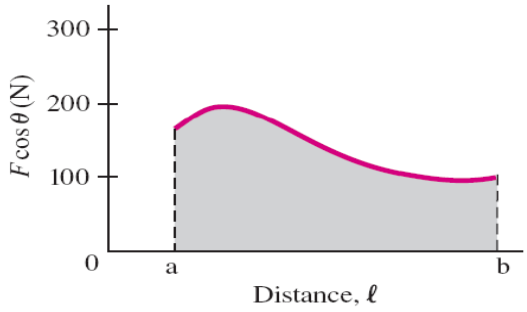
$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \rightarrow \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\theta_i \, \Delta l_i$$



$$W = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\theta_i \Delta l_i$$

$$W = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum F_i \cos\theta_i \Delta l_i = \int_a^b F \cos\theta \, dl$$

Pour trouver le travail total de a à b, on fait la somme de tous les travaux élémentaires. Comme il y a une infinité de déplacements élémentaires pour aller de a à b, la somme de ces travaux n'est pas une somme discrète ($\sum dW$) mais une somme continue : il s'agit d'une somme au sens intégrale ($\int dW$)



$$W = \int_a^b \vec{F}.d\vec{l}$$

IV.4 Puissance d'une force

La puissance d'une force, que nous noterons $\mathcal{P}$, est le quotient du travail fourni sur la durée lorsque cette durée tend vers 0

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}$$

$$w = \int_A^B dW = \int_0^t \mathcal{P}\, dt$$

Dans le cas particulier où la puissance est constante

$$w = \int_A^B dW = \mathcal{P} \int_0^t dt = \mathcal{P}\, t$$

Dans le S I d'unités , la puissance s'exprime en Watt (W)

IV.5 Energie

L'énergie est la capacité d'un corps à fournir du travail en raison de

- sa position (énergie potentielle, E_p),
- sa vitesse (énergie cinétique, E_c).

C’est aussi le travail fourni pour

- le ramener de la position qu’il occupe à une position de référence (E_p),
- l’amener du repos à la vitesse qu’il possède (E_c).

IV.5.1 Théorème de l’énergie cinétique

mouvement rectiligne uniformément accéléré

$$V_2^2 = V_1^2 + 2\,a\,d \Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2\,a\,d$$

$$\Rightarrow a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2\,d}$$

$$\begin{cases} F = m\,a \\ a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d} \end{cases} \Rightarrow F = m\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d}$$

$$W = F\,d = m\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\,d}\,d = m\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m\,v_2^2 - \frac{1}{2} m\,v_1^2$$

$$\Rightarrow W = E_c(2) - E_c(1)$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m\,v^2$$

D’où :

$$W = \Delta E_c$$

Le PFD appliqué au point matériel dans le référentiel $(\Re)$ supposé galiléen donne :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On multiplie scalairement cette équation par le vecteur vitesse :

$$\vec{F}.\vec{v} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right).\vec{v} = m\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{dE_c}{dt}$$

$$dE_c = \vec{F}.\vec{v}\,dt$$

$$E_c = \frac{1}{2} m\vec{v}^2$$

- Une analyse dimensionnelle donne $[E_c] = ML^2T^{-2}$ ce qui correspond à la dimension d'un travail.
- L'énergie cinétique est toujours positive

IV.5.2 Energie potentielle

$$\vec{v} = constante \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \Delta E_c = 0$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{p} = \vec{0}$$

$$F - mg = 0 \Rightarrow F = mg$$

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F\ AB\ \cos 0 = F\ AB = F\ h$$

$$W = F\ h = E_p$$

IV.5.3 Forces conservatives: Energie potentielle

Une force est dite conservative si son travail entre deux point M_1 et M_2 dépend uniquement de la position de départ et de la position d'arrivée. Autrement dit, le travail est indépendant du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2.

Si une force $\vec{F}$ est conservative, alors elle dérive d'une énergie potentielle E_p. Donc cette force peut s'écrire:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ E_p$$

Pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative, il faut que : $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

IV.5.4 Travail d'une force conservative

On dit qu'une force $\vec{F}$ est conservative si son travail élémentaire peut s'écrire comme une différentielle, c'est-à-dire s'il existe une fonction E_p telle que

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{OM}$$

$$dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

Cette force est conservative, elle peut donc s'écrire

$$\begin{cases} \vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p \\ \overrightarrow{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} + F_z\,\vec{k} \\ \vec{F} = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \dfrac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

$$dW = \vec{F}.\,d\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right).\left(dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow dW = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\,dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = -dE_p$$

D’où :

$$dW = -dE_p$$

Le travail d'une force conservative pour déplacer un point matériel est égal à la diminution de son énergie potentielle.

IV.5.5 Travail élémentaire d’une force

$$dE_c = \vec{F}.\vec{v}\,dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \rightarrow d\overrightarrow{OM} = \vec{v}\,dt$$

$$dW = \vec{F}.\vec{v}\,dt = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

<u>Exercice</u> :

Soit la force $\vec{F} = 2xz\,\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + (ax^2 + by^2 + cy^2)\vec{k}$

1. Trouver les constantes a,b et c pour que $\vec{F}$ soit conservatrice , sachant qu'au point $(1,1,1)$ la force $\vec{F} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$

2.Déduire le potentiel $E_P(x, y, z)$

solution

a)

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (2xz) & (yz) & (ax^2 + by^2 + cz^2) \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = (2by - y)\vec{i} - (2ax - 2x)\vec{j} = \vec{0} \qquad (*)$$

et $\vec{F}(1,1,1) = 2\vec{i} + \vec{j} + (a+b+c)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ (**)

de éq (*) on aura 2by-y=0 donc b=1/2, 2ax-2x=0 donc x=1

et de l'éq (**) on aura a+b+c=-3 donc c=-9/2

$\vec{F} = 2xz\vec{i} + yz\vec{j} + (x^2 + (1/2)y^2 - (9/2)z^2)\vec{k}$

b)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p(x,y,z) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -(2xz) \quad (1) \qquad \text{et} \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = -(yz) \quad (2) \qquad \frac{\partial E_p}{\partial z} = -(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2) \quad (3)$$

De l'éq (1) $E_p = -\int (2xz)dx = -2zx^2 + C(y,z)$

De l'éq (2) $\dfrac{\partial E_p}{\partial y} = \dfrac{\partial C(y,z)}{\partial y} = -(yz) \Rightarrow C(y,z) = -\dfrac{y^2 z}{2} + D(z)$

En remplaçant l'expression de C(y,z) dans E_p et en utilisant l'équation (3). On aura

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = -2x^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{\partial D(z)}{\partial z} = -(x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{2}z^2) \Rightarrow D(z) = \int (x^2 - \frac{9}{2}z^2)dz = x^2 z - \frac{9}{4}z^3 + C$$

Références

[1] Cours de physique Mécanique du point, licence 1ére et 2éme années. Alain Gibaud, Michel Henry.

[2] P. Benoist-Gueutal et M. Courbage, mathématique pour la physique, tome 1, 2, 3, édition Eyrolles, Paris (1992).

[3] Michel Henri et Nicolas Delorme Mini manuel de mécanique du point, édition Dunod (2008).

[4] Sylvie Pommier et Yves Berthaud, Mécanique Générale, édition DUNOD (2010).

[5] Horst Stocker, Francis Jundt et Georges Guillaume, Toute la physique, édition Dunod (1999).

[6] http://cours-examens.org/index.php/etudes-superieures/tronc-commun-technologie.

[7] TRAN Minh Tâm , physique générale, polycopié , http://lphe.epfl.ch/~mtran/

[8] A. CHAFA, A.DIB , F.CHAFA, MEKIDECHE, A.DERBOUZ, FKAOUAH, Polycopié d'examens de mécanique du point, , USTHB, www.usthb.dz/fphy/IMG/pdf/examens.pdf .

[8] Alonso M. et Finn E. , Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique, Dunod, (2004).

[9] Feynman R., Le cours de physique de Feynman, 5 volumes, Dunod, (2013).

[10] Stocker H., Jundt F. et Guillaume G., Toute la physique, Dunod, (2007).

[11] Mécanique du point, physique LMD, Alain Thionnet.

[12] Mécanique du point matériel, Ahmed Fizazi .

[13] Cours physique 1, Hamouda Messaoud .